12

अवकल समीकरण (Differential Equation)

12.01 प्रस्तावना (Introduction)

विज्ञान की अनेक शाखाओं के अध्ययन के दौरान बहुधा ऐसी परिस्थितियाँ आती है जब किसी परिघटना से संबंधित राशियों के मध्य सीधे सम्बन्ध ज्ञात करना कठिन कार्य होता है। परन्तु राशियाँ एवं उनके अवकलजों के मध्य सम्बन्ध आसानी से स्थापित किए जा सकते है। इसके लिए अवकल समीकरणों के उपयोग की आवश्यकता होती है।

परिभाषा (Difinition)

एक ऐसी समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर, आश्रित चर एवं आश्रित चर में स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलन विद्यमान हो, अवकल समीकरण कहलाती है। अवकलन समीकरण सामान्यतः दो प्रकार की होती है:

(i) साधारण अवकल समीकरण (Ordinary differential equation)

(ii) आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation)

ऐसी समीकरण जिसमें केवल एक ही स्वतंत्र चर हो तथा इस चर और उसके सापेक्ष एक या अधिक क्रम के अवकलज विद्यमान हो तो वे साधारण अवकल समीकरण कहलाती है यहाँ हम केवल साधारण अवकल समीकरण का ही अध्ययन करेंगे। अतः यहाँ अवकल समीकरण से अभिप्राय साधारण अवकल समीकरण ही होगा।

उदाहरणार्थ: $\frac{dy}{dx} = x^2 y,\ \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin x,$

यहाँ x स्वतंत्र चर तथा y आश्रित चर है।

12.02 अवकल समीकरण की कोटि तथा घात (Order and degree of a differential equation)

अवकल समीकरण की कोटि: किसी अवकल समीकरण में विद्यमान स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम अवकलज की कोटि ही उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।

उदाहरणार्थ:

(i) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x$ की कोटि एक है, क्योंकि इस समीकरण में आश्रित चर y का अधिकतम अवकलज एक बार ही हुआ है।

(ii) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin\theta$ की कोटि दो है, क्योंकि इस समीकरण में आश्रित चर y का अधिकतम अवकलज दो बार हुआ है।

(iii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ की कोटि एक है, क्योंकि आश्रित चर y का अधिकतम अवकलन एक बार ही हुआ है।

अवकल समीकरण की घात: किसी अवकल समीकरण की घात उस अवकल समीकरण को अवकलजों के संदर्भ में परिमेय तथा पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज गुणांक की घात ही उस अवकल समीकरण की घात कहलाती है।

(i) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - 3y = 0$ की घात 2 है, क्योंकि इस समीकरण में उपस्थित अधिकतम अवकलन $\frac{d^3y}{dx^3}$ है। जिसकी घात 2 है।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{2/3} = 0$ की घात 3 है, क्योंकि इसका परिमेयकरण करने पर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = -\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2$ प्राप्त होता है, जहाँ उच्चतम अवकलज की घात 3 है।

(iii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ की घात एक है।

टिप्पणी: किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) सदैव धनात्मक पूर्णांक होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{dy}{dx}-\cos x=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^x$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=\cos x$

(iv) $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{dy/dx}$ (v) $\frac{d^4y}{dx^4}+\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$

हल: (i) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि का अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है, इसलिए इसकी कोटि 1 है तथा $\frac{dy}{dx}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(ii) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है, इसलिए इसकी कोटि 2 है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iii) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है, इसलिए इसकी कोटि 2 है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iv) दी गई अवकल समीकरण को सरल करने पर हम देखते हैं कि $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2=y\frac{dy}{dx}$। अतः इस अवकल समीकरण की कोटि एक तथा घात दो है।

(v) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^4y}{dx^4}$ है, इसलिए इसकी कोटि 4 है। साथ ही दिया गया अवकल समीकरण अवकल गुणांकों के संदर्भ में बहुपद नहीं है। अतः घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्नमाला 12.1

निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{dy}{dx}=\sin 2x+\cos 2x$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x+\cos x$

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1}{dy/dx}=2$

5. $a\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$

6. $xdx+ydy=0$

7. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^5=0$

8. $x\frac{dy}{dx}+\frac{3}{(dy/dx)}=y^2$

12.03 अवकल समीकरण का निर्माण (Formation of differential equation)

माना $f(x, y, a) = 0$ एक किसी वक्र कुल को प्रदर्शित करता है, जो एक अचर पर निर्भर करता है।

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\phi(x, y, y', a) = 0 \qquad [\text{जहाँ } y' = \frac{dy}{dx}] \qquad (2)$$

समीकरण (1) और (2) से a का विलोप करने पर x, y, y' में एक समीकरण प्राप्त होती है। यही वक्र कुल (1) के लिए अभीष्ट अवकल समीकरण होगी। इसी प्रकार यदि दी गई समीकरण में दो स्वेच्छ अचर हो तो हम दो बार अवकलन कर इससे प्राप्त दो समीकरणों एवं वक्र कुल की समीकरण से स्वेच्छ अचरों का विलोपन कर अभीष्ट अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-2. उन सरल रेखाओं के कुल के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरती है।

हलः मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखाओं का समीकरण

$$y = mx, \text{ जहाँ } m \text{ प्राचल है।} \qquad (1)$$

समीकरण (1) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = m \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से m का विलोपन करने पर

$$x\frac{dy}{dx} = y, \text{ जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।}$$

उदाहरण-3. $y = ae^{2x} + be^{-x}$ के कुल की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः

$$y = ae^{2x} + be^{-x} \qquad (1)$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \qquad (2)$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \qquad (3)$$

समीकरण (2) एवं (3) से

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} + 2be^{-x} = 2\left(ae^{2x} + be^{-x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2y. \qquad (\text{समीकरण 1 से})$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण-4. वक्र कुल $y = e^x\left[A\sin x + B\cos x\right]$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः $y = e^x\left[A\sin x + B\cos x\right]$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर (1)

$$\frac{dy}{dx} = e^x[A\sin x + B\cos x] + e^x[A\cos x - B\sin x]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y + e^x[A\cos x - B\sin x] \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^x\left[A\cos x - B\sin x\right] + e^x\left[-A\sin x - B\cos x\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - y - y$$ (समीकरण 2 से)

