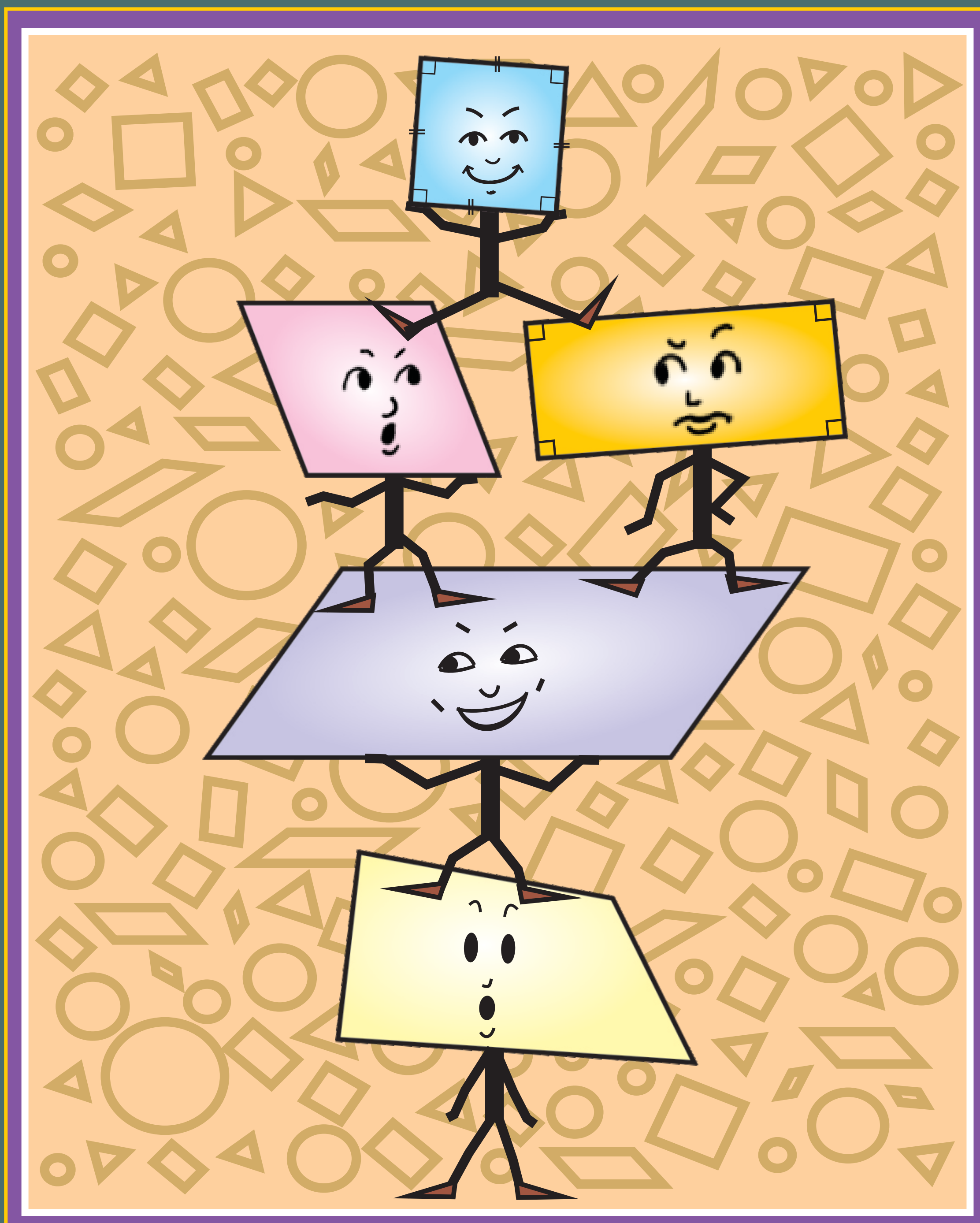
गणित

इयत्ता आठवी



शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दि.३.३.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

इयत्ता आठवी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

C9ZXXJ

आपल्या स्मार्टफोनवरील DIKSHA App द्वारे पाठ्यपुस्तकाच्या पहिल्या पृष्ठावरील Q. R. Code द्वारे डिजिटल पाठ्यपुस्तक व प्रत्येक पाठामध्ये असलेल्या Q. R. Code द्वारे त्या पाठासंबंधित अध्ययन अध्यापनासाठी उपयुक्त दृकश्राव्य साहित्य उपलब्ध होईल.

प्रथमावृत्ती : 2018 © महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ पुणे - ४११ ००४.

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाकडे या पुस्तकाचे सर्व हक्क राहतील. या पुस्तकातील कोणताही भाग संचालक, महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ यांच्या लेखी परवानगीशिवाय उद्धृत करता येणार नाही.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन

श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरजुळणी

मुद्रा विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

प्रमुख संयोजक

उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. सुरेश दाते
श्री. उमेश रेळे
श्री. बन्सी हावळे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद
श्री. अन्सार शेख
श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. प्रमोद ठोंबरे
डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. प्रताप काशिद
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. आण्णापा परीट
श्री. गणेश कोलते
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. वसंत शेवाळे
श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती आर्या भिडे

निर्मिती

सच्चितानंद आफळे
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद

७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश

N/PB/2018-19/50,000

मुद्रक

PRINTOGRAPHY SYSTEMS (INDIA)
PVT. LTD., MUMBAI

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**

विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**

दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

तुम्हां सर्वांचे आठवीच्या वर्गात स्वागत आहे !

इयत्ता पहिली ते सातवीपर्यंतची गणिताची पाठ्यपुस्तके तुम्ही अभ्यासली आहेत. आठवीचे पाठ्यपुस्तक तुमच्या हाती देताना आम्हांला आनंद होत आहे.

गणित हा विषय नीट समजावा, तो मनोरंजक वाटावा, यासाठी पाठ्यपुस्तकात काही कृती व रचना दिल्या आहेत, त्या अवश्य करून पाहा. त्यांसंबंधी आपापसांत चर्चा करा. त्यावरून गणितातील काही नवे गुणधर्म तुम्हांला समजतील.

पाठ्यपुस्तकातील प्रत्येक प्रकरण तुम्ही लक्षपूर्वक, बारकाईने वाचावे अशी अपेक्षा आहे. एखादा घटक, उपघटक नीट समजला नाही तर शिक्षक, पालक किंवा इतर विद्यार्थ्यांच्या मदतीने तो समजून घ्या. त्यासाठी माहिती तंत्रज्ञानाचीही मदत घ्या. प्रत्येक प्रकरणाच्या शेवटी क्यू आर कोड दिले आहेत, त्यांचाही उपयोग करा.

पाठातील घटकांचे विवेचन समजले की सराव संचांतील उदाहरणे सोडवा. सरावामुळे घटकांतील महत्त्वाचे मुद्दे अधिक चांगले समजतील व लक्षात राहतील. सरावसंचांतील उदाहरणांसारखी अनेक उदाहरणे तुम्हीसुद्धा तयार करू शकाल. सरावसंचांतील तारांकित उदाहरणे थोडी आव्हानात्मक आहेत, तीही अवश्य सोडवा.

गणिताच्या अभ्यासात अनेकदा दिलेली माहिती कमी दिसली तरी तर्कशुद्ध विचारांनी अधिक निष्कर्ष मिळवता येतात. उदाहरणार्थ त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कसोट्या. पुढील अभ्यासात या कसोट्यांचा उपयोग प्रकर्षाने होणार आहे. त्यांचा बारकाईने अभ्यास करा.

जीवनातील आर्थिक व्यवहारात वापरले जाणारे चक्रवाढव्याज, सूट – कमिशन, चलन, नियमित आणि अनियमित विविध आकृत्यांचे क्षेत्रफळ, काही त्रिमितीय आकारांचे घनफळ इत्यादी या पुस्तकात समजावून दिले आहे.

गणिताचा अभ्यास करताना पूर्वीच्या इयत्तांत शिकलेले ज्ञान वापरावे लागते, म्हणून विविध घटकांतील महत्त्वाची सूत्रे, गुणधर्म इत्यादी 'हे मला समजले' या शीर्षकाखाली चौकटींत दिले आहे. ते पक्के लक्षात ठेवा.

आठवीचे वर्ष हे प्राथमिक शिक्षणातील शेवटचे वर्ष आहे. यावर्षी चांगला अभ्यास करून माध्यमिक शिक्षणासाठी इयत्ता नववीत आत्मविश्वासाने प्रवेश करा. त्यासाठी तुम्हांला हार्दिक शुभेच्छा !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ एप्रिल २०१८, अक्षय्य तृतीया
भारतीय सौर दिनांक : २८ चैत्र १९४०

इयत्ता आठवी – गणित अध्ययन निष्पत्ती

अध्ययनात सुचविलेली शैक्षणिक प्रक्रिया	अध्ययन निष्पत्ती
अध्ययनकर्त्यास एकट्याने/ जोडीने/ गटात संधी देऊन कृती करण्यास प्रवृत्त करणे. • परिमेय संख्यांची सर्व क्रियांसह उदाहरणे शोधणे आणि या क्रियांमधील आकृतिबंध शोधणे. • वर्गसंख्या, वर्गमूळ, घनसंख्या, घनमूळ यांचे आकृतिबंध शोधून पूर्णांकाच्या घातासाठी नियम शोधणे. • साधी समीकरणे तयार करता येतील अशी परिस्थिती पुरविणे आणि साध्या पद्धती वापरून ती सोडविता येतील यासाठी प्रोत्साहन देणे. • संख्यांच्या वितरण गुणधर्मावर आधारित, दोन बैजिक पदे किंवा बहुपदी यांच्या गुणाकाराचा अनुभव देणे आणि वेगवेगळ्या बैजिक नित्यसमानतांचे प्रत्यक्ष उदाहरणाने सामान्यीकरण करणे. • दोन संख्यांचे अवयव पाडणे या पूर्वज्ञानावर, समर्पक कृतींच्या मदतीने बैजिक पदावल्यांचे अवयव याची ओळख करून देणे. • शतमानाचा उपयोग अंतर्भूत आहे अशा सूट, नफा-तोटा, सरळव्याज, चक्रवाढव्याज इत्यादींसाठी घटना पुरविणे. • सरळव्याज पुन्हा पुन्हा काढून चक्रवाढव्याजाचे सूत्र मिळविता येणे, यासाठी विविध उदाहरणे तयार करून देणे. • एक राशी दुसऱ्या राशीवर अवलंबून आहे अशा विविध घटना पुरविणे. दोन्ही राशी एकीबरोबर दुसरी अशा वाढतात किंवा एक राशी वाढली की दुसरी कमी होते अशा घटना ओळखण्यासाठी प्रोत्साहन देणे. उदाहरणार्थ, वाहनाचा वेग वाढला की तेच अंतर कापायला लागणारा वेळ कमी लागतो. • वेगवेगळ्या चौकोनांचे कोन आणि बाजू मोजणे आणि त्यांच्यातील संबंधांचा आकृतिबंध शोधणे, त्यांनी सामान्यीकरण करून नियम शोधणे आणि नंतर उदाहरणाने पडताळणे. • समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म, चौकोन रचना करून, त्याचे कर्ण काढून, बाजू व कोन मोजून पडताळून पाहणे आणि कारणे देणे.	**अध्ययनार्थी** • आकृतिबंधाद्वारे परिमेय संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांच्या गुणधर्मांचे सामान्यीकरण करतात. • दिलेल्या दोन परिमेय संख्यांमधील जास्तीत जास्त परिमेय संख्या शोधून काढतात. • विविध पद्धतीने वर्ग, घन, वर्गमूळ व घनमूळ काढतात. • पूर्णांक घातांकाची उदाहरणे सोडवितात. • चलाचा वापर करून कोडी व दैनंदिन जीवनातील उदाहरणे सोडवितात. • बैजिक राशींचा गुणाकार करतात. • उदा. $(2x + 5)\ (3x^2 + 7)$ चा विस्तार करतात. • दैनंदिन जीवनातील समस्या सोडविण्यासाठी बैजिक नित्यसमानतांचा वापर करतात. • सूट आणि चक्रवाढ व्याजावरील उदाहरणात, नफा अथवा तोटा काढण्यासाठी शेकडेवारीच्या संकल्पनांचा उपयोग करतात. • छापील किंमत व प्रत्यक्ष सूट दिली असता शेकडा सूट काढतात किंवा विक्री किंमत आणि नफा दिला असता शेकडा नफा काढतात. • सम चलन आणि व्यस्त चलन यांवर आधारित उदाहरणे सोडवितात. • चौकोनाच्या कोनांच्या मापांवरील बेरजेचा गुणधर्म वापरून उदाहरणे सोडवितात. • समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म पडताळून पाहतात आणि त्यांच्यातील संबंध कारणे देऊन स्पष्ट करतात. • कंपास आणि पट्टीच्या साहाय्याने विविध चौकोनांच्या रचना करतात. • आकृतिबंधाच्या साहाय्याने ऑयलरच्या सूत्राचा पडताळा घेतात.

अध्ययनात सुचविलेली शैक्षणिक प्रक्रिया	अध्ययन निष्पत्ती
• भौमितिक साधनांच्या मदतीने विविध चौकोन रचनांचे प्रात्यक्षिक देणे. • आलेख कागदावर समलंब चौकोन आणि इतर बहुभुजाकृती काढणे आणि विद्यार्थ्यांनी एकक चौरस मोजून त्यांचे क्षेत्रफळ ठरविणे. • त्रिकोण आणि आयत (चौरस) यांच्या क्षेत्रफळांचा उपयोग करून समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढणे. • घन, इष्टिकाचिती आणि वृत्तचिती यांसारख्या त्रिमितीय आकृत्यांची पृष्ठे ओळखणे. • घन आणि इष्टिकाचिती, वृत्तचितीच्या पृष्ठफळाचे सूत्र आयत, चौरस आणि वर्तुळाच्या क्षेत्रफळ सूत्रांचा वापर करून काढणे. • घन आणि इष्टिकाचितीचे घनफळ घन एकक वापरून काढणे. • सामग्री जमविणे, तिचे वर्गीकरण करणे आणि स्तंभालेख काढणे. • दिलेल्या सामग्रीची प्रातिनिधिक किंमत काढणे म्हणजेच सामग्रीचा मध्य काढणे. • एकरूपतेचे निकष आधी ठरवून व आकृत्या एकमेकांवर ठेवून एकरूपता गुणधर्माचा पडताळा घेणे.	• चौकटीचा कागद किंवा आलेख कागद यांचा वापर करून बहुभुजाकृती आणि समलंब चौकोन यांचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढतात आणि सूत्राचा वापर करून पडताळा घेतात. • बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ काढतात. • इष्टिकाचिती व वृत्तचिती आकाराच्या वस्तूंचे पृष्ठफळ व घनफळ काढतात. • स्तंभालेखाचे वाचन करतात व अर्थनिर्वचन करतात. • दोन समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे तयार होणाऱ्या कोनांच्या जोड्यांचे गुणधर्म पडताळून पाहतात. • बाबाबा, बाकोबा, कोबाको, कर्णभुजा या कसोट्या वापरून त्रिकोणांची एकरूपता स्पष्ट करतात. • आलेख कागद किंवा चौकटींचा कागद वापरून बंदिस्त आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढतात. • दैनंदिन व्यवहारातील सांख्यिक माहितीवरून मध्य काढतात. • दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढण्याची रचना करतात.

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक मुद्दे

इयत्ता आठवीच्या पाठ्यपुस्तकाचा उपयोग वर्गामध्ये प्रश्नोत्तरे, कृती, चर्चा व विद्यार्थ्यांशी संवाद या विविध माध्यमांतून होणे आवश्यक आहे. त्यासाठी पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन करावे. वाचन करताना अध्यापनाच्या दृष्टीने महत्वाची वाक्ये अधोरेखित करावीत. त्यांचा संदर्भ समजून घेण्यासाठी मागील व पुढील इयत्तांची पाठयपुस्तके व इतर साहित्य अभ्यासावे. यासाठी क्यू आर कोडवरील माहितीचाही उपयोग होईल.

पुस्तकात आपला परिसर, भूगोल, विज्ञान, अर्थशास्त्र या सर्व विषयांचा गणिताशी समन्वय साधला आहे. अशा अनेक विषयांमध्ये गणितातील संकल्पनांचा उपयोग होतो हे शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना दाखवावे. शिक्षकांनी उपक्रम, प्रकल्प व प्रात्यक्षिके करुन घ्यावीत. त्यामुळे गणिताचा व्यवहारातील उपयोग स्पष्ट होईल व ते शिकण्याचे महत्त्व विद्यार्थ्यांना पटेल. गणितातील संकल्पनांचे स्पष्टीकरण सोप्या भाषेत दिले आहे. सराव संचात दिलेल्या उदाहरणांवर आधारित अनेक उदाहरणे शिक्षकांनी तयार करुन विद्यार्थ्यांना सोडवण्यास द्यावीत व त्यांनाही नवीन उदाहरणे तयार करण्यास प्रोत्साहन द्यावे.

विद्यार्थ्यांसाठी काही आव्हानात्मक प्रश्न तारांकित स्वरुपात दिले आहेत. अधिक माहितीसाठी या शीर्षकाखाली थोडी जास्तीची माहिती दिली आहे. ही माहिती गणिताचा पुढील अभ्यास करताना विद्यार्थ्यांना निश्चित उपयोगी पडेल. गणित इयत्ता आठवीचे हे पाठ्यपुस्तक आपणांस निश्चित आवडेल अशी आम्हांस आशा वाटते.

अनुक्रमणिका

विभाग 1

1. परिमेय व अपरिमेय संख्या .... 01 ते 06
2. समांतर रेषा व छेदिका .... 07 ते 13
3. घातांक व घनमूळ .... 14 ते 18
4. त्रिकोणाचे शिरोलंब व मध्यगा .... 19 ते 22
5. विस्तार सूत्रे .... 23 ते 28
6. बैजिक राशींचे अवयव .... 29 ते 34
7. चलन .... 35 ते 40
8. चौकोन रचना व चौकोनाचे प्रकार .... 41 ते 50
9. सूट व कमिशन .... 51 ते 58

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1 .... 59 ते 60

विभाग 2

10. बहुपदींचा भागाकार .... 61 ते 66
11. सांख्यिकी .... 67 ते 74
12. एकचल समीकरणे .... 75 ते 80
13. त्रिकोणांची एकरुपता .... 81 ते 87
14. चक्रवाढ व्याज .... 88 ते 93
15. क्षेत्रफळ .... 94 ते 105
16. पृष्ठफळ व घनफळ .... 106 ते 113
17. वर्तुळ – जीवा व कंस .... 114 ते 118

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2 .... 119 ते 120

1 परिमेय व अपरिमेय संख्या

जरा आठवूया.

आपण नैसर्गिक संख्या समूह, पूर्ण संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह आणि परिमेय संख्या समूह यांची ओळख करून घेतली.

नैसर्गिक संख्या समूह	पूर्ण संख्या समूह	पूर्णांक संख्या समूह
1,2,3,4,...	0,1,2,3,4, ...	...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,...

परिमेय संख्या समूह

$\frac{-25}{3}$, $\frac{10}{-7}$, −4, 0, 3, 8, $\frac{32}{3}$, $\frac{67}{5}$, इत्यादी

परिमेय संख्या समूह : $\frac{m}{n}$ या रूपातील संख्यांना परिमेय संख्या म्हणतात. येथे m व n हे पूर्णांक असतात परंतु n हा शून्य नसतो.

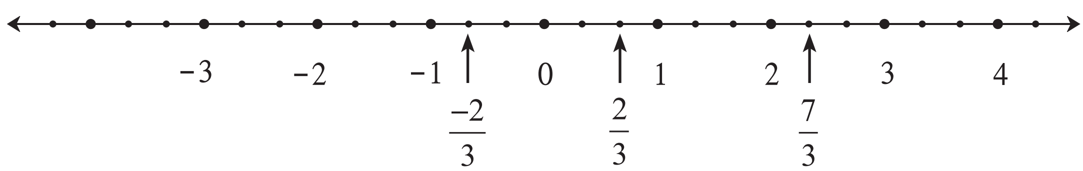
दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात, हे आपण पाहिले आहे.

जाणून घेऊया.

संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दाखवणे (To show rational numbers on a number line)

$\frac{7}{3}$, 2, $\frac{-2}{3}$ या संख्या संख्यारेषेवर कशा दाखवायच्या हे पाहू.

प्रथम एक संख्यारेषा काढू.



- 2 ही परिमेय संख्या पूर्णांकही आहे. ती संख्यारेषेवर दाखवू.
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, म्हणून शून्याच्या उजवीकडील प्रत्येक एककाचे तीन समान भाग करू. शून्यापासूनचा सातवा बिंदू $\frac{7}{3}$ ही संख्या दाखवेल; किंवा $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, म्हणून 2 या संख्येच्या पुढील $\frac{1}{3}$ एकक अंतरावरील

बिंदू $\frac{7}{3}$ ही संख्या दाखवेल.

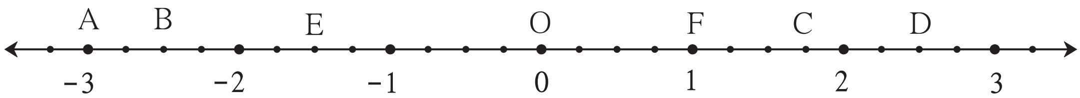
- संख्यारेषेवर $-\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवण्यासाठी, आधी $\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवून 0 च्या डाव्या बाजूला तेवढ्याच अंतरावर $-\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवता येईल.

सरावसंच 1.1

1. संख्यारेषेवर पुढील परिमेय संख्या दाखवा. प्रत्येक उदाहरणासाठी वेगळी संख्यारेषा काढा.

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}$

2. दिलेली संख्यारेषा पाहून विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) B बिंदू हा कोणती परिमेय संख्या दर्शवतो ? (2) $1\frac{3}{4}$ ही संख्या कोणत्या बिंदूने दाखवली आहे ?

(3) 'D या बिंदूने $\frac{5}{2}$ ही परिमेय संख्या दाखवली आहे.' हे विधान सत्य की असत्य ते लिहा.

