अध्याय-9

बीज गणित का परिचय
(Introduction to Algebra)

9.1 परिचय

अब तक हमने अंक गणित और रेखा गणित में अंकों और विभिन्न आकारों का ही अध्ययन किया है। अब हम गणित की एक और शाखा बीज गणित के बारे में अध्ययन करेंगे।

बीज गणित का मुख्य लक्षण है कि अंक वर्णमाला के अक्षरों का प्रतिनिधित्व करते हैं। अक्षर कोई भी संख्या का प्रतिनिधित्व कर सकता है, कोई अमुक संख्या ही नहीं । अक्षर से कोई अपरिचित परिणामों को भी सूचित किया जाता है। अपरिचित परिणामों को सिद्ध करने की विधि या पद्धति को सीखकर हम अपने दैनिक जीवन में आने वाली कई समस्याओं और पहेलियों को भी हल कर सकते है।

निम्न पर विचार करो।

दामिनि और कौशिक एक खेल खेल रहे हैं।

कौशिक : अगर आप मेरे समझाए अनुसार परिणाम दोगी, तो मैं तुम्हारी आयु बता दूंगा।

दामिनि : आपको मेरी आयु पता होगी, तो नया क्या है।

कौशिक : ठीक है, कोई अपरिचित व्यक्ति की आयु लो, मुझे उसकी आयु मत बताइए, फिर भी मैं उसकी आयु बता दूंगा।

दामिनि : ठीक है, आपके क्या निर्देश है। मैं देखूंगी कि आप केसे हल करोगे।

कौशिक : पहले आप आयु को दुगना कीजिए ?

दामिनि : कर लिया।

कौशिक : उस उत्तर में 5 जोड़िये और अंतिम परिणाम बताईए।

दामिनि : ठीक है उत्तर है 27।

कौशिक : अच्छा ! आपके मित्र की आयु 11 वर्ष है।

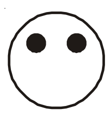
दामिनि आश्चर्यचकित थी, कुछ समय सोंच कर कहती है 'मैं जानती हूं आपने किस तरह आयु ज्ञात किया।'

आप जानना चाहोगे कि कैसे किया ? आप भी प्रयत्न कर सकते हो।

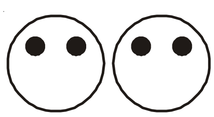
9.2 विधियाँ- नियम बनाने की विधियाँ (Patterns)

9.2.1 विधि-1

निम्न चित्रों में बताए अनुसार प्रवीण और मौलिका मानव के मुख बना रहे थे। वे नेत्र के लिए काले बिंदुओं का उपयोग कर रहे थे। मौलिका दो बिंदुओं से मानव मुख चित्र में बताए अनुसार बनाई।

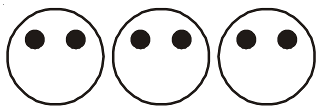


प्रवीण भी दो बिंदुओं से मानव मुख बनाकर मौलिका के चित्र के पास ही रख दिया।

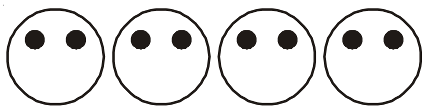


SCERT TELANGANA

फिर मौलिका एक और बिंदु जोड़ दी



और प्रवीण ने भी



तुरंत बाद उनका मित्र रहीम भी उनमें मिल गया। वह उनसे पूछने लगा 'ऐसे 8 आकार बनाने के लिए कितने काले बिंदुओं की आवश्यकता होगी'। तुरंत मौलिका चारों आकार के काले बिंदुओ को गिनकर उसे दुगना कर उत्तर दिया कि 16।

'अच्छा' रहीम कहा और पूछा '69 ऐसे आकार बनाने के लिए कितने काले बिंदुओं की आवश्यकता है ?' मौलिका और प्रवीण ने अनुभव किया कि इस विधि से बिंदु गिनना अधिक परिश्रम और समय लगेगा, विशेष बात यही कि जब मुखों की संख्या बहुत होगी। इसलिए इसके लिए एक नया उपाय करना होगा।

निर्मित मानव मुख संस्करण	1	2	3 . . .	
आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या	2	4	6	. .
ऐसे भी दर्शा सकते हैं	2×1	2×2	2×3	. . .