या $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्नमाला 12.2

1. वक्र कुल $y = ax + \frac{b}{x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. वक्र कुल $x^2 + y^2 = a^2$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
3. वक्र कुल $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
4. वक्र कुल $y = e^x\left[A\cos x + B\sin x\right]$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
5. वक्र कुल $y = a\cos(x+b)$ जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं, की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

12.04 अवकल समीकरण का हल (Solution of a differential equation)

अवकल समीकरण के हल से अभिप्राय समीकरण में प्रयुक्त स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में एक ऐसा सम्बन्ध जिसमें कोई भी अवकल गुणांक न हो तथा इससे एवं इससे प्राप्त अवकलजों से दिया गया अवकल समीकरण सन्तुष्ट हो।

अवकल समीकरण का हल उसका पूर्वग (primitive) भी कहलाता है क्योंकि वह अवकल समीकरण उसी से व्युत्पन्न एक सम्बन्ध होता है।

व्यापक, विशिष्ट एवं विचित्र हल (General, particular and singular solution)

(i) **व्यापक हल या पूर्ण हलः** अवकल समीकरण के हल में यदि उसकी कोटि (order) के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो वह हल व्यापक हल कहलाता है। इसे पूर्ण हल, पूर्ण समाकल या पूर्ण पूर्वग भी कहते हैं।

उदाहरणार्थः $y = A\cos x + B\sin x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का व्यापक हल है क्योंकि अवकल समीकरण की कोटि 2 के बराबर स्वेच्छ अचर हल में विद्यमान है।

(ii) **विशिष्ट हलः** अवकल समीकरण के व्यापक हल में प्रयुक्त अचरों को स्वेच्छ मान देने पर प्राप्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।

उदाहरणार्थः $y = 3\cos x + 2\sin x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का विशिष्ट हल है।

(iii) **विचित्र हलः** अवकल समीकरण के वे हल जिनमें स्वेच्छ अचर विद्यमान नहीं होते हैं तथा सामान्यतया व्यापक हल की विशेष स्थिति नहीं होती हैं।

टिप्पणीः विचित्र हल पाठ्यक्रम में नहीं है। इसलिए यहाँ इस पर विस्तार से चर्चा नहीं करेंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि $y = cx + \frac{a}{c}$ अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{dy/dx}$ का हल है।

हल: दिया समीकरण $y = cx + a/c$ है। (1)

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = c \quad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से c को विलोपित करने पर

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a}{(dy/dx)}$$

अतः $y = cx + a/c$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि $y = a\sin 2x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ का हल है।

हल: दिया समीकरण $y = a\sin 2x$ है। (1)

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2a\cos 2x \quad (2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4a\sin 2x \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4a\sin 2x = 0$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$ (समीकरण (1) से)

अतः $y = a\sin 2x$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए कि $y + x + 1 = 0$ अवकल समीकरण $(y - x)dy - (y^2 - x^2)dx = 0$ का हल है।

हल: दिया समीकरण है $\because$ $y + x + 1 = 0$

$\therefore$ $$y = -(x+1) \Rightarrow dy = -dx \quad (1)$$

दी गई अवकल समीकरण का बायाँ पक्ष (LHS)

$$= (y-x)dy - (y^2 - x^2)dx$$

$$= (y-x)(-dx) - (y-x)(y+x)dx$$ [$\because$ समीकरण (1) से]

$$= -(y-x)(1+x+y)dx$$

$$= 0$$

= दायाँ पक्ष (RHS)

अतः $y + x + 1 = 0$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

प्रश्नमाला 12.3

1. सिद्ध कीजिए कि $y^2 = 4a(x+a)$ अवकल समीकरण $y = \left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$ का हल है।

2. सिद्ध कीजिए कि $y = ae^{-2x} + be^x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$ का हल है।

3. सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{c-x}{1+cx}$ अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+(1+y^2)=0$ का हल है।

4. सिद्ध कीजिए कि $y = a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ का हल है।

5. सिद्ध कीजिए कि $xy = \log y + c$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}(xy \neq 1)$ का हल है।

12.06 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात की अवकल समीकरण (Differential equation of first order and first degree)

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात की समीकरण में स्वतंत्र चर x आश्रित चर y और $\frac{dy}{dx}$ विद्यमान होते है। अतः समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ जहाँ } f(x, y) \text{ चर } x \text{ तथा } y \text{ का कोई फलन है।}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

या $\quad f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$

जिस प्रकार प्रत्येक फलन का समाकलन करना सम्भव नहीं होता है, उसी प्रकार प्रत्येक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना भी सम्भव नहीं होता है। परन्तु यदि अवकल समीकरण निम्नलिखित मानक रूपों में से किसी भी एक रूप में हो तो उस अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना सम्भव होता है।

(A) अवकल समीकरण जिसमें चरों को पृथक किया जाना संभव हो।
(B) प्रतिस्थापन द्वारा चरों का पृथक्कीकरण संभव हो।
(C) समघात रूप की अवकल समीकरण।
(D) समघात रूप में परिवर्तन संभव हो।
(E) रैखिक अवकल समीकरण।
(F) ऐसे अवकल समीकरण जिनको रैखिक अवकल समीकरण के रूप में समानीत किया जाना संभव हो।

टिप्पणी: उपर्युक्त के अतिरिक्त अवकल समीकरणों को कुछ स्थितियों में समाकल-गुणक ज्ञात करने की विधियों की सहायता से हल करना संभव होता है परन्तु पाठ्यक्रम का हिस्सा नहीं होने से उनका अध्ययन यहाँ नहीं दिया गया है।

(A) चरों का पृथक्करण (Variable separable form)

समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ में x तथा y को अलग-अलग कर निम्न रूप से व्यक्त करने पर

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \qquad (1)$$

यहाँ चर x तथा y पृथक-पृथक हो गए हैं ऐसी स्थिति में समीकरण (1) के प्रत्येक पद का अलग-अलग समाकलन करने पर निम्न हल प्राप्त होता है।

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C, \text{ जहाँ } C \text{ कोई स्वेच्छ अचर है।}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$.

हल: दी गई समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर $\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^y$

अब चरों को पृथक करने पर $e^x dx=e^{-y}dy$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int e^x dx=\int e^{-y}dy$

$\Rightarrow$ $e^x=-e^{-y}+C$

या $e^x+e^{-y}=C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-9. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\sin x-x$

हल: दी गई समीकरण $\frac{dy}{dx}=\sin x-x$

चरों को पृथक करने पर $dy=(\sin x-x)dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int dy=\int(\sin x-x)dx$

या $y=-\cos x-\frac{x^2}{2}+C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-10. हल कीजिए $x\cos^2 y dx=y\cos^2 x dy$.