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांतील क्रमसंबंध (लहानमोठेपणा) (Comparison of rational numbers)

संख्यारेषेवर संख्यांच्या प्रत्येक जोडीमध्ये, डावीकडील संख्या उजव्या बाजूच्या संख्येपेक्षा लहान असते हे आपल्याला माहीत आहे. तसेच परिमेय संख्येचा अंश व छेद यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले तर संख्या तीच राहते किंवा तिची किंमत बदलत नाही, म्हणजे $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, $(k \neq 0)$.

उदा. (1) $\frac{5}{4}$ व $\frac{2}{3}$ यांचा लहानमोठेपणा ठरवा. <, =, > यांपैकी योग्य चिन्हाचा उपयोग करून लिहा.

उकल : $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

$\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$ $\quad \therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

उदा. (2) $\frac{-7}{9}$, $\frac{4}{5}$ या परिमेय संख्यांची तुलना करा.

उकल : ऋण संख्या नेहमी धन संख्येपेक्षा लहान असते. म्हणून $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

दोन ऋण संख्यांची तुलना करण्यासाठी

a, b या धन संख्या असून जर $a < b$, तर $-a > -b$ याचा अनुभव घेऊ.

$2 < 3$ पण $-2 > -3$

$\frac{5}{4} < \frac{7}{4}$ पण $\frac{-5}{4} > \frac{-7}{4}$

} यांचा संख्यारेषेवर पडताळा घ्या.

उदा. (3) $\frac{-7}{3}$, $\frac{-5}{2}$ यांची तुलना करा.

उकल : प्रथम $\frac{7}{3}$ आणि $\frac{5}{2}$ यांची तुलना करू.

$\frac{7}{3} = \frac{7\times2}{3\times2} = \frac{14}{6}$, $\frac{5}{2} = \frac{5\times3}{2\times3} = \frac{15}{6}$ व $\frac{14}{6} < \frac{15}{6}$

$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}$ $\qquad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$

उदा. (4) $\frac{3}{5}$ व $\frac{6}{10}$ या परिमेय संख्या आहेत. त्यांची तुलना करा.

उकल : $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$ $\qquad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

परिमेय संख्यांची तुलना करताना खालील नियम उपयोगी पडतात.

$\frac{a}{b}$ व $\frac{c}{d}$ या परिमेय संख्यांमध्ये जर b आणि d धन असतील तर, आणि

(1) जर $a \times d < b \times c$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) जर $a \times d = b \times c$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) जर $a \times d > b \times c$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

सरावसंच 1.2

1. खालील संख्यांमधील लहानमोठेपणा ठरवा.

(1) -7, -2 (2) 0, $\frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7}$, 0 (4) $\frac{-5}{4}$, $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29}$, $\frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}$, $\frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12}$, $\frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8}$, $\frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15}$, $\frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11}$, $\frac{-3}{4}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे दशांश रूप (Decimal representation of rational numbers)

परिमेय संख्येच्या अंशाला छेदाने भागताना दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग केला तर त्या संख्येचे दशांशरूप मिळते. उदाहरणार्थ, $\frac{7}{4} = 1.75$, येथे 7 ला 4 ने भागल्यावर बाकी शून्य आली. भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली.

परिमेय संख्यांच्या अशा दशांशरूपाला खंडित दशांशरूप म्हणतात.

आपल्याला माहीत आहे की प्रत्येक परिमेय संख्या अखंड आवर्ती दशांश रूपात लिहिता येते.

उदाहरणार्थ, (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

तसेच $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ याप्रमाणे शून्याचा उपयोग करून खंडित रूपही अखंड आवर्ती दशांश रूपात लिहिता येते.

सरावसंच 1.3

1. खालील परिमेय संख्या दशांश रूपात लिहा.

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

जाणून घेऊया.

अपरिमेय संख्या (Irrational numbers)

परिमेय संख्यांच्या व्यतिरिक्त आणखी अनेक संख्या संख्यारेषेवर असतात. त्या परिमेय नसतात, म्हणजेच अपरिमेय असतात. $\sqrt{2}$ ही अशी एक अपरिमेय संख्या आहे.

आपण $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवू.

- संख्यारेषेवर A हा बिंदू 1 ही संख्या दाखवतो. संख्यारेषेला बिंदू A मधून रेषा l लंब काढा.

  रेषा l वर बिंदू P असा घ्या, की OA = AP = 1 एकक असेल.
- रेख OP काढा. Δ OAP हा काटकोन त्रिकोण तयार झाला.

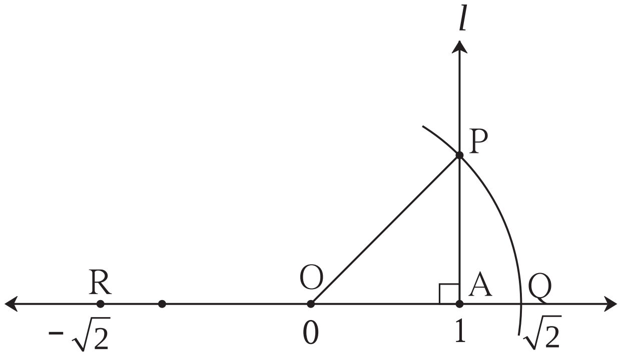
पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OA^2 + AP^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$OP^2 = 2$

$\therefore OP = \sqrt{2}$ ...(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)



- आता O केंद्र व OP एवढी त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. तो कंस संख्यारेषेला जेथे छेदतो त्या बिंदूला Q नाव द्या. OQ हे अंतरही $\sqrt{2}$ आहे.

म्हणजे $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर Q या बिंदूने दर्शवली आहे.

OQ एवढेच अंतर कंपासमध्ये घेऊन O च्या डावीकडे R हा बिंदू स्थापन केला तर त्या बिंदूने दर्शवलेली संख्या $-\sqrt{2}$ असेल.

$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे आपण पुढील इयत्तेत सिद्ध करू. अपरिमेय संख्येचे दशांशरूप अखंड आणि अनावर्ती असते हेही आपण पुढील इयत्तेत पाहू.

लक्षात घ्या की –

मागील इयत्तेत आपण π ही संख्या परिमेय नाही हे शिकलो आहोत. म्हणजेच ती संख्या अपरिमेय संख्या आहे. आपण व्यवहारात सोयीसाठी π च्या खूप जवळची किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 ही π साठी घेतो. परंतु $\frac{22}{7}$ व 3.14 या संख्या परिमेय आहेत.

ज्या संख्या संख्यारेषेवर बिंदूंनी दाखवता येतात त्या संख्यांना वास्तव संख्या म्हणतात. सर्व परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखवता येतात हे आपण पाहिले आहे. म्हणून सर्व परिमेय संख्या वास्तव संख्या आहेत. तसेच असंख्य अपरिमेय संख्या देखील वास्तव संख्या आहेत.

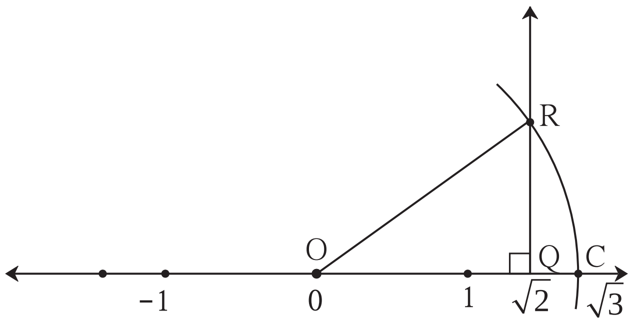
$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे. $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ इत्यादी सर्व संख्या अपरिमेय आहेत हे ध्यानात घ्या. कारण जर $3\sqrt{2}$ संख्या परिमेय असेल तर $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ ही देखील परिमेय संख्या असायला हवी, पण ते सत्य नाही.

परिमेय संख्या संख्यारेषेवर कशा दाखवायच्या हे आपण पाहिले. तसेच $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आपण संख्यारेषेवर दाखवली. त्याप्रमाणे $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . अशा अपरिमेय संख्याही आपण संख्यारेषेवर दाखवू शकतो.

सरावसंच 1.4

1. $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवली आहे. त्या आधारे $\sqrt{3}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवण्यासाठी खाली कृतीच्या पायऱ्या दिलेल्या आहेत. त्या पायऱ्यांमधील रिकाम्या जागा योग्य रीतीने भरा आणि कृती पूर्ण करा.

कृती :



- संख्यारेषेवर Q हा बिंदू ...... ही संख्या दर्शवतो.
- Q बिंदूपाशी एक लंबरेषा काढली आहे. त्या रेषेवर 1 एकक लांबी दर्शवणारा बिंदू R आहे.
- OR जोडल्यामुळे Δ ORQ हा काटकोन त्रिकोण मिळतो.
- l (OQ) = $\sqrt{2}$, l(QR) = 1

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$

$= \square^2 + \square^2 = \square + \square$

$= \square \qquad \therefore\ l(OR) = \square$

OR एवढे अंतर घेऊन काढलेला कंस संख्यारेषेला जेथे छेदतो, त्या बिंदूला C हे नाव देऊ. C हा बिंदू $\sqrt{3}$ ही संख्या दाखवतो.

2. संख्यारेषेवर $\sqrt{5}$ ही संख्या दाखवा. **3★.** संख्यारेषेवर $\sqrt{7}$ ही संख्या दाखवा.

उत्तरसूची

सरावसंच 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) सत्य

सरावसंच 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

सरावसंच 1.3

(1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) -20.6

(5) $-0.\overline{846153}$

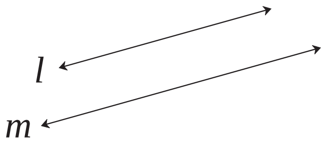
CA9TZ7

2 समांतर रेषा व छेदिका

जरा आठवूया.

एकाच प्रतलात असणाऱ्या आणि एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

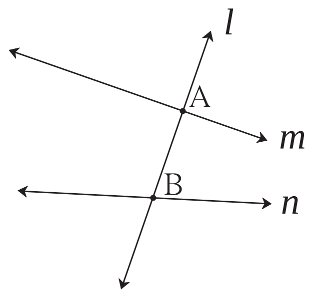
'रेषा l व रेषा m या समांतर रेषा आहेत,' हे 'रेषा $l \parallel$ रेषा m' असे लिहितात.



जाणून घेऊया.

छेदिका (Transversal)

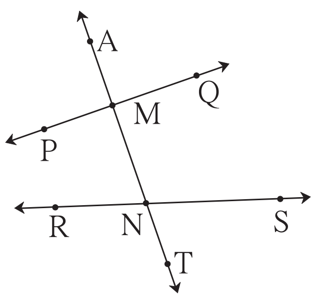
शेजारील आकृतीत रेषा m व रेषा n यांना रेषा l ही अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B या दोन भिन्न बिंदूंमध्ये छेदते. रेषा m व रेषा n यांची रेषा l ही छेदिका आहे.



जर एखादी रेषा दिलेल्या दोन रेषांना दोन भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर त्या रेषेला त्या दोन रेषांची छेदिका म्हणतात.

छेदिकेमुळे होणारे कोन (Angles made by transversal)

सोबतच्या आकृतीत छेदिकेमुळे छेदन बिंदू M जवळ चार आणि छेदन बिंदू N जवळ चार असे एकूण 8 कोन झालेले दिसतात. आठही कोनांपैकी प्रत्येक कोनाची एक भुजा छेदिकेवर आहे व दुसरी भुजा दोनपैकी एका रेषेवर आहे. याचा उपयोग करून कोनांच्या जोड्या ठरवल्या आहेत. त्या जोड्यांचा अभ्यास करूया.



• संगत कोन (Corresponding angles)

ज्या जोडीतील कोनांच्या छेदिकेवरील भुजा एकच दिशा दर्शवतात व छेदिकेवर नसलेल्या भुजा छेदिकेच्या एकाच बाजूस असतात, ती जोडी संगत कोनांची असते.

• आंतरकोन (Interior angles)

ज्या जोडीतील कोन दिलेल्या दोन रेषांच्या आतील बाजूस आहेत व छेदिकेच्या एकाच बाजूस आहेत, ती जोडी आंतरकोनांची जोडी असते.

वरील आकृतीतील संगतकोनांच्या जोड्या –

(i) ∠AMP व ∠MNR

(ii) ∠PMN व ∠RNT

(iii) ∠AMQ व ∠MNS

(iv) ∠QMN व ∠SNT

वरील आकृतीतील आंतरकोनांच्या जोड्या –

(i) ∠PMN व ∠MNR

(ii) ∠QMN व ∠MNS

- **व्युत्क्रम कोन (Alternate angles)**

ज्या जोडीतील कोन छेदिकेच्या विरुद्ध बाजूस असतात आणि छेदिकेवर असलेल्या भुजा विरुद्ध दिशा दर्शवतात, ती जोडी व्युत्क्रम कोनांची जोडी असते.

आकृतीत दोन जोड्या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या तर दोन जोड्या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या आहेत.

आंतरव्युत्क्रम कोन

(रेषांच्या आतील बाजूस असलेले कोन)

(i) ∠PMN व ∠MNS

(ii) ∠QMN व ∠RNM

बाह्यव्युत्क्रम कोन

(रेषांच्या बाहेरील बाजूस असलेले कोन)

(i) ∠AMP व ∠TNS

(ii) ∠AMQ व ∠RNT

सरावसंच 2.1

1. सोबतची आकृती पाहा. आकृतीत कोनांची नावे एका अक्षराने दाखवली आहेत. त्या आधारे रिकाम्या चौकटी भरा.

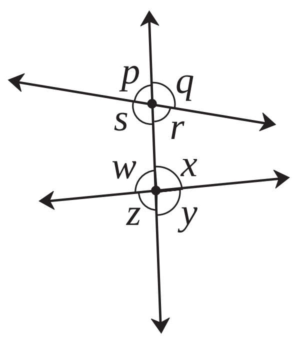
संगत कोनांच्या जोड्या.

(1) ∠p व ☐ (2) ∠q व ☐

(3) ∠r व ☐ (4) ∠s व ☐

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या.

(5) ∠s व ☐ (6) ∠w व ☐



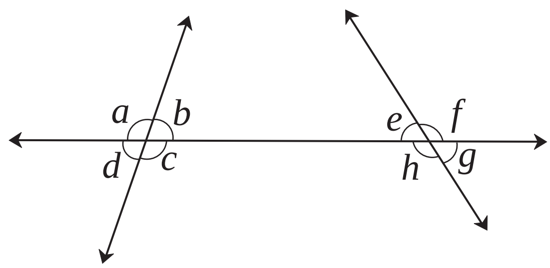
2. शेजारील आकृतीत दाखवलेले कोन पाहा.

खालील जोड्या दर्शवणारे कोन लिहा.

(1) आंतरव्युत्क्रम कोन

(2) संगतकोन

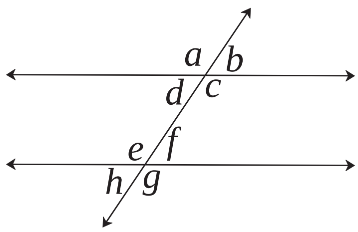
(3) आंतरकोन



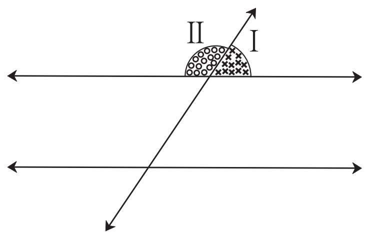
जाणून घेऊया.

समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे होणारे कोन व त्यांचे गुणधर्म
(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

कृती (I) : एका वहीच्या कागदावर आकृती (A) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे दोन समांतर रेषा काढा व त्यांची एक छेदिका काढा. ट्रेसपेपरच्या साहाय्याने त्याच आकृतीची एक प्रत एका कोऱ्या कागदावर काढा. आकृती (B) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भाग I व भाग II हे वेगवेगळ्या रंगाने रंगवा. हे दोन भाग कात्रीने कापा.



(A)



(B)

भाग I व भाग II ने दर्शवलेले कोन रेषीय जोडीत आहेत हे लक्षात घ्या. आता भाग I व भाग II हे आकृती A मधील आठ कोनांपैकी प्रत्येक कोनावर ठेवून पाहा.

कोणकोणत्या कोनांशी भाग I तंतोतंत जुळतो ?

कोणकोणत्या कोनांशी भाग II तंतोतंत जुळतो ?

असे दिसेल की, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, कारण हे कोन भाग I शी जुळतात.

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, कारण हे कोन भाग II शी जुळतात.

(1) $\angle a \cong \angle e$, $\angle b \cong \angle f$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle d \cong \angle h$

(या संगत कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(2) $\angle d \cong \angle f$ आणि $\angle e \cong \angle c$ (या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(3) $\angle a \cong \angle g$ आणि $\angle b \cong \angle h$ (या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180°$ आणि $m\angle c + m\angle f = 180°$

(या आंतरकोनांच्या जोड्या आहेत.)

चला, चर्चा करूया.

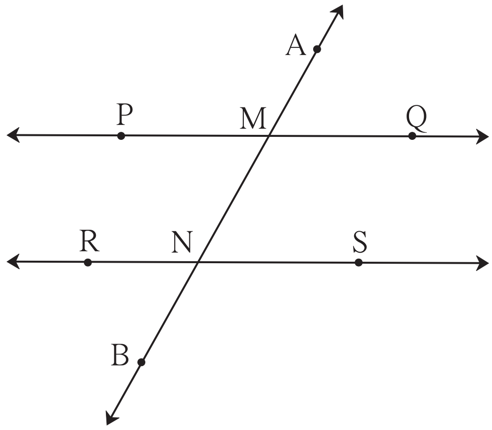
दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर आठ कोन तयार होतात.

या आठ कोनांपैकी एका कोनाचे माप दिले असेल, तर इतर सात कोनांची मापे काढता येतील का ?

जाणून घेऊया.

(1) संगत कोनांचा गुणधर्म (Property of corresponding angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या संगत कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन एकमेकांशी एकरूप असतात. शेजारील आकृतीत रेषा PQ || रेषा RS. रेषा AB ही त्यांची छेदिका आहे.



संगत कोन

$\angle AMP \cong \angle MNR$ $\quad$ $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$ $\quad$ $\angle QMN \cong \angle SNB$

(2) व्युत्क्रम कोनांचा गुणधर्म (Property of alternate angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांशी एकरूप असतात.

आंतरव्युत्क्रम कोन	बाह्यव्युत्क्रम कोन
$\angle PMN \cong \angle MNS$	$\angle AMP \cong \angle SNB$
$\angle QMN \cong \angle MNR$	$\angle AMQ \cong \angle RNB$

(3) आंतरकोनांचा गुणधर्म (Property of interior angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

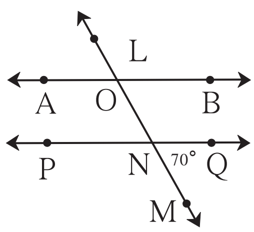
आंतरकोन

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारील आकृतीत रेषा AB || रेषा PQ व रेषा LM ही छेदिका आहे. $m\angle MNQ = 70^\circ$, तर $\angle AON$ चे माप काढा.



उकल :

रीत I

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ$ .....(विरुद्ध कोन)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ$ ....(आंतरकोन)

$\therefore\ m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$

$= 180^\circ - 70^\circ$

$= 110^\circ$

रीत II

$m\angle MNQ = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle NOB = 70^\circ$....(संगतकोन)

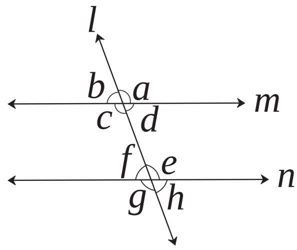
$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON = 110^\circ$

(आणखी वेगळा विचार करूनही वरील प्रश्न सोडवता येईल.)

उदा. (2) शेजारील आकृतीत रेषा $m \parallel$ रेषा n
रेषा l ही छेदिका आहे.
जर $m\angle b = (x + 15)^\circ$ आणि
$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ तर x ची किंमत काढा.



उकल : $\angle b \cong \angle f$ .... (संगत कोन) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ .... (रेषीय जोडीतील कोन)

समीकरणात किमती घालून,

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$ $\therefore 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ$ .... (दोन्ही बाजूंतून 30 वजा करून)

$x = \frac{150^\circ}{3}$ .... (दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून)

$\therefore x = 50^\circ$

हे मला समजले.

दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या कोनांपैकी

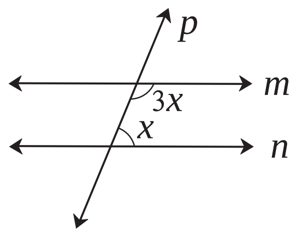
- संगत कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

सरावसंच 2.2

1. योग्य पर्याय निवडा.

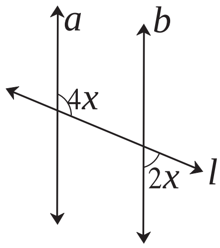
(1) शेजारील आकृतीत जर रेषा $m \parallel$ रेषा n असेल आणि रेषा p ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती ?

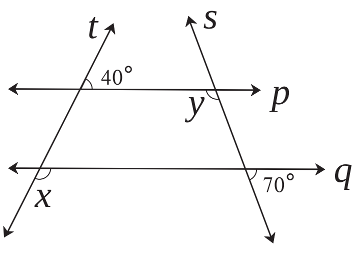
(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°



(2) शेजारील आकृतीत जर रेषा $a \parallel$ रेषा b आणि रेषा l ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती?

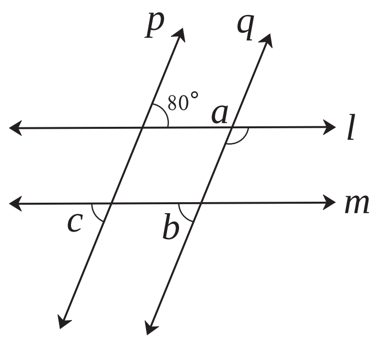
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



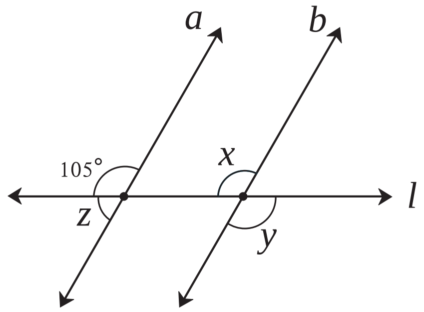


2. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा t व रेषा s या छेदिका आहेत. दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ व $\angle y$ ची मापे काढा.