आपने मुखों की संख्या और आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या के बीच के संबंध को जाना होगा।।

मौलिका कहती है कि मुख बनाने की संख्या और आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या के बीच कुछ संबंध है।

उदाहरणार्थ एक मुख बनाने हमें 2 काले बिंदु चाहिए, जैसे 2×1 या $2 \times$ निर्मित मुखों की संख्या। आगे देखेंगे कि मुखों की संख्या अधिक हो तो यह कार्य करेगा।

2 मुखों के लिए आवश्यक बिंदुओं की संख्या है $4 = 2 \times 2 = 2 \times$ निर्मित मुखों की संख्या

3 मुखों के लिए आवश्यक बिंदुओं की संख्या है $6 = 2 \times 3 = 2 \times$ निर्मित मुखों की संख्या

मौलिका कहती है कि आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या निर्मित मुखों की संख्या से दुगुनी है, जैसे आवश्यक वाले बिंदुओं की संख्या = मुखों की संख्या से दुगनी।

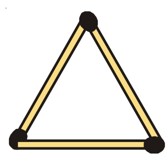
69 मुखों की संख्या के लिए आवश्यक वाले बिंदु =

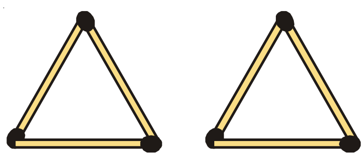
$2 \times 69 = 138$

9.2.2 *विधि*-2

एक त्रिभुज बनाने के लिए 3 दियासलाई का उपयोग होता है।

दो त्रिभुज बनाने में हमें 6 दियासलाई चाहिए।





SCERT TELANGANA

निम्न तालिका में आवश्यक दिया सलाई की संख्या और त्रिभुज बनाने की संख्या दी गयी है।

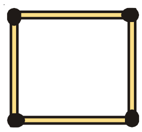
त्रिभुज बनाने की संख्या	1	2	3	4	5	6	...
आवश्यक दियासलाई की संख्या	3	6	9	12	15	18	...
अनुभव (विधि)	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	...

त्रिभुज बनाने की संख्या और आवश्यक दियासलाई की संख्या का नियम क्या है?

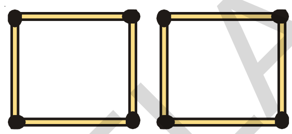
नियम है आवश्यक दियासलाई की संख्या = बनाए गए त्रिभुज की संख्या का तिगुणा

9.2.3 *विधि*-3

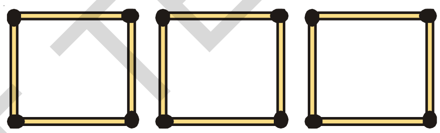
एक वर्ग बनाने 4 दियासलाई की आवश्यकता है।



अगर हम चाहे दो वर्ग बनाएं, तो हमें 8 दियासलाइयों की आवश्यकता होगी।



अगर हम 3 वर्ग बनाना चाहें, तो हमें 12 दियासलाइयों की आवश्यकता होगी।



उपरोक्त जानकारी को हम निम्न तालिका में क्रम से रखते हैं–

वर्ग बनाने की संख्या	1	2	3	....
आवश्यक दिया सलाई संख्या	4	8	12	....
अनुभव (विधि)	4×1	4×2	4×3	....

आवश्यक दियासलाइयों की संख्या = बनाए वर्गों की संख्या का चौगुणा।

9.3 *चर राशि* (Variable)

विधि-1 के अनुसार तालिका में मनन करेंगे।

मानव मुख बनाने की संख्या	1	2	3	. . .
आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या	2	4	6	. . .
विधि	2×1	2×2	2×3	. . .

तालिका में जैसे मानव मुखों की संख्या बढ़ती रहती है, वैसे ही आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या भी बढ़ती जाती है और ध्यान देना की हर स्थिति में आवश्यक बिंदुओं की संख्या, बनाए गए मुखों की संख्या से दुगनी है।

SCERT TELANGANA

मान लो अपनी सुविधा अनुसार बनाये गये मुखों की संख्या को 'm' से दर्शाते हैं।

आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या $= 2 \times m$

"$2 \times m$" लिखने के बदले "2m" लिखते हैं। ध्यान दें कि "2m" समान है "$2 \times m$" के, $2 + m$ के समान नहीं।

अतः आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या $= 2m$.

अगर हम एक मुख बनाना चाहे तो m का मान होगा $m = 1$. अतः नियमानुसार आवश्यक काले बिंदुओं की संख्या होगी $2 \times 1 = 2$.

अगर हम दो मुख बनाना चाहे तो 'm' होगा 2 । अतः आवश्यक बिंदुओं की संख्या होगी $2 \times 2 = 4$.

अब आप अनुमान लगा सकते हो कि तीन मुखों के लिए कितने बिंदुओं की आवश्यकता होगी ? स्पष्ट है-6

उपयुक्त उदाहरण से हमें आवश्यक बिंदुओं की संख्या और आवश्यक बिंदुओं की संख्या और मुखों की संख्या के बीच का संबंध ज्ञात होता है।

आवश्यक बिंदुओं की संख्या= $2\ m$

यहां m मुखों की संख्या है और इसका मान कुछ भी हो सकता है, जैसे 1, 2, 3, 4, ...