हल: दिया गया समीकरण $x\cos^2 y dx=y\cos^2 x dy$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{x\cos^2 y}{y\cos^2 x}=\frac{x\sec^2 x}{y\sec^2 y}$

चरों की पृथक करने पर

या $y\sec^2 y\,dy=x\sec^2 x\,dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int y\sec^2 y\,dy=\int x\sec^2 x\,dx$

खण्डशः विधि से समाकलन करने पर

$y\tan y-\log\sec y=x\tan x-\log\sec x+C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-11. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$.

हल: दी गई समीकरण $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

अब चरों को पृथक करने पर $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\sin^{-1} x = -\sin^{-1} y + C_1$ (पहला रूप), जहाँ C_1 समाकल अचर है।

परन्तु यदि हम अंचराक C_1 को $\sin^{-1} C$ ले तो

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} C$$

प्रतिलोम फलन के सूत्र $\left[\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}\right]$ से

$$\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] = \sin^{-1} C$$

या $$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.4

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $(e^y + 1)\cos x dx + e^y \sin x dy = 0$
2. $(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$
3. $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2xy$
4. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$
5. $(\sin x + \cos x)dy + (\cos x - \sin x)dx = 0$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$
7. $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$
9. $(1+\cos x)dy = (1-\cos x)dx$
10. $\sqrt{1-x^6}dy = x^2 dx$

(B) चरों के पृथक्करण में समानीत होने वाली अवकल समीकरण (Differential equation reducable to variable separable)

इस विधि में दी गई अवकल समीकरण के अवलोकन से किसी विशिष्ट व्यंजक को प्रतिस्थापित करने से समीकरण चरों के पृथक्करण वाली समीकरण में परिणित हो जाती है और उसका हल प्राप्त कर पुनः वह प्रतिस्थापन कर समीकरण का हल प्राप्त किया जाता है। निम्न उदाहरणों से यह विधि अधिक स्पष्ट हो जाएगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-12. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$.

हल: दिये समीकरण में माना $4x + y + 1 = t$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 4$$

दी गई समीकरण में उपर्युक्त प्रतिस्थापन से

$$\frac{dt}{dx} - 4 = t^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dt}{dx} = t^2 + 4$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{t^2 + 4} dt = dx \text{ (चर पृथक्करण से)}$$

समाकलन करने पर $$\int \frac{1}{t^2 + (2)^2} dt = \int dx$$

या $$\frac{1}{2} \tan^{-1}(t/2) = x + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

या $$\tan^{-1} t/2 = 2x + 2C$$

या $$t = 2\tan(2x + C_1)$$, जहाँ $C_1 = 2C$

t का मान रखने पर अभीष्ट हल

$$4x + y + 1 = 2\tan(2x + C_1)$$

उदाहरण-13. हल कीजिए $(x-y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$.

हल: इस समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x-y)^2} \qquad (1)$$

माना $$x - y = t \Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

अतः समीकरण (1) से $$1 - \frac{dt}{dx} = \frac{a^2}{t^2}$$

सरल करने पर $$\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{a^2}{t^2} = \frac{t^2 - a^2}{t^2}$$

अतः $$dx = \left[1 + \frac{a^2}{(t^2 - a^2)}\right] dt$$

समाकलन करने पर $$\int dx = \int \left[1 + \frac{a^2}{t^2 - a^2}\right] dt$$

या $$x = t + a^2 \frac{1}{2a} \log\left(\frac{t-a}{t+a}\right) + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

t का मान रखने पर अभीष्ट हल है $$y = \frac{a}{2} \log\left\{\frac{x-y-a}{x-y+a}\right\} + C.$$

उदाहरण-14. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$.

हल: यहाँ माना $x+y=t$, x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

दी गई समीकरण में उपर्युक्त प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t+\cos t$$

या $$\frac{dt}{dx}=1+\sin t+\cos t$$

या $$\frac{dt}{(\sin t+\cos t+1)}=dx$$ [चर–पृथक्कीकरण]

या $$\frac{(1/2)\sec^2 t/2}{1+\tan t/2}dt=dx$$ [आधे कोण में बदलकर $2\cos^2 t/2$ उभयनिष्ठ लेने पर]

समाकलन करने पर $$\int\frac{(1/2)\sec^2 t/2}{1+\tan t/2}dt=\int dx$$

$$\log\left[1+\tan\frac{t}{2}\right]=x+C,$$ जहाँ C समाकल अचर है।

या $$\log\left[1+\tan\frac{(x+y)}{2}\right]=x+C.$$ [$\because$ $t=x+y$ रखने पर]

उदाहरण-15. हल कीजिए $\left[\frac{x+y-a}{x+y-b}\right]\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+a}{x+y+b}$

हल: दी गई समीकरण से

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y+a)(x+y-b)}{(x+y-a)(x+y+b)} \quad (1)$$

माना $$x+y=t\Rightarrow 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$ (अवकलन करने पर)

अतः (1) से $$\frac{dt}{dx}=\frac{(t+a)(t-b)}{(t-a)(t+b)}+1$$

सरल करने पर $$\frac{dt}{dx}=\frac{2(t^2-ab)}{(t-a)(t+b)}$$

या $$2dx=\left[1+\frac{t(b-a)}{t^2-ab}\right]dt$$

समाकलन करने पर $$\int 2dx = \int\left[1+\frac{t(b-a)}{t^2-ab}\right]dt$$

$$2x = t+\frac{b-a}{2}\log\left(t^2-ab\right)+C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

t का मान रखने पर अभीष्ट हल है।

$$x-y=\frac{b-a}{2}\log\left[\left(x+y\right)^2-ab\right]+C.$$

प्रश्नमाला 12.5

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए

1. $\left(x+y\right)^2\frac{dy}{dx}=a^2$
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$
3. $\cos\left(x+y\right)dy=dx$
4. $e^{x+y}=1+\frac{dy}{dx}$
5. $\left(x+y\right)\left(dx-dy\right)=dx+dy$
6. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y}$
7. $x+y=\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$
8. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$
9. $\frac{dy}{dx}=\sec\left(x+y\right)$
10. $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(x-y\right)+3}{2\left(x-y\right)+5}$

(C) समघात अवकल समीकरण (Homogeneous differential equation)

