सममिती

प्रकरण 13

13.1 प्रस्तावना

सममिती हा दैनंदिन जीवनात वापरला जाणारा एक साधा शब्द आहे. जेव्हा एखादी आकृती किंवा आकृत्या बरोबर समान प्रमाणात असतात, तेव्हा त्या आकृत्या **"सममित आकृत्या"** आहेत असे आपण म्हणतो.

ताजमहल (उ.प्र.)

तिरुवन्नामलाई
(तमिलनाडु)

आपल्या सममित रचनेमुळे या ऐतिहासिक वास्तू स्थापत्य कलेचा उत्तम नमुना आहेत.

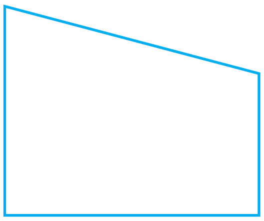
समजा, आपण एका आकृतीचा (अर्धा) भाग असा दुमडला की, तिचा अर्धा डावा भाग आणि अर्धा उजवा भाग एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात. तर आपण म्हणू शकतो, की आकृतीमध्ये सममिती अक्ष आहे. आपण पाहू शकतो की, दोन्ही अर्धे भाग एकमेकांचे (आरशातील) प्रतिबिंब आहे. जर आपण आकृती जेथे दुमडली त्या जागी एक आरसा ठेवला तर, आकृतीच्या एका भागाचे प्रतिबिंब दुसऱ्या भागाला पूर्णपणे झाकून टाकते.

आकृति 13.1

असे जेव्हा घडते, तेव्हा अशा घडीस (वास्तविक किंवा काल्पनिक) जी आरशाची कड आहे. तिला सममिती अक्ष म्हणतात.

येथे आपण ज्या आकृत्यांचे आकार पाहतो आहोत त्या सर्व आकृत्या सममित आकृत्या आहेत. का बरं?

जेव्हा आपण त्यांना ठिपक्यांच्या रेषेवरून दुमडता. तेव्हा आकृतीचा एक भाग दुसऱ्या अर्ध्या भागास पूर्णपणे झाकून टाकतो. या आकृतीमधील ठिपक्यांच्या रेषेस तुम्ही काय संबोधाल? तुम्ही आकृतीवर आरसा कोठे ठेवाल? जेणेकरून प्रतिबिंब आकृतीला दुसऱ्या भागाने पूर्णपणे झाकलेले असेल?



आकृती 13.2

आकृती 13.2 ही सममित आकृती नाही. याचे कारण तुम्ही सांगू शकाल का?

13.2 सममित आकृत्या काढणे : इंक– ब्लॉट डेविल्स

हे करा

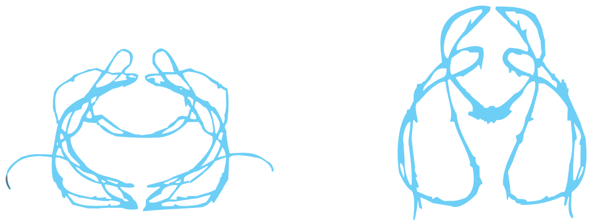
एक कागद घ्या. तो मधोमध दुमडा. शाईचे काही थेंब अर्ध्या भागावर टाका.

आता दोन्ही अर्धे भाग दाबा.

आता काय दिसले?

तयार झालेली आकृती सममित आकृती आहे का? जर असेल तर, सममित अक्ष कोठे आहे? अजून एखादा सममित अक्ष असेल का की ज्याच्यामुळे आकृतीचे दोन समान भाग मिळतील. असे आणखी काही नमुने करा.

शाई–दोरा नमुना



एक कागद अर्ध्यावर दुमडा. त्यातील एका अर्ध्या भागावर कमी लांबीचा दोरा वेगवेगळ्या रंगाच्या शाईत किंवा रंगात बुडवून त्यावर व्यवस्थित ठेवा. आता दोन्ही अर्धे भाग एकत्र दाबा. तयार झालेली आकृती पहा. ही आकृती सममित आकृती आहे का? या आकृतीला आणखी कोणकोणत्या प्रकाराने दुमडू शकतो? ज्यामुळे दोन समान भाग मिळतील.

प्रयत्न करा

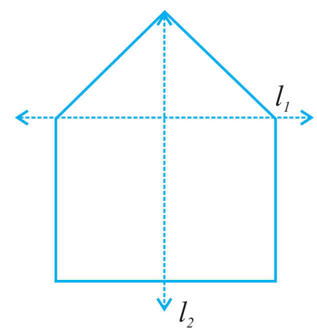
तुमच्या भूमिती पेटीमध्ये दोन गुण्या आहेत, हे सममित आहेत का?

आपल्या वर्गातील काही वस्तूंची यादी तयार करा जसे, फळा (black board), टेबल, दरवाजा, पुस्तक इत्यादी. यांपैकी कोणत्या वस्तू सममित आहेत आणि कोणत्या सममित नाहीत. त्यातील सममित आकृत्यांचे सममित अक्ष तुम्ही ओळखू शकाल का?