यहां 'm' चर राशि का उदाहरण है 'm' स्थिर नहीं है। इसका मान विभिन्न हो सकता है, वैसे ही बिंदुओं की संख्या भी भिन्न हो सकती है।

विधि-2 की तालिका अनुसार-

त्रिभुज बनाने की संख्या	1	2	3	4	5	6	....
आवश्यक दियासलाई संख्या	3	6	9	12	15	18	....
विचार करें (विधि)	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	......

क्या आप नियम बता सकते हैं कि आवश्यक दियासलाई की संख्या से दी गयी त्रिभुज की संख्या बनाने में ?

स्पष्ट है आवश्यक दियासलाई की संख्या= 3 y, जहां 'y' त्रिभुजों की संख्या है।

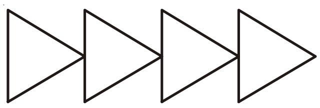
यहां पर भी 'y' का मान भिन्न होगा $y = 1, 2, ...$

अतः 'y' का मान बदलेगा इसलिए 'y' चर राशि का उदाहरण है।

पीछे चलते हैं। विधि-3 की तालिका और नियम बनाते हैं, आवश्यक दियासलाई की संख्या और दिये गये वर्गों की संख्या में वर्गों की संख्या को n से सूचित करेंगे और आवश्यक दियासलाई की संख्या को m से सूचित करेंगे।

इसे करो

1. क्या आप अब नियम बना पाओगे, निम्न नमूना दिया सलाई से बनाने में ?

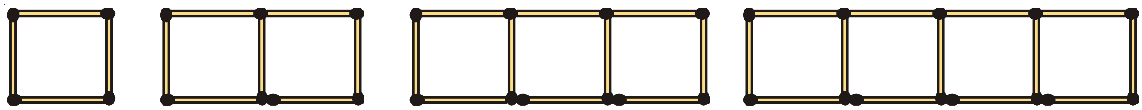


2. क्या आप नियम प्राप्त कर सकते ?
आवश्यक दिया सलाइयों से 'H' और 'L' आकृति बनाने।

SCERT TELANGANA

9.4 अन्य नमूने

मान लो दियासलाई से निर्मित वर्गों के नमूने



आकार-1 आकार-2 आकार-3 आकार-4

निम्न में वर्गों की संख्या और आवश्यक दियासलाई दिये गये–

वर्गों की संख्या	1	2	3	4	5
दियासलाई संख्या (m)	4	7	10	13	---
नमूना	(3×1)+1	(3×2)+1	(3×3)+1	(3×4)+1	---

तब नियम होगा

दिया सलाई की संख्या = 3 × (वर्गों की संख्या) + 1

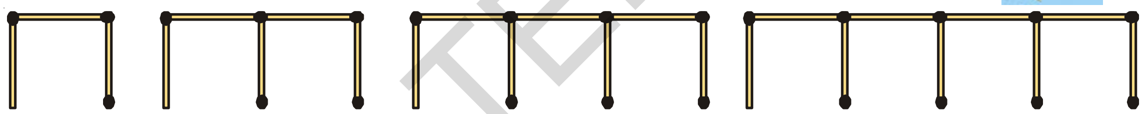
मान लो S = वर्गों की संख्या

उपयोग किये गये दियासलाइयों की संख्या = (3×S) + 1 = 3S + 1

यहां S अक्षर चर राशि का उदाहरण है।

प्रयत्न करो

दियासलाइयों के उपयोग से बनाए गये आकारों का क्रम



आकार-1 आकार-2 आकार-3 आकार-4

(i) उपरोक्त आकार के समूह निर्माण के लिए कितनी दियासलाइयों की आवश्यकता होगी।

(ii) 12 आकारों का समूह निर्माण के लिए कितनी दियासलाइयों की आवश्यकता होगी ?