अवकल समीकरण $f(x,\ y)dx+g(x,\ y)dy=0$ को समघात अवकल समीकरण कहते है, यदि इसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सके

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

अर्थात् $f(x,\ y)$ और $g(x,\ y)$ के प्रत्येक पद में x तथा y की घातों का योग सदैव समान रहता है। समघात अवकल समीकरण को हल करने के लिए माना

$$y=vx \qquad (2)$$

इसे x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \qquad (3)$$

(2) तथा (3) का प्रयोग (1) में करने पर

$$v+x\frac{dv}{dx}=F\left(v\right)$$

या $$x\frac{dv}{dx}=F(v)-v$$

या $$\frac{1}{F(v)-v}dv=\frac{dx}{x}$$ [चर पृथक्कीरण से]

समाकलन करने पर $$\int \frac{1}{F(v)-v}dv = \int \frac{1}{x}dx = \log x + C$$, जहाँ C समाकल अचरांक है।

बाएँ पक्ष का समाकल कर $v = \frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर दी गई अवकल समीकरण का अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

टिप्पणी: यदि समघात अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ के रूप में हो, जहाँ $f(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन हो, तो $x = vy$ रखकर $\frac{dx}{dy}$ का मान ज्ञात करते हैं तथा $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ में $\frac{dx}{dy}$ का मान रखते हैं और अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + y^2}{3x^2}$

हल: दी गई समीकरण $$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + y^2}{3x^2} \qquad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है।

अतः माना $$y = vx \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx} \qquad (3)$$

समीकरण (2) और (3) का प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3vx^2 + v^2x^2}{3x^2} = \frac{3v + v^2}{3}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v + v^2}{3} - v = \frac{v^2}{3}$$

या $$\frac{1}{v^2}dv = \frac{1}{3x}dx$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $$-\frac{1}{v} = \frac{1}{3}\log|x| + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

या $$-\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\log|x| + C.$$ $\left[\because v = \frac{y}{x}\right]$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-17. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

हल: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है।

अतः माना $$y = vx$$

⇒ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

अतः (1) से $$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v$$

या $$\frac{1}{x}dx = \cot v\, dv$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $\log|x| = \log\sin v + \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

या $$x = C\sin v$$

v का मान रखने पर अभीष्ट हल $$x = C\sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

उदाहरण-18. हल कीजिए: $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$

हलः दी गई समीकरण से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin(y/x) - x}{x\sin(y/x)} \qquad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है

अतः माना $$y = vx \qquad (2)$$

∴ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad (3)$$

अतः समीकरण (1) से $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = v - \operatorname{cosec} v$$

या $$\frac{1}{x}dx = -\sin v dv$$ [चर पृथक्कीकरण से]

$\log(x/c) = \cos v$, जहाँ C समाकल अचर है।

या $$x = Ce^{\cos v}$$

v का मान रखने पर अभीष्ट हल, $$x = ce^{\cos(y/x)}$$

उदाहरण-19. हल कीजिए $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

हलः दी गई समीकरण से $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\log\frac{y}{x} + 1\right] \qquad (1)$$

समीकरण (1) समघात समीकरण है।

अतः माना $$y = vx \qquad (2)$$

∴ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad (3)$$

समीकरण (2) और (3) का प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = v(\log v + 1)$$

या $$x\frac{dv}{dx} = v\log v$$

या $$\frac{1}{v\log v}dv = \frac{1}{x}dx$$ [चर पृथक्ककीरण से]

समाकलन करने पर $$\int\frac{(1/v)}{\log v}dv = \int\frac{1}{x}dx$$

या $\log(\log v) = \log x + \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

या $$\log v = Cx$$

या $$\log\frac{y}{x} = Cx$$ $[\because\ v = y/x]$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.6

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$
3. $x\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = y$
4. $x\sin\left[\frac{y}{x}\right]\frac{dy}{dx} = y\sin\left[\frac{y}{x}\right] - x$
5. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$
6. $(x^2 + y^2)dy = 2xydx$
7. $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
8. $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$
9. $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$
10. $x(x - y)dy = y(x + y)dx$

(D) समघात में परिणित होने वाली अवकल समीकरण (Differential equation reducible to homogeneous form)

जब अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$, जहाँ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (1)

के रूप की हो तो इसमें अचर c तथा c' को प्रतिस्थापन $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ द्वारा हटाकर, इसे समघात बनाई जाती है। तत्पश्चात समघात समीकरण को हल करने की विधि से हलकर अन्त में $X = x - h$ तथा $Y = y - k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त किया जाता है।

अतः माना $x = X + h$; $y = Y + k$

$dx = dX$; $dy = dY$

अतः समीकरण (1) से $$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X + h) + b(Y + k) + c}{a'(X + h) + b'(Y + k) + c'}$$

या
$$\frac{dY}{dX}=\frac{(aX+bY)+(ah+bk+c)}{(a'X+b'Y)+(a'h+b'k+c')} \tag{2}$$

अब समीकरण (2) को समघात बनाने के लिए अचरों h तथा k का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि

तथा
$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0 \\ a'h+b'k+c'=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

इन्हें हलकर h तथा k का मान ज्ञात करते है।

अब समीकरण युग्म (3) का प्रयोग समीकरण (2) में करने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a'X+b'Y} \tag{4}$$

जो कि समघात है, अतः (4) को समघात समीकरण की विधि से हल कर अन्त में $X=x-h$ तथा $Y=y-k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करेंगे।

टिप्पणीः उपर्युक्त विधि उस स्थिति में विफल हो जाती है जब $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ क्योंकि तब h तथा k के मान या तो अनन्त आयेंगे या अनिर्धार्य।

ऐसी स्थिति में माना $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{1}{m}$ तो समीकरण (1) का रूप होगा

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{m[ax+by]+c'} \tag{5}$$

अब समीकरण (5) में प्रतिस्थापन $ax+by=v$ रखकर हल करने पर

$$\frac{dv}{dx}=a+b\left(\frac{v+c}{mv+c'}\right)$$

जो कि चरों को पृथक करने वाली विधि से हल की जा सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-20. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{7x-3y-7}{7y-3x+3}$.