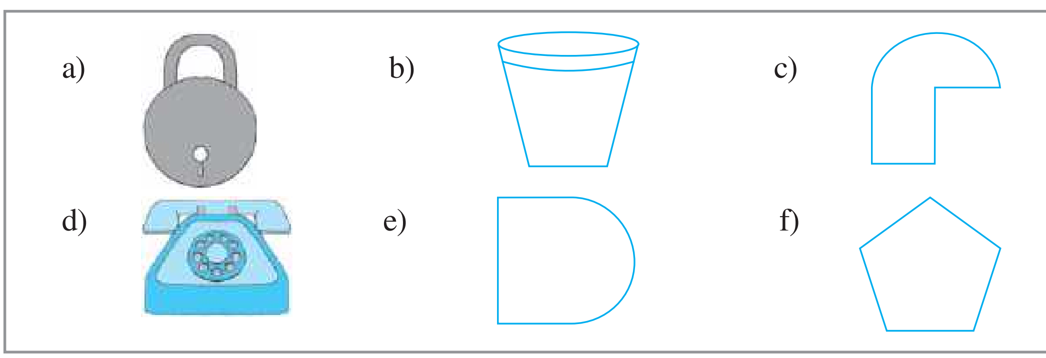
प्रश्नसंग्रह 13.1

1. आपल्या घरातील किंवा शाळेतील चार सममित आकृत्यांची यादी करा.

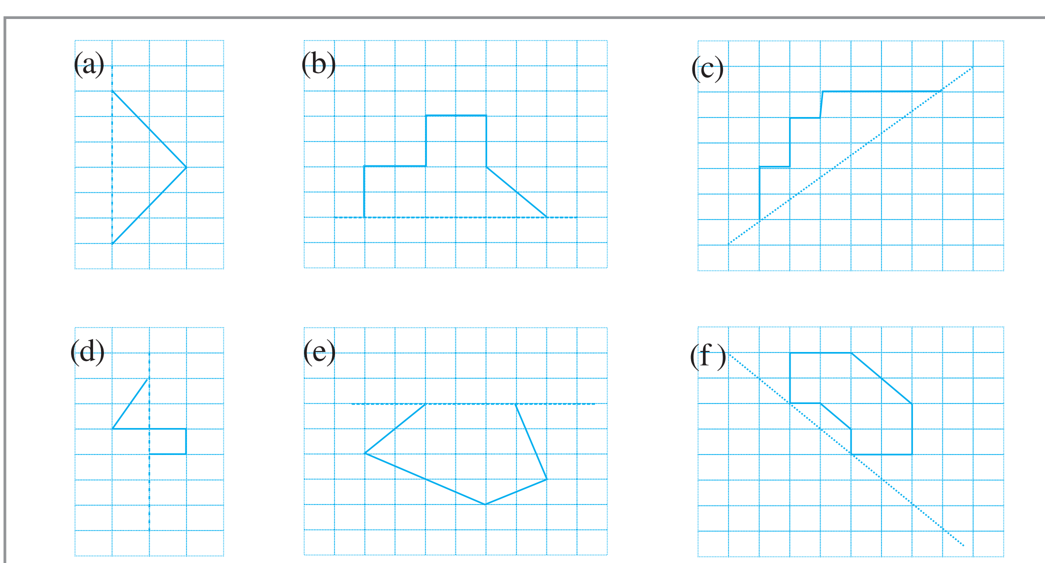
2. आकृतीमध्ये, l_1 किंवा l_2 यापैकी कोणती रेषा आरशाची कड म्हणजेच सममिती अक्ष आहे?



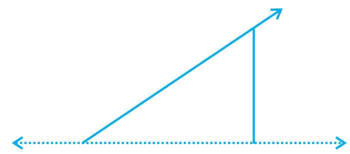
3. खाली दिलेल्या आकृत्या ओळखा. या आकृत्या सममित आहेत. का नाहीत ते पडताळून पहा.



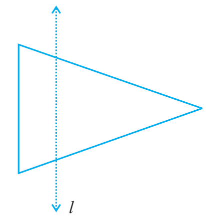
4. खाली दिलेल्या आकृत्या आलेख कागदावर काढा. तुम्ही आलेख कागदाचा उपयोग मागील इयत्तेत अंकगणिताच्या पुस्तकात केला असेल. या आकृत्या अशा रीतीने पूर्ण करा की, ठिपक्यांची रेषाच सममित अक्ष असेल.



5. शेजारील आकृतीमध्ये, l सममिती अक्ष आहे. सममित आकृती तयार करण्यासाठी ती पूर्ण करा.



6. आकृतीमध्ये, l सममिती अक्ष आहे. त्रिकोणाचे प्रतिबिंब काढा आणि आकृती अशा रीतीने पूर्ण करा की ती सममित होईल.

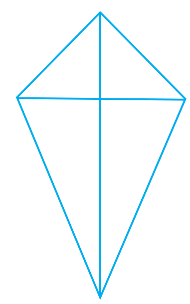


13.3 दोन सममिती अक्ष असणाऱ्या आकृत्या

हे करा

एक पतंग

तुमच्या भूमितीच्या पेटीमधील 2 गुण्यांपैकी एका गुण्याच्या कोनांची मापे 30°, 60° आणि 90° आहेत.



