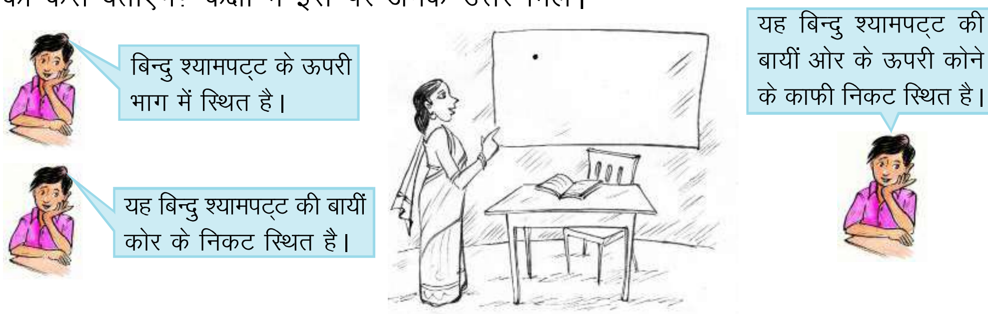
अध्याय - 15

आलेखों से परिचय

(INTRODUCTION WITH GRAPHS)

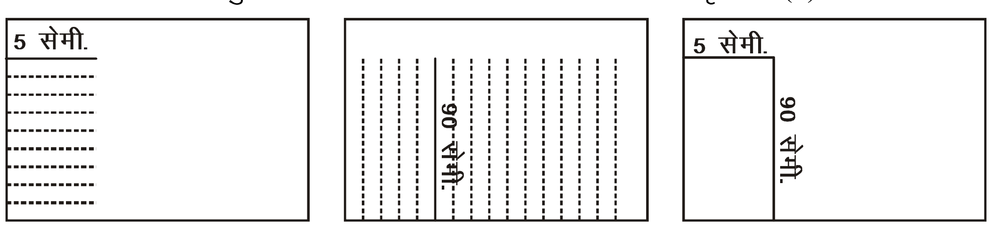
15.1 भूमिका

अध्यापिका श्यामपट्ट पर एक बिन्दु लगा देती है (आकृति–1) फिर वह विद्यार्थियों से पूछती है कि श्यामपट्ट पर अंकित बिन्दु N को आप कैसे बताएँगे? आप भी सोचिए, आप बिन्दु को कैसे बताएँगे? कक्षा में इस पर अनेक उत्तर मिले।



आकृति–1

क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक–ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर ''नहीं'' है। परन्तु यदि आप यह कहें कि बिन्दु श्यामपट्ट की बायीं ओर से लगभग 5 सेमी. दूर है तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक–ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। सोचिए क्यों? (आकृति–2 (a)) आप कह सकते हैं कि श्यामपट्ट की नीचली कोर से 90 सेमी. की दूरी पर है। क्या अब हम बिन्दु की सही–सही स्थिति बता सकते हैं? आकृति–2(b)



(a) (b) (c)

आकृति–2

ऊपर की आकृतियों से स्पष्ट है कि हम श्यापमट्ट की बायीं कोर और सबसे नीचेवाली कोर से उक्त बिन्दु की स्थिति नियत कर सकते हैं।

सोचिए क्या आप उक्त दो जानकारियों–

1. बिन्दु बोर्ड के बायीं और से 5 सेमी. है।
2. बिन्दु बोर्ड की नीचली कोर से 90 सेमी. ऊपर है।

से बोर्ड पर दो अलग–अलग बिन्दु अंकित कर सकते हैं?