चर राशि को सूचित करने के लिए हम कोई भी अक्षर का उपयोग कर सकते हैं। उदाहरण–m, n, p, s, x, y, z आदि। चर राशि का कोई स्थिर मान व अक्षर नहीं होता है। एक अक्षर कितनी भी मात्रा को सूचित कर सकता है। उपरोक्त उदाहरण में हम m, y, s दियासलाई की संख्या को सूचित करने के लिए उपयोग किये हैं।

उदाहरण-*1*. राम के पास रहीम से 3 पेंसिल अधिक है। तो बताओ राम के पास रहीम जो रखता है, उसकी कितनी पेंसिलें

हल: अगर रहीम के पास 2 पेंसिल है, तो राम के पास होंगे 2 + 3 = 5 पेंसिल

अगर रहीम 5 पेंसिल रखता है, तो राम के पास 5 + 3 = 8 पेंसिल

हम नहीं जानते कि रहीम के पास कितनी पेंसिलें हैं

लेकिन हमें ज्ञात है राम के पास पेंसिल की संख्या = रहीम के पास पेंसिल संख्या + 3

अगर हम रहीम के पास पेंसिल संख्या n से सूचित करते हैं, तब राम के पास पेंसिल की संख्या होगी = n+3

यहां n = 1, 2, 3 ....'n' एक चर राशी है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण -2. हेमा और माधवी बहनें हैं। माधवी हेमा से 3 वर्ष (छोटी) है। हेमा की आयु से माधवी की आयु कितनी अधिक है ?

हल: दिया गया, माधवी हेमा से 3 वर्ष युवा है, अगर हेमा की आयु 10 वर्ष की है, तो माधवी की आयु 10-3 = 7 वर्ष होगी।

अगर हेमा 16 वर्ष हो तो माधवी 16-3= 13 वर्ष होगी।

यहां हमें हेमा की सही या ठीक आयु नहीं पता, आयु कुछ भी हो सकती है। मान लो कि हेमा की आयु 'p' वर्ष हो, तो माधवी की आयु "p - 3" वर्ष होगी।

यहां 'p' भी चर राशि का उदाहरण है। इसका मान भिन्न हो सकता है, जैसे 1,2,3………

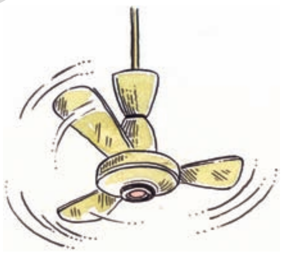
अगर आप चाहते कि 'p'=10 हो तो 'p-3' = 7 और जब 'p'=16, p-3= 13।

अभ्यास 9.1

1. वह नियम बताइये, जिससे कि आवश्यक दियासलाइयों की संख्या मालूम कर सकें और निम्न दिया सलाई नमूनों की जोड़ी बना सकें।

   (i) नमूना अक्षर 'T' (ii) नमूना अक्षर 'E'

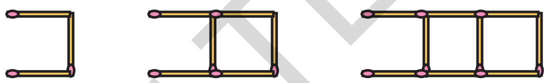
   (iii) नमूना अक्षर 'Z'



2. ऐसा नियम बताइए, जो एक महाकक्ष में लगे पंखों की संख्या (n) मानो और उसमें आवश्यक पत्तियों की संख्या बताइये ?

3. ऐसा नियम निम्न नमूनार्थ के लिए प्राप्त करो, जो बनाये गये आकार की संख्या और आवश्यक दियासलाई की संख्या के बीच हो।

   (a) ………

   (b)  ……….

4. एक पेन का मूल्य ₹ 7 है, तो 'n' पेन का मूल्य के लिए नियम क्या होगा ?

5. एक बस्ते का मूलय ₹ 90 है तो 'm' बस्तों का मूल्य के लिए नियम क्या होगा ?

6. किताबों की खरीदारी का नियम यह है, Q किताबों का मूल्य ₹ 23 है, तो एक किताब का मूल्य क्या होगा ?

7. जॉन कहता है कि उसके पास 2 किताबें गायत्री से कम है। 'x' अक्षर का उपयोग करते हुए संबंध बताइये।

8. रेखा के पास सुरेश से दुगनी से भी 3 किताबें अधिक है। y अक्षर का उपयोग करते हुए संबंध बताइये।

9. एक अध्यापक हर छात्र को 6 पेंसिल बांटता है। दिये गये छात्र संख्या के लिए कितने पेंसिल की आवश्यकता होगी। (छात्र संख्या के लिए 'z' अक्षर का उपयोग करें) ?

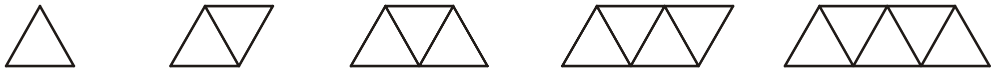
10. निम्न तालिका से पूर्ण कर दिये गये कार्य संपादन में संबंध उत्पन्न करो ?

(i)	x	1	2	3	4	5	9	……..
	$3x$+2	5	……..	……..	……..	……..	……..	38

(ii)	a	1	3	6	7	9	8	……..
	5a-1	4	……..	……..	……..	……..	……..	49

SCERT TELANGANA

11. निम्न नमूनों पर ध्यान दें–



आकार-1 आकार-2 आकार-3 आकार-4 आकार-5

हर आकार में रेखा खण्डों की गणना करो।

(i) ऐसे 9 आकारों में कितने रेखा खण्ड होंगे ?