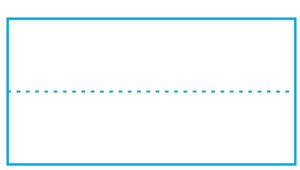
असेच 2 गुण्या घ्या. त्यांना एकमेकांशी जुळवून आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक पतंग तयार करा.

या आकृतीस किती सममिती अक्ष आहेत?

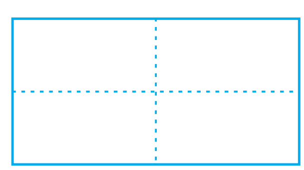
एक आयत

एक आयताकृती कागद घ्या. जसे (पोस्टकार्ड) त्याला अशाप्रकारे आडवे दुमडा की, दुमडलेले अर्धे भाग तंतोतंत जुळतील. दुमडलेली रेषा सममिती अक्ष आहे का?

कागद उलगडा आणि पुन्हा तो उभा मागीलप्रमाणे दुमडा. दुसऱ्या वेळेस दुमडलेली रेषा सुद्धा सममिती अक्ष आहे का?



पहिली घडी



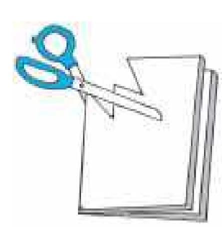
दुसरी घडी

तुम्हाला काय वाटते की, या दोन्ही रेषा सममिती अक्ष आहेत?

प्रयत्न करा

दोन किंवा अधिक गुण्या एकत्र जुळवून तुम्ही जितक्या आकृत्या तयार करू शकाल. तेवढ्या तयार करा. या आकृत्या आलेख कागदावर काढा आणि त्यांचे सममिती अक्ष शोधा.

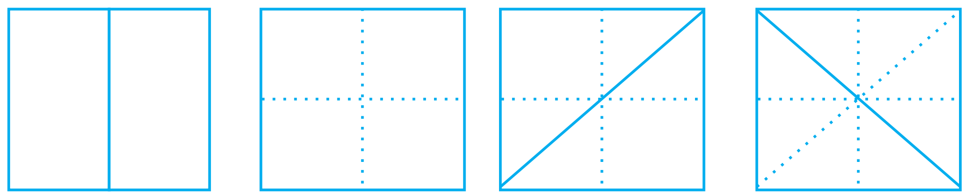
दोन दुमड घातलेल्या कागदापासून कापून केलेली आकृती



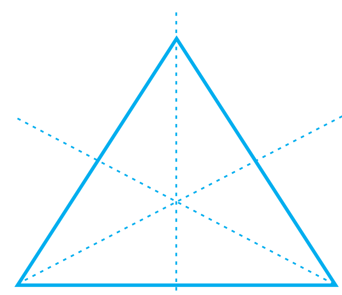
एक आयताकृती कागद घ्या. त्याला एकदा दुमडा. परत दुसऱ्यांदा दुमडा. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे काहीतरी नक्षी काढा. जी नक्षी काढली आहे. ती त्या आकारात कापा आणि कागद उलगडा. (कागद उलगडण्याअगोदर जी आकृती तयार होणार आहे. त्याचा विचार करा.)

जी आकृती कापून झाली आहे. त्यामध्ये किती सममिती अक्ष आहेत? आणखी काही नक्षी तयार करा.

13.4 अनेक सममिती अक्ष (दोनापेक्षा जास्त) असलेल्या आकृत्या



एक चौरसाकृती कागद घ्या. त्याची उभी अर्धी बाजू (vertically) आणि आडवी बाजू (horizontally) अर्धी दुमडा. (अर्थात 2 वेळा दुमडले.) कागद उलगडा आणि आता पुन्हा अर्ध्या भागावर दुमडा (तिसऱ्यांदा), परंतु, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, यावेळी कर्णावर दुमडले आहे. कागद पुन्हा उलगडा आणि अर्ध्या भागावर दुमडा. (चौथ्यांदा) परंतु, यावेळी दुसऱ्या कर्णावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दुमडले आहे. कागद उलगडा.

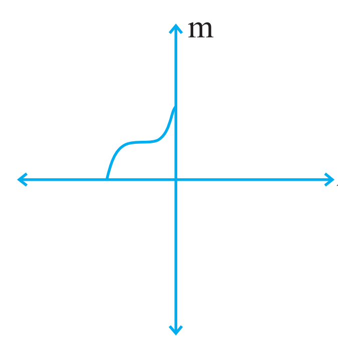


समबाहु त्रिभुज की 3 सममित रेखाएँ

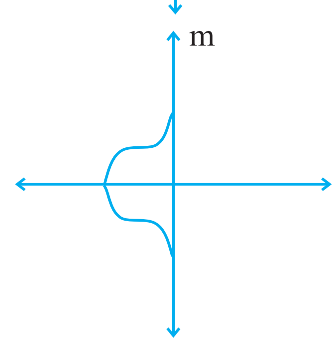
या आकृतीमध्ये किती सममिती अक्ष आहेत? आपण 2 सममिती अक्ष असलेल्या आकृत्यांची रचना प्रश्नसंग्रह 13.1 च्या प्रश्न क्र. 4 मध्ये एक सममिती अक्ष असलेल्या आकृत्यांसाठी जसे छोट्या भागापासून केली, तशी करू शकतो.