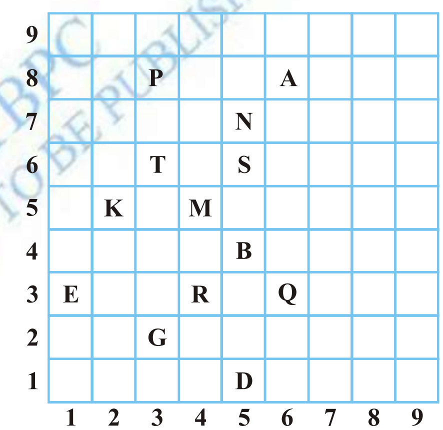
दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि किसी समतल पर बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

15.2 निर्देशांक

एक कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की मेज को एक वर्ग के रूप में निरूपित करते हुए आकृति–3 बनाई गई है, जिसमें कुछ छात्रों के नाम, अक्षर से दर्शाए गए हैं।

अब हम M छात्र की मेज को ढूँढ़ते हैं। इसके लिए हमें दो संख्याएँ चाहिए।

आप सोचिए कि अगर आपको M की स्थिति बतानी हो तो आप कैसे बताएँगे?



आकृति–3

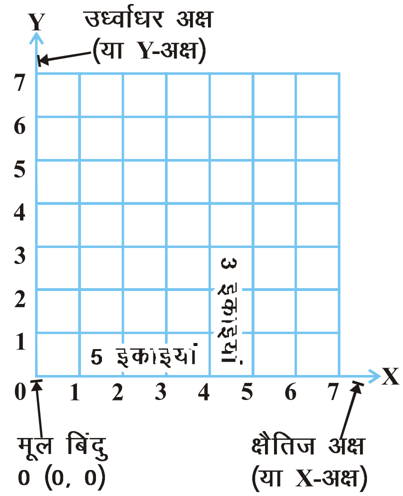
आकृति–3 में M चौथे सीट (स्तम्भ) और पाँचवें पंक्ति में है। तो M की स्थिति को (4, 5) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तम्भ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। आप शेष विद्यार्थियों के बैठने की स्थिति लिखिए। उदाहरण के लिए G छात्र की स्थति – G (3, 2) लिखिए।

आकृति–4 पर ध्यान दीजिए कि बिन्दु (5, 3) जिसकी दूरी बाएँ किनारें से 5 इकाई और निचले किनारे से 3 ऊपर इकाई है, वर्गांकित काजग पर किस प्रकार अंकित किया गया है।

कहा जाता है कि महान फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते (Rene Descartes) ने बिस्तर पर लेटे–लेटे एक चींटी को छत के कोने के पास चलते हुए देखा और उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। इस पद्धति को दकार्ते के सम्मान में कार्तीय पद्धति भी कहा जाता है।

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

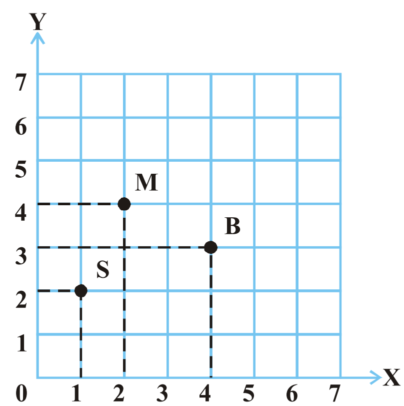
वर्गांकित कागज या आलेख कागज पर हम X - अक्ष और Y - अक्ष सुविधा के अनुसार दर्शाते हैं और जहाँ दोनों अक्ष एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिन्दु (Origin) कहा जाता है और इसे 0 से प्रकट किया जाता है। संख्या 5, बिन्दु का x - निर्देशांक तथा संख्या 3, y- निर्देशांक कहलाता है, तथा (5, 3) बिंदु के निर्देशांक है। इस प्रकार समतल पर बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है। सुविधा के लिए क्षैतिज अक्ष पर आनेवाली संख्या को पहले तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर आनेवाली संख्या को बाद में लिखते हैं।



आकृति–4

उदाहरण–1. नीचे दी गई आकृति–5 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए;

1. बिन्दु M के x निर्देशांक और y निर्देशांक क्रमशः .... और .... है। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (..............) है।
2. बिन्दु B के x निर्देशांक और y निर्देशांक क्रमशः .... और .... है। अतः B के निर्देशांक (..............) है।
3. बिन्दु S के x निर्देशांक .... है और y निर्देशांक .... है, तो S के निर्देशांक (..............) है।