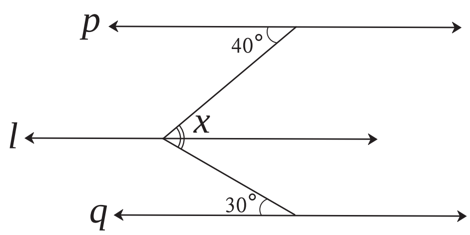
3. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा $l \parallel$ रेषा m आहे. दिलेल्या कोनाच्या मापांवरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ची मापे काढा. कारणे लिहा.



4★. सोबतच्या आकृतीत, रेषा $a \parallel$ रेषा b. रेषा l ही छेदिका आहे. दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ यांची मापे काढा.



5★. शेजारील आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा $l \parallel$ रेषा q तर दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ चे माप काढा.



अधिक माहितीसाठी :

दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणारी

- संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढणे (To draw a line parallel to the given line)

रचना (I) : दिलेल्या रेषेला रेषेबाहेरील बिंदूतून गुण्याच्या साहाय्याने समांतर रेषा काढणे.

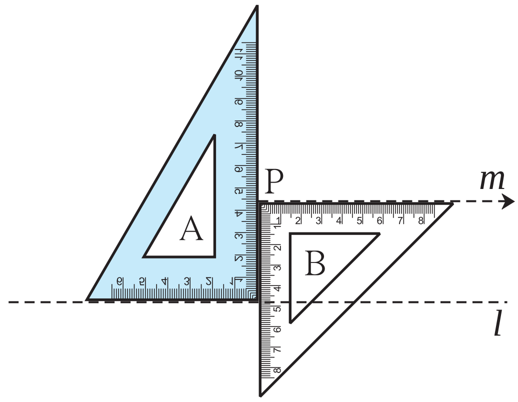
रीत I : रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l च्या बाहेर बिंदू P घ्या.

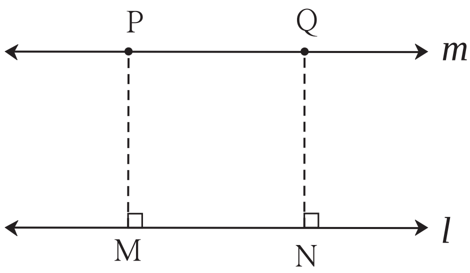
(3) आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन गुण्ये चिकटवून ठेवा. गुण्या A व B धरून ठेवा. गुण्या B ची कड बिंदू P वर आहे त्या कडेवर रेषा काढा.

(4) त्या रेषेला m नाव द्या.

(5) रेषा m ही रेषा l ला समांतर आहे.



रीत II : रचनेच्या पायऱ्या



(1) रेषा l काढा. त्या रेषेच्या बाहेर बिंदू P घ्या.

(2) बिंदू P मधून रेषा l वर रेख PM हा लंब काढा.

(3) रेषा l वर N हा एक वेगळा बिंदू घ्या.

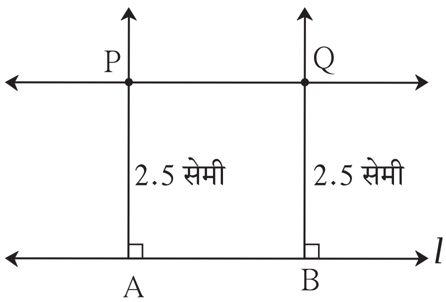
(4) बिंदू N मधून रेख NQ हा रेषा l ला लंब काढा.

NQ = MP घ्या.

(5) बिंदू P व Q मधून जाणारी रेषा m काढा. ही रेषा l ला समांतर आहे.

रचना (II) : दिलेल्या रेषेला दिलेल्या अंतरावर समांतर रेषा काढणे.

रीत : रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर रेषा काढा.



रचनेच्या पायऱ्या :

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l वर A, B असे दोन बिंदू घ्या.

(3) बिंदू A व बिंदू B मधून रेषा l ला लंब रेषा काढा.

(4) त्या रेषांवर, बिंदू A आणि बिंदू B पासून 2.5 सेमी अंतरावर बिंदू P आणि बिंदू Q घ्या.

(5) रेषा PQ काढा. (6) रेषा PQ ही रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर असलेली रेषा आहे.

सरावसंच 2.3

1. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू A घ्या. बिंदू A मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
2. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू T घ्या. बिंदू T मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
3. रेषा m आणि त्या रेषेला 4 सेमी अंतरावर समांतर असणारी रेषा n काढा.

ၑၑၑ

उत्तरसूची

सरावसंच 2.1 1. (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle h$ (2) $\angle a$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle f$, $\angle c$ व $\angle g$, $\angle d$ व $\angle h$
(3) $\angle c$ व $\angle h$, $\angle b$ व $\angle e$.

सरावसंच 2.2 1. (1) C (2) D 2. $\angle x = 140°$, $\angle y = 110°$

3. $\angle a = 100°$, $\angle b = 80°$, $\angle c = 80°$

4. $\angle x = 105°$, $\angle y = 105°$, $\angle z = 75°$

5. $\angle x = 70°$

CAIQ1U

3 घातांक व घनमूळ

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण घातांकांचा व त्यांच्या नियमांचा अभ्यास केला आहे.

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ही गुणाकार रूपातील संख्या थोडक्यात आपण 2^5 अशी लिहितो.
  येथे 2 हा पाया व 5 हा घातांक आहे. 2^5 ही घातांकित संख्या आहे.
- घातांकाचे नियम : m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

  (v) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$
- घातांकांचे नियम वापरून खालील उदाहरणांतील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

  (iv) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 = \dfrac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3$

जाणून घेऊया.

घातांक परिमेय असलेल्या संख्यांचा अर्थ (The number with rational index)

(I) संख्येचा घातांक $\dfrac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल अशा संख्यांचा अर्थ.

संख्येचा घातांक $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल तर त्या संख्येचा अर्थ पाहू.

एखाद्या संख्येचा वर्ग दाखवण्यासाठी तिचा घातांक 2 लिहितात आणि संख्येचे वर्गमूळ दाखवण्यासाठी तिचा घातांक $\dfrac{1}{2}$ लिहितात.

उदाहरणार्थ, 25 चे वर्गमूळ $\sqrt{\ }$ हे करणी चिन्ह वापरून आपण $\sqrt{25}$ असे लिहितो. घातांक वापरून ती संख्या $25^{\frac{1}{2}}$ अशी लिहितात. म्हणजे $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

साधारणपणे a या संख्येचा वर्ग a^2 असा लिहितात तर a चे वर्गमूळ $\sqrt[2]{a}$ असे किंवा $\sqrt{a}$ किंवा $a^{\frac{1}{2}}$ असे लिहितात.

याचप्रमाणे a या संख्येचा घन a^3 असा लिहितात तर a चे घनमूळ $\sqrt[3]{a}$ असे किंवा $a^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात.

जसे, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

$\therefore$ 64 चे घनमूळ $\sqrt[3]{64}$ किंवा $(64)^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात. लक्षात घ्या की, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$. म्हणजे 3 चा 5 वा घात 243 आहे.

याउलट 243 चे पाचवे मूळ हे $(243)^{\frac{1}{5}}$ असे किंवा $\sqrt[5]{243}$ असे लिहितात. $\therefore$ $(243)^{\frac{1}{5}} = 3$

सामान्यपणे a चे n वे मूळ $a^{\frac{1}{n}}$ असे लिहितात.

उदाहरणार्थ, (i) $128^{\frac{1}{7}}$ =128 चे 7 वे मूळ, (ii) $900^{\frac{1}{12}}$ = 900 चे 12 वे मूळ, इत्यादी.

लक्षात घ्या की $10^{\frac{1}{5}} = x$ ही संख्या असेल तर $x^5 = 10$.

सरावसंच 3.1

1. घातांक वापरून पुढील संख्या लिहा.

(1) 13 चे पाचवे मूळ (2) 9 चे सहावे मूळ (3) 256 चे वर्गमूळ

(4) 17 चे घनमूळ (5) 100 चे आठवे मूळ (6) 30 चे सातवे मूळ

2. खालील घातांकित संख्या कोणत्या संख्येचे कितवे मूळ आहे ते लिहा.

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) संख्येचा घातांक $\frac{m}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल, अशा संख्यांचा अर्थ.

आपल्याला माहीत आहे की $8^2 = 64$,

64 चे घनमूळ = $(64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore$ 8 च्या वर्गाचे घनमूळ = 4 .... (I)

तसेच, 8 चे घनमूळ = $8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 च्या घनमुळाचा वर्ग $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ....(II)

(I) व (II) वरून

8 च्या वर्गाचे घनमूळ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग; म्हणजेच, $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ हे लक्षात येते.

घातांक पूर्णांक संख्या असतानाचे घातांकांचे जे नियम आहेत, तेच नियम घातांक परिमेय असणाऱ्या संख्यांसाठी आहेत. $\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ हा नियम वापरून $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

यावरून $8^{\frac{2}{3}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे लावता येतो.

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 च्या वर्गाचे घनमूळ. (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग.

त्याचप्रमाणे $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ म्हणजे '27 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ',

आणि $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ म्हणजे '27 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात' असे दोन अर्थ होतात.

सामान्यपणे $a^{\frac{m}{n}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे व्यक्त करता येतो.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ म्हणजे a च्या m व्या घाताचे n वे मूळ किंवा

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ म्हणजे a च्या n व्या मुळाचा m वा घात.

सरावसंच 3.2

1. खालील सारणी पूर्ण करा.

क्र.	संख्या	कितव्या मुळाचा कितवा घात	कितव्या घाताचे कितवे मूळ
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 च्या वर्गमुळाचा घन	225 च्या घनाचे वर्गमूळ
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. परिमेय घातांक रूपात व्यक्त करा.

(1) 121 च्या पाचव्या घाताचे वर्गमूळ

(2) 324 च्या चौथ्या मुळाचा घन

(3) 264 च्या वर्गाचे पाचवे मूळ

(4) 3 च्या घनमुळाचा घन

जरा आठवूया.

- $4 \times 4 = 16$ म्हणजेच $4^2 = 16$, तसेच $(-4) \times (-4)$ म्हणजेच $(-4)^2 = 16$ यावरून 16 या संख्येला एक धन आणि दुसरे ऋण, अशी दोन वर्गमुळे आहेत. संकेतानुसार 16 चे धन वर्गमूळ $\sqrt{16}$ असे, तर 16 चे ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{16}$ असे दर्शवतात. $\sqrt{16} = 4$ आणि $-\sqrt{16} = -4$.
- प्रत्येक धन संख्येला दोन वर्गमुळे असतात.
- शून्य या संख्येचे वर्गमूळ शून्यच असते.

जाणून घेऊया.

घन व घनमूळ (Cube and Cube Root)

एखादी संख्या तीन वेळा घेऊन गुणाकार केल्यास येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा घन असतो.
उदाहरणार्थ, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$. म्हणजे 216 ही संख्या 6 चा घन आहे.

परिमेय संख्यांचा घन करणे.

उदा. (1) 17 चा घन करा.

$17^3 = 17 \times 17 \times 17$

$= 4913$

उदा. (2) (−6) चा घन करा.

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

$= -216$

उदा. (3) $\left(-\frac{2}{5}\right)$ चा घन करा.

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{8}{125}$

उदा. (4) (1.2) चा घन करा.

$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$

$= 1.728$

उदा. (5) (0.02) चा घन करा.

$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$

$= 0.000008$

जरा डोके चालवा

उदा (1) मध्ये 17 ही धन संख्या आहे. त्या संख्येचा घन 4913 हाही धन आहे.

उदा (2) मध्ये −6 या संख्येचा घन −216 आहे. आणखी काही धन व ऋण संख्या घेऊन त्यांचे घन करून पाहा. त्यावरून संख्येचे चिन्ह आणि त्या संख्येच्या घनाचे चिन्ह यांत कोणता संबंध आढळतो हे शोधा.

उदा (4) व (5) मध्ये दिलेल्या संख्यांतील दशांश चिन्हानंतर येणाऱ्या अंकांची संख्या आणि त्या संख्यांच्या घनामध्ये येणाऱ्या दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची संख्या यांमध्ये कोणता संबंध आढळतो ?

घनमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव पद्धतीने वर्गमूळ कसे काढायचे हे आपण पाहिले आहे. त्याच पद्धतीने आपण घनमूळ काढू.

उदा. (1) 216 चे घनमूळ काढा.

उकल : प्रथम 216 चे मूळ अवयव पाडू. $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 व 2 हे अवयव प्रत्येकी 3 वेळा आले आहेत. म्हणून ते एकेकदा घेऊन पुढीलप्रमाणे गट पाडू.

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \quad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ म्हणजेच $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

उदा. (2) -1331 चे घनमूळ काढा.

उकल : -1331 चे घनमूळ काढण्यासाठी प्रथम 1331 चे मूळ अवयव काढू.

$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$
$= (-11)^3$

$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$

उदा.(4) $\sqrt[3]{0.125}$ काढा.

उकल : $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$

$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$

$= \frac{5}{10} \quad = 0.5$

उदा.(3) 1728 चे घनमूळ काढा.

उकल : $1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \ldots\ldots\ldots a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (लक्षात घ्या की, -1728 चे घनमूळ -12 येते.)

सरावसंच 3.3

1. खालील संख्यांची घनमुळे काढा.

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. घनमूळ काढा. (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. जर $\sqrt[3]{729} = 9$ तर $\sqrt[3]{0.000729}$ = किती ?

उत्तरसूची

सरावसंच 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 चे चौथे मूळ (2) 49 चे वर्गमूळ (3) 15 चे पाचवे मूळ
(4) 512 चे नववे मूळ (5) 100 चे एकोणीसावे मूळ (6) 6 चे सातवे मूळ

सरावसंच 3.2 **1.** (2) 45 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात, 45 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ
(3) 81 च्या सातव्या मुळाचा सहावा घात, 81 च्या सहाव्या घाताचे सातवे मूळ
(4) 100 च्या दहाव्या मुळाचा चौथा घात, 100 च्या चौथ्या घाताचे दहावे मूळ
(5) 21 च्या सातव्या मुळाचा तिसरा घात, 21 च्या तिसऱ्या घाताचे सातवे मूळ

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

सरावसंच 3.3 **1.** (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ **3.** 0.09

CASL3H

4 त्रिकोणाचे शिरोलंब व मध्यगा

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण त्रिकोणाच्या कोनांचे दुभाजक एकसंपाती असतात व त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात यांचा अभ्यास केला आहे. त्यांच्या संपात बिंदूस अनुक्रमे अंतर्मध्य व परिमध्य म्हणतात हेही आपल्याला माहीत आहे.

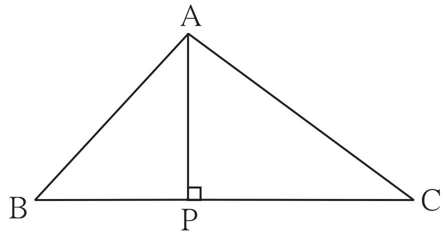
कृती :

एक रेषा काढा. रेषेबाहेर कोणताही एक बिंदू घ्या. गुण्याच्या साहाय्याने त्या बिंदूमधून रेषेवर लंब काढा.

जाणून घेऊया.

शिरोलंब (Altitude)

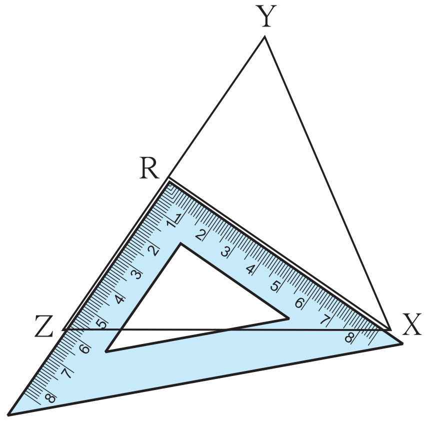
त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून त्याच्या समोरील बाजूवर काढलेल्या लंब रेषाखंडास त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब म्हणतात. Δ ABC मध्ये रेख AP हा पाया BC वरील शिरोलंब आहे.



त्रिकोणाचे शिरोलंब काढणे :

1. Δ XYZ हा कोणताही त्रिकोण काढा.

2. पाया YZ च्या समोरील X या शिरोबिंदूतून गुण्याच्या साहाय्याने लंब काढा. तो YZ ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला R नाव द्या. रेख XR हा पाया YZ वरील शिरोलंब आहे.



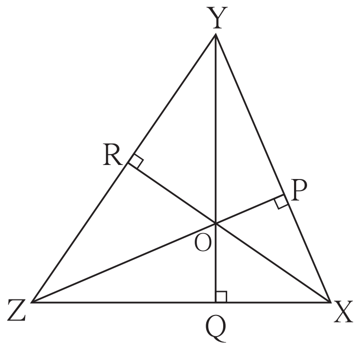
3. रेख XZ हा पाया विचारात घ्या. त्याच्या समोरील शिरोबिंदू Y मधून रेख XZ वर लंब टाका. रेख YQ $\perp$ रेख XZ.

4. रेख XY हा पाया विचारात घ्या. त्याच्या समोरील शिरोबिंदू Z मधून रेख XY वर लंब टाका. रेख ZP $\perp$ रेख XY.

   रेख XR, रेख YQ, रेख ZP हे Δ XYZ शिरोलंब आहेत.

   हे तीनही शिरोलंब एकसंपाती आहेत हे लक्षात घ्या.

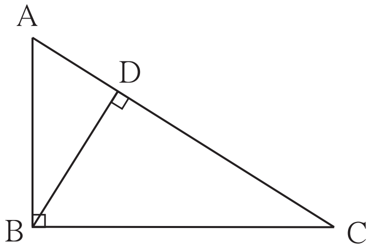
   या संपातबिंदूला त्रिकोणाचा शिरोलंबसंपात किंवा लंबसंपात असे म्हणतात. तो 'O' या अक्षराने दर्शवतात.



त्रिकोणाच्या लंबसंपात बिंदूचे स्थान :

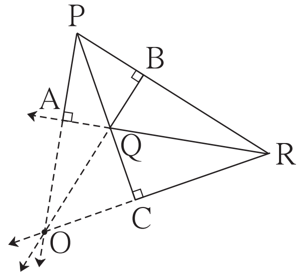
कृती I :

कोणताही एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. ते कोणत्या बिंदूत मिळतात ते लिहा.



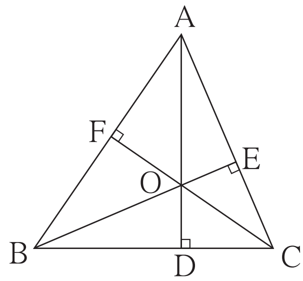
कृती II :

कोणताही एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्याचे तीनही शिरोलंब काढा. ते एकमेकांना मिळतात का? या शिरोलंबांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा काढा. त्या त्रिकोणाच्या बाह्यभागातील एकाच बिंदूतून जातात हे अनुभवा.



कृती III :

Δ ABC हा एक लघुकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. लंबसंपाताचे स्थान कोठे आहे, हे पाहा.



हे मला समजले.

त्रिकोणाचे शिरोलंब एकाच बिंदूतून जातात म्हणजेच हे शिरोलंब एकसंपाती (Concurrent) असतात. त्यांच्या संपात बिंदूस लंबसंपात बिंदू (Orthocentre) म्हणतात. तो 'O' या अक्षराने दर्शवतात.

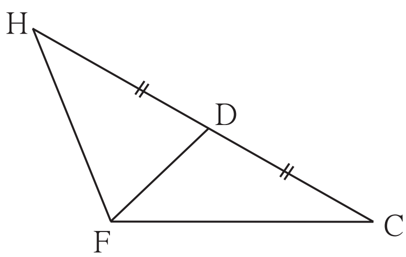
- काटकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा काटकोन करणाऱ्या शिरोबिंदूवर असतो.
- विशालकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा त्या त्रिकोणाच्या बाह्यभागात असतो.
- लघुकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा त्या त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असतो.

जाणून घेऊया.

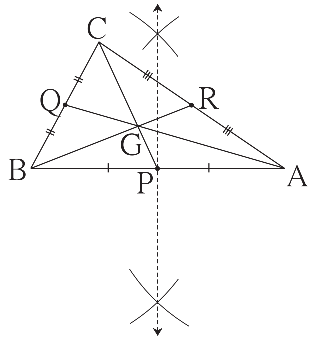
मध्यगा (Median)

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू आणि समोरील बाजूचा मध्यबिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडास त्रिकोणाची मध्यगा म्हणतात.

Δ HCF मध्ये रेख FD ही पाया HC वरील मध्यगा आहे.



त्रिकोणाच्या मध्यगा काढणे :



1. Δ ABC काढा.
2. बाजू AB चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला P नाव द्या. रेख CP काढा.
3. बाजू BC चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला Q नाव द्या. रेख AQ काढा.
4. बाजू AC चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला R नाव द्या. रेख BR काढा.

Δ ABC च्या रेख PC, रेख QA, रेख BR या मध्यगा आहेत.

त्या एकसंपाती आहेत हे लक्षात घ्या. त्यांच्या संपातबिंदूला **मध्यगासंपात** म्हणतात. तो G या अक्षराने दाखवला जातो.

कृती IV : एक काटकोन त्रिकोण, एक विशालकोन त्रिकोण व एक लघुकोन त्रिकोण काढून त्यांच्या मध्यगा काढा. त्या मध्यगा एकसंपाती आहेत हे अनुभवा.

त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचा गुणधर्म :

- Δ ABC हा कोणताही एक मोठा त्रिकोण काढा.
- Δ ABC च्या रेख AR, रेख BQ व रेख CP या मध्यगा काढा. संपातबिंदूला G नाव द्या.

आकृतीतील रेषाखंडांच्या लांबी मोजून सारणीतील रिकाम्या चौकटींत भरा.