1. समजा, शेजारी एक आकृती दिली आहे.

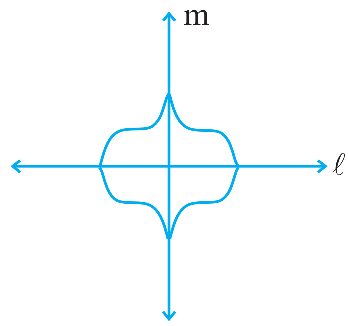
2. 2 सममिती अक्ष असताना ही आकृती आपण पूर्ण करणार आहोत. l आणि m दोन सममिती अक्ष आहेत.



3. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे आपण एक भाग सममिती अक्ष रेषा l भोवती काढू.

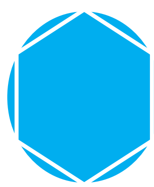


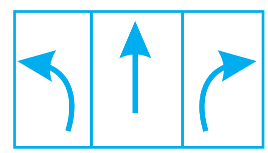
4. आकृती पूर्ण करण्यासाठी ती रेषा M भोवतीही सममित असणे आवश्यक आहे. आकृतीचा उरलेला भाग दाखविल्याप्रमाणे पूर्ण करा.
या आकृतीचे दोन सममिती अक्ष आहेत l आणि m .
काही आकृत्यांमध्ये केवळ एकच सममिती अक्ष असतो, काहीत दोन, तर काहीत तीन किंवा अधिक सममित अक्ष असतात. तुम्ही सहा सममिती अक्ष असलेल्या आकृतीचा विचार करु शकता का?



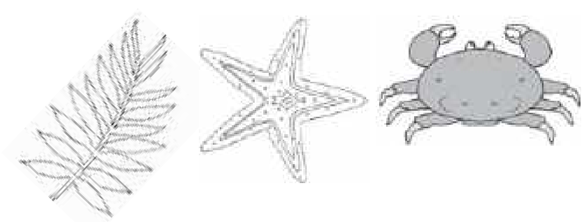
सममिती सर्वत्र

- आपण रोज अनेक मार्गसूचक चिन्ह पहातो ज्यांच्यात सममित रेषा असतात. इथे अशी काही चिन्हे दिली आहेत. अशीच काही मार्गसूचक चिन्हे ओळखा आणि ती काढा. सममित रेषा ठळक करायला विसरू नका.

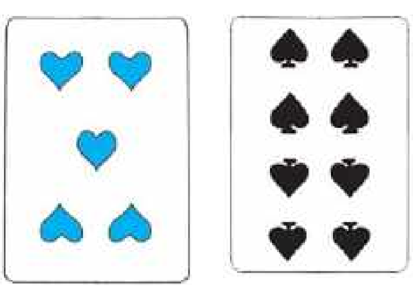




- निसर्गात अशा अनेक आकृत्या आहेत. की ज्या सममित आहेत.

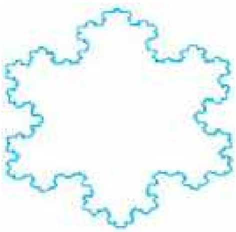


- पत्त्यांमधील काही पत्त्यांवरील नक्षीमध्ये सममिती अक्ष असतो. दिलेल्या पत्त्यांमध्ये तो शोधा.



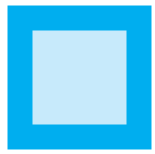
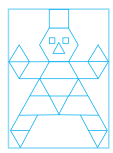
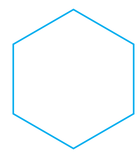
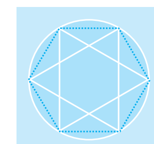
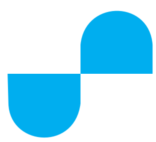
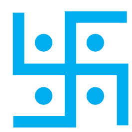
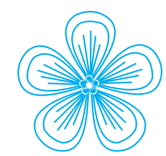
- शेजारी एका कात्रीची जोडी आहे. यातील सममिती अक्ष किती?

- शेजारील सुंदर आकृतीचे निरीक्षण करा.
हा सममितीचा नमुना असून कोच स्नोफ्लेक (koch's Snowflake) यांच्या नावाने ओळखला जातो. (जर तुमच्याकडे संगणक असेल, तर तुम्ही फ्रेक्टल (Fractals) विषयी ब्राऊझ करा. तुम्हाला खूप सुंदर आकृत्या बघायला मिळतील या आकृत्यांमधील सममिती अक्ष काढा.