आकृति–5

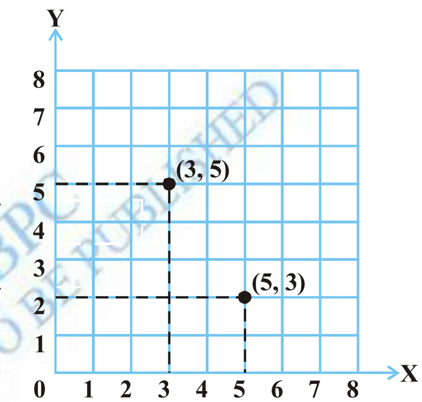
हल : (i) क्योंकि Y अक्ष से बिन्दु M की दूरी 2 एकक है, इसलिए बिन्दु M का x निर्देशांक 2 होगा। X अक्ष से बिन्दु M की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु M का y निर्देशांक 4 होगा। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (2, 4) है।

(ii) बिन्दु B के निर्देशांक क्रमशः 4 और 3 है। अतः B के निर्देशांक (4, 3) है।

(iii) बिन्दु S के x निर्देशांक 1 है और y निर्देशांक 2 है, तो S के निर्देशांक (1, 2) है।

उदाहरण–2. एक आलेख में बिन्दु (5, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिन्दु है, जो (3, 5) दर्शाता है।

हल : सबसे पहले वर्गीकृत कागज पर X अक्ष और Y अक्ष दर्शाते हैं। अब मूल बिन्दु (0, 0) से शुरू करके 5 एकक दाईं ओर चलकर फिर 3 एकक ऊपर की ओर चलते हैं, तो बिन्दु (5, 3) प्राप्त होता है। आकृति–6 से स्पष्ट है कि बिन्दु (5, 3) और बिन्दु (3, 5) अलग–अलग बिन्दु है।



आकृति–6

© BSTBPC
NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–3. आकृति–7 देखकर निम्न बिन्दुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त अक्षर चुनिए–

(i) (2, 1) (ii) (1, 2) (iii) (0, 4) (iv) (4,0)

तथा निम्न बिन्दु के निर्देशांक लिखिए– (v) A (vi) B (vii) K

हल : (i) (2, 1) है बिन्दु R

(ii) (1, 2) है बिन्दु Q

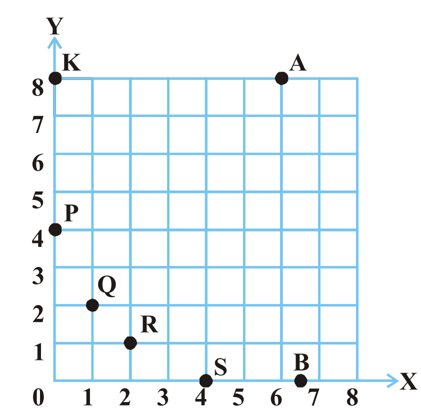
(iii) (0, 4) है बिन्दु P

(iv) (4, 0) है बिन्दु S

(v) बिन्दु A के निर्देशांक है (6, 8)

(vi) बिन्दु B के निर्देशांक है (6.5, 0)

(vii) बिन्दु K के निर्देशांक है (0, 8)