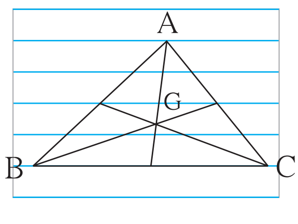
l(AG) = ☐	l(GR) = ☐	l(AG) : (GR) = ☐ : ☐
l(BG) = ☐	l(GQ) = ☐	l(BG) : (GQ) = ☐ : ☐
l(CG) = ☐	l(GP) = ☐	l(CG) : (GP) = ☐ : ☐

ही सर्व गुणोत्तरे जवळपास 2:1 आहेत हे अनुभवा.

हे मला समजले.

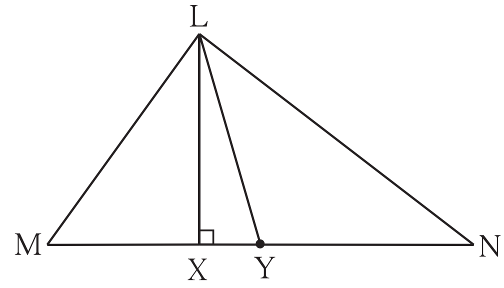
त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस मध्यगासंपात (Centroid) म्हणतात. तो G या अक्षराने दर्शवला जातो. कोणत्याही त्रिकोणात G चे स्थान त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असते. संपातबिंदूमुळे प्रत्येक मध्यगेचे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन होते.

चला, चर्चा करूया.



एका विद्यार्थ्याने वहीच्या कागदावरील पाच समांतर रेषा वापरून Δ ABC काढला व G हा मध्यगासंपात शोधला. तर त्याने ठरवलेले G चे स्थान बरोबर आहे हे कसे ठरवाल ?

सरावसंच 4.1

1.


Δ LMN मध्ये ...... हा शिरोलंब आहे व ...... ही मध्यगा आहे. (रिकाम्या जागेत योग्य रेषाखंडांची नावे लिहा.)

2. Δ PQR एक लघुकोन त्रिकोण काढा व त्याचे तीनही शिरोलंब काढा. संपातबिंदूला 'O' नाव द्या.

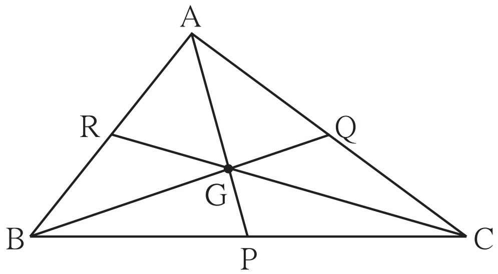
3. Δ STV हा एक विशालकोन त्रिकोण काढा व त्याच्या मध्यगा काढून त्यांचा मध्यगासंपात दाखवा.

4. Δ LMN हा एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. संपातबिंदू O ने दाखवा.

5. Δ XYZ हा एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याच्या मध्यगा काढा व संपातबिंदू G ने दाखवा.

6. कोणताही एक समद्‌विभुज त्रिकोण काढा. त्याच्या सर्व मध्यगा व सर्व शिरोलंब काढा. त्यांच्या संपातबिंदूंबद्‌दलचे तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

7. रिकाम्या जागा भरा.



Δ ABC चा G हा मध्यगा संपातबिंदू आहे.

(1) जर $l(RG) = 2.5$ तर $l(GC) =$ ......

(2) जर $l(BG) = 6$ तर $l(BQ) =$ ......

(3) जर $l(AP) = 6$ तर $l(AG) =$ ..... व $l(GP) =$ .....

हे करून पाहा.

(I) : कोणताही एक समभुज त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाचा परिकेंद्र (C), अंतर्वर्तुळ केंद्र (I), मध्यगासंपात बिंदू (G) व शिरोलंबसंपात बिंदू (O) काढा. निरीक्षण नोंदवा.

(II): कोणताही एक समद्‌विभुज त्रिकोण काढा. त्याचा मध्यगासंपात बिंदू, शिरोलंबसंपात बिंदू, परिकेंद्र, अंतर्वर्तुळकेंद्र हे एकरेषीय आहेत हे पडताळून पाहा.

उत्तरसूची

सरावसंच 4.1

1. रेख LX आणि रेख LY

7. (1) 5, (2) 9, (3) 4, 2

CB2H55

5 विस्तार सूत्रे

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत, आपण पुढील विस्तार सूत्रांचा अभ्यास केला आहे.

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

वरील विस्तार सूत्रांचा उपयोग करून खालील चौकटींत योग्य ते पद लिहा.

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \square - 20xy + \square$

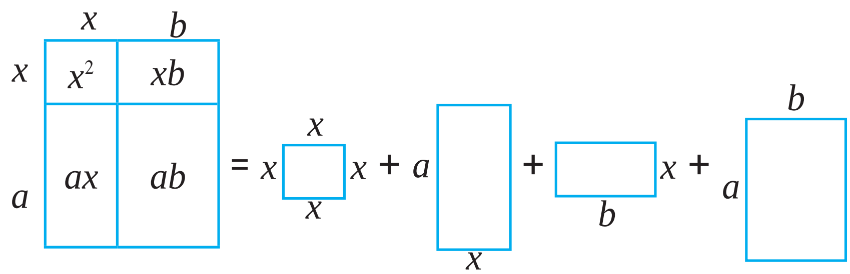
(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \square + \square + 1^2 = \square$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \square + \square = \square$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \square - \square = \square - \square$

जाणून घेऊया.

कृती : आयत व चौरस यांच्या क्षेत्रफळांच्या साहाय्याने $(x + a)(x + b)$ याचा विस्तार करा.



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(I) $(x + a)(x + b)$ चा विस्तार (Expansion of $(x + a)(x + b)$)

$(x + a)$ व $(x + b)$ या एक पद समान असलेल्या द्विपदी आहेत. या द्विपदींचा गुणाकार करू.

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore$ $\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

विस्तार करा.

उदा. (1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

उदा. (2) $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

उदा. (3) $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$

$= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

उदा. (4) $\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

उदा. (5) $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

सरावसंच 5.1

1. विस्तार करा.

(1) $(a + 2)(a - 1)$ (2) $(m - 4)(m + 6)$ (3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$ (5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$ (6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{y}+4\right)\left(\frac{1}{y}-9\right)$

जाणून घेऊया.

(II) $(a + b)^3$ चा विस्तार (Expansion of $(a + b)^3$)

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore$ $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

या विस्तार सूत्राचा उपयोग करून सोडवलेली काही उदाहरणे अभ्यासू,

उदा. (1) $(x + 3)^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ येथे $a = x$ व $b = 3$ आहे.

$\therefore\ (x + 3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

उदा. (2) $(3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$

$= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3$

$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64\,y^3$

उदा. (3) $\left(\frac{2m}{n}+\frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$

$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$

$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$

उदा. (4) $(41)^3 = (40 + 1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3$

$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$

सरावसंच 5.2

1. विस्तार करा.

(1) $(k + 4)^3$ (2) $(7x + 8y)^3$ (3) $(7 + m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

कृती : a व b या सोईच्या बाजू असलेला प्रत्येकी एक घन तयार करा. लांबी व रुंदी a आणि उंची b अशा 3 इष्टिकाचिती तसेच लांबी व रुंदी b आणि उंची a अशा 3 इष्टिकाचिती तयार करा. या घनाकृती योग्य प्रकारे रचून $(a + b)$ बाजू असलेला घन तयार करा.

जाणून घेऊया.

(III) $(a - b)^3$ चा विस्तार (Expansion of $(a - b)^3$)

$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)(a - b)^2$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\therefore \quad \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

उदा. (1) विस्तार करा. $(x - 2)^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ येथे, $a = x$ व $b = 2$ घेऊन,

$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

उदा. (2) $(4p - 5q)^3$ याचा विस्तार करा.

$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$

$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$

उदा. (3) विस्तार सूत्राचा उपयोग करून 99 चा घन करा. $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$

उदा. (4) सोपे रूप द्या.

(i) $(p + q)^3 + (p - q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$

$= 2p^3 + 6pq^2$

(ii) $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

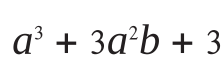
$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$

$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$

$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$

$= 72x^2y + 54y^3$



हे मला समजले.

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

सरावसंच 5.3

1. विस्तार करा.

(1) $(2m - 5)^3$ (2) $(4 - p)^3$ (3) $(7x - 9y)^3$ (4) $(58)^3$

(5) $(198)^3$ (6) $\left(2p - \frac{1}{2p}\right)^3$ (7) $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^3$ (8) $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^3$

2. सरळरूप द्या.

(1) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$ (2) $(3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3$

(3) $(4a - 3)^3 - (4a + 3)^3$ (4) $(5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3$

जाणून घेऊया.

(IV) $(a + b + c)^2$ चा विस्तार [Expansion of $(a + b + c)^2$]

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \times (a + b + c)$$
$$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$\therefore$ $\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$ हे सूत्र मिळते.

उदा. (1) विस्तार करा $(p + q + 3)^2$

$= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3$

$= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p \quad = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9$

उदा. (2) वर्ग विस्ताराच्या पायऱ्यांतील चौकटींत योग्य पदे लिहा.

$(2p + 3m + 4n)^2$

$= (2p)^2 + (3m)^2 + \square + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \square \times 4n + 2 \times 2p \times \square$

$= \square + 9m^2 + \square + 12pm + \square + \square$

उदा. (3) सरळरूप द्या. $(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$

$= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln$

$= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln$

सरावसंच 5.4

1. विस्तार करा. (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$

(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

2. सरळरूप द्या. (1) $(x -2y + 3)^2 + (x + 2y -3)^2$

(2) $(3k -4r -2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

ଷଷଷ

उत्तरसूची

सरावसंच 5.1 (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$

(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

सरावसंच 5.2 (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301

(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

सरावसंच 5.3 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) 1,95,112

(5) 77,62,392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$

(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

सरावसंच 5.4 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$

(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

CBBD6S

6 बैजिक राशींचे अवयव

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण $ax + ay$ आणि $a^2 - b^2$ या रूपातील बैजिक राशींचे अवयव अभ्यासले आहेत.

उदाहरणार्थ, (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

जाणून घेऊया.

वर्ग त्रिपदीचे अवयव (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ या स्वरूपाच्या बैजिक राशीला वर्ग त्रिपदी म्हणतात.

आपल्याला हे माहीत आहे की $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore$ $x^2 + (a + b)x + ab$ चे $(x + a)$ व $(x + b)$ हे अवयव आहेत.

$x^2 + 5x + 6$ या वर्ग त्रिपदीचे अवयव काढण्यासाठी तिची तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ या त्रिपदीशी करून, $a + b = 5$ आणि $ab = 6$. म्हणून 6 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज 5 येईल आणि त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ या रूपात लिहून तिचे अवयव पाडू.

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ .... $x^2 + (a + b)x + ab$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$ .... $(3 + 2)$ ला x ने गुणू. मिळालेल्या चार पदांचे दोन गट पाडू व अवयव मिळवू.

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$ $\quad = (x + 3)(x + 2)$

दिलेल्या वर्गत्रिपदीचे अवयव पाडण्यासाठी खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $2x^2 - 9x + 9$ चे अवयव पाडा.

उकल : वर्गपदाचा सहगुणक व स्थिरपदी यांचा गुणाकार करू येथे तो गुणाकार $2 \times 9 = 18$ आहे.

आता 18 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज मधल्या पदाच्या सहगुणकाएवढी, म्हणजे -9 येईल.

$18 = (-6) \times (-3)$; $(-6) + (-3) = -9$

$-9x$ हे पद $-6x - 3x$ असे लिहू

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x\,\underline{(x - 3)} - 3\underline{(x - 3)}$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore$ $2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

उदा. (2) $2x^2 + 5x - 18$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2x^2 + 5x - 18$ (−36 : +9, −4)

$= \underline{2x^2 + 9x} \underline{-4x - 18}$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

उदा. (3) $x^2 - 10x + 21$ चे अवयव पाडा.

उकल : $x^2 - 10x + 21$ (+21 : −7, −3)

$= \underline{x^2 - 7x} \underline{- 3x + 21}$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

उदा. (4) $2y^2 - 4y - 30$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ .... सर्व पदांमधून 2 हा सामाईक अवयव काढून

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ .... (−15 : −5, +3)

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

सरावसंच 6.1

1. अवयव पाडा.

(1) $x^2 + 9x + 18$ (2) $x^2 - 10x + 9$ (3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$ (5) $p^2 - 2p - 35$ (6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$ (8) $m^2 - 25m + 100$ (9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$ (11) $20x^2 - 26x + 8$ (12) $44x^2 - x - 3$

जाणून घेऊया.

$a^3 + b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 + b^3$)

आपणांस माहीत आहे की, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

उजव्या बाजूकडील राशीतून $3ab$ सामाईक घेऊन या विस्तारसूत्राची मांडणी पुढीलप्रमाणेही करता येते.

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

आता, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$.......... बाजूंची अदलाबदल करून.

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}}$

दोन घनांच्या बेरजेच्या अवयवांच्या वरील सूत्राचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$

$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$

उदा. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$

उदा. (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$

उदा. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$

सरावसंच 6.2

1. अवयव पाडा. (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

जाणून घेऊया.

$a^3 - b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 - b^3$)

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

आता, $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$

$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$

$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$

$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

$\therefore \quad \boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

दोन घनांच्या वजाबाकीचे अवयव पाडण्याचे सूत्र वापरून काही राशींचे अवयव पाडू.

उदा. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

उदा. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 \quad = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

उदा. (5) सोपे रूप द्या : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

उकल : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

उदा. (6) सोपे रूप द्या : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

उकल : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ या सूत्रावरून

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$

$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

हे मला समजले.

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

सरावसंच 6.3

1. अवयव पाडा. (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. सोपे रूप द्या. (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

जाणून घेऊया.

गुणोत्तरीय बैजिक राशी (Rational algebraic expressions)

A आणि B या दोन बैजिक राशी असतील तर $\frac{A}{B}$ या राशीला गुणोत्तरीय बैजिक राशी म्हणतात. गुणोत्तरीय बैजिक राशींना सोपे रूप देताना कराव्या लागणाऱ्या बेरीज वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादी क्रिया, परिमेय संख्यांवरील क्रियांप्रमाणेच असतात. बैजिक राशींचे भागाकार करताना छेद किंवा भाजक शून्य असू शकत नाही हे ध्यानात घ्या.

उदा. (1) सरळ रूप द्या. $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

उकल : $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

$=\frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)}\times\frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{1}{a-2}$

उदा. (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

उकल : $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

$=\frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)}\times\frac{2(7x-4)}{(x+2)}$

$=2$

उदा. (3) सरळ रूप द्या. $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

उकल : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}\quad=\frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

सरावसंच 6.4

1. सोपे रूप द्या.

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}\times\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7}\times\frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)}\times\frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12}\div\frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3}\div\frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$

उत्तरसूची

सरावसंच 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$

(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$

(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$

(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

सरावसंच 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$

(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$

(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$

(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

सरावसंच 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$

(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$

(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

सरावसंच 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$

(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$

(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

CBK98F

7 चलन

जरा आठवूया.

एक डझन वह्यांची किंमत 240 रुपये असेल तर 3 वह्यांची किंमत किती ? 9 वह्यांची किंमत किती ? 24 वह्यांची किंमत किती ? 50 वह्यांची किंमत किती ? हे काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.

वह्यांची संख्या (x)	12	3	9	24	50	1
किंमत (रुपये) (y)	240					20

वरील सारणीवरून असे दिसते की प्रत्येक जोडीत वह्यांची संख्या (x) आणि त्यांची किंमत (y) यांचे गुणोत्तर $\frac{1}{20}$ आहे. ते स्थिर आहे. वह्यांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात आहेत. अशा उदाहरणात दोनपैकी एक संख्या वाढली तर दुसरी त्याच प्रमाणात वाढते.

जाणून घेऊया.

समचलन (Direct variation)

x आणि y समप्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y समचलनात आहेत किंवा x आणि y यांच्यामधे समचलन आहे असे लिहिता येते. तसेच हे विधान चिन्हाचा वापर करून $x \propto y$ असे लिहिता येते.

[α(अल्फा) हे, चलन याअर्थी वापरले जाणारे ग्रीक अक्षर आहे.]

$x \propto y$ हे समीकरणाच्या रूपात $x = \text{k}y$ असे लिहितात; येथे k स्थिरपद आहे.

$x = \text{k}y$ किंवा $\frac{x}{y} = \text{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून कशी लिहिली आहेत, हे पाहा.

(i) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ त्याच्या त्रिज्येच्या वर्गाशी समप्रमाणात असते.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = A, त्रिज्या = r ही चले घेऊन वरील विधान $\text{A} \propto r^2$ असे लिहिता येते.

(ii) द्रवाचा दाब (p) हा त्या द्रवाच्या खोलीशी (d) समचलनात असतो, हे विधान $p \propto d$ असे लिहितात.

समचलनाच्या चिन्हांकित मांडणीतील सर्व संकल्पना समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) x हे y शी समचलनात आहे, $x = 5$ असताना $y = 30$, तर चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

उकल : x हे y शी समचलनात आहे, म्हणजेच $x \alpha y$

$\therefore x = ky$ .... k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

$x = 5$ तेव्हा $y = 30$ हे दिले आहे.

$\therefore 5 = k \times 30 \therefore k = \frac{1}{6}$ (चलनाचा स्थिरांक)

यावरून $x = ky$ म्हणजेच $x = \frac{y}{6}$ किंवा $y = 6x$ हे समीकरण मिळते.

उदा. (2) शेंगदाण्यांची किंमत त्यांच्या वजनाच्या समप्रमाणात आहे. 5 किग्रॅ शेंगदाण्यांची किंमत ₹ 450 असेल, तर 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत काढा. (1 क्विंटल = 100 किग्रॅ)

उकल : शेंगदाण्यांची किंमत x आणि शेंगदाण्यांचे वजन y मानू.

x व y हे समचलनात आहे हे दिले आहे. म्हणजेच $x \alpha y$ म्हणून $x = ky$

परंतु $x = 450$ असताना $y = 5$ हे दिले आहे, यावरून k काढू.

$x = ky$ $\therefore 450 = 5k$ $\therefore k = 90$ (चलनाचा स्थिरांक)

चलनाचे समीकरण $x = 90y$.

$\therefore y = 100$ असताना $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत 9000 रुपये होईल.

सरावसंच 7.1

1. चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

(1) वर्तुळाचा परीघ (c) त्याच्या त्रिज्येशी (r) समप्रमाणात असतो.

(2) मोटारमध्ये भरलेले पेट्रोल (l) व तिने कापलेले अंतर (d)समचलनात असतात.

2. सफरचंदांची किंमत व सफरचंदांची संख्या यांत समचलन आहे. यावरून खालील सारणी पूर्ण करा.

सफरचंदांची संख्या (x)	1	4	. . .	12	. . .
सफरचंदांची किंमत (y)	8	32	56	. . .	160

3. जर $m \alpha n$ आणि $m = 154$ असताना $n = 7$, तर $n = 14$ असताना m ची किंमत काढा.

4. n हे m शी समचलनात आहे, तर पुढील सारणी पूर्ण करा.

m	3	5	6.5	. . .	1.25
n	12	20	. . .	28	. . .

5. y हे x च्या वर्गमुळाच्या समचलनात बदलते आणि जेव्हा $x = 16$ तेव्हा $y = 24$ तर, चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

6. सोयाबीनचे पीक काढण्यासाठी 4 मजुरांना ₹ 1000 मजुरी द्यावी लागते. जर मजुरीची रक्कम आणि मजुरांची संख्या समचलनात असतील तर 17 मजुरांना किती मजुरी द्यावी लागेल ?

जरा आठवूया.

कवायतीसाठी मुलांच्या रांगा केल्या. प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या व रांगांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे.

रांगेतील मुलांची संख्या	40	10	24	12	8
रांगाची संख्या	6	24	10	20	30

वरील सारणीवरून असे दिसते की, प्रत्येक जोडीत रांगेतील मुलांची संख्या व एकूण रांगांची संख्या यांचा गुणाकार 240 आहे. म्हणजेच हा गुणाकार स्थिर आहे प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या आणि रांगांची संख्या या व्यस्तप्रमाणात आहेत.

जेव्हा दोन संख्यापैकी एक संख्या वाढली की दुसरी त्याच प्रमाणात कमी होते तेव्हा त्या दोन संख्या व्यस्त प्रमाणात असतात. उदाहणार्थ एक संख्या दुप्पट झाली की दुसरी निमपट होते.

जाणून घेऊया.

व्यस्त चलन (Inverse variation)

x आणि y या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y व्यस्त चलनात आहेत, असे लिहितात. x आणि y व्यस्त चलनात असतील तर $x \times y$ हे स्थिरपद असते. त्याला k मानून उदाहरणे सोडवणे सोपे जाते.

x आणि y व्यस्त चलनात आहेत हे $x \propto \frac{1}{y}$ असे दर्शवतात.

$x \propto \frac{1}{y}$ म्हणजेच $x = \frac{k}{y}$ किंवा $x \times y = \mathrm{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर a हे b शी व्यस्त चलनात असेल तर खालील सारणी पूर्ण करा.

a	6	12	15	. . .
b	20	. . .	. . .	4
$a \times b$	120	120	. . .	. . .

उकल : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ म्हणजेच $a \times b = \mathrm{k}$

$a = 6$ तेव्हा $b = 20$ $\therefore$ $\mathrm{k} = 6 \times 20 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

(ii) $a = 12$ तेव्हा $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ तेव्हा $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ तेव्हा $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

उदा. (2) $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ तेव्हा $f = 18$

तर (i) $d = 10$ असताना f ची किंमत काढा. (ii) $f = 50$ असताना d काढा.

उकल : $f \propto \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ तेव्हा $f = 18$ यावरून k काढू.

$18 \times 5^2 = k$ $\quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (चलनाचा स्थिरांक)

(i) $d = 10$ तर $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$, $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore 50 \times d^2 = 450$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ किंवा $d = -3$

सरावसंच 7.2

1 . एक काम पूर्ण करण्यासाठी लावलेल्या मजुरांची संख्या आणि काम पूर्ण होण्यासाठी लागणारे दिवस यांची माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती सारणी पूर्ण करा.