(ii) उपरोक्त नमूने के लिए नियम लिखो ?

9.5 व्यंजक रूप में - चर राशि (Variables in terms of Expressions)

याद कीजिए अंक गणित में हमें ऐसे व्यंजक आते रहते जैसे $5 + 4$, $11 - 9$ आदि। यह सब अंकों से बनाए जाते हैं।

निम्न पर ध्यान दें।

राम कहता है कि वह टोनी से 5 अंक अधिक प्राप्त किया है, क्या आप बता सकते हैं कि राम ने कितने अंक प्राप्त किये ?

यहां हमें ज्ञात नहीं है कि टोनी ने कितने अंक प्राप्त किये। टोनी द्वारा प्राप्त अंक को X मान कर आगे बढ़ते है। मान लो टोनी द्वारा प्राप्त अंक 45 होंगे, तो राम के होंगे $45+5= 50$

अगर टोनी द्वारा प्राप्त अंक होंगे 56 , तो राम द्वारा प्राप्त अंक होंगे $56+5= 61$

अब हम मान लेते हैं कि टोनी द्वारा प्राप्त अंक 'x' हो तो क्या आप राम द्वारा प्राप्त अंक बता सकते हो ?

राम द्वारा प्राप्त अंक होंगे $x+5$. यहां $x+5$ को व्यंजक कहते हैं, चर राशि 'x' के साथ।

पहले जो तर्क किये गये यर्थात में हम देखते हैं कि स्पष्टीकरण जैसे 2m, 3y, 4z, 2s+1, 3s+1, 8p, n+3, p-3 देखे जा सकते हैं। यह व्यंजक हमें चर राशि के जोड़, घटाव, गुणा, भाग, के फलीभूत ही प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक 'p-3' बनता है चर राशि P में से 3 को घटाने पर और व्यंजक '8 p' बनता है, चर राशि 'p' को '8' से गुणा करने पर।

हम जानते हैं कि चर राशि निश्चित समुच्चय से कोई भी मूल्य ले सकता है। उनका कोई निश्चित या निर्धारित मूल्य नहीं होता, लेकिन वे अंक होते हैं, इसलिए जोड़, घटाव, गुणा और भाग के प्रतिभूत कार्य करते हैं।

हम पहले ही देखते हैं कि दैनिक जीवनशैली दशा की स्थिति में यह व्यंजक उपयोगी होते हैं। कुछ याद करें।

क्रम संख्या	स्थिति	चर राशि	व्यंजकों के उपयोग से कथन
(i)	'n' भाग 7 से		
(ii)	₹ 5 अधिक गीता से	गीता के पास है ₹ y	$y + 5$
(iii)	परिमाप वर्ग भुजा का 4 गुना		
(iv)	सेब का मूल्य अमरूद के मूल्य से दुगना		
(v)	रेणु की ऊंचाई लीला की ऊंचाई से 3 फीट कम		
(vi)	मेरे द्वारा बनाये गये रन आपके रनों का $\frac{1}{3}$ भाग		

SCERT TELANGANA

उदाहरण-3. निम्न स्पष्टीकरण के लिए कथन लिखिए।

(i) $2p$ (ii) $7 + x$

हल : (i) राजू सीमा से दुगना धन रखता है।

(ii) मैं दिलिप से 7 रोटियां अधिक रखता हूं।

उदाहरण-4. मधु सेम के बीज से 5 मूंग फली के बीज अधिक बोता है। उसने कितने मूंगफली के बीज बोये? (सेम के बीज की संख्या ='m' ले)

हल: मान लो सेम के बीजों की संख्या = m

अतः मूंग फली के बीजों की संख्या = 'm+ 5'

अभ्यास 9.2

1. निम्न कथनों को व्यंजक रूप में लिखिए।
   (i) q को 5 से गुणा दें।
   (ii) y को 4 से भाग दें।
   (iii) p और q का गुणनफलक का एक चौथाई
   (iv) z के तीन गुणा में 5 जोड़ने पर
   (v) 'n' के 9 गुणा में '10' जोड़ने पर
   (vi) 'y' को दुगना करके 16 घटाओ।
   (vii) 'y' और 10 के गुणनफल में x का योग।
2. निम्न व्यंजकों को कथन रूप में लिखिए।