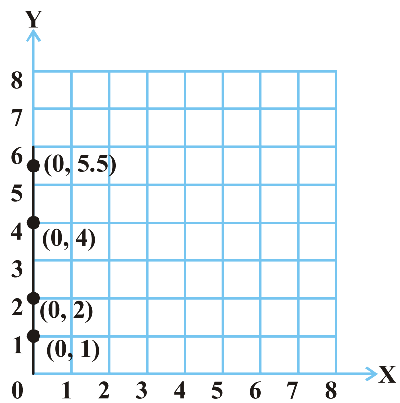


आकृति–7

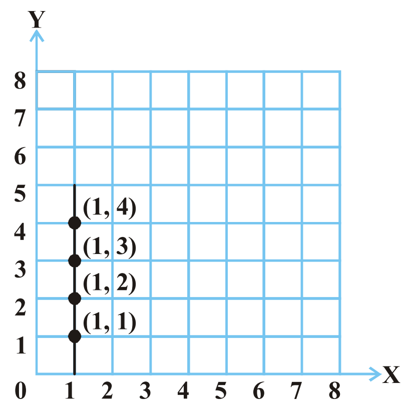
उदाहरण–4. ग्राफ पेपर पर निम्न बिन्दुओं को दर्शाइए–

(i)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 4)	(0, 5.5)
(ii)	P (1, 1)	Q (1,2)	R (1, 3)	S (1, 4)
(iii)	A (1, 4)	B (2, 4)	C(3, 4)	D (4, 4)
(iv)	E (6, 1)	F (5, 2)	G (4, 3)	H (3, 4)

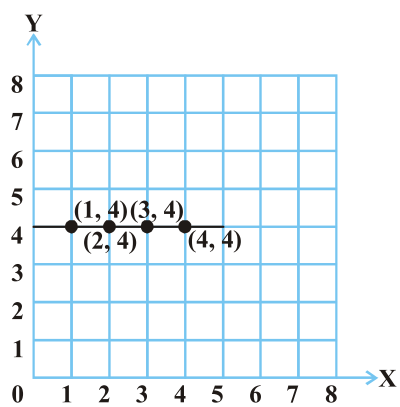
क्या ये बिन्दु एक ही सरल रेखा पर है?



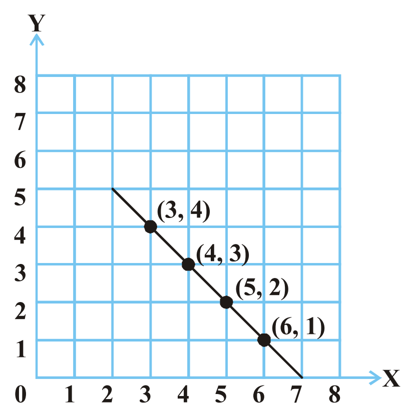
यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा, Y अक्ष पर है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा PS पर स्थित है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा AD पर स्थिति है। यह X अक्ष के समांतर है।



यहाँ सभी बिन्दु एक ही रेखा HE पर स्थित है।

ऊपर के उदाहरणों में अंकित बिन्दुओं को मिलाने पर प्राप्त आलेख एक सरल रेखा प्राप्त होती है। ऐसे आलेखों को रैखिक आलेख कहते हैं।

15.3 आरेख के अनुप्रयोग (Application of Graph)

आपने सीधे एवं प्रतिलोम अनुपात अध्याय में सीखा था कि एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती है। चीनी की अधिक खपत, चीनी पर खर्च को प्रभावित करती है। बिजली का बिल उपयोग की गई बिजली की मात्रा पर निर्भर करती है। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक स्वतंत्र चर है जबकि बिजली का बिल एक आश्रित चर है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं। आगे हम भुजा–परिमाप ग्राफ, समय–दूरी ग्राफ आदि विभिन्न स्थितियों को आलेख से दर्शाएँगे।

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

वर्ग की भुजा एवं परिमाप के मध्य आलेख

आप वर्ग के क्षेत्रफल एवं परिमाप के बारे में जानते हैं। बताइए–

यदि वर्ग की भुजा 5 सेमी. हो तो

उसका परिमाप क्या होगा?