मजुरांची संख्या	30	20		10	
दिवस	6	9	12		36

2. प्रत्येक उदाहरणात चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

(1) $p \propto \frac{1}{q}$; $p = 15$ तेव्हा $q = 4$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$; जेव्हा $z = 2.5$ तेव्हा $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$; जेव्हा $s = 4$ तेव्हा $t = 5$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$; जेव्हा $x = 15$ तेव्हा $y = 9$

3. सफरचंदांच्या राशीतील सर्व सफरचंदे पेट्यांत भरायची आहेत.प्रत्येक पेटीत 24 सफरचंदे ठेवली तर ती भरण्यासाठी 27 पेट्या लागतात. जर प्रत्येक पेटीत 36 सफरचंदे ठेवली तर किती पेट्या लागतील ?

4. खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

(1) ध्वनीची तरंगलांबी (l) आणि वारंवारता (f) यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

(2) दिव्याच्या प्रकाशाची तीव्रता (I) आणि दिवा व पडदा यांमधील अंतराचा (d) वर्ग यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

5. $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ आणि $x = 40$ असताना $y = 16$, तर $x = 10$ तेव्हा y किती ?

6. x आणि y या राशींमध्ये व्यस्त चलन आहे. $x = 15$ तेव्हा $y = 10$ असते, $x = 20$ असताना $y =$ किती ?

जाणून घेऊया.

काळ, काम, वेग (Time, work, speed)

एखादे बांधकाम पूर्ण करण्यासाठी नेमलेल्या मजुरांची संख्या व त्यांना काम करण्यास लागलेला वेळ, यांच्याशी संबंधित उदाहरणे व्यस्त चलनाची असतात. तसेच व्यस्त चलनाची काही उदाहरणे वाहनांचा वेग व त्यांना ठरावीक अंतर कापण्यास लागणारा वेळ याच्याशी संबंधित असतात. अशा उदाहरणांना काळ–काम–वेग यांच्याशी संबंधित उदाहरणे म्हणतात.

चलनाच्या चिन्हाचा उपयोग करून या प्रकारची उदाहरणे कशी सोडवतात ते पाहू.

उदा. (1) एका शेतातील शेंगा काढण्याचे काम 15 स्त्रिया 8 दिवसांत पूर्ण करतात. तेच काम 6 दिवसांत पूर्ण करायचे असल्यास किती स्त्रिया कामावर असाव्या ?

उकल : काम पूर्ण होण्यास लागणारे दिवस आणि काम करणाऱ्या स्त्रियांची संख्या यांत व्यस्त चलन असते. दिवसांची संख्या d आणि स्त्रियांची संख्या n मानू.

$d \propto \frac{1}{n}$ $\quad \therefore d \times n = k$ $\quad$ (k हा स्थिरांक)

जेव्हा $n = 15$, तेव्हा $d = 8$ $\quad \therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

आता $d = 6$ असताना n किती हे काढू.

$d \times n = 120$

$\therefore d \times n = 120 \quad \therefore 6 \times n = 120, \quad \therefore n = 20$

$\therefore$ काम 6 दिवसांत पूर्ण करण्यासाठी 20 स्त्रिया कामावर असाव्या.

उदा. (2) एका वाहनाचा सरासरी वेग ताशी 48 किमी असताना काही अंतर जाण्यासाठी 6 तास लागतात, तर वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

उकल : वाहनाचा वेग s मानू ; लागणारा वेळ t मानू. वेग व वेळ यांत व्यस्त चलन आहे.

$s \alpha \frac{1}{t}$ $\therefore s \times t = k$ (k हा स्थिरांक)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (चलनाचा स्थिरांक) आता $s = 72$ असेल तर t काढू.

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$ $\therefore t = \frac{288}{72} = 4$

$\therefore$ वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी 4 तास लगतील.

सरावसंच 7.3

1. खालीलपैकी कोणती उदाहरणे व्यस्त चलनाची आहेत ?
   (1) मजुरांची संख्या व त्यांना काम पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ.
   (2) हौद भरण्यासाठी असलेल्या एकसारख्या नळांची संख्या व हौद भरण्यासाठी लागणारा वेळ.
   (3) वाहनात भरलेले पेट्रोल व त्याची किंमत
   (4) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ व त्या वर्तुळाची त्रिज्या
2. जर 15 मजुरांना एक भिंत बांधण्यास 48 तास लागतात, तर 30 तासांत ते काम पूर्ण करण्यासाठी किती मजूर लागतील ?
3. पिशवीत दूध भरण्याच्या यंत्राद्वारे 3 मिनिटांत अर्ध्या लीटरच्या 120 पिशव्या भरल्या जातात, तर 1800 पिशव्या भरण्यासाठी किती वेळ लागेल ?
4. एका कारचा सरासरी वेग 60 किमी/तास असताना काही अंतर जाण्यास 8 तास लागतात, जर तेच अंतर साडेसात तासांत कापावयाचे असेल कारचा सरासरी वेग किती वाढवावा ?

उत्तरसूची

सरावसंच 7.1 1. (1) $c \alpha r$ (2) $l \alpha d$ 2. x अनुक्रमे 7 व 20, $y = 96$ 3. 308
4. $m = 7$, n अनुक्रमे 26 व 5 5. $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ 6. ₹ 4250

सरावसंच 7.2 1. मजुरांची संख्या अनुक्रमे 15 व 5, दिवस = 18 2. (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$
3. 18 पेट्या 4. (1) $l \alpha \frac{1}{f}$ (2) $I \alpha \frac{1}{d^2}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7.5$

सरावसंच 7.3 1. व्यस्त चलन (1), (2) 2. 24 मजूर 3. 45 मिनिटे
4. 4 किमी/तास

CBU5A3

8 चौकोन रचना व चौकोनाचे प्रकार

जरा आठवूया.

- दिलेल्या मापांनुसार त्रिकोणांच्या रचना करा.

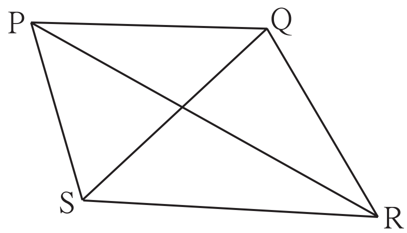
(1) Δ ABC : l (AB) = 5 सेमी, l (BC) = 5.5 सेमी, l (AC) = 6 सेमी

(2) Δ DEF : $m \angle$ D = 35°, $m \angle$ F = 100°, l (DF) = 4.8 सेमी

(3) Δ MNP : l (MP) = 6.2 सेमी, l (NP) = 4.5 सेमी, $m \angle$ P = 75°

(4) Δ XYZ : $m \angle$ Y = 90°, l (XY) = 4.2 सेमी, l (XZ) = 7 सेमी

- कोणत्याही चौकोनाचे चार कोन, चार बाजू आणि दोन कर्ण असे एकूण दहा घटक असतात.



जाणून घेऊया.

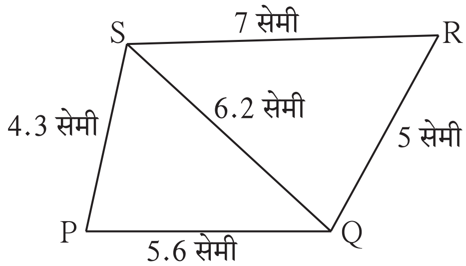
चौकोन रचना (Construction of a quadrilateral)

चौकोनाच्या दहा घटकांपैकी विशिष्ट पाच घटकांची मापे माहीत असतील तर त्या चौकोनाची रचना करता येते. **या रचनांचा आधार त्रिकोण रचना हाच असतो,** हे पुढील उदाहरणांतून समजून घ्या.

(I) चौकोनाच्या चार बाजू आणि एक कर्ण दिला असता चौकोनाची रचना करणे.

उदा. □ PQRS असा काढा की, l(PQ) = 5.6 सेमी , l(QR) = 5 सेमी, l (PS) = 4.3 सेमी, l (RS) = 7 सेमी, l (QS) = 6.2 सेमी

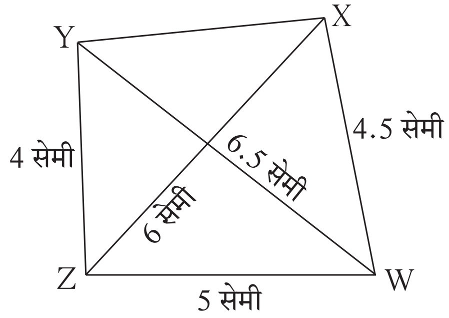
उकल : प्रथम कच्ची आकृती काढू. आकृतीत चौकोनाच्या दिलेल्या घटकांची माहिती दाखवू. आकृतीवरून सहज दिसते, की Δ SPQ च्या आणि Δ SRQ च्या सर्व बाजूंची लांबी आपल्याला माहीत आहे. त्यानुसार Δ SPQ आणि Δ SRQ काढले की दिलेली मापे असणारा □ PQRS मिळेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही स्वतः करा.



(II) चौकोनाच्या तीन बाजू आणि दोन कर्ण दिले असता चौकोन रचना करणे.

उदा. $\square$ WXYZ असा काढा की, l (YZ) = 4 सेमी, l (ZX) = 6 सेमी, l (WX) = 4.5 सेमी, l (ZW) = 5 सेमी, l (YW) = 6.5 सेमी.

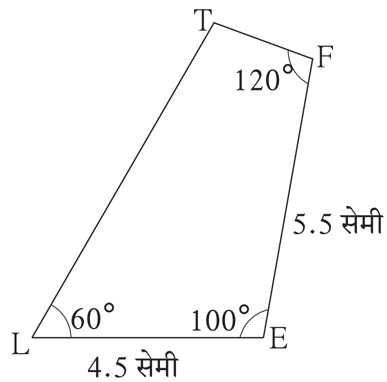
उकल : कच्ची आकृती काढू. दिलेली माहिती आकृतीत दाखवू. आकृतीवरून दिसते, की Δ WXZ च्या आणि Δ WZY च्या सर्व बाजूंची लांबी आपल्याला मिळाली आहे. त्यांनुसार Δ WXZ आणि Δ WZY काढू. नंतर रेख XY काढला की आपल्याला दिलेली मापे असणारा $\square$ WXYZ मिळेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही करा.



(III) चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजू व कोणतेही तीन कोन दिले असता चौकोन रचना करणे.

उदा. $\square$ LEFT असा काढा की, l (EL) = 4.5 सेमी, l (EF) = 5.5 सेमी, $m\angle L = 60°$, $m\angle E = 100°$, $m\angle F = 120°$

उकल : कच्ची आकृती काढून त्या आकृतीत दिलेली माहिती दर्शवू. आकृतीवरून लक्षात येते की 4.5 सेमी लांबीचा रेख LE काढला आणि बिंदू E पाशी 100° मापाचा कोन करणारा रेख EF काढल्यावर चौकोनाचे L, E व F हे तीन बिंदू मिळतील. बिंदू L पाशी 60° मापाचा कोन करणारा आणि बिंदू F पाशी 120° मापाचा कोन करणारा किरण काढू. त्यांचा छेदनबिंदू हाच बिंदू T असेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही करा.

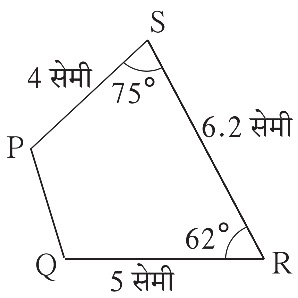


(IV) चौकोनाच्या तीन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोन दिले असता चौकोनाची रचना करणे.

उदा. $\square$ PQRS असा काढा की, l (QR) = 5 सेमी, l (RS) = 6.2 सेमी, l (SP) = 4 सेमी, $m\angle R = 62°$, $m\angle S = 75°$

उकल : चौकोनाची कच्ची आकृती काढून त्या आकृतीत दिलेली माहिती दाखवू.

त्यावरून लक्षात येते की दिलेल्या लांबीचा रेख QR काढून बिंदू R पाशी 62° मापाचा कोन करणारा



रेख RS काढला, की चौकोनाचे Q, R व S हे बिंदू मिळतील. रेख RS शी 75° मापाचा कोन करणारा रेख SP काढला की P बिंदू 4 सेमी अंतरावर मिळेल. रेख PQ काढला की दिलेली मापे असणारा □ PQRS मिळेल. या चौकोनाची रचना आता तुम्ही करू शकाल.

सरावसंच 8.1

1. खालील मापे दिली असता चौकोनांच्या रचना करा.

(1) □ MORE मध्ये l(MO) = 5.8 सेमी, l(OR) = 4.4 सेमी, $m\angle M = 58^\circ$, $m\angle O = 105^\circ$, $m\angle R = 90^\circ$.

(2) □ DEFG असा काढा की l(DE) = 4.5 सेमी, l(EF) = 6.5 सेमी, l(DG) = 5.5 सेमी, l(DF) = 7.2 सेमी, l(EG) = 7.8 सेमी.

(3) □ ABCD मध्ये l(AB) = 6.4 सेमी, l(BC) = 4.8 सेमी, $m\angle A = 70^\circ$, $m\angle B = 50^\circ$, $m\angle C = 140^\circ$.

(4) □ LMNO काढा l(LM) = l(LO) = 6 सेमी, l(ON) = l(NM) = 4.5 सेमी, l(OM) = 7.5 सेमी

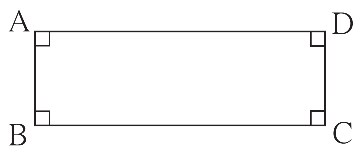
जरा आठवूया.

चौकोन या आकृतीच्या बाजू व कोनांवर वेगवेगळ्या अटी घातल्या की चौकोनाचे वेगवेगळे प्रकार मिळतात. काटकोन चौकोन किंवा आयत आणि चौरस या चौकोनाच्या प्रकारांचा परिचय तुम्हांला झाला आहे. चौकोनाच्या या आणि आणखी काही प्रकारांचा अभ्यास कृतींच्या आधारे करू.

काटकोन चौकोन किंवा आयत (Rectangle)

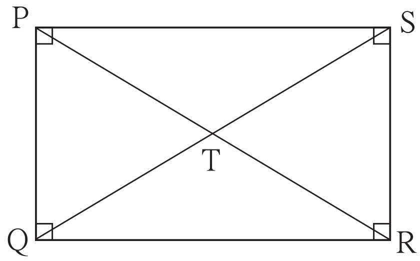
ज्या चौकोनाचे चारही कोन काटकोन असतात त्या चौकोनाला काटकोन चौकोन किंवा आयत म्हणतात.

चौकोन काढण्यासाठी दिलेल्या पाच घटकांमध्ये लगतच्या दोन बाजू असाव्याच लागतात. लगतच्या दोन बाजू आणि तीन कोन माहीत असतील तर तुम्ही चौकोन रचना करू शकता.



व्याख्येनुसार आयताचे सर्व कोन काटकोन असतात म्हणून आयताच्या लगतच्या दोन बाजू माहीत झाल्या तर तुम्ही आयताची रचना करू शकाल.

कृती I : तुम्हांला सोईच्या वाटतील अशा लगतच्या बाजू असणारा एक आयत PQRS काढा. त्याच्या कर्णांच्या छेदन बिंदूला T हे नाव द्या. कर्कटक आणि पट्टीच्या साहाय्याने



(1) बाजू QRआणि बाजू PS या संमुख बाजूंची लांबी मोजा.

(2) बाजू PQ आणि बाजू SR यांच्या लांबी मोजा.

(3) कर्ण PR आणि कर्ण QS यांच्या लांबी मोजा.

(4) कर्ण PR च्या रेख PT आणि रेख TR या भागांची लांबी मोजा.

(5) रेख QT आणि रेख TS या कर्ण QS च्या भागांची लांबी मोजा.

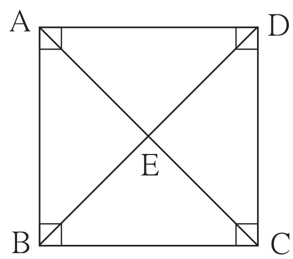
तुम्हांला मिळालेल्या मापांचे निरीक्षण करा. वर्गातील इतरांनी मोजलेली मापे परस्परांना दाखवून त्यांवर चर्चा करा. चर्चेतून आयताचे पुढील गुणधर्म तुमच्या लक्षात येतील.

- आयताच्या संमुख भुजा एकमेकींशी एकरूप असतात.
- आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
- आयताचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

चौरस (Square)

ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू एकरूप असतात आणि सर्व कोन काटकोन असतात, त्या चौकोनाला चौरस म्हणतात.

कृती II : सोईस्कर अशी बाजूची लांबी असणारा चौरस ABCD काढा. त्याच्या कर्णांच्या छेदनबिंदूला E हे नाव द्या. भूमितीच्या पेटीतील साधने वापरून



(1) कर्ण AC आणि कर्ण BD यांच्या लांबी मोजा.

(2) बिंदू E मुळे झालेल्या प्रत्येक कर्णाच्या दोन भागांची लांबी मोजा.

(3) बिंदू E पाशी झालेल्या सर्व कोनांची मापे मोजा.

(4) चौरसाच्या कर्णामुळे प्रत्येक कोनाच्या झालेल्या भागांची मापे मोजा. (उदाहरणार्थ, $\angle$ ADB व $\angle$CDB).

तुम्हांला आणि तुमच्या वर्गातील इतरांना मिळालेल्या मापांचे निरीक्षण करून चर्चा करा.

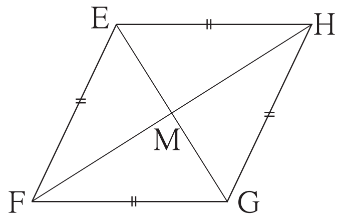
तुम्हांला चौरसाचे पुढील गुणधर्म मिळतील.

- कर्ण समान लांबीचे, म्हणजेच एकरूप असतात.
- कर्ण परस्परांना दुभागतात.
- कर्ण परस्परांशी काटकोन करतात.
- कर्ण चौरसाचे संमुख कोन दुभागतात.

समभुज चौकोन (Rhombus)

ज्या चौकोनाच्या सर्व भुजा समान लांबीच्या (एकरूप) असतात, त्या चौकोनाला समभुज चौकोन म्हणतात.

कृती III : बाजूची सोईस्कर लांबी घेऊन आणि एका कोनाचे कोणतेही सोईस्कर माप घेऊन समभुज चौकोन EFGH काढा. त्याचे कर्ण काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला M हे नाव द्या.



(1) चौकोनाचे संमुख कोन तसेच बिंदू M पाशी झालेले कोन मोजा.

(2) चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे कर्णामुळे झालेले दोन भाग मोजा.

(3) दोन्ही कर्णांची लांबी मोजा. बिंदू M मुळे झालेले कर्णाचे भाग मोजा.

मोजमापांवरून समभुज चौकोनाचे पुढील गुणधर्म तुम्हांला आढळतील.

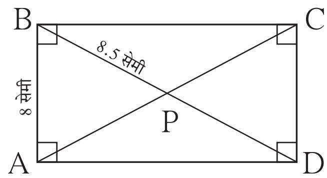
- संमुख कोन एकरूप असतात.
- कर्ण समभुज चौकोनाचे संमुख कोन दुभागतात.
- कर्ण परस्परांना दुभागतात, तसेच परस्परांशी काटकोन करतात.

वर्गातील इतरांनाही हे गुणधर्म आढळले आहेत, असे दिसून येईल.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आयत ABCD च्या कर्णांचा छेदनबिंदू P आहे. (i) l(AB) = 8 सेमी तर l(DC) = किती ?, (ii)l(BP) = 8.5 सेमी तर l(BD) आणि l(BC) काढा.

उकल : एक कच्ची आकृती काढून दिलेली माहिती दाखवू.



(i) आयताच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.

$\therefore$ l(DC) = l(AB) = 8 सेमी

(ii)आयताचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

$\therefore$ l(BD) $= 2 \times l$(BP) $= 2 \times 8.5 = 17$ सेमी

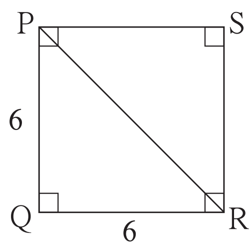
Δ BCD हा काटकोन त्रिकोण आहे. पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore$ l(BC) $= \sqrt{225} = 15$ सेमी

उदा. (2) बाजू 6 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.

उकल : समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे □ PQRS हा 6 सेमी बाजूचा चौरस आहे. रेख PR कर्ण आहे.



Δ PQR मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयाने, $l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

$= (6)^2+(6)^2 = 36 + 36 = 72$

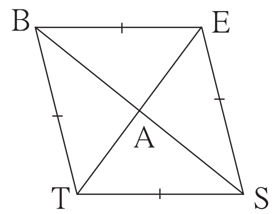
$\therefore\ l(PR) = \sqrt{72}$, $\therefore$ कर्णाची लांबी $\sqrt{72}$ सेमी आहे.

उदा (3) $\square$ BEST ह्या समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना बिंदू A मध्ये छेदतात.

(i) जर $m\angle BTS = 110°$, तर $m\angle TBS$ काढा.

(ii) जर $l(TE) = 24$, $l(BS) = 70$, तर $l(TS)=$ किती ?

उकल : $\square$ BEST ची कच्ची आकृती काढून कर्णांचा छेदनबिंदू A दाखवू.



(i) समभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.

$\therefore\ m\angle BES = m\angle BTS = 110°$

आता, $m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore 110° + 110° + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore\ m\angle TBE + m\angle TSE = 360° - 220° = 140°$

$\therefore\ 2\, m\angle TBE = 140°$...... $\because$ समभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.

$\therefore\ m\angle TBE = 70°$

$\therefore\ m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$ ... $\because$ समभुज चौकोनाचा कर्ण संमुख कोन दुभागतो.

(ii) समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.

$\therefore\ \Delta$ TAS मध्ये, $m\angle TAS = 90°$

$l(TA) = \frac{1}{2}\ l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12$, $l(AS) = \frac{1}{2}\ l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore\ l(TS) = \sqrt{1369} = 37$

सरावसंच 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ सेमी आणि $l(BC) = 4.5$ सेमी असा आयत ABCD काढा.