हलः दी गई समीकरण समघात रूप में परिवर्तित होने वाली अवकल समीकरण है क्योंकि $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

अतः $x=X+h,\ y=Y+k$ रखने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{7X-3Y+(7h-3k-7)}{-3X+7Y+(7K-3h+3)} \tag{1}$$

h तथा k का चयन इस प्रकार करे जिससे

$$7h-3k-7=0$$

तथा
$$7k-3h+3=0$$

इन्हे हल करने पर $h=1$ तथा $k=0$

अतः समीकरण (1) से
$$\frac{dY}{dX}=\frac{7X-3Y}{-3X+7Y} \tag{2}$$

जोकि समघात रूप है, अतः $Y = vX$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX}$$

अतः (2) से
$$v + X\frac{dv}{dx} = \frac{7-3v}{-3+7v}$$

$\Rightarrow$
$$X\frac{dv}{dX} = \frac{7-3v}{-3+7v} - v$$

या
$$-7\frac{dX}{X} = \frac{7v-3}{v^2-1}dv \qquad \text{[चर पृथक्कीकरण से]}$$

या
$$-7\frac{dX}{X} = \frac{7}{2}\left(\frac{2v}{v^2-1}\right)dv - \frac{3}{v^2-1}dv$$

समाकलन करने पर $-7\log X = \frac{7}{2}\log\left(v^2-1\right) - \frac{3}{2}\log\left(\frac{v-1}{v+1}\right) - \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

$\therefore$
$$\log X^7 + \log\frac{(v^2-1)^{7/2}(v+1)^{3/2}}{(v-1)^{3/2}} = \log C$$

$$\log\left[(v+1)^5(v-1)^2\right]X^7 = \log C$$

v का मान रखने पर
$$\log\left[\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\right]X^7 = \log C$$

या
$$(Y+X)^5(Y-X)^2 = C$$

अब $X = x-1$ तथा $Y = y$ रखने पर

$$(y+x-1)^5(y-x+1)^2 = C$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-21. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$.

हलः दी गई अवकल समीकरण समघात रूप में परिवर्तित होने वाली समीकरण नहीं है। क्योंकि यहाँ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

अतः इस प्रकार के समीकरण को हल करने के लिए हम निम्न प्रतिस्थापन करेंगे।

$$x + y = v$$

या
$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

अतः
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{v-1} \qquad \text{[दिए समीकरण से]}$$

या
$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v-1}$$

या
$$2dx = \frac{(v-1)}{v}dv$$

या $$2dx = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

समाकलन करने पर $$\int 2dx = \int \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

$2x = v - \log v + C$, जहाँ C समाकल अचर है।

v का मान रखने पर $$2x = x + y - \log(x+y) + C$$

या $$x - y + \log(x+y) = C$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-22. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$

हल: दी गई समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{c'}$ रूप में है

इसलिए माना $$x + y = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

या $$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{2v+3}$$

या $$\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{2v+3} + 1 = \frac{3v+4}{2v+3}$$

या $$\frac{2v+3}{3v+4}dv = dx$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $$\int \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3v+4}\right)\right]dv = \int dx$$

$\dfrac{2}{3}v + \dfrac{1}{9}\log(3v+4) = x + C$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$6v + \log(3v+4) = 9x + C_1$$ (जहाँ $C_1 = 9C$)

या $$6(x+y) + \log(3x+3y+4) = 9x + C_1$$ (v का मान रखने पर)

या $$6y - 3x + \log(3x+3y+4) = C_1$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.7

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3x+2y-5}{2x+3y-5} = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+3}{2x+2y+5}$

3. $(2x+y+1)dx + (4x+2y-1)dy = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-3x-3y}{2(x+y)}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x-2y-7}{2x+3y-6}$

(E) रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equation)

अब किसी अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा उसके अवकलज प्रथम घात में हो, तो वह अवकल समीकरण प्रथम क्रम की रैखिक अवकल समीकरण कहलाती है। इसका व्यापक रूप है–

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \quad (1)$$

जहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर x के फलन या अचर है। यदि y स्वतंत्र तथा x को आश्रित चर ले तो इसका रूप

$$\frac{dx}{dy} + p_1 x = Q_1 \quad (2)$$

होता है, जहाँ P_1, Q_1 y के फलन या अचर है।

रैखिक अवकल समीकरण (1) का हलः समीकरण (1) के दोनों पक्षों को $e^{\int P dx}$ से गुणा करने पर

$$e^{\int P dx}\left[\frac{dy}{dx} + Py\right] = e^{\int P dx} Q$$

या
$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P dx}\right] = e^{\int P dx} Q$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$y \cdot e^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dy + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

या
$$y = e^{-\int P dx}\{\int Qe^{\int P dx} dx + C\}$$

जो कि समीकरण (1) का अभीष्ट हल है।

टिप्पणीः (i) $e^{\int P dx}$ समीकरण (i) का समाकलन गुणक (Integrating factor) कहलाता है। जिसे संक्षेप में (I.F.) लिखते हैं।

(ii) अवकल समीकरण को हल करने से पूर्व अवकलज का गुणांक सदैव इकाई होना चाहिए।

(iii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1\right)$ में समाकलन गुणक $e^{\int P_1 dy}$ लेना होता है तथा इसका हल

$$x = e^{-\int P_1 dy}\left\{\int Q_1 e^{\int P_1 dy} dy + C\right\}$$ होता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-23. हल कीजिए $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx} - xy = 1$.

हलः दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{x}{(1-x^2)}\right)y = \frac{1}{(1-x^2)}$$

यहाँ
$$P = -\frac{x}{\left(1-x^2\right)}, \quad Q = \frac{1}{\left(1-x^2\right)}$$

अतः समाकलन गुणांक (I.F.) $= e^{\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1-x^2} dx} = e^{\frac{1}{2}\log\left(1-x^2\right)} = \sqrt{1-x^2}$

अतः हल होगा, $y(\text{I.F.}) = \int (\text{I.F.})Q dx + C$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$\therefore \quad y\sqrt{1-x^2} = \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

या $$y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x + C.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-24. हल कीजिए $\sec x \frac{dy}{dx} = y + \sin x$.