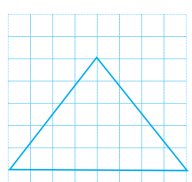
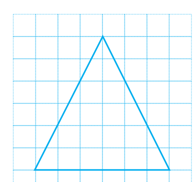
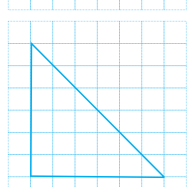
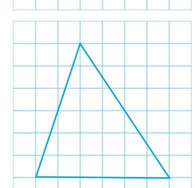


प्रश्नसंग्रह 13.2

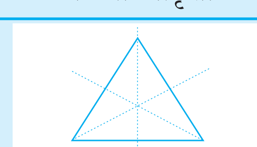
1. खाली दिलेल्या या आकृत्यांमध्ये सममिती अक्षांची संख्या शोधा.

(a) 
(b)
(c)
(d) 
(e) 
(f) 
(g) 
(h) 
(i) 

2. खाली दिलेल्या आकृतीमधील त्रिकोण एका आलेख कागदावर काढा. प्रत्येकामध्ये जर सममिती अक्ष असतील तर काढा आणि त्यावरून त्रिकोणाचा प्रकार ओळखा. (तुम्ही त्यातील काही आकृत्या ट्रेस (trace) करू शकाल. कागदाला दुमडून सुद्‌धा प्रयत्न करा.)

(a) 
(b) 
(c) 
(d) 

3. खालील तक्ता पूर्ण करा.

आकार	कच्ची आकृती	सममिती अक्षांची संख्या
समभुज त्रिकोण		3
चौरस		
आयत		
समद्विभुज त्रिकोण		
समभुज चौकोन		
वर्तुळ		

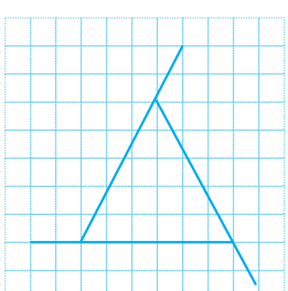
4. तुम्ही असा त्रिकोण काढू शकाल का. ज्यामध्ये,
   (a) फक्त एकच सममिती अक्ष आहे.
   (b) फक्त दोन सममिती अक्ष आहेत.
   (c) फक्त तीन सममिती अक्ष आहेत.
   (d) कोणताच सममिती अक्ष नाही

   प्रत्येकाची कच्ची आकृती काढा.

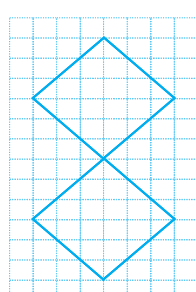
5. एका आलेख कागदावर खालील कच्च्या आकृत्या काढा.
   (**सूचना:** तुम्ही प्रथम सममिती अक्ष काढून नंतर आकृती पूर्ण केली तर तुम्हाला सोपे जाईल.)
   (a) एका त्रिकोणात आडवा सममिती अक्ष आहे. परंतु उभा सममिती अक्ष नाही.
   (b) एका चौकोनात आडवा आणि उभा असे दोन्ही सममिती अक्ष आहेत.
   (c) एका चौकोनात आडवा सममिती अक्ष असून उभा सममिती अक्ष नाही.
   (d) एक षटकोन असा आहे की ज्यामध्ये फक्त दोनच सममिती अक्ष आहेत.
   (e) एक षटकोन असा आहे की ज्यामध्ये सहा सममिती अक्ष आहेत.

6. प्रत्येक आकृती ट्रेस करा आणि त्यांचे सममिती अक्ष काढा.

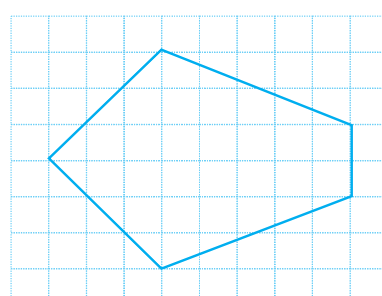
(a)



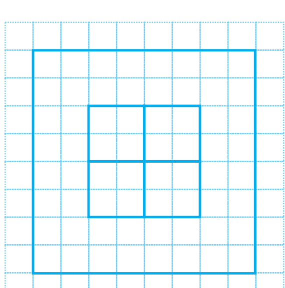
(b)



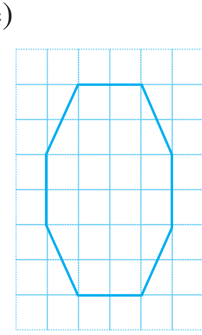
(c)



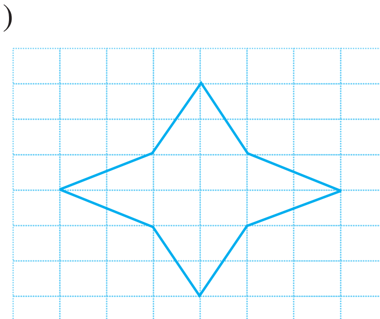
(d)



(e)

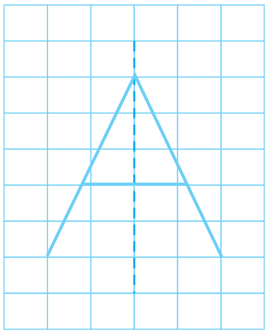


(f)