2. बाजू 5.2 सेमी असलेला चौरस WXYZ काढा.

3. बाजू 4 सेमी आणि $m\angle K = 75°$ असा समभुज $\square$ KLMN काढा.

4. एका आयताचा कर्ण 26 सेमी असून त्याची एक बाजू 24 सेमी आहे, तर त्याची दुसरी बाजू काढा.

5. समभुज □ABCD च्या कर्णांची लांबी 16 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या समभुज चौकोनाची बाजू व परिमिती काढा.

6. बाजू 8 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.

7. एका समभुज चौकोनाच्या एका कोनाचे माप 50° आहे, तर त्याच्या इतर तीन कोनांची मापे काढा.

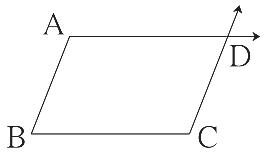
समांतरभुज चौकोन (Parallelogram)

चौकोनाच्या या प्रकाराच्या नावावरून तुम्ही याची व्याख्या सहज सांगू शकाल.

ज्या चौकोनाच्या संमुख भुजा परस्परांना समांतर असतात, त्या चौकोनाला समांतरभुज चौकोन म्हणतात.

समांतरभुज चौकोन कसा काढता येईल ?

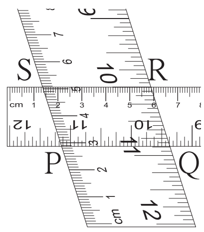
सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेख AB आणि रेख BC हे परस्परांशी कोणत्याही मापाचा कोन करणारे रेषाखंड काढा.



'रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेला समांतर रेषा काढणे' ही रचना तुम्ही केली आहे. तिचा उपयोग करून बिंदू C मधून रेख AB ला समांतर रेषा काढा. तसेच बिंदू A मधून रेख BC ला समांतर रेषा काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूला D नाव द्या. □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. लक्षात घ्या की, समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणारे आंतरकोन परस्परपूरक असतात. म्हणून वरील आकृतीमध्ये, $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$, $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ आणि $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ म्हणजेच समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांचा एक गुणधर्म पुढीलप्रमाणे आहे. • समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांच्या जोड्या परस्परपूरक असतात.

या प्रकारच्या चौकोनाचे आणखी काही गुणधर्म जाणून घेण्यासाठी □ PQRS हा कोणताही एक समांतरभुज चौकोन पुढील **कृती** करून काढा. कमीजास्त रुंदीच्या दोन मोजपट्ट्या घ्या. त्यांपैकी एक पट्टी कागदावर ठेवून तिच्या कडांलगत रेघा काढा. दुसरी पट्टी त्यांवर तिरकी ठेवून तिच्या कडांलगत रेघा काढा. यामुळे समांतरभुज चौकोन मिळेल. त्याचे कर्ण काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला T हे नाव द्या.

(1) चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे मोजून लिहा. (2) संमुख बाजूंच्या जोड्यांची लांबी मोजून लिहा. (3) कर्णांची लांबी मोजून लिहा. (4) बिंदू T मुळे झालेल्या प्रत्येक कर्णाच्या भागांची लांबी मोजून लिहा.



मोजमापांवरून तुम्हांला समांतरभुज चौकोनाचे पुढील गुणधर्म मिळतील.

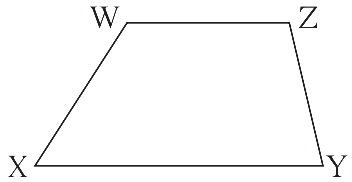
- संमुख कोनांची मापे समान असतात, म्हणजेच संमुख कोन एकरूप असतात.
- संमुख भुजा समान लांबीच्या, म्हणजेच एकरूप असतात.
- कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

वेगवेगळे समांतरभुज चौकोन काढून हे गुणधर्म पडताळून पाहा.

समलंब चौकोन (Trapezium)

ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर असते, त्या चौकोनाला समलंब चौकोन म्हणतात.

आकृती 15 मधील □ WXYZ मध्ये, रेख WZ आणि रेख XY ही संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर आहे. व्याख्येनुसार, □ WXYZ हा समलंब चौकोन आहे.



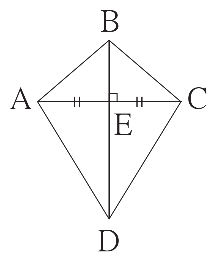
समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या गुणधर्मांनुसार,

$m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ आणि $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

समलंब चौकोनात लगतच्या कोनांच्या चारपैकी दोन जोड्या परस्परपूरक असतात.

पतंग (Kite)

आकृतीमधील □ ABCD पाहा. या चौकोनाचा कर्ण BD हा कर्ण AC चा लंबदुभाजक आहे.



ज्याचा एक कर्ण दुसऱ्या कर्णाचा लंबदुभाजक असतो अशा चौकोनाला पतंग म्हणतात.

या आकृतीत रेख AB ≅ रेख CB आणि रेख AD ≅ रेख CD हे कर्कटकाच्या साहाय्याने पडताळून पाहा. तसेच, ∠BAD आणि ∠BCD मोजा आणि ते एकरूप आहेत, हे पडताळून पाहा.

म्हणजे पतंग या चौकोनाच्या प्रकारात दोन गुणधर्म असतात.

- लगतच्या बाजूंच्या दोन जोड्या एकरूप असतात.
- संमुख कोनांची एक जोडी एकरूप असते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांची मापे $(5x - 7)^\circ$ आणि $(4x + 25)^\circ$ आहेत. तर त्या कोनांची मापे काढा.

उकल : समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.

$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180$

$\therefore 9x + 18 = 180$

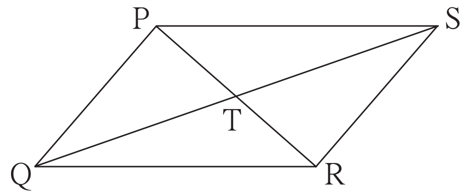
$\therefore 9x = 180 - 18 = 162$

$\therefore x = 18$

$\therefore$ एका कोनाचे माप $= (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$

दुसऱ्या कोनाचे माप $= (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$

उदा.(2) सोबतच्या आकृतीत □ PQRS समांतरभुज आहे. त्याच्या कर्णांचा छेदनबिंदू T आहे. आकृतीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(i) जर l(PS) = 5.4 सेमी, तर l(QR) = किती ?

(ii) जर l(TS) = 3.5 सेमी, तर l(QS) = किती ?

(iii) $m\angle QRS = 118°$, तर $m\angle QPS$ = किती ?

(iv) $m\angle SRP = 72°$ तर $m\angle RPQ$ = किती ?

उकल : समांतरभुज चौकोन PQRS मध्ये,

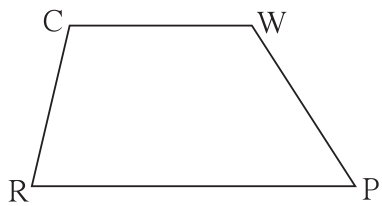
(i) $l(QR) = l(PS) = 5.4$ सेमी .... संमुख बाजू एकरूप

(ii) $l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 3.5 = 7$ सेमी .... कर्ण परस्परांना दुभागतात

(iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118°$ .... संमुख कोन एकरूप

(iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72°$ .... व्युत्क्रम कोन एकरूप

उदा . (3) □ CWPR च्या क्रमागत कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर 7:9:3:5 आहे, तर त्या चौकोनाच्या कोनांची मापे काढा आणि चौकोनाचा प्रकार ओळखा.



उकल : समजा, $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7:9:3:5$

$\therefore \angle C, \angle W, \angle P$ व $\angle R$ यांची मापे अनुक्रमे $7x, 9x, 3x, 5x$ मानू.

$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360°$

$\therefore 24x = 360° \quad \therefore x = 15$

$\therefore m\angle C = 7 \times 15 = 105°, m\angle W = 9 \times 15 = 135°$

$m\angle P = 3 \times 15 = 45°$ आणि $m\angle R = 5 \times 15 = 75°$

$\therefore m\angle C + m\angle R = 105° + 75° = 180° \quad \therefore$ बाजू CW || बाजू RP

$m\angle C + m\angle W = 105° + 135° = 240° \neq 180°$

$\therefore$ बाजू CR ही बाजू WP ला समांतर नाही.

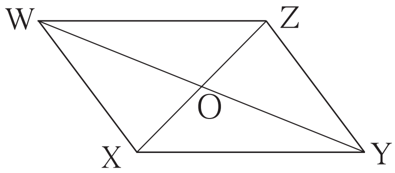
$\therefore$ □ CWPR च्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर आहे.

$\therefore$ □ CWPR हा समलंब चौकोन आहे.

सरावसंच 8.3

1. एका समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे $(3x-2)°$ आणि $(50 - x)°$ आहेत, तर चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

2. शेजारील समांतरभुज चौकोनाच्या आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) जर l(WZ) = 4.5 सेमी तर l(XY) = ?

(2) जर l(YZ) = 8.2 सेमी तर l(XW) = ?

(3) जर l(OX) = 2.5 सेमी तर l(OZ) = ?

(4) जर l(WO) = 3.3 सेमी तर l(WY) = ?

(5) जर $m\angle$ WZY = 120° तर $m\angle$ WXY = ? आणि $m\angle$ XWZ = ?

3. ☐ ABCD हा समांतरभुज चौकोन असा काढा की l(BC) = 7 सेमी, ∠ABC = 40°, l(AB) = 3 सेमी.

4. एका चौकोनाच्या चार क्रमागत कोनांचे प्रमाण 1:2:3:4 आहे, तर तो कोणत्या प्रकाराचा चौकोन असेल ? त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे माप काढा. कारण लिहा.

5. ☐ BARC असा काढा की l(BA) = l(BC) = 4.2 सेमी, l(AC) = 6.0 सेमी, l(AR) = l(CR) = 5.6 सेमी.

6*. ☐ PQRS असा काढा की l(PQ) = 3.5 सेमी, l(QR) = 5.6 सेमी, l(RS) = 3.5 सेमी, $m\angle$ Q = 110°, $m\angle$ R = 70°.

☐ PQRS समांतरभुज आहे ही माहिती दिल्यास वरीलपैकी कोणती माहिती देणे आवश्यक नाही ते लिहा.

उत्तरसूची

सराव संच 8.2

4. 10 सेमी 5. बाजू 10 सेमी व परिमिती 40 सेमी 6. $\sqrt{128}$ सेमी 7. 130°, 50°, 130°

सराव संच 8.3

1. 37°, 143°, 37°, 143°

2. (1) 4.5 सेमी (2) 8.2 सेमी (3) 2.5 सेमी (4) 6.6 सेमी (5) 120°, 60°

4. 36°, 72°, 108°, 144°, समलंब चौकोन

CJTH48

9 सूट व कमिशन

जरा आठवूया.

खालील रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

1. $\frac{12}{100}$ = शेकडा □ = □ %   2. शेकडा 47 = $\frac{□}{□}$ 3. 86% = $\frac{□}{□}$

4. 300 चा शेकडा 4 = 300 × $\frac{□}{□}$ = □   5. 1700 चे 15% = 1700 × $\frac{□}{□}$ = □

चला, चर्चा करूया.

अशा प्रकारच्या जाहिराती तुम्ही पाहिल्या असतील. सेलमध्ये अनेक वस्तूंच्या किमतींवर सूट किंवा रिबेट दिले जाते. आपल्याकडे साधारण जुलै महिन्यात, विशेषतः कपड्यांचे सेल सुरू होतात. याची कारणे शोधा व चर्चा करा.

जाणून घेऊया.

सूट (Discount)

श्री. सुरेश यांनी जून आणि जुलै महिन्यात केलेली साड्यांची विक्री व नफा यांची दिलेली सारणी पाहा :

महिना	साडीची मूळ किंमत रुपये	साडीची विक्री किंमत रुपये	एका साडीवरील नफा रुपये	विक्री केलेल्या साड्यांची संख्या	एकूण नफा रुपये.
जून	200	250	50	40	50 × 40 = 2000
जुलै (सेल)	200	230	30	100	30 × 100 = 3000

सारणीवरून तुमच्या लक्षात येईल की जुलैमध्ये साड्यांचा सेल जाहीर करून प्रत्येक साडीच्या किंमतीवर सूट दिली आहे. त्यामुळे त्यांचा एका साडीवरील नफा जून महिन्यापेक्षा जुलै महिन्यात कमी झाला तरी जुलै मध्ये जास्त साड्यांची विक्री झाल्यामुळे एकूण नफा वाढला.

विक्रीसाठी असलेल्या वस्तूवर त्या वस्तूची किंमत छापलेली असते, तिला त्या वस्तूची **छापील किंमत** (Marked Price) म्हणतात. दुकानदार छापील किमतीवर सूट देतात.

वस्तू विकताना, दुकानदार छापील किमतीपेक्षा जेवढी रक्कम कमी घेतो त्या रकमेला '**सूट**' म्हणतात. सूट देऊन उरलेली किंमत ही विक्री किंमत असते. म्हणजेच विक्री किंमत = छापील किंमत – सूट

सुटीचा दर सामान्यपणे शतमानात म्हणजेच शेकडेवारीत देण्यात येतो.

'शेकडा 20 सूट' याचा अर्थ वस्तूच्या छापील किमतीच्या 20% किंमत कमी घेऊन वस्तू विकणे.

म्हणजेच वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये असल्यास तिच्यावर 20 रुपये सूट दिल्यावर तिची विक्री किंमत 100 – 20 = 80 रुपये होईल.

अशा व्यवहारात सूट x % असेल तर $\frac{x}{100} = \frac{\text{वस्तूच्या किमतीवरील सूट}}{\text{छापील किंमत}}$ असा संबंध असतो.

$$\therefore \text{ वस्तूच्या किमतीवरील सूट} = \frac{\text{छापील किंमत} \times x}{100}$$

अधिक माहितीसाठी

हल्ली दुकानात जाऊन खरेदी करण्याऐवजी; पुस्तके, कपडे मोबाइल इत्यादी अनेक वस्तूंची ऑनलाइन खरेदी केली जाते. जी कंपनी वस्तूंची विक्री ऑनलाइन करते त्या कंपनीचा दुकानाची मांडणी व तेथील व्यवस्थापन इत्यादीचा खर्च कमी असतो. त्यामुळे ऑनलाइन खरेदीवरही सूट देतात आणि वस्तू घरपोच मिळते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका पुस्तकाची छापील किंमत 360 रुपये आहे. दुकानदाराने ते पुस्तक 306 रुपयांस विकले, तर त्याने शेकडा सूट किती दिली?

उकल : छापील किंमत = ₹ 360, विक्री किंमत = ₹ 306. ∴ सूट = 360 – 306 = ₹ 54.

वस्तूची छापील किंमत 360 रुपये, तेव्हा सूट 54 रुपये.

∴ वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये तेव्हा सूट x मानू. $\frac{\text{सूट}}{\text{छापील किंमत}} = \frac{x}{100}$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \qquad \therefore x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

∴ पुस्तकाच्या छापील किमतीवर शेकडा 15 सूट दिली.

उदा. (2) खुर्चीची छापील किंमत 1200 रुपये असून त्यावर 10% सूट असेल तर एकूण सूट किती ? वस्तूची विक्री किंमत किती ?

उकल :

रीत I

छापील किंमत = 1200 रुपये. सूट = 10%

$\frac{\text{सूट}}{\text{छापील किंमत}}$ हे गुणोत्तर काढू.

खुर्चीच्या किमतीवर x रुपये सूट मिळते असे मानू.

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$

$x = \frac{10}{100} \times 1200$

$x = 120$

एकूण सूट = 120 रु.

विक्री किंमत = छापील किंमत − सूट

= 1200 − 120

= 1080

∴ खुर्चीची विक्री किंमत 1080 रुपये.

रीत II

छापील किमतीवर 10% सूट म्हणून जर छापील किंमत ₹ 100 तर विक्री किंमत ₹ 90.

∴ छापील किंमत 1200 रुपये असताना विक्री किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$

$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$

$\therefore x = 1080$

∴ खुर्चीची विक्री किंमत 1080 रुपये.

∴ एकूण सूट = 1200 − 1080 = 120 रुपये.

उदा. (3) छापील किमतीवर 20% सूट देऊन एक साडी 1120 रुपयांना विकली, तर त्या साडीची छापील किंमत किती होती ?

उकल : समजा, साडीची छापील किंमत 100 रुपये होती. त्यावर 20% सूट दिली. म्हणजे ग्राहकास ती साडी 100 − 20 = 80 रुपयांना विकली. म्हणजेच जेव्हा विक्री किंमत 80 रुपये तेव्हा छापील किंमत 100 रुपये. जेव्हा विक्री किंमत 1120 रुपये तेव्हा छापील किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$

$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$

$= 1400$

∴ साडीची छापील किंमत 1400 रुपये होती.

उदा. (4) दुकानदार एक वस्तू काही किमतीला विकायचे मनाशी ठरवतो आणि वस्तूची किंमत त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 30% वाढवून छापतो. वस्तू विकताना ग्राहकास 20% सूट देतो, तर दुकानदारास त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा किती टक्के अधिक किंमत मिळते हे काढा.

उकल : किमतीतील वाढ तसेच जास्तीचा नफा यांची टक्केवारी ठरवलेल्या किमतीवर आहे म्हणून ठरवलेली किंमत 100 मानल्यास उदाहरण सोपे होईल. $\therefore$ ठरवलेली किंमत रु. 100 मानू.

ही किंमत तो 30% वाढवून छापतो. $\therefore$ छापील किंमत = 130 रुपये.

सूट = 130 चे 20% $= 130 \times \frac{20}{100} = 26$ रुपये

$\therefore$ विक्री किंमत $= 130 - 26 = 104$ रुपये

$\therefore$ ठरवलेली किंमत 100 रुपये असेल तर त्याला 104 रुपये मिळतात.

म्हणजेच दुकानदाराला त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 4% अधिक किंमत मिळते.

उदा. (5) एका वस्तूवर दुकानदार ग्राहकास 8% सूट देतो, तरीही त्यास 15% नफा होतो, जर त्या वस्तूची छापील किंमत 1750 रुपये असेल, तर ती वस्तू दुकानदाराने किती किमतीला खरेदी केली असेल?

उकल : वस्तूची छापील किंमत = 1750 रुपये, शेकडा सूट = 8

$\therefore$ सूट $= 1750 \times \frac{8}{100} = 140$ रुपये

वस्तूची विक्री किंमत $= 1750 - 140 = 1610$ रुपये

नफा 15%, म्हणजे वस्तूची खरेदी किंमत 100 रुपये असेल तर विक्री किंमत 115 रुपये.

म्हणजेच विक्री किंमत 115 रुपये असताना खरेदी किंमत 100 रुपये.

विक्री किंमत 1610 रुपये असताना खरेदी किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115}$ $\quad\quad \therefore \quad x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$

वस्तूची खरेदी किंमत = 1400 रुपये.

हे मला समजले.

- सूट = छापील किंमत − विक्री किंमत
- सूट शेकडा x असेल तर $\frac{x}{100} = \frac{\text{मिळालेली सूट}}{\text{छापील किंमत}}$

सरावसंच 9.1

1. जर छापील किंमत = ₹ 1700, विक्री किंमत = ₹ 1540 तर सूट काढा.

2. जर छापील किंमत = ₹ 990, सूट शेकडा 10, तर विक्री किंमत काढा.

3. जर विक्री किंमत = ₹ 900. सूट शेकडा 20, तर छापील किंमत काढा.

4. एका पंख्याची छापील किंमत 3000 रुपये आहे. दुकानदाराने शेकडा 12 सूट दिली तर पंख्यावर दिलेली सूट व पंख्याची विक्री किंमत काढा.

5. 2300 रुपये छापील किंमत असलेला मिक्सर गिऱ्हाइकास 1955 रुपयास मिळतो तर गिऱ्हाइकास मिळालेली शेकडा सूट काढा.

6. दुकानदार एका दूरदर्शन संचावर शेकडा 11 सूट देतो, त्यामुळे गिऱ्हाइकास तो संच 22,250 रुपयांस मिळतो, तर त्या दूरदर्शन संचाची छापील किंमत काढा.

7. छापील किमतीवर 10% सूट असताना ग्राहकास एकूण सूट 17 रुपये मिळते, तर ग्राहकास ती वस्तू केवढ्यास पडेल हे काढण्यासाठी खालील रिकाम्या चौकटी भरून कृती पूर्ण करा.

   कृती :समजा, वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये आहे.

   म्हणजे ग्राहकास ती वस्तू $\square - \square$ = 90 रुपयांस मिळते.

   म्हणजेच जेव्हा $\square$ रुपये सूट तेव्हा विक्री किंमत $\square$ रुपये.

   तर जेव्हा $\square$ रुपये सूट तेव्हा विक्री किंमत x रुपये मानू.

   $$\therefore \frac{x}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \therefore x = \frac{\square \times \square}{\square} = \square$$

   ∴ ग्राहकास ती वस्तू 153 रुपयांना पडेल.

8. दुकानदार एक वस्तू एका विशिष्ट किमतीला विकण्याचे ठरवतो आणि तिची किंमत ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 25% वाढवून छापतो. वस्तू विकताना तो ग्राहकास 20% सूट देतो, तर दुकानदारास त्याने ठरवलेली किंमत आणि प्रत्यक्ष विक्रीची किंमत यांत शेकडा किती फरक पडतो ?

जाणून घेऊया.

कमिशन (Commission)

वस्तूचे उत्पादन करणाऱ्या कंपनीला आपला माल स्वत: विकणे शक्य नसते तेव्हा ती कंपनी काही

व्यक्तींवर आपला माल विकण्याची जबाबदारी सोपवते (उदाहरणार्थ पुस्तके, कापड, साबण इत्यादी) या सेवेबद्दल त्या व्यक्तीस काही मोबदला दिला जातो. त्यास **कमिशन** असे म्हणतात म्हणून असे काम करणाऱ्या व्यक्तीस कमिशन एजंट म्हणतात. कमिशन शेकडेवारीत देण्यात येते. त्याचे दर वस्तूनुसार वेगवेगळे असतात.