इसी प्रकार यदि वर्ग की भुजा a इकाई हो तो उसका परिमाप (P) = 4a इकाई होगा

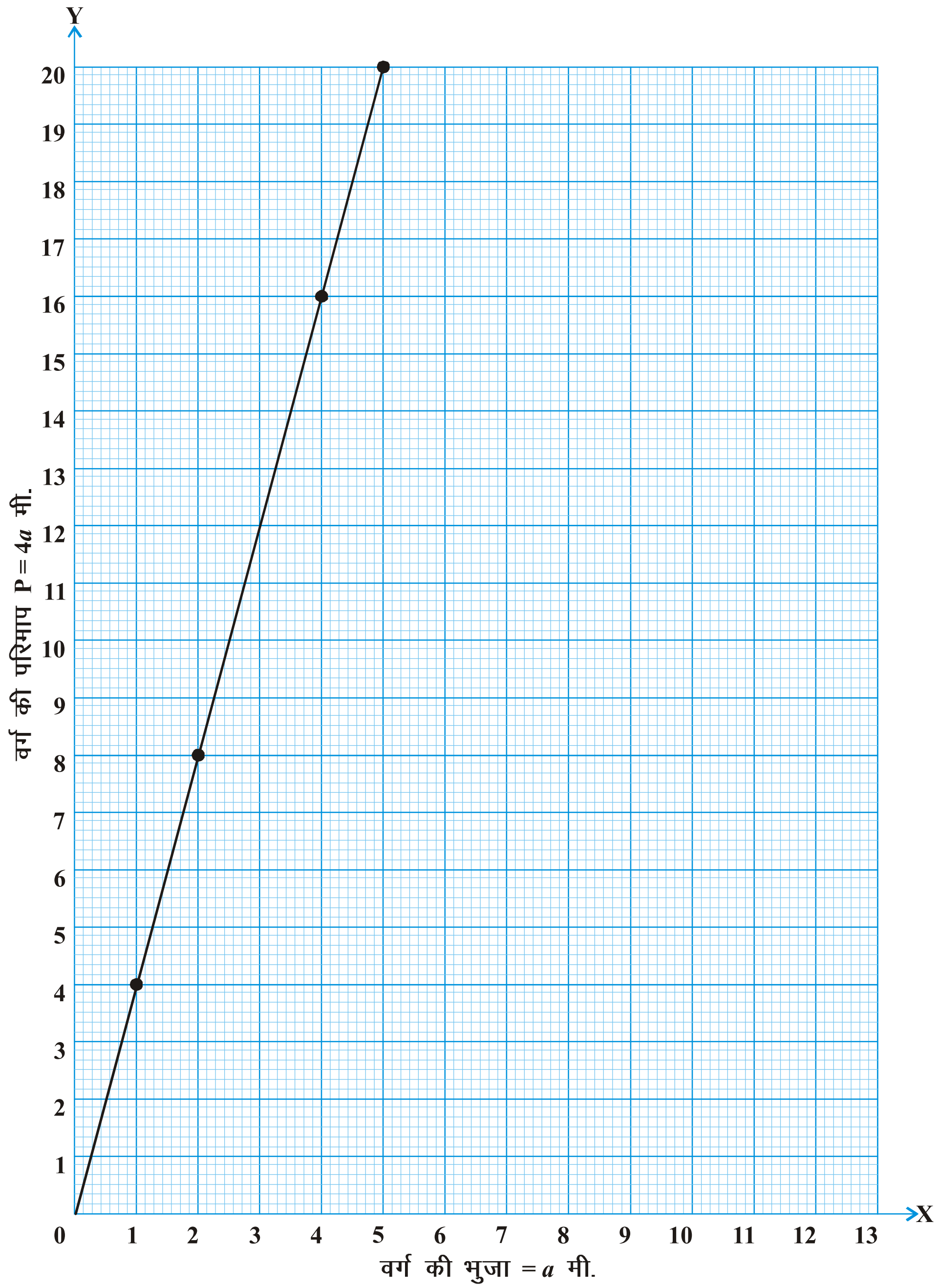
अर्थात् $P = 4a$

अब a के विभिन्न मानों के लिए P का संगत मान निम्न तालिका में भरिए–

a	0	1	2	3	4	5
$P = 4a$	0	4	8	....	16	....