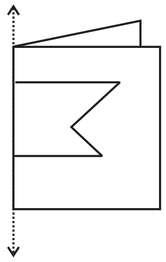


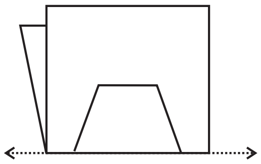
7. इंग्रजी वर्णमालेतील A पासून Z पर्यंतच्या सर्व अक्षरांबद्दल विचार करा. यातील काही अक्षरांची यादी करा. ज्यांच्यामध्ये,

(a) उभा सममिती अक्ष आहे. (जसे A)
(b) आडवा सममिती अक्ष आहे. (जसे B)
(c) सममिती अक्ष नाही. (जसे Q)



8. येथे काही आकृत्या दुमडलेल्या कागदावर असून त्यावर नक्षी काढलेली आहे. प्रत्येक नक्षीची आकृती काढा. जी कापल्यावर दिसेल?

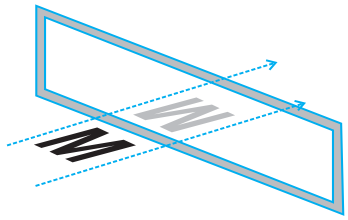


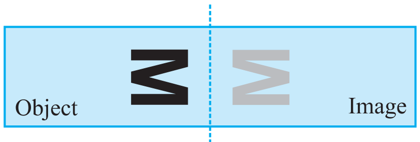


13.5 प्रतिबिंब आणि सममिती

सममिती अक्ष आणि आरशातील प्रतिमा निसर्गत: वास्तवात एकमेकांशी निगडीत आहेत.

खाली एक आकृती दिलेली आहे. ज्यामध्ये इंग्रजी अक्षर M चे प्रतिबिंब दाखविले आहे. तुम्ही अशी कल्पना करा की, आरसा अदृश्य आहे आणि तुम्ही फक्त अक्षर M आणि त्याचे प्रतिबिंब पहात आहात.

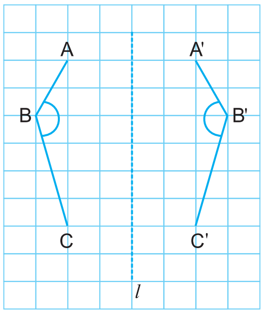




वस्तू आणि तिचे प्रतिबिंब आरशाच्या रेषेच्या संदर्भात सममित आहे. जेव्हा आपण एक कागद दुमडतो तेव्हा ही आरशाची रेषा, सममिती अक्ष बनते आणि प्रतिमेस आरशाच्या रेषेमधील वस्तूचे प्रतिबिंब आहे असे म्हणतो. तुमच्या हे देखील लक्षात येईल की, जेव्हा वस्तूचे परावर्तन होते, तेव्हा त्याच्या लांबीत, कोनात कोणतेही परिवर्तन होत नाही. खरंतरं वस्तूंची लांबी आणि कोन तिच्या प्रतिमेच्या लांबी आणि कोनाएवढेच असतात. वास्तविक, एकप्रकारे हा बदल असतो. खरचं वस्तू आणि तिचे प्रतिबिंब यामध्ये फरक असतो. कोणता बरं फरक असतो? जरा विचार करा.

(**सूचना:** स्वत:ला आरशामध्ये पहा.)

हे करा



एका आलेख कागदावर ABC अशी एक आकृती काढा आणि त्याचे आरशाची रेषा l मध्ये A'B'C' प्रतिबिंब शोधा.

AB आणि A'B'; BC आणि B'C'; AC आणि A'C' यांच्या लांबींची तुलना करा.

या वेगवेगळ्या आहेत का?

प्रतिबिंबामध्ये रेषाखंडाच्या लांबीत फरक पडतो का? ABC आणि A'B'C' कोनांच्या मापांची तुलना करा. (कोनमापकाच्या मदतीने) प्रतिबिंबामध्ये कोनांच्या आकारात बदल झाला का?

AA', BB' आणि CC' जोडा. कोनमापकाच्या मदतीने l आणि AA', l आणि BB', l आणि CC' यांमधील कोन मोजा.

आरशाची रेषा l आणि कोणताही एक बिंदु आणि त्याचे प्रतिबिंब यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्यामध्ये तयार होणाऱ्या कोनांबद्दल तुम्ही कोणता निष्कर्ष काढू शकाल?

प्रयत्न करा

जर आरशापासून तुम्ही 100 सेमी अंतरावर आहात. तुमचे प्रतिबिंब कोठे असेल? जर तुम्ही आरशाकडे चालत गेलात तर तुमचे प्रतिबिंब कसे हालेल?

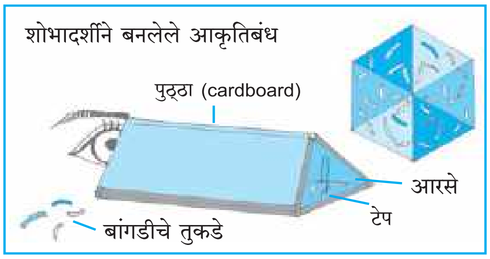
हे करा

कागदांची सजावट

एक पातळ आयताकृती कागद घ्या. त्याला अनेक घड्या घाला त्याप्रमाणे कागदावर क्लिष्ट नमुना काढा. (ज्याप्रमाणे आकृतीत दाखविले आहे.) पुन्हा पुन्हा आलेल्या नक्षीमधील सममिती अक्ष ओळखा. अशा सजावटींचे कागद सण समारंभाच्या वेळी उपयोगात आणा.