जमीन (भूखंड), घरे, गुरेढोरे यांच्या मालकांना वरील गोष्टींची विक्री करताना सहजासहजी ग्राहक मिळेलच असे नसते. त्यामुळे विकणारा व खरेदी करणारा यांना एकत्र आणण्याचे काम जी व्यक्ती करते तिला **मध्यस्थ** किंवा **दलाल** किंवा **कमिशन एजंट** म्हणतात.

धान्य, भाजीपाला, फळे-फुले वगैरे शेतमालाची विक्री ज्या मध्यस्थामार्फत होते त्या व्यक्तीस **दलाल** किंवा **अडत्या** असे म्हणतात. या कामाबद्दल मध्यस्थाला जे कमिशन मिळते त्यास **दलाली** किंवा **अडत** म्हणतात. ही दलाली किंवा अडत ज्याचा माल विकतो त्याच्याकडून किंवा जो माल खरेदी करतो त्याच्याकडून किंवा दोघांकडूनही मिळू शकते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका दलालामार्फत श्रीपतीने 2,50,000 रुपये किमतीचा भूखंड सदाशिवला विकला. दलालाने दोघांकडून प्रत्येकी 2% दलाली घेतली, तर दलालास एकूण किती दलाली मिळाली ?

उकल : भूखंडाची किंमत = 2,50,000

$\therefore$ दलाली $= 250000 \times \frac{2}{100} = 5000$

दलाली दोघांकडून घेतली. $\therefore$ एकूण दलाली $= 5000 + 5000 = 10000$ रुपये.

उदा. (2) सुखदेवने अडत्यामार्फत 10 क्विंटल गहू, प्रतिक्विंटल 4050 रूपये या दराने विकला. त्याने अडत्याला 1% दराने अडत दिली, तर गहू विकून सुखदेवला किती रक्कम मिळाली ते काढा.

उकल : गव्हाची विक्री किंमत $= 10 \times 4050 = 40500$ रुपये, अडतीचा दर शेकडा 1

$\therefore$ दिलेली अडत $= 40500 \times \frac{1}{100} = 405$ रुपये

$\therefore$ गहू विकून मिळालेली रक्कम = गव्हाची विक्री किंमत − अडत

$= 40500 - 405 = 40,095$ रुपये

गहू विकून सुखदेवला मिळालेली रक्कम = 40,095 रुपये.

रिबेट (Rebate)

खादी ग्रामोद्योग भांडार, हातमाग दुकान, हस्तकला वस्तू विक्री केंद्र, महिला बचत गट इत्यादी संस्था काही विशेष प्रसंगानिमित्त ग्राहकांना सूट देतात उदा. गांधीजयंती निमित्त खादीच्या कापडावर सूट दिली जाते,

अशा वेळी दुकानदाराला छापील किमतीपेक्षा जेवढी रक्कम कमी मिळते त्याची भरपाई शासन करते. अशा योजनेखाली ग्राहकाला जी सूट मिळते, तिला रिबेट म्हणतात.

आयकर भरणाऱ्या ज्या व्यक्तींचे उत्पन्न ठरावीक मर्यादेपर्यंत असते, त्यांना आयकरात सूट मिळते या सुटीलाही रिबेट म्हणतात.

थोडक्यात रिबेट म्हणजे एक प्रकारची सूटच असते. ती विशिष्ट अटीनुसार मान्यताप्राप्त संस्था किंवा शासन यांच्याकडून दिली जाते.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. हातमाग मंडळाच्या एका दुकानातून सुधीरने खालील वस्तू खरेदी केल्या.

(i) 2 चादरी, प्रत्येक 375 रुपये, (ii) 2 सतरंज्या, प्रत्येकी 525 रुपये

या खरेदीवर शेकडा 15 रिबेट मिळाले, तर रिबेटची एकूण रक्कम किती? सुधीरने दुकानदाराला किती रक्कम द्यावी?

उकल : 2 चादरींची किंमत = 2×375 = ₹ 750. 2 सतरंज्यांची किंमत = 2×525 = ₹ 1050.

खरेदी केलेल्या वस्तूंची एकूण किंमत = $750 + 1050 = 1800$ रुपये.

मिळणारे एकूण रिबेट = $1800 \times \frac{15}{100} = 270$ रुपये.

$\therefore$ सुधीरने दुकानदाराला द्यायची रक्कम = $1800 - 270 = 1530$ रुपये.

सरावसंच 9.2

1. जॉनने एका प्रकाशकाची 4500 रुपये किमतीची पुस्तके विकली. त्याबद्दल त्याला शेकडा 15 कमिशन मिळाले. तर जॉनला मिळणारे एकूण कमिशन किती हे काढण्यासाठी रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

पुस्तकाची विक्री किंमत = $\square$ कमिशनचा दर = $\square$

मिळालेले कमिशन = $\frac{\square}{\square} \times \square$ $\therefore$ कमिशन = $\square$ रुपये

2. रफिकने शेकडा 4 दलाली देऊन दलालामार्फत 15000 रुपयांची फुले विकली, तर दलाली काढा. रफिकला मिळणारी रक्कम काढा.

3. एका शेतकऱ्याने 9200 रुपये किमतीचा माल अडत्यामार्फत विकला. त्याला 2% अडत द्यावी लागली. तर अडत्याला किती रक्कम मिळाली ?

4. खादी भांडारातून उमाताईंनी खालील वस्तू खरेदी केल्या.

(i) 3 साड्या प्रत्येकी 560 रुपये. (ii) मधाच्या 6 बाटल्या प्रत्येकी 90 रुपये.

या खरेदीवर शेकडा 12 प्रमाणे रिबेट मिळाले, तर उमाताईंना या वस्तू केवढ्याला मिळाल्या ?

5. दिलेल्या माहितीच्या आधारे खालील रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या भरा.

एका दलालामार्फत श्रीमती दीपांजली यांनी 7,50,000 रुपये किमतीचे घर श्रीमती लीलाबेन यांच्याकडून खरेदी केले. दलालाने दोघींकडून प्रत्येकी 2% दलाली घेतली. तर

(1) श्रीमती दीपांजली यांनी घर खरेदीसाठी □ $\times \frac{\square}{\square} =$ □ रुपये दलाली दिली.

(2) लीलाबेन यांनी घर विक्रीसाठी □ रुपये दलाली दिली.

(3) दलालास या व्यवहारांत एकूण □ रुपये दलाली मिळाली.

(4) श्रीमती दीपांजली यांना ते घर □ रुपयांस मिळाले.

(5) श्रीमती लीलाबेन यांना घर विकून □ रुपये मिळाले.

उत्तरसूची

सरावसंच 9.1

1. ₹ 160 **2.** ₹ 891 **3.** ₹ 1125 **4.** सूट ₹ 360, वि.किं ₹ 2640 **5.** 15%

6. ₹ 25,000 **8.** 0 %.

सरावसंच 9.2

2. दलाली ₹ 600, रक्कम ₹ 14400

3. ₹ 184

4. ₹ 1953.60

CK3S5V

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. पुढील प्रश्नांसाठी पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यापैकी योग्य पर्याय निवडा.

(1) □ PQRS मध्ये $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ व $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ तर पुढीलपैकी कोणत्या बाजू समांतर आहेत?

(A) बाजू PQ व बाजू QR (B) बाजू PQ व बाजू SR

(C) बाजू SR व बाजू SP (D) बाजू PS व बाजू PQ

(2) खालील विधाने वाचा, त्याखाली दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

(i) आयताचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात

(ii) समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

(iii) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

(iv) पतंगाचे कर्ण परस्परांचे दुभाजक असतात.

(A)विधान (ii) व (iii) सत्य आहेत (B) फक्त विधान (ii) सत्य आहे

(C) विधान (ii) व (iv) सत्य आहेत (D) विधान (i), (iii), (iv) सत्य आहेत

(3) $19^3 = 6859$ यावरून $\sqrt[3]{0.006859}$ = किती ?

(A) 1.9 (B)19 (C) 0.019 (D)0.19

2. पुढील संख्यांची घनमुळे काढा.

(1) 5832 (2) 4096

3. $m \alpha n$, जेव्हा $m = 25$ तेव्हा $n = 15$ यावरून

(1) $n = 87$ असताना m किती ? (2) $m = 155$ तर n = ?

4. x आणि y यात व्यस्त चलन आहे, जेव्हा $x = 12$ तेव्हा $y = 30$ असते

(1) जर $x = 15$ तर y = किती ? (2) जर $y = 18$ तर x = ?

5. एक रेषा l काढा. त्या रेषेपासून 3.5 सेमी अंतरावर एक समांतर रेषा काढा.

6. $(256)^{\frac{5}{7}}$ ही संख्या कोणत्या संख्येच्या कितव्या मूळाचा कितवा घात आहे ते लिहा.

7. विस्तार करा.

(1) $(5x-7)(5x-9)$ (2) $(2x-3y)^3$ (3) $(a + \frac{1}{2})^3$

8. एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाच्या सर्व मध्यगा काढून त्यांचा संपात बिंदू दाखवा.

9. Δ ABC असा काढा की l (BC) = 5.5 सेमी m $\angle$ABC = 90°, l (AB) = 4 सेमी या त्रिकोणाचा शिरोलंबसंपात बिंदू दाखवा.

10. बसचा वेग ताशी 48 किमी असताना एका गावाहून दुसऱ्या गावाला जायला 5 तास लागतात. बसचा वेग ताशी 8 किमीने कमी केला, तर तेवढ्याच प्रवासाला किती तास लागतील ते काढा. चलनाचा प्रकार ओळखून उदाहरण सोडवा.

11. Δ ABC च्या रेख AD व रेख BE या मध्यगा आहेत. G हा मध्यगा संपातबिंदू आहे. जर l(AG) = 5 सेमी तर l(GD) = किती आणि जर l(GE) = 2 सेमी तर l(BE) = किती ?

12. खालील परिमेय संख्या दशांश रुपात लिहा.

(1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$

13. अवयव पाडा.

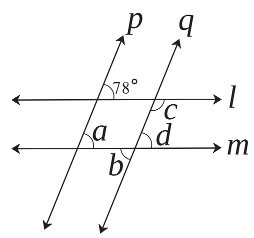
(1) $2y^2-11y+5$ (2) $x^2-2x-80$ (3) $3x^2-4x+1$

14. एका दूरचित्रवाणी संचाची किंमत 50000 रुपये आहे. तो संच दुकानदाराने 15% सूट देऊन विकला तर त्या गिऱ्हाईकास तो केवढ्यास पडेल ?

15. राजाभाऊंनी आपला फ्लॅट दलालमार्फत वसंतरावांना 88,00000 रुपयास विकला. दलालाने दोघांकडून 2 % दराने दलाली घेतली, तर दलालास एकूण किती दलाली मिळाली ?

16. $\square$ ABCD समांतरभुज चौकोन असा काढा की l(DC) = 5.5 सेमी, $m\angle$D = 45°, l(AD) = 4 सेमी.

17. आकृतीत रेषा l || रेषा m तसेच रेषा p || रेषा q यावरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ची मापे काढा.



उत्तर सूची

1. (i) B (ii) B (iii) D 2. (1)18 (2) 16 3. (1) 145 (2) 93

4. (1) 24 (2) 20 6. 256 च्या सातव्या मुळाचा पाचवा घात

7. (1) $25x^2-80x+63$ (2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ (3) $a^3+\frac{3a^2}{2}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{8}$

10. व्यस्त, 6 तास 11. l(GD) = 2.5 सेमी, l(BE)= 6 सेमी

12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\dot{7}$

13. (1) $(y-5)(2y-1)$ (2) $(x-10)(x+8)$ (3) $(x-1)(3x-1)$

14. ₹42500 15. ₹ 352000 17. 78°, 78°, 102°, 78°

10 बहुपदींचा भागाकार

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत बैजिक राशींवर बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करायच्या हे आपण शिकलो आहोत.

खालील उदाहरणांत रिकाम्या जागा भरा.

(1) $2a + 3a = \square$ (2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$ (4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$ (6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$

जाणून घेऊया.

बहुपदीची ओळख (Introduction to polynomial)

एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल, तर ती राशी एका चलातील बहुपदी असते.

उदाहरणार्थ, $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ या एका चलातील बहुपदी आहेत.

बहुपदी या विशिष्ट बैजिक राशीच असतात म्हणून बहुपदींवरील बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया बैजिक राशींप्रमाणे केल्या जातात.

उदाहरणार्थ, (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$

$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$

$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

(2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$

$= -3x^2 + 11x - 13$

बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial)

पुढील उदाहरणात दिलेल्या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक चौकटीत लिहा.

उदा. (1) $3x^2 + 4x$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\boxed{2}$ आहे.

उदा. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक $\square$ आहे.

दिलेल्या बहुपदीतील चलाच्या सर्वांत मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.

हे मला समजले.

- एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल तर ती राशी बहुपदी असते.
- बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक म्हणजे त्या बहुपदीची कोटी होय.

जाणून घेऊया.

(I) एकपदीला एकपदीने भागणे (To divide a monomial by a monomial)

उदा. (1) $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करा.

उकल : भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$\therefore$ $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करण्यासाठी, $3p$ या एकपदीला कोणत्या एकपदीने गुणले असता गुणाकार $15p^3$ येतो, हा विचार करावा लागेल.

$3p \times 5p^2 = 15p^3$ $\therefore$ $15p^3 \div 3p = 5p^2$

या उदाहरणाची मांडणी शेजारी दाखवल्याप्रमाणे करता येते.

$$3p\overline{)15p^3} \quad \text{भागाकार } 5p^2$$
$$-15p^3$$
$$0$$

उदा. (2) भागाकार करा व चौकटींत योग्य ती पदे लिहा.

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$ (ii) $(5m^2) \div (-m)$ (iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

(i) $-9x\overline{)-36x^4}$ भागाकार $\square$; $\square$; बाकी $\square$

(ii) $-m\overline{)5m^2}$ भागाकार $\square$; $\square$; बाकी $\square$

(iii) $2y^3\overline{)-20y^5}$ भागाकार $\square$; $\square$; बाकी $\square$

बहुपदीला एकपदीने भागणे (To divide a polynomial by a monomial)

खालील उदाहरणे अभ्यासा व बहुपदीला एकपदीने भागण्याची रीत समजून घ्या.

उदा. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

उकल :

$$2x\overline{)6x^3 + 8x^2} \quad \text{भागाकार } 3x^2 + 4x$$
$$-6x^3$$
$$0 + 8x^2$$
$$-8x^2$$
$$0$$

स्पष्टीकरण –

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 + 4x$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ \hline 5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-15y^4} \\ & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-10y^3} \\ & 0 - 3y^2 \\ & \underline{\mp 3y^2} \\ & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ भागाकार $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ व बाकी $= 0$

उदा. (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 4p - 2 \\ \hline 3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{-12p^3} \\ & 0 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{\mp 6p^2} \\ & 0 + 4p \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

(i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ भागाकार $= 4p - 2$ व बाकी $= 4p$

उदा. (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2 - 3x + 4 \\ \hline x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-5x^4} \\ & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{\mp 3x^3} \\ & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-4x^2} \\ & 0 + 2x - 6 \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

(i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ भागाकार $= 5x^2 - 3x + 4$ व बाकी $= 2x - 6$

बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

वरील उदा. (3) मध्ये, बाकी $4p$ ची कोटी ही $3p^2$ या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे. तसेच उदा. (4) मध्ये $2x - 6$ ह्या बाकीची कोटी ही x^2 या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे हे लक्षात घ्या.

सरावसंच 10.1

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1) $21m^2 \div 7m$ (2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$ (4) $40m^5 \div 30m^3$

(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$ (6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$

(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$ (8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$

(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$ (10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

जाणून घेऊया.

बहुपदीला द्विपदीने भागणे (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपदीला द्विपदीने भागण्याची रीत ही बहुपदीला एकपदीने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

उदा. (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\ & \underset{-}{}x^2 \underset{-}{+} 2x \\ \hline & 0 + 2x + 4 \\ & \underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण

(i) प्रथम भाज्यास व भाजकास घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावे.

भाजकाच्या पहिल्या पदास x ने गुणले की भाज्याचे पहिले पद मिळते.

$\therefore$ भाजकास x ने गुणावे

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ भागाकार $= x + 2$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

उकल : येथे भाज्य बहुपदीची कोटी 4 आहे. तिच्यातील चलाचे घातांक उतरत्या क्रमाने नाहीत. तसेच घातांक 3 असलेले पदही नाही. ते $0y^3$ मानू आणि भाज्य बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहू व भागाकार करू.

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
\hline
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{}y^4 \overset{+}{\underset{-}{}} 4y^3} \\
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{\underset{+}{}} 4y^3 \overset{-}{\underset{+}{}} 16y^2} \\
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{}6y^2 \overset{+}{\underset{-}{}} 24y} \\
 & 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ भागाकार $= y^3 - 4y^2 + 6y$ व बाकी $= 0$

उदा. (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

उकल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
\hline
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\overset{-}{}6x^4 \qquad \overset{-}{\underset{+}{}} 6x^2} \\
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\overset{+}{\underset{-}{}} 5x^3 \qquad \overset{-}{\underset{+}{}} 5x} \\
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{\overset{-}{}9x^2 \qquad \overset{-}{\underset{+}{}} 9} \\
 & 0 + 10x + 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ भागाकार $= 6x^2 + 5x + 9$ व बाकी $= 10x$

हे मला समजले.

- बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते, किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.
- भाज्य बहुपदीतील पदे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने नसतील तर ती बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहावी ती तशी लिहिताना एखाद्या घातांकाचे पद नसेल तर त्याचा सहगुणक 0 मानून घातांकांचा उतरता क्रम पूर्ण करावा.

सरावसंच 10.2

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$ (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6★) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7★) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

उत्तरसूची

सरावसंच 10.1

1. $3m$, 0
2. $-4a^2$, 0
3. $\frac{-16}{3}p^2$, 0
4. $\frac{4}{3}m^2$, 0
5. $5x - 3$, 0
6. $4p - 2$, 0
7. $y + 2$, 3
8. $3x$, $-14x^2 + 7x$
9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0
10. $5m - 3$, $10m + 8$

सरावसंच 10.2

1. $y + 6$, 0
2. $p + 4$, -17
3. $4x^2 + 18x + 75$, 300
4. $m^2 + m + 1$, 10
5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$
6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$
7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $\frac{-13}{16}$

CKCN7I

11 सांख्यिकी

जरा आठवूया.

उदा. निनादने एका पुस्तकाच्या दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या 60, 50, 54, 46, 50 अशी आहे. यावरून दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी काढा.

उकल : सरासरी $= \dfrac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांकांची संख्या}}$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore$ दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी $\square$ आहे.

या सरासरीस मध्य किंवा मध्यमान म्हणतात.

जाणून घेऊया.

वरील उदाहरणात रोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या ही सांख्यिक माहिती आहे. त्यावरून निनादने रोज साधारणपणे 52 पृष्ठे वाचली असा निष्कर्ष काढला आहे.

अशा रीतीने घटनेविषयी किंवा समस्येविषयी सांख्यिक माहिती जमा करणे, त्या माहितीचा अभ्यास करून काही निष्कर्ष मिळवणे, ही एक स्वतंत्र ज्ञानशाखा आहे. या शाखेला **सांख्यिकी** असे नाव आहे.

मध्य (Mean)

आपण पाहिले की 60, 50, 54, 46 व 50 या संख्यांची सरासरी 52 येते. या सरासरीला सांख्यिकीच्या परिभाषेत मध्य म्हणतात. सांख्यिक सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठी सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करतात. या बेरजेला सामग्रीतील संख्यांच्या संख्येने भागतात.

मध्य काढण्याच्या या रीतीचा आपण आणखी अभ्यास करू. त्यासाठी पुढील उदाहरण पाहा.

उदा. एका शाळेतील इयत्ता 8 वी च्या 37 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात एका 10 गुणांच्या चाचणीत मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. या गुणांचा मध्य काढा.

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

उकल : या उदाहरणात सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करण्यासाठी बराच वेळ जाईल. आपल्याला माहीत आहे की 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 × 5 = 35. यावरून एका संख्येत तीच संख्या मिळवण्याची क्रिया सोपी होते, हे लक्षात घ्या. याचाच उपयोग करून वरील सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करणे सोईचे होईल म्हणून सामग्रीतील संख्यांचे वर्गीकरण करून संख्याची बेरीज करू.

गुण, x_i (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
2	|	1	1 × 2 =2
3	|	1	1 × 3 =3
4	卌	5	5 × 4 =20
5	||	2	2 × 5 =10
6	卌	5	5 × 6 = 30
7	卌 |	6	6 × 7 = 42
8	卌	5	5 × 8 = 40
9	卌 |||	8	8 × 9 = 72
10	||||	4	4 × 10 = 40
		N = 37	$\Sigma f_i x_i$ = 259.

$$\text{मध्य} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{259}{37} = 7$$

वरीलप्रमाणे सारणी तयार करून दिलेल्या सामग्रीचा मध्य काढण्याच्या पुढील पायऱ्या लक्षात ठेवा.

- पहिल्या स्तंभात $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ असे चढत्या क्रमाने प्राप्तांक लिहा, ते x_i ने दर्शवले.
- दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करा.
- तिसऱ्या स्तंभात प्रत्येक प्राप्तांकाशी संबंधित ताळ्याच्या खुणा मोजून वारंवारता लिहा. ही वारंवारता f_i ने दर्शवली आहेत. त्याखाली सर्व वारंवारतांची बेरीज लिहा. एकूण वारंवारता N ने दर्शवली आहे.
- शेवटच्या स्तंभात $f_i \times x_i$ हे गुणाकार लिहा. त्याखाली सर्व गुणाकारांची बेरीज लिहा. $f_i \times x_i$ या गुणाकारांची बेरीज $\Sigma\ f_i \times x_i$ अशी दाखवली जाते. Σ (सिग्मा) हे चिन्ह 'बेरीज' या अर्थाने वापरले जाते. मध्य $\overline{x}$ (एक्स बार) ने दर्शवतात.

$$\therefore \text{ मध्य } \overline{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

उदा. राजापूर या गावातील 30 शेतकऱ्यांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पादन क्विंटलमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.

9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,

6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.

यावरून वारंवारता वितरण सारणी तयार करा आणि सोयाबीनच्या एकरी उत्पादनाचा मध्य काढा.