   (i) y - 11 (ii) $10a$ (iii) $\frac{x}{5}$ (iv) 3m + 11 (v) $2y - 5$
3. पीटर के पास 'p' सिक्के हैं, डेविड के पास पीटर से तीगुना है। व्यंजक रूप में व्यक्त करो।
4. सीता के पास गीता से 3 अधिक कॉपियां हैं। सीता के पास कितनी कॉपियां होंगी? गीता के पास कॉपियों की संख्या के लिए कोई भी अक्षर का उपयोग कर सकते हैं।
5. एक सैनिक परेड में हर पंक्ति में 5 सैनिक हैं। दी गयी पंक्तियों के लिए कितने सैनिक होने चाहिए, नियम बताइए। पंक्तियों की संख्या के लिए 'n' का उपयोग करें।

9.1 *ज्यामिति/क्षेत्रमिति-नियम* (Rules of Geometry / Areas)

वर्ग की परिमिति

हम जानते की सभी भुजाओं की लम्बाई का योगफल ही बहुभुज की परिमिति कहलाएगी।

एक वर्ग मे समान लम्बाई वाली 4 भुजाएँ होती हैं।

. अतः वर्ग की परिमिति = वर्ग की भुजाओं की लम्बाई का योगफल

= 4 × भुजा की लम्बाई।

इसी प्रकार हमें वर्ग की परिमिति के लिए नियम मिलता है। वर्ग की लम्बाई का मान कुछ भी हो सकता है। इसका मान स्थिर नहीं है। यह भी चर राशि है। चर राशि के उपयोग से हम सामान्य, संक्षिप्त, नियम लिखते हैं। हम वर्ग की परिमिति के लिए नियम लिख चुके हैं सम बाहु त्रिभुज की परिमिति का नियम क्या होगा।

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करो

1. आयत की परिमिति के लिए सामान्य नियम बताओ? आयात की लम्बाई और चौड़ाई के लिए क्रमशः चर राशि 'l' और 'b' ('ल' और 'चौ') का उपयोग करें।
2. वर्ग के क्षेत्रफल के लिए सामान्य नियम बताओ। वर्ग की भुजा के लिए चर राशि 's' का उपयोग करें।
3. द्विबाहु त्रिभुज की परिमिति के लिए क्या नियम होगा?

9.7 अंक गणित नियम

निम्न अंक नमूनों पर ध्यान दें

2, 4 , 6 , 8 , 10 , ...

दिये गये नमूने में 'n' अवधि प्राप्त करने के लिए हम तालिका को श्रृंखलाबद्ध करते हैं।

सम संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
नमूना	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	.....	2×7	.....	2×9	.....

तालिका से यह स्पष्ट है कि प्रथम सम संख्या 2×1 और दूसरी 2×2 और आगे ऐसे ही। उपरोक्त तर्क अनुसार तालिका के रिक्त स्थान को पूर्ण कर सकते हैं और नमूने से प्राप्त कर सकते हैं कि 'n^{th}' अवधि सम संख्या $2 \times n = '2n'$.

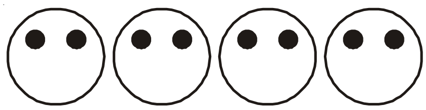
ऐसे ही n अवधि नमूने में 2,4,6,8,10,...... $2n$ होगा।

इसे करो

1. निम्न श्रृंखला में n अवधि प्राप्त करें।
   (i) 3 , 6 , 9 , 12 , …………..
   (ii) 2 , 5 , 8 , 11 , …………...
   (iii) 1 , 8 , 27 , 64 , 125 …………...

9.8 सरल समीकरण

हम मुखों की आकृति वाले नमूने को याद करते हैं



हमें ज्ञात हैं नियमानुसार $2m$ आवश्यक बिंदुओं की संख्या होगी, अगर निर्मित मुखों की संख्या m हो तो।

हम ज्ञात कर सकते हैं कि दिये गये निर्मित मुखों की संख्या के लिए कितने बिंदु आवश्यक है। दूसरी विधि क्या ? कि अगर बिंदुओं की संख्या दी गयी तो निर्मित मुखों की संख्या हम ज्ञात कर सकते हैं।

अर्थात हम मुखों की संख्या (m) प्राप्त कर सकते हैं, दी गयी बिंदुओं की संख्या 10 से। 10 बिंदुओं के लिए हम जानते है $2m = 10$

यह स्थिति में हमें दी गयी चर राशि m को ही स्वीकारना होगा।

SCERT TELANGANA

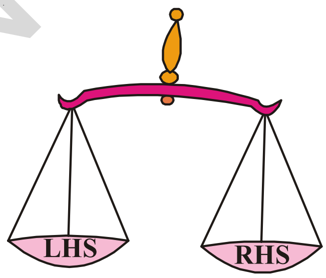
यहां यह स्थिति स्वीकारणीय है कि 2 बार m का मान 10 होना चाहिए। यह एक समीकरण का उदाहरण है। निम्न तालिका पर ध्यान देने से हमारे प्रश्न का हल निकलेगा।

m	$2m$	स्थिति स्वीकारणीय है या नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	नहीं
6	12	नहीं
7	14	नहीं

यह समीकरण $2m = 10$ स्वीकार है जब $m = 5$.