शोभादर्शी

अनेक आरसे असलेल्या एका शोभादर्शीमध्ये कितीतरी प्रतिबिंब तयार होतात. ज्यामध्ये अनेक सममिती अक्ष असतात. (जसे उदाहरणात दाखविले आहे.) दोन आरसे नेहमी V आकारांत बसवून हा प्रयोग करता येतो. आरशांमध्ये तयार झालेल्या कोनांवरून सममित अक्ष किंवा सममित अक्षांची संख्या किती असेल ते सांगता येते.

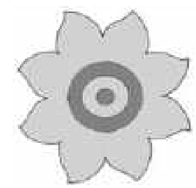
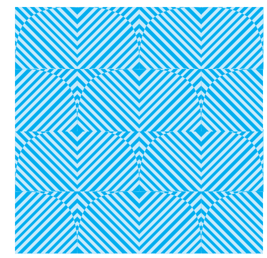


आकृती 13.1

एक शोभादर्शी बनवा आणि त्यात तयार झालेल्या सममित आकृत्यांविषयी अधिक माहिती मिळविण्याचा प्रयत्न करा.

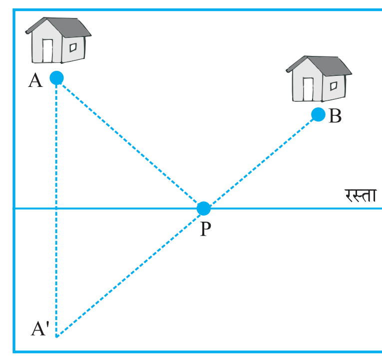
अल्बम

सममित (आकृत्या) नक्षी एकत्र करून एक अल्बम तयार करा. येथे काही नमुने दिले आहेत.

परावर्तन सममितीचे उपयोग

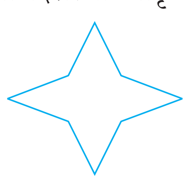
एक वर्तमानपत्र टाकणारा मुलगा आपली सायकल बिंदू 'P' वर उभी करतो आणि वर्तमानपत्र A आणि B या ठिकाणच्या घरी टाकतो. त्याने सायकल कोठे उभी केली पाहिजे. म्हणजे AP + BP हे अंतर सर्वांत कमी असेल.

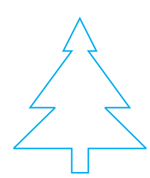


तुम्ही येथे परावर्तित सममितीचा उपयोग करू शकाल. जर रस्ता आरशाची रेषा मानली तर, A चे प्रतिबिंब A' मिळेल. तेव्हा आपण असे म्हणू शकतो की, बिंदू P सायकल उभी करण्यासाठी योग्य ठिकाण आहे. (येथे आरशाची रेषा A'B ला छेदते) तुम्ही याचे कारण सांगू शकाल का?

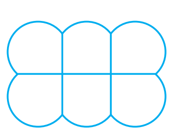
उदाहरणसंग्रह 13.3

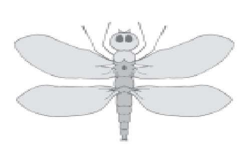
1. खाली दिलेल्या आकृत्यांमधील सममिती अक्षांची संख्या शोधा. उत्तराची पडताळणी कशी कराल?

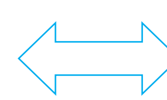
(a) 

(b) 

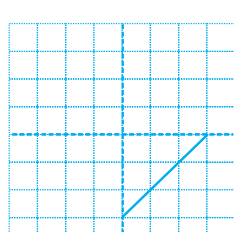
(c)

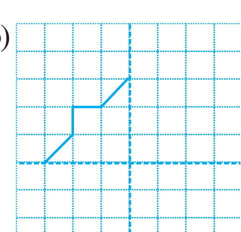
(d) 

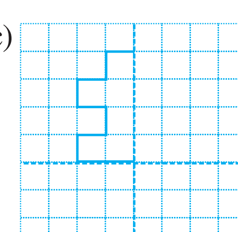
(e) 

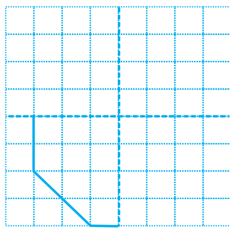
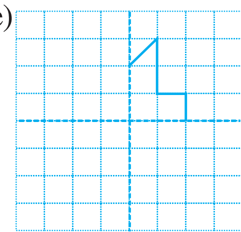
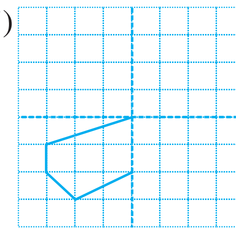
(f) 

2. खाली दिलेली चित्रे आलेख कागदावर काढा. प्रत्येक चित्र पूर्ण करण्यासाठी दोन बिंदू रेषा आणि दोन सममिती अक्षांचा उपयोग करा.