उकल :

एकरी उत्पादन (क्विंटल) (प्राप्तांक) x_i	ताळ्याच्या खुणा	शेतकरी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
4	|||	3	12
5	|||| (५ ची खूण)	5	25
5.5	||||	4	22
6	|||	3	18
6.5	||	2	13
7.5	||||	4	30
8	|||| (५ ची खूण) |	6	48
9	|||	3	27
		N = 30	$\Sigma f_i x_i = 195.$

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \dfrac{195}{30} = 6.5$

एकरी सोयाबीन उत्पादनाचा मध्य 6.5 क्विंटल.

सरावसंच 11.1

1. इयत्ता 8 वी मधील 30 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांची संख्या खालील वारंवारता सारणीत दिली आहे. यावरून प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य काढण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

रोपांची संख्या (प्राप्तांक) x_i	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	☐
3	12	☐
4	8	☐
	N = ☐	$\Sigma f_i x_i =$ ☐

मध्य $\bar{x} = \dfrac{☐}{N}$

$= \dfrac{☐}{☐}$

= ☐

∴ प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य ☐ आहे.

2. एकलारा गावातील 25 कुटुंबांत मे महिन्यात वापरलेली वीज युनिटमध्ये खालील सारणीत दिली आहे. सारणी पूर्ण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

वीज वापर (युनिट) (प्राप्तांक) x_i	कुटुंबांची संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	....
45	2	....
60	8	....
75	5	....
90	3	....
	N = ...	$\Sigma f_i x_i$ =.......

(1) 45 युनिट वीज वापरणारी एकूण कुटुंबे किती ?

(2) ज्या प्राप्तांकाची वारंवारता 5 आहे तो प्राप्तांक कोणता ?

(3) N = किती? $\Sigma f_i x_i$ = किती?

(4) यावरून मे महिन्यात प्रत्येक कुटुंबाने वापरलेल्या विजेचा मध्य काढा.

3. भिलार येथील 40 कुटुंबांतील सदस्यांची संख्या पुढीलप्रमाणे आहे. 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2. यावरून या 40 कुटुंबांतील सदस्यांचा मध्य वारंवारता सारणीचा वापर करून काढा.

4. 'मॉडेल हायस्कूल, नांदपूर' ने राज्यस्तरीय विज्ञान प्रदर्शनात मागील 20 वर्षांत सादर केलेल्या विज्ञान व गणित प्रकल्पांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे. यावरून वारंवारता सारणी तयार करून सामग्रीचा मध्य काढा.
2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

जाणून घेऊया.

मागील इयत्तेत आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख यांचा अभ्यास केला आहे. आता अजून काही स्तंभालेखांचा अभ्यास करू.

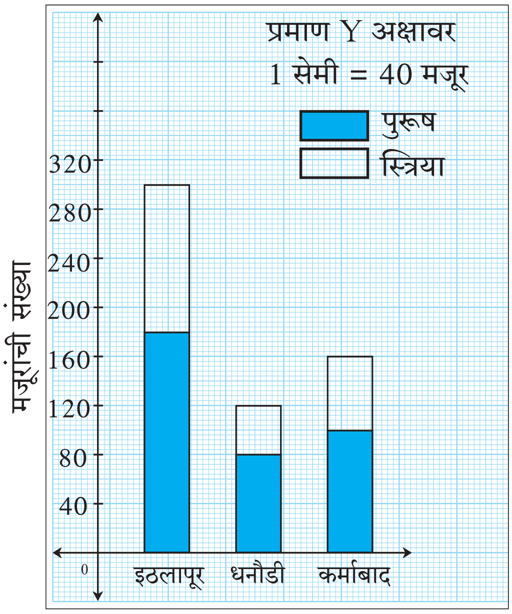
विभाजित स्तंभालेख (Subdivided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीचे तुलनात्मक विश्लेषण जोड स्तंभालेखाप्रमाणे विभाजित स्तंभालेखाने सुद्धा करता येते. यात दोन किंवा अधिक घटकांची माहिती एकाच स्तंभात दाखवली जाते. विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या पायऱ्या बघू.

गाव	इठलापूर	धनोडी	कर्माबाद
पुरुष मजूर	180	80	100
स्त्री मजूर	120	40	60
एकूण मजूर	300	☐	☐

- प्रथम सामग्रीतील माहितीची वरीलप्रमाणे सारणी तयार करा.

- आलेख कागदावर X- अक्ष व Y- अक्ष काढा.
- समान अंतर ठेवून, X- अक्षावर गावांची नावे लिहा.
- Y - अक्षावर मजूरांची संख्या लिहा. 1 सेमी = 40 मजूर हे प्रमाण घ्या.
- इठलापूर गावात एकूण मजूर 300 आहेत. मजूरांची ही संख्या एका स्तंभाने दाखवा.



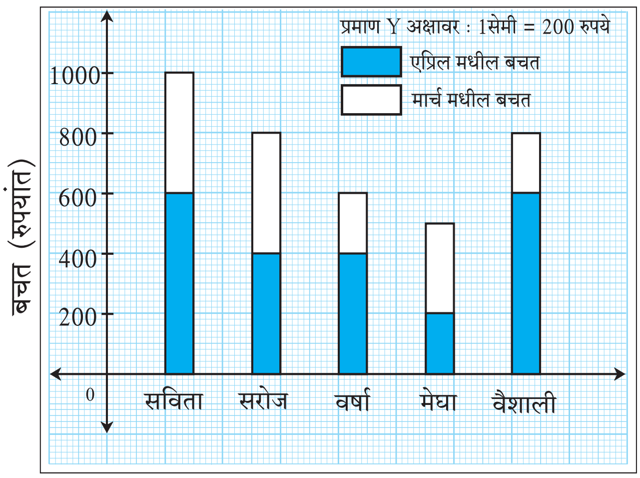
गावांची नावे

- त्यामध्ये पुरुष मजूर हा एकूण मजूरांच्या स्तंभाचा एक भाग आहे, तो एका खुणेने दाखवा.
- स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच स्त्री मजूरांची संख्या दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दाखवा.
- याप्रमाणेच धनोडी व कर्माबाद गावांकरिता विभाजित स्तंभ काढा.

वरील पायऱ्यांनुसार विभाजित स्तंभालेख शेजारी काढून दाखवला आहे, त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.2

1. खालील आकृतीचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



महिला

(1) ही आकृती कोणत्या प्रकारच्या स्तंभालेखाची आहे ?

(2) वैशालीची एप्रिल महिन्यातील बचत किती आहे ?

(3) सरोजची मार्च व एप्रिल महिन्यांतील एकूण बचत किती ?

(4) सविताची एकूण बचत मेघाच्या एकूण बचतीपेक्षा किती जास्त आहे ?

(5) कोणाची एप्रिल महिन्यातील बचत सर्वांत कमी आहे ?

2. एका जि. प. शाळेतील इयत्ता 5 वी ते 8 वी मधील मुलांची व मुलींची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. यावरून विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी घ्या.)

इयत्ता	5 वी	6 वी	7 वी	8 वी
मुले	34	26	21	25
मुली	17	14	14	20

3. खालील सारणीत चार गावांमध्ये 2016 आणि 2017 या वर्षांत लावलेल्या झाडांच्या संख्या दिल्या आहेत. सारणीतील माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.

गाव / वर्ष	कर्जत	वडगाव	शिवापूर	खंडाळा
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. खालील सारणीत तीन शहरांतील इयत्ता 8 वीतील विद्यार्थ्यांनी शाळेत जाण्यासाठी वापरलेल्या वाहतुकीच्या साधनांची व पायी जाणाऱ्यांची माहिती दिली आहे. ही माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर - 1 सेमी = 500 विद्यार्थी घ्या.)

शहर / साधन	पैठण	येवला	शहापूर
सायकल	3250	1500	1250
बस व ऑटो	750	500	500
पायी	1000	1000	500

जाणून घेऊया.

शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

आर्वी या गावामध्ये लावलेल्या 60 झाडांपैकी 42 झाडे जगली आणि मोर्शी या गावामध्ये लावलेल्या 75 झाडांपैकी 45 झाडे जगली. बार्शी या गावात लावलेल्या 90 झाडांपैकी 45 झाडे जगली.

कोणत्या गावातील वृक्षारोपण अधिक यशस्वी झाले ते समजण्यासाठी केवळ संख्या पुरेशा नाहीत. त्यासाठी जगलेल्या झाडांचे शतमान काढावे लागेल.

आर्वी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण = $\frac{42}{60} \times 100 = 70$.

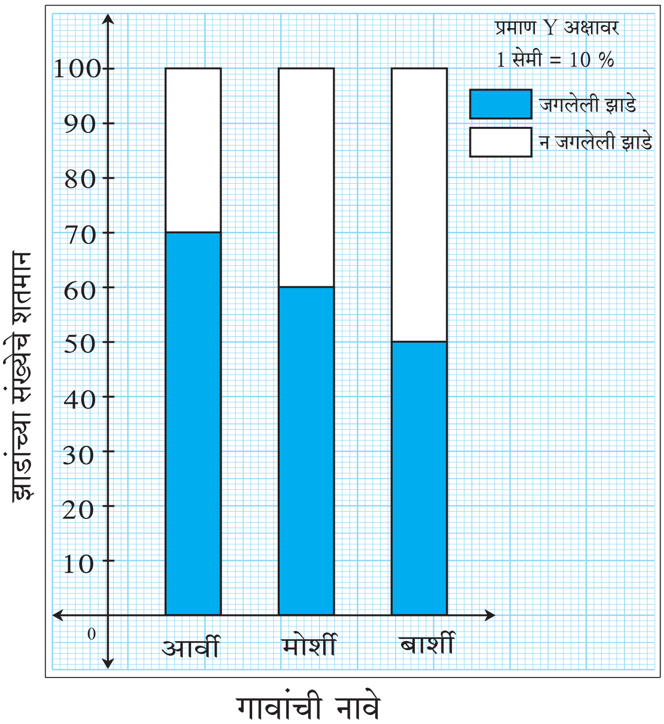
मोर्शी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण = $\frac{45}{75} \times 100 = 60$.

या शतमानांवरून असे लक्षात येते की आर्वी गावातील जगलेल्या झाडांची संख्या कमी असली तरी त्यांचे शतमान जास्त आहे. म्हणजेच शतमानांवरून थोड्या वेगळ्या प्रकारची माहिती मिळते. दिलेली माहिती शतमानात

रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. म्हणजेच शतमान स्तंभालेख हे विभाजित स्तंभालेखाचे विशेष रूप असते. हा शतमान स्तंभालेख खालील पायऱ्यांच्या आधारे काढू.

- प्रथम खालीलप्रमाणे सारणी तयार करू.

गाव	आर्वी	मोर्शी	बार्शी
लावलेली एकूण झाडे	60	75	90
जगलेली झाडे	42	45	45
जगलेल्या झाडांचे शतमान	$\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$	$\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$	$\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$



- शतमान स्तंभालेखात सर्व स्तंभ 100 एकक उंचीचे घेतात.
- प्रत्येक स्तंभात जगलेल्या झाडांचे शतमान दाखवू. उरलेले शतमान न जगलेल्या झाडांचे असेल.
- शतमान स्तंभालेख हा एक प्रकारचा विभाजित स्तंभालेख असल्यामुळे बाकी सर्व कृती विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या कृतीप्रमाणेच असते.

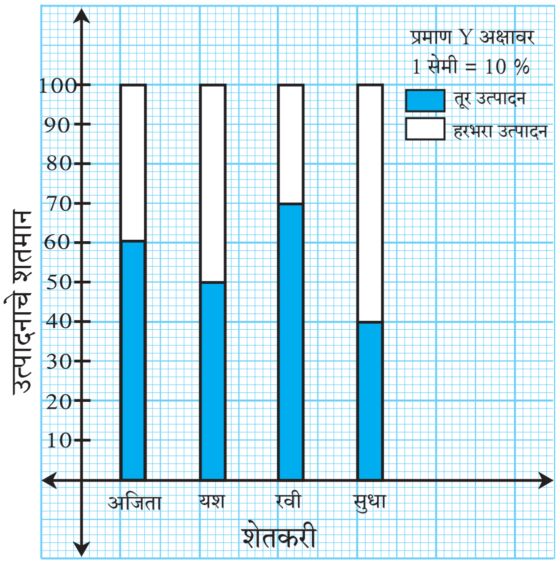
वरील पायऱ्यांनुसारच शेजारील स्तंभालेख काढला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.3

1. खालील सारणीतील माहितीवरून शतमान स्तंभालेख काढा.

इयत्ता आठवीची तुकडी	A	B	C	D
गणितात श्रेणी A मध्ये आलेले विद्यार्थी	45	33	10	15
एकूण विद्यार्थी	60	55	40	75

2. पुढील स्तंभालेखाचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) शेजारील स्तंभालेख कोणत्या प्रकारचा आहे?

(2) अजिताच्या शेतातील तुरीचे उत्पादन एकूण उत्पादनाच्या किती टक्के आहे ?

(3) यश आणि रवी यांच्यापैकी कोणाच्या हरभरा उत्पादनाचे शतमान किती जास्त आहे ?

(4) तुरीच्या उत्पादनाचे सर्वांत कमी शतमान कोणाचे आहे?

(5) सुधाच्या तूर व हरभरा यांच्या उत्पादनांची शेकडेवारी किती ?

3. काही शाळांतील इयत्ता 10 वीतील विद्यार्थ्यांचे सर्वेक्षण करून मिळालेली माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

शाळा	पहिली	दुसरी	तिसरी	चौथी
विज्ञान शाखेकडे कल	90	60	25	16
वाणिज्य शाखेकडे कल	60	20	25	24

उपक्रम : शतमान स्तंभालेख व विभाजित स्तंभालेख यांची तुलनात्मक चर्चा करा. याचा उपयोग करून विज्ञान, भूगोल यांसारख्या विषयांतील अशा आलेखांची माहिती घ्या.

ଝଝଝ

उत्तरसूची

सरावसंच 11.1 2. (1) 2 (2) 75 (3) N = 25, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57

3. 3.9 4. 2.75

सरावसंच 11.2 1. (1) विभाजित स्तंभालेख (2) ₹ 600 (3) ₹ 800

(4) ₹ 500 (5) मेघाची

सरावसंच 11.3 2. (1) शतमान स्तंभालेख (2) 60%

(3) यशचे उत्पादन 20% ने जास्त (4) सुधाचे

(5) 40% आणि 60%

CKLJ96

12 एकचल समीकरणे

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण एका चलातील समीकरणांचा अभ्यास केला आहे.

- समीकरणात दिलेल्या चलासाठी जी किंमत ठेवल्यामुळे समीकरणाच्या दोन्ही बाजू समान होतात ती किंमत म्हणजे त्या **समीकरणाची उकल** असते.
- समीकरण सोडवणे म्हणजे त्याची उकल शोधणे होय.
- समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केली तर मिळणारे समीकरण सत्य असते. या गुणधर्माचा वापर करून आपण नवीन सोपी समीकरणे तयार करून दिलेले समीकरण सोडवतो.

  समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर करण्याच्या क्रिया.

  (i) दोन्ही बाजूंमध्ये समान संख्या मिळवणे. (ii) दोन्ही बाजूंतून समान संख्या वजा करणे.

  (iii) दोन्ही बाजूंना समान संख्येने गुणणे. (iv) दोन्ही बाजूंना शून्येतर समान संख्येने भागणे.

खालील समीकरणे सोडवण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

उदा. (1) $x + 4 = 9$

$x + 4 - \square = 9 - \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (2) $x - 2 = 7$

$x - 2 + \square = 7 + \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (3) $\frac{x}{3} = 4$

$\frac{x}{3} \times \square = 4 \times \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (4) $4x = 24$

$\frac{4x}{\square} = \frac{24}{\square}$

$\therefore\ x = \square$

जाणून घेऊया.

एकचल समीकरणांची उकल (Solution of equations in one variable)

कधी कधी समीकरण सोडवण्यासाठी त्यावर एकापेक्षा जास्त क्रिया कराव्या लागतात. अशा समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर क्रिया करून उकल काढण्याचे काही प्रकार पाहू.

उदा. (1) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$

उकल : दोन्ही बाजूंना 5 ने गुणून

$10(x - 3) = 3(x + 4)$

$\therefore\ 10x - 30 = 3x + 12$

दोन्ही बाजूंत 30 मिळवू.

$\therefore\ 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$

$10x = 3x + 42$

दोन्ही बाजूंतून $3x$ वजा करू

$\therefore\ 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$

$\therefore\ 7x = 42$

दोन्ही बाजूंना 7 ने भागून

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore\ x = 6$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

उकल : दोन्ही बाजूंत 4 मिळवू.

$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$

$\therefore\ 9x = 6x + 33$

दोन्ही बाजूंतून $6x$ वजा करू.

$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$

$\therefore\ 3x = 33$

दोन्ही बाजूंना 3 ने भागू.

$\therefore\ \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$

$\therefore\ x = 11$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

उकल : **रीत I**

$\frac{2}{3} + 5a = 4$

प्रत्येक पदाला 3 ने गुणू.

$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$

$\therefore\ 2 + 15a = 12$

$\therefore\ 15a = 12 - 2$

$\therefore\ 15a = 10$

$\therefore\ a = \frac{10}{15}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

रीत II

दोन्ही बाजूंतून $\frac{2}{3}$ वजा करून,

$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{12-2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{10}{3}$

दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून,

$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

जर A, B, C, D या शून्येतर राशींसाठी $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ तर दोन्ही बाजूंना $B \times D$ ने गुणून $AD = BC$ हे समीकरण मिळते. याचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवू.

(iv) $\frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$

उकल : $\frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 4(x - 7) = 5(x - 2)$

$\therefore\ 4x - 28 = 5x - 10$

$\therefore\ 4x - 5x = -10 + 28$

$\therefore\ -x = 18 \qquad \therefore\ x = -18$

(v) $\frac{8m-1}{2m+3} = 2$

उकल : $\frac{8m-1}{2m+3} = \frac{2}{1}$

$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$

$\therefore\ 8m - 1 = 4m + 6$

$\therefore\ 8m - 4m = 6 + 1$

$\therefore\ 4m = 7 \qquad \therefore\ m = \frac{7}{4}$

सरावसंच 12.1

1. प्रत्येक समीकरणानंतर चलासाठी दिलेल्या किमती, त्या समीकरणाच्या उकली आहेत का ते ठरवा.

   (1) $x - 4 = 3$, $x = -1, 7, -7$ (2) $9m = 81$, $m = 3, 9, -3$

   (3) $2a + 4 = 0$, $a = 2, -2, 1$ (4) $3 - y = 4$, $y = -1, 1, 2$

2. खालील समीकरणे सोडवा.

   (1) $17p - 2 = 49$ (2) $2m + 7 = 9$ (3) $3x + 12 = 2x - 4$

   (4) $5(x - 3) = 3(x + 2)$ (5) $\frac{9x}{8} + 1 = 10$ (6) $\frac{y}{7} + \frac{y-4}{3} = 2$

   (7) $13x - 5 = \frac{3}{2}$ (8) $3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$ (9) $\frac{x-9}{x-5} = \frac{5}{7}$

   (10) $\frac{y-4}{3} + 3y = 4$ (11) $\frac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$

जाणून घेऊया.

शाब्दिक उदाहरणे (Word Problems)

शाब्दिक उदाहरणातील दिलेल्या माहितीसाठी चल वापरून ती माहिती बैजिक राशींत कशी लिहितात ते पाहू.

माझे वय x वर्षे आहे.

- माझ्या बाबांचे वय माझ्या वयापेक्षा 32 वर्षे जास्त आहे. $\therefore$ बाबांचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या आजीचे वय माझ्या वयाच्या चौपटीपेक्षा 10 वर्षे जास्त आहे. $\therefore$ आजीचे वय $(4x + 10)$ वर्षे
- माझ्या बहिणीचे वय माझ्यापेक्षा 4 वर्षांनी कमी आहे. $\therefore$ बहिणीचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या मित्राचे वय माझ्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 5 वर्षे जास्त आहे. $\therefore$ मित्राचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या आईचे वय माझ्या वयाच्या तीनपट आहे. $\therefore$ आईचे वय ☐ वर्षे

आधी दिलेल्या माहितीनुसार माझ्या मित्राचे वय जर 12 वर्षे असेल तर माझे वय किती ?

माझे वय = x वर्षे $\quad \therefore$ मित्राचे वय = $\frac{x}{2} + 5$

$\frac{x}{2} + 5 = 12$ ...... (दिले आहे)

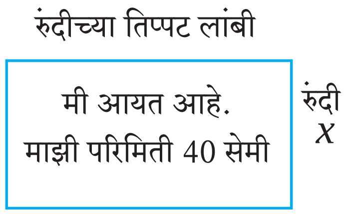
$\therefore x + 10 = 24$ ...... (प्रत्येक पदाला 2 ने गुणून)

$\therefore x = 24 - 10$

$\therefore x = 14$

$\therefore$ माझे वय 14 वर्षे आहे. यावरून वरील माहितीतील इतर व्यक्तींची वये काढा.

कृती : चौकटींत योग्य संख्या लिहा.



आयताची परिमिती = 40

$2(\square x + \square x) = 40$

$2 \times \square x = 40$

$\square x = 40$

$x = \square$

$\therefore$ आयताची रुंदी = $\square$ सेमी व आयताची लांबी = $\square$ सेमी

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जोसेफचे वजन त्याच्या लहान भावाच्या वजनाच्या दुप्पट आहे. दोघांचे मिळून वजन 63 किग्रॅ आहे, तर जोसेफचे वजन काढा.

उकल : जोसेफच्या लहान भावाचे वजन x किग्रॅ मानू.

$\therefore$ जोसेफचे वजन त्याच्या भावाच्या वजनाच्या दुप्पट = $2x$

$\therefore$ दिलेल्या माहितीवरून $x + 2x = 63$

$\therefore 3x = 63 \qquad \therefore x = 21$

$\therefore$ जोसेफचे वजन = $2x = 2 \times 21 = 42$ किग्रॅ.

उदा. (2) एका अपूर्णांकाचा अंश त्याच्या छेदापेक्