हलः दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} - y\cos x = \sin x \cos x,$$

यहाँ $$P = -\cos x,\ Q = \sin x \cos x$$

अतः समाकलन गुणक $(\text{I.F.}) = e^{\int P dx} = e^{-\int \cos dx} = e^{-\sin x}$

अतः हल $$y \cdot e^{-\sin x} = \int \sin x \cos x e^{-\sin x} dx + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$= \int t e^{-t} dt + C \qquad [\text{यहाँ } t = \sin x, \therefore dt = \cos x dx]$$

$$= -e^{-t}(1+t) + C \qquad [\text{खण्डशः समाकलन करने पर}]$$

$$= -e^{-\sin x}(1+\sin x) + C \qquad (\because\ t = \sin x \text{ रखने पर})$$

या $$y = Ce^{\sin x} - (1+\sin x)$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-25. हल कीजिए $x\log x \frac{dy}{dx} + y = 2\log x$

हलः दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{2}{x},$$

जहाँ $$P = \frac{1}{x\log x},\ Q = \frac{2}{x}$$

समाकलन गुणक $(\text{I.F.}) = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x\log x} dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$

अतः हल $$y\log x = \int \frac{2}{x}\log x dx + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$= 2\frac{(\log x)^2}{2} + C$$

या $$y = (\log x) + \frac{C}{(\log x)}.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-26. हल कीजिए $\left(1+y^2\right)dx=\left(\tan^{-1}y-x\right)dy$.

हल: दी गई समीकरण से

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{\left(1+y^2\right)}x=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2},$$

यहाँ
$$P_1=\frac{1}{1+y^2},\ Q_1=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

अतः समाकलन गुणक $(\text{I.F.})=e^{\int P_1 dy}=e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}=e^{\tan^{-1}y}$

अतः हल है
$$xe^{\tan^{-1}y}=\int e^{\tan^{-1}y}\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)dy+C$$, जहाँ C समाकलन अचर है।

$$=\int te^{t}dt+C \qquad [\text{जहाँ } \tan^{-1}y=t \text{ माना}]$$

$$=(t-1)e^t+C$$

t का मान रखने पर समीकरण का अभीष्ट हल है

$$x=(\tan^{-1}y-1)+ce^{-\tan^{-1}y}.$$

प्रश्नमाला 12.8

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\frac{dy}{dx}+2y=4x$
2. $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$
3. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2yx=4x^2$
4. $\left(2x-10y^3\right)\frac{dy}{dx}+y=0$
5. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sin x$
6. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$
7. $\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y\right]=x$
8. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$
9. $dx+xdy=e^{-y}\sec^2 y dy$
10. $\left(1+y^2\right)+\left(x-e^{\tan^{-1}y}\right)\frac{dy}{dx}=0$

(F) रैखिक अवकल समीकरण में समानेय अवकल समीकरण (Differential equation reducible to linear differential equation)

बर्नूली समीकरण (Bernoully equation)

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n \tag{1}$$

उपर्युक्त प्रकार की अवकल समीकरणों को y^n से विभाजित करके रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है। अतः दोनों तरफ y^n का भाग देने पर

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q \tag{2}$$

माना
$$y^{1-n}=v$$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}$$

समीकरण (2) में उपर्युक्त मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$$

या $$\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q$$

जो कि रैखिक समीकरण हैं जिसे अनुच्छेद (v) में दर्शाई विधि से हल कर सकते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-27. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}+y=x^3y^6$

हल: दी गई समीकरण के दोनों पक्षों को xy^6 से भाग देने पर

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy^5}=x^2 \tag{1}$$

माना $$\frac{1}{y^5}=v\Rightarrow\frac{-5}{y^6}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

अतः (1) का परिवर्तित रूप $$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=x^2$$

या $$\frac{dv}{dx}-\frac{5}{x}v=-5x^2$$, जो कि रैखिक अवकल समीकरण है। (2)

अतः समाकलन गुणक $(I.F.)=e^{\int Pdx}=e^{-5\int\frac{1}{x}dx}=e^{-5\log x}=\frac{1}{x^5}$

अतः समीकरण (2) का हल होगा, $$v\frac{1}{x^5}=\int\frac{1}{x^5}(-5x^2)dx+C$$

या $$\frac{v}{x^5}=-5\int x^{-3}dx+C=\frac{5}{2x^2}+C$$

अतः v का मान रखने पर अभीष्ट हल $$y^{-5}=\frac{5}{2}x^3+6x^5.$$

उदाहरण-28. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{x^2}-\frac{1}{x}$

हल: दी गई समीकरण से $$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}=\frac{e^y}{x^2}$$

e^y से भाग देने पर $$e^{-y}\frac{dy}{dx}+\frac{e^{-y}}{x}=\frac{1}{x^2} \tag{1}$$

माना $e^{-y} = v \Rightarrow -e^{-y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

अतः (1) का परिवर्तित रूप $-\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{1}{x}v = \dfrac{1}{x^2}$

या $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{1}{x}v = -\dfrac{1}{x^2}$ (2)

जो कि रैखिक समीकरण है।

अतः समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \dfrac{1}{x}$

अतः (2) का हल होगा $v \cdot \dfrac{1}{x} = \int \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

या $\dfrac{v}{x} = \dfrac{1}{2x^2} + C$

अतः v का मान रखने पर अभीष्ट हल, $2xe^{-y} - 1 = 2x^2C$.

उदाहरण-29. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)\left(1+y^2\right) = 0$

हल: दी समीकरण है: $\dfrac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)\left(1+y^2\right) = 0$

या $\dfrac{1}{\left(1+y^2\right)}\dfrac{dy}{dx} = -\left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)$

या $\dfrac{1}{\left(1+y^2\right)}\dfrac{dy}{dx} + 2x\tan^{-1}y = x^3$ (1)

माना $\tan^{-1}y = v \Rightarrow \dfrac{1}{\left(1+y^2\right)}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

अतः समीकरण (1) से $\dfrac{dv}{dx} + 2xv = x^3$

जो कि रैखिक समीकरण है, जहाँ $P = 2x,\ Q = x^3$

$\therefore$ समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{2\int x dx} = e^{x^2}$

अतः अभीष्ट हल $v \cdot e^{x^2} = \int x^3 e^{x^2} dx + C$

$= \dfrac{1}{2}\int x^2 (2x) e^{x^2} dx + C$

$= \dfrac{1}{2}\int t e^t dt + C$, [जहाँ $t = x^2,\ \therefore dt = 2xdx$]

$= \dfrac{1}{2}e^t (t-1) + C$ [खण्डशः समाकलन से]

$= \dfrac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + C,$ $\left[\because t = x^2\right]$

v का मान पुनः प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\tan^{-1} y\right)e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+C$$

$$\tan^{-1} y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)+ce^{-x^2}.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-30. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$; का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

यदि $x=\pi/3$ तथा $y=0$

हल: दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x \tag{1}$$

यहाँ $P=2\tan x,\ Q=\sin x$

$$\text{I.F.} = e^{2\int \tan x dx} = e^{2\log\sec x} = e^{\log\sec^2 x} = \sec^2 x$$