(a) 

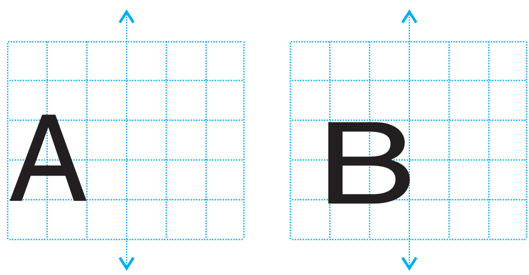
(b) 

(c) 

(d)  (e)  (f) 

तुम्ही या आकृत्या पूर्ण करण्यासाठी काय केले?

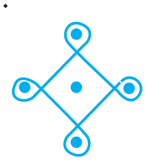
3. खाली दिलेल्या प्रत्येक आकृतीमध्ये, इंग्रजी वर्णमालेतील एक अक्षर एका उभ्या रेषेबरोबर दाखविले आहे. या अक्षराचे आरशातील रेषेमध्ये प्रतिबिंब घ्या. परावर्तनानंतर कोणते अक्षर तसेच राहते आणि कोणते नाही हे सांगा. असे का घडते? याबद्दल तुम्ही सांगू शकाल?

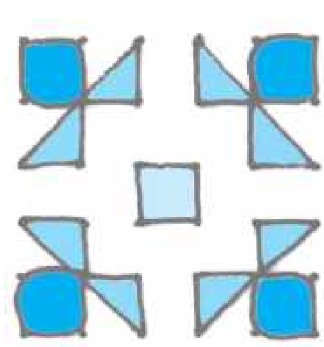


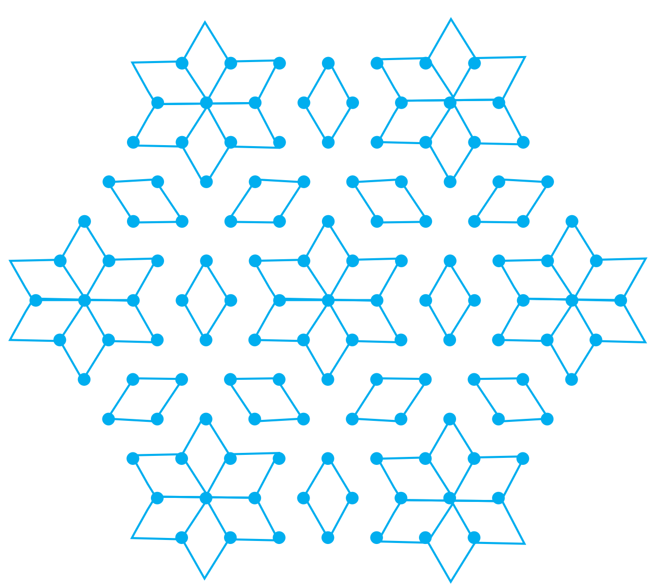
O E M N P H L T S V X साठी प्रयत्न करा.

रांगोळीचा नमुना

कोळम आणि रांगोळी आपल्या देशात खूप प्रसिद्ध आहे. काही नमुने येथे दिले आहेत. त्यातील सममितीकडे लक्ष द्या. रांगोळीचे नमुने जितके जमविता येतील तेवढे मिळवा आणि त्याचा एक अल्बम तयार करा.







या नमुन्यांमध्ये सममिती अक्षांबरोबर कोणते सममित भाग आहेत ते शोधण्याचा प्रयत्न करा.

आपण काय चर्चा केली ?

1. एखाद्या आकृतीचा सममिती अक्ष म्हणजे अशी रेषा जी त्या आकृतीचे दोन समान भाग करते किंवा समान भागात विभाजन करते. या रेषेला सममिती अक्ष म्हणतात.

2. आकृतीमध्ये कोणताही सममिती अक्ष नसू शकतो, फक्त एकच सममिती अक्ष, दोन सममिती अक्ष किंवा अनेक सममिती अक्ष असू शकतात. काही उदाहरणे नमुन्यादाखल दिली आहेत.

सममिती अक्षांची संख्या	*उदाहरण*
एकही सममिती अक्ष नाही	विषमभुज त्रिकोण
फक्त एक सममिती अक्ष	समद्विभुज त्रिकोण
दोन सममिती अक्ष	आयत
तीन सममिती अक्ष	समभुज त्रिकोण
अनेक सममिती अक्ष	वर्तुळ

3. रेषीय सममिती परावर्तनाशी संबंधित आहे. जेव्हा आपण परावर्तनाविषयी बोलतो तेव्हा डाव्या↔उजव्या बाजूंच्या आदलाबदलाविषयी लक्ष द्यायला हवे.

   सममितीचा दैनंदिन जीवनात पुष्कळ उपयोग आहे. जसे की, चित्रकलेमध्ये, शिल्पविद्यामध्ये, वस्त्रोद्योगात नक्षी नमुना बनविण्यासाठी, भूमितीय कारणे सांगतात, कोलम, रांगोळी इत्यादी.