अब ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं 0 (0, 0), A (1, 4), B (2, 8), C (3, 12), D (4, 16) और E (5, 20) को निम्न रूप से दर्शाया जा सकता है–

इसी प्रकार आप समबाहु त्रिभुज के लिए परिमाप व क्षेत्रफल के लिए अलग–अलग तालिका बना ग्राफ खींचिए।


Y
X
वर्ग की परिमाप P = 4a मी.
वर्ग की भुजा = a मी.
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

उदाहरण–5. वर्ग की भुजा एवं क्षेत्रफल के मध्य आरेख खीचें। इसमें दर्शाए कि भुजा 3 इकाई रहने पर क्षेत्रफल क्या होगा?

हल : हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

या $A = x^2$

अतः x के विभिन्न मानों के संगत A का मान निम्न प्रकार होगा–

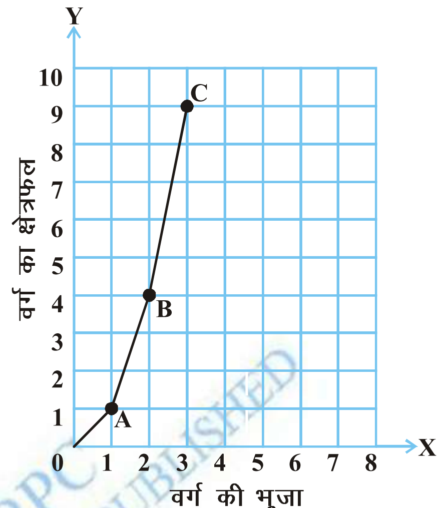
$x = 0 \Rightarrow A = O^2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow A = 1^2 = 1$

$x = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 4$

$x = 3 \Rightarrow A = 3^2 = 9$

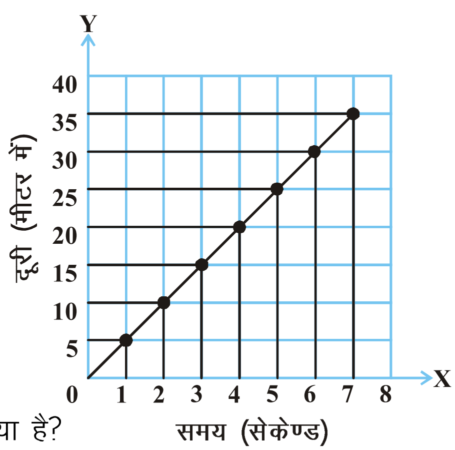
अतः 0 (0, 0), A (1, 1), B (2, 4), C (3, 9) बिन्दुओं को आरेख पर दर्शाते हैं–



अतः भुजा 3 इकाई रहने पर क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई है।

15.4 आरेख को पढ़ना (Readings of Graph)

अब तक हमने वर्ग की भुजा एवं परिमाप, वर्ग की भुजा एवं क्षेत्रफल के मध्य आरेख खींचा। इसी प्रकार संख्याओं के गुणज (जैसे 3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, ...), समय तथा साधारण ब्याज आदि के मध्य आप आरेख खींच सकते हैं। अब हम देखें कि दिए गए आरेख को कैसे पढ़ सकते हैं? निम्न उदाहरणों को देखिए–



उदाहरण–6. आरेख को ध्यानपूर्वक देखिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. 2 सेकेण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
2. 6 सेकेण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
3. 20 मी. जाने में लगा समय कितना है?
4. वाहन की चाल प्रति सेकेण्ड क्या है?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

हल : आरेख से स्पष्ट है कि–

1. जब समय = 2 सेकेण्ड तब दूरी = 10 मीटर
2. जब समय = 6 सेकेण्ड तब दूरी = 30 मीटर
3. जब दूरी = 20 मीटर तब समय = 4 सेकेण्ड
4. चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{20}{4} =$ 5 मीटर प्रति सेकेण्ड