अवकल समीकरण का व्यापक हल

$$y\times \text{I.F.} = \int (\text{I.F.})\times Q dx$$

या $y\cdot\sec^2 x = \int \sec^2 x\times\sin x dx$

या $y\cdot\sec^2 x = \int \sec x\tan x\, dx$

या $y\cdot\sec^2 x = \sec x + C$ (2)

जब $x=\pi/3,\ y=0$ समीकरण (2) में रखने पर

$$0=\sec\pi/3+C$$

या $C=-2$

$C=-2$ समीकरण (2) में रखने पर

$$y\sec^2 x=\sec x-2$$

या $y=\cos x-2\cos^2 x$

अभीष्ट विशिष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.9

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$
2. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^x-e^y\right)$
3. $\frac{dy}{dx}-y\tan x=-y^2\sec x$
4. $\tan x\cos x\frac{dy}{dx}+\sin y+e^{\sin x}=0$
5. $\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$
6. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\log y=\frac{y}{x^2}(\log y)^2$
7. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$ यदि $x=1,\ y=0$

विविध प्रश्नमाला–12

1. समीकरण $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(क) $y=\cot^{-1}x+C$ (ख) $y=\tan^{-1}x+C$ (ग) $y=\sin^{-1}x+C$ (घ) $y=\cos^{-1}x+C$

2. समीकरण $\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$ का हल है

(क) $y+x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ (ख) $y-x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ (ग) $y+x^2=e^{3x}+C$ (घ) $y-x^2=e^{3x}+C$

3. समीकरण $\frac{dy}{dx}+\cos x\tan y=0$ का हल है

(क) $\log\sin y+\sin x+C$ (ख) $\log\sin x\sin y=C$ (ग) $\sin y+\log\sin x+C$ (घ) $\sin x\sin y=C$

4. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ का हल है

(क) $y=\log(e^x+e^{-x})+C$ (ख) $y=\log(e^x-e^{-x})+C$

(ग) $y=\log(e^x+1)+C$ (घ) $y=\log(1-e^{-x})+C$

5. समीकरण $e^{-x+y}\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(क) $e^y=e^x+C$ (ख) $e^y=e^{-x}+C$ (ग) $e^{-y}=e^{-x}+C$ (घ) $e^{-y}=e^x+C$

6. समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}+y=0$ का हल है

(क) $x+\frac{1}{2}\log(1+y)=C$ (ख) $x+\frac{1}{2}\log(1+y^2)=C$

(ग) $x+\log(1+y)=C$ (घ) $x+\log(1+y^2)=C$

7. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\cos^2 y$ का हल है

(क) $x+\tan y=C$ (ख) $\tan y=x+C$ (ग) $\sin y+x=C$ (घ) $\sin y-x=C$

8. समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{y+x}+e^y x^2$ का हल है

(क) $e^x+e^y=\frac{x^3}{3}+C$ (ख) $e^{-x}+e^y+\frac{x^3}{3}=C$ (ग) $e^{-x}+^{-y}=\frac{x^3}{3}+C$ (घ) $e^x+e^{-y}+\frac{x^3}{3}=C$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा रैखिक समीकरण में परिवर्तित होगी?

(क) $y=t$ (ख) $y^2=t$ (ग) $\frac{1}{y}=t$ (घ) $\frac{1}{y^2}=t$

10. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+xy=e^{-x}y^3$ में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा अवकल समीकरण में परिवर्तित होगी?

(क) $\frac{1}{y}=v$ (ख) $y^{-2}=v$ (ग) $y^{-3}=v$ (घ) $y^3=v$

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin x$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।

13. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sin x}y=e^{x}$ का समाकल गुणक ज्ञात कीजिए।

14. अवकल समीकरण $\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=1$ किस रूप की है?

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-y\tan x=e^{x}\sec x$ किस रूप की है?

निम्नलिखित अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+3y+1}{3x+2y+1}$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left\{\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}$

18. $x\frac{dy}{dx}=y+2\sqrt{y^2-x^2}$

19. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^{y}-e^{x}\right)$

20. $\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक ऐसी समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर, आश्रित चर एवं उनके अवकलज विद्यमान हो, अवकल समीकरण कहलाती है। अवकलन समीकरण सामान्यत: दो प्रकार की होती है।
   (i) साधारण अवकल समीकरण (Ordinary differentaial equation)
   (ii) आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation)
   ऐसी समीकरण जिसमें केवल एक ही स्वतंत्र चर हो और उसके सापेक्ष अवकलज विद्यमान हो, साधारण अवकल समीकरण कहलाती है।
2. किसी अवकल समीकरण में विद्यमान स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम अवकलज की कोटि ही उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।
3. किसी अवकल समीकरण की घात उस अवकल समीकरण का अवकलजों के संदर्भ में परिमेय तथा पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलन की घात ही उस अवकल समीकरण की घात कहलाती है।
4. **अवकल समीकरण का हल:** अवकल समीकरण के हल से अभिप्राय समीकरण में प्रयुक्त स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में एक ऐसा संबन्ध जिसमें कोई भी अवकलज गुणांक न हो तथा यह सम्बन्ध एवं इससे प्राप्त अवकल गुणांक दिए हुए अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करते हो।
   अवकल समीकरण का हल उसका पूर्वग (primitive) भी कहलाता है क्योंकि वह अवकल समीकरण उसी से व्युत्पन्न एक सम्बन्ध होता है।
   (i) **व्यापक हल या पूर्ण हल:** अवकल समीकरण के हल में यदि उसकी कोटि (order) के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो वह हल व्यापक हल कहलाता है। इसे पूर्ण हल, पूर्ण समाकल या पूर्ण पूर्वग भी कहते हैं।
   (ii) **विशिष्ट हल:** अवकल समीकरण के व्यापक हल में प्रयुक्त अचरों को स्वेच्छ मान देने पर प्राप्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।
   (iii) **विचित्र हल:** अवकल समीकरण के वे हल जिनमें स्वेच्छ अचर विद्यमान नहीं होते हैं तथा सामान्यतया व्यापक हल की विशेष स्थिति नहीं होती हैं।

5. प्रथम क्रम एवं प्रथम घात की अवकल समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियाँ

(A) **चरों को पृथक करने वाली विधि:** समीकरण के व्यापक रूप $f(x)dx + g(y)dy = 0$ में लिखकर समाकलन करने पर अभीष्ट हल प्राप्त किया जा सकता है।

(B) **प्रतिस्थापन द्वारा चरों के पृथक्कीकरण विधि:** समीकरण के अवलोकन से किसी विशिष्ट व्यंजन को प्रतिस्थापित करने मात्र से समीकरण पृथक्करण वाली समीकरण में परिणित हो जाती है उसका हल प्राप्त करने के पश्चात वह प्रतिस्थापन लगाकर अभीष्ट हल प्राप्त किया जा सकता है।

(C) **समघात अवकल समीकरण:** यदि अवकल समीकरण के व्यापक रूप को $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $f_1(x,y)$ तथा $f_2(x,y), x$ तथा y में सम घात फलन हो तो चरों को पृथक करने वाली समीकरण में बदलने हेतु प्रतिस्थापन $y = vx$ का प्रयोग करें।

(D) **समघात में परिणित होने वाली अवकल समीकरण**

(i) रूप: $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$, जहाँ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

समघात में बदलने हेतु $x = X+h,\ y = Y+k$ प्रतिस्थापित करें तथा अचर h व k का चुनाव इस प्रकार करें कि $ah+bk+c=0$ तथा $a'h+b'k+c'=0$ इन्हें हल कर h व k ज्ञात करें। अन्त में $X = x-h$ तथा $Y = y-k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करें।

(ii) जब $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ हो तो उपरोक्त प्रकार की समीकरण को प्रतिस्थापन $ax+by = v$ मानकर चरों को पृथक करने वाली समीकरण में बदलकर हल प्राप्त करना होता है।

(E) **रैखिक अवकल समीकरण**

(i) व्यापक रूप $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ जहाँ P तथा Q, x के फलन अथवा अचर है।

समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P dx}$

हल: $y(\text{I.F.}) = \int (\text{I.F.}) \times Q dx + C$

(ii) व्यापक रूप $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ जहाँ P_1 तथा Q_1, y के फलन अथवा अचर है।

तब समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P_1 dy}$

हल: $x \times \text{I.F.} = \int I.F. \times Q_1 dy + C$

6. **रैखिक समीकरण में बदले जाने वाली अवकल समीकरण (बरनॉली रूप) व्यापक रूप** $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, जहाँ P तथा Q, x के फलन अथवा अचर है इसे रैखिक समीकरण में बदलने हेतु y^n से भाग दें फिर $\frac{1}{y^n} = t$ रखकर हल करें। अन्त में $t = y^{-n}$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करें।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 12.1

1. कोटि 1 घात 1
2. कोटि 2 घात 1
3. कोटि 2 घात 2
4. कोटि 1 घात 4
5. कोटि 2 घात 2
6. कोटि 1 घात 1
7. कोटि 2 घात 3
8. कोटि 1 घात 2

प्रश्नमाला 12.2

1. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$
2. $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-8\dfrac{dy}{dx}+15y=0$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

प्रश्नमाला 12.4

1. $\sin x\left(e^y+1\right)=C$
2. $y-x=C(1+xy)$
3. $\log y=2\left[x-\log(x+1)\right]+C$
4. $e^y=e^x+\dfrac{1}{3}x^3+C$
5. $e^y(\sin x+\cos x)=C$
6. $y=e^{3x}+C$
7. $\sin^2 x+\sin^2 y=C$
8. $y\sin y=x^2\log x+C$
9. $y=2\tan\dfrac{x}{2}-x+C$
10. $y=\dfrac{1}{3}\sin^{-1}x^3+C$

प्रश्नमाला 12.5

1. $x+y=a\tan\left(\dfrac{y-C}{a}\right)$
2. $x+y+2=ce^y$
3. $y=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+C$
4. $x+e^{-(x+y)}=C$
5. $x-y+c=\log(x+y)$
6. $2(y-x)=\log(1+2x+2y)+C_1$
7. $x=\tan(x+y)-\sec(x+y)+C$
8. $2x+(x-y)^2=0$
9. $y=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+C$
10. $2(x-y)+\log(x-y+2)=x+c$

प्रश्नमाला 12.6

1. $y=Ce^{x^3/3y^3}$
2. $\tan\dfrac{y}{2x}=Cx$
3. $(x+cy)=y\log x$
4. $x=Ce^{\cos(y/x)}$
5. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$
6. $x=C\left(x^2-y^2\right)$
7. $x+ye^{x/y}=C$
8. $x^2y^2+2x^3y=C$
9. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\log x+C$
10. $\dfrac{x}{y}+\log(xy)=0$

प्रश्नमाला 12.7

1. $3\left(x^2+y^2\right)+4xy-10(x+y-1)=C$
2. $x-2y+\log(x-y+2)=C$
3. $x+2y+\log(2x+y-1)=C$
4. $3x+2y+C+2\log(1-x-y)=0$
5. $3(y-1)^2+4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(y-1)-6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=C$

प्रश्नमाला 12.8

1. $y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$
2. $y = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}$
3. $y = \frac{4x^3}{3(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x^2)}$
4. $xy^2 = 2y^5 + C$
5. $y \sin x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
6. $y = \sqrt{1-x^2} + C(1-x^2)$
7. $x^2 y = C + (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$
8. $16x^2 y = 4x^4 \log x - x^4 + C$
9. $xe^y = \tan y + C$
10. $x = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1} y} + Ce^{-\tan^{-1} y}$

प्रश्नमाला 12.9

1. $y^{-2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$
2. $e^y = e^x - 1 + Ce^{-e^x}$
3. $\frac{1}{y} - \sin x + C \cos x = 0$
4. $\sin x \sin y = C + e^{\sin x}$
5. $\tan y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$
6. $\frac{1}{\log y} = \frac{1}{2x} + Cx$
7. $y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \pi/4$

विविध प्रश्नमाला—12

1. (ख)
2. (क)
3. (क)
4. (ख)
5. (क)
6. (ख)
7. (ख)
8. (घ)
9. (ग)
10. (ख)
11. $y + x^2 = \frac{1}{3}e^{3x} + C$
12. $\sec x$
13. $\tan x / 2$
14. चरों को पृथक-पृथक में परिवर्तित करने वाली समीकरण
15. रैखिक समीकरण
16. $2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = 0$
17. $\log\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$
18. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3$
19. $e^y = e^x + 1 + Ce^{e^x}$
20. $e^{e^2} \tan y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x/2} + C$