9.8.1 समीकरण- ब.ह.त. और द.ह.त.

अगर हम समीकरण $2m = 10$ पर ध्यान दें, तो हम पाते हैं कि समीकरण में दो पक्षों के बीच 'बराबर' का चिन्ह होता है। समीकरण में स्पष्टीकरण मान बराबर चिन्ह के बाईं ओर हो तो उसे बाएं हाथ की तरफ (ब.ह.त.LHS) कहते हैं। अगर मान बराबर चिन्ह के दाहिने हाथ की तरफ हो तो उसे (द.ह.त.RHS) कहते हैं।



एक समीकरण में कहा जाता है कि ब.ह.त. का मान द.ह.त. के मान के बराबर होता है। समीकरण की ऐसी स्थिति साधारण तुला जिसके दोनों पलड़े पर समान भार हो, से तुलना की जाती है।

अगर LHS बराबर नहीं हो RHS से तो समीकरण प्राप्त नहीं होगा। उदाहरणार्थ $4 + 5 = 7$ दूसरी तरफ हो तो यह समीकरण नहीं है। हम लिखेंगे कि $4 + 5 \neq 7$ या $4 + 5 > 7$ इसी प्रकार $x + 5 > 6, y - 1 < 10$ समीकरण नहीं है।

इसे करो

1. निम्न सरल समीकरण में से LHS और RHS को लिखें।

   (i) $2x + 1 = 10$ (ii) $9 = y - 2$ (iii) $3p + 5 = 2p + 10$

2. कोई दो सरल समीकरण लिखकर उसके LHS और RHS लिखें।

9.8.2 समीकरण का हल (समीकरण का मूल) जांच और मूल पद्धति

इस अध्याय के प्रारंभ का दूसरा उदाहरण लेते। दामिनी और कौशिक के बीच में जो तर्क था, उसमें दामिनी कहती है कि अंतिम निर्णय 27 था और कौशिक उसके मित्र की आयु को 11 वर्ष बताता है।

अब हम देखते कि वह आयु को कैसे प्राप्त किया।

मान लो दामिनी के मित्र की आयु 'x' वर्ष है। दुगुना करने पर प्राप्त होगा '$2x$', उसमें 5 जोड़ने पर वह बनेगा '$2x + 5$'.

अतः अंतिम परिणाम होगा '$2x + 5$'. दामिनी कहती है अंतिम परिणाम था 27, इससे यह ज्ञात होता है कि $\mathbf{2x + 5 = 27}$.

उपरोक्त समीकरण लेते हैं। $2x + 5 = 27$ यह स्थिति 'x' को स्वीकार्य है।

SCERT TELANGANA

यहां 'x' का मान कुछ भी हो सकता है, जेसे 1, 2, 3, ….

अगर $x = 1$ तब $2x + 5 = 2 \times 1 + 5 = 7$ होगा

अगर $x = 2$ तब $2x + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$ होगा

अगर $x = 3$ तब $2x + 5 = 2 \times 3 + 5 = 11$ होगा और ऐसे ही

अगर x के स्थान पर 1,2,3 ….. लिखते है तो यह 'प्रतिस्थापन' कहलायेगा।

LHS और RHS के मान का निरीक्षण चर राशि 'x'

प्रतिस्थापित मूल्य (x)	बार्यी तरफ का मूल्य (2x+5)	दार्यी तरफ का मूल्य 27	बांयी तरफ दार्यी तरफ समान है या नहीं
1	$2 \times 1+5 = 7$	27	असमान
2	$2 \times 2+5 = 9$	27	असमान
3	$2 \times 3+5 = 11$	27	असमान
4	$2 \times 4+5 = 13$	27	असमान
5	$2 \times 5+5 = 15$	27	असमान
6	$2 \times 6+5 = 17$	27	असमान
7	$2 \times 7+5 = 19$	27	असमान
8	$2 \times 8+5 = 21$	27	असमान
9	$2 \times 9+5 = 23$	27	असमान
10	$2 \times 10+5 = 25$	27	असमान
11	**$2 \times 11+5 = 27$**	**27**	समान
12	$2 \times 12+5 = 29$	27	असमान

तालिका से यह स्पष्ट होता है कि जब '$x = 11$' दोनों LHS और RHS का मूल्य समान है। अतः $x = 11$ को समीकरण $2x + 5 = 27$ का साधक या मूल कहते हैं।

'समीकरण का मूल, चर राशि का वह मान या संख्या है, जिससे (ब.ह.त. और द.ह.त.) दोनों पक्ष समान होंगे।

बीज गणित ऐसा प्रभावित साधन है, जिससे दैनिक जीवन में आने वाली हर समस्या और पहेलियों का हल निकाल सकते हैं।

मान लो कि दूसरा समीकरण $3m = 15$

निम्न तालिका में 'm' के विभिन्न मान से LHS और RHS के मूल्य की तुलना को दर्शायेंगे।

प्रतिस्थापित मूल्य (m)	बार्यी तरफ का मूल्य (3m)	दार्यी तरफ का मूल्य (15)	बार्यी तरफ दार्यी तरफ समान है या नहीं
1	$3 \times 1 = 2$	15	असमान
2	$3 \times 2 = 6$	15	असमान
3	$3 \times 3 = 9$	15	असमान
4	$3 \times 4 = 12$	15	असमान
5	**$3 \times 5 = 15$**	**15**	समान
6	$3 \times 6 = 18$	15	असमान

इस तालिका से हमें ज्ञात होता है कि जब m=5 हो तो दोनों LHS और RHS का मूल्य समान है। अतः $m = 5$ समीकरण का हल है। समीकरण को हल करने में ऊपर की पद्धति को जांच और भूल पद्धति कहते हैं।

SCERT TELANGANA

इसे करो

जांच और भूल पद्धति द्वारा '$x - 4 = 2$' समीकरण के मूल को प्राप्त करें।

अभ्यास 9.3

1. निम्न में कौनसे समीकरण है ?

(i)	$x - 3 = 7$	(ii)	$l + 5 > 9$	(iii)	$p-4 < 10$
(iv)	$5 + m = -6$	(v)	$2s - 2 = 12$	(vi)	$3x + 5 > 13$
(vii)	$3x < 15$	(viii)	$2x - 5 = 3$	(ix)	$7y + 1 < 22$
(x)	$-3z + 6 = 12$	(xi)	$2x - 3y = 3$	(xii)	$z = 4$

2. निम्न में L.H.S. और R.H.S. को लिखिए ?

(i)	$x-5 = 6$	(ii)	$4y = 12$	(iii)	$2z + 3 = 7$
(iv)	$3p = 24$	(v)	$4 = x - 2$	(vi)	$2a - 3 = -5$

3. निम्न समीकरण को जांच और भूल पद्धति से हल करें ?

(i)	$x + 3 = 5$	(ii)	$y - 2 = 7$	(iii)	$a - 2 = 6$
(iv)	$5y = 15$	(v)	$6n = 30$	(vi)	$3z = 27$

हमने क्या सीखा

1. दियासलाई की सहायता से बनाए गये कई परिचित अक्षर या आकार के नमूनों पर विचार किये हैं। आवश्यक दियासलाई की संख्या और परिचित आकार बनाने की संख्या के बीच के संबंध को लिखना सीखे, क्योंकि असंख्य बार आकार को दोहराने से वह चर राशि बनती। इसे हम अक्षर से दर्शाते हैं।
2. चर राशि का मान भिन्न लिया जाता है। इसका मान स्थिर नहीं होता है।
3. चर राशि को कोई भी अक्षर से सूचित कर सकते हैं, जैसे a, b, m, n, p, q, x, y, z आदि।
4. चर राशि कोई भी व्यवहारिक स्थिति में संबंध को स्पष्ट करने की अनुमति देती है।
5. चर राशि अंक है, जिनका मान निर्धारित नहीं है। अंकों की भांति मूलभूत क्रियाएं कर सते है।
6. चर राशि के उपयोग से विभिन्न मूलभूत क्रियाओं द्वारा कथन का निर्माण कर सकते हैं। उदाहरण– $2m$, $3s+1$, $8p$, $x/3$ आदि।
7. चर राशि से ज्यामिति और अंक गणित में कई सामान्य नियम व्यक्त या स्पष्ट कर सकते हैं।
8. समीकरण में चर राशि की ऐसी स्थिति है, जो चर राशि के मान को सीमित करती है।
9. समीकरण के दो पक्ष होते हैं बायें हाथ की तरफ और दाहिने हाथ की तरफ, जो बराबर चिन्ह से दोनों तरफ होते हैं।
10. समीकरण का मूल चर राशि का वह मान है, जिससे दायें और बायें दोनों पक्ष का मूल्य समान होगा।
11. समीकरण का मूल प्राप्त करने के लिए पद्धति उपयोग की गयी, उसे जांच और भूल पद्धति कहते हैं।

SCERT TELANGANA