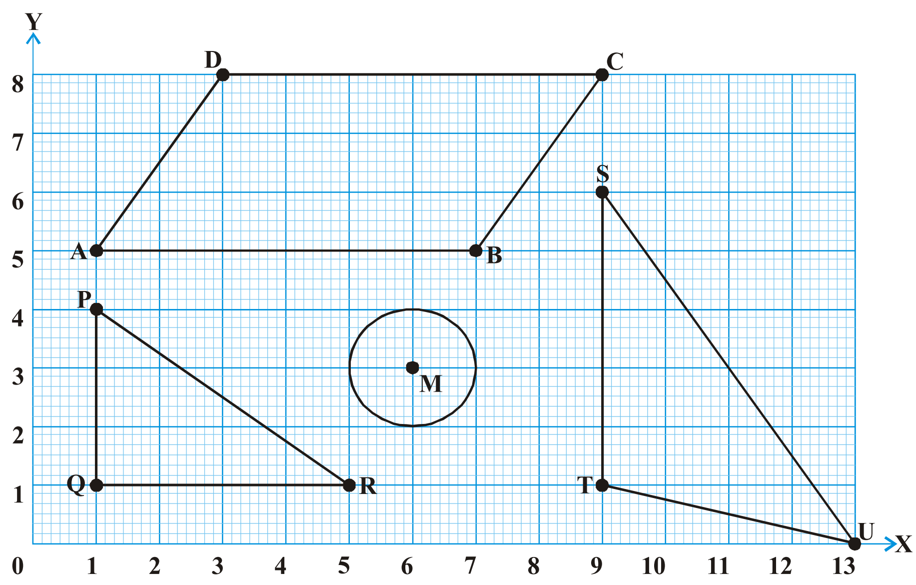
प्रश्नावली – 15.1

1. निम्न बिन्दुओं को ग्राफ में प्रदर्शित कीजिए–

(i) A (5, 3) (ii) B (3, 5) (iii) C (4, 5)

(iv) D (0, 5) (v) E (5, 0) (vi) F (2, 3)

2. अपनी ग्राफ कॉपी में निम्नलिखित चित्रों को बनाकर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–



(i) समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए तथा भुजा AB तथा DC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) Δ PQR के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा PQ एवं QR भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(iii) वृत्त के केन्द्र M के निर्देशांक ज्ञात कर वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

(iv) Δ STU के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. **निम्न तालिका अनुसार समय और साधारण ब्याज के मध्य आरेख खींचिए।**

समय	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष	4 वर्ष
सा. ब्याज	60 रु.	120 रु.	180 रु.	240 रु.

4. एक रेलगाड़ी 80 किमी. प्रति घण्टे की नियम चाल से चल रही है। विभिन्न समयों में तय की गई संगत दूरी के मध्य आरेख खींचिए।

5. **सत्य या असत्य लिखिए–**

(i) किसी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।

(ii) संख्या युग्म को बिन्दु का निर्देशांक कहते हैं।

(iii) X अक्ष पर y के निर्देशांक शून्य तथा Y अक्ष पर x के निर्देशांक शून्य होते हैं।

(iv) मूल बिन्दु का निर्देशांक (1, 1) होता है।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

हमने सीखा

1. किसी बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।
2. जहाँ X और Y अक्ष एक दूसरे को काटती है, उसे मूल बिन्दु (origin) कहा जाता है।
3. सुविधा के लिए क्षैतिज अक्ष पर आनेवाली संख्या को पहले तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर आनेवाली संख्या को बाद में लिखते हैं।
4. X अक्ष पर y के निर्देशांक शून्य तथा Y अक्ष पर x के निर्देशांक शून्य होते हैं।
5. जब निर्देशांक के बिन्दुओं को मिलाने पर सरल रेखा प्राप्त हो तो रैखिक आलेख कहलाते हैं। इसमें दोनों चरों में अनुक्रमानुपाती संबंध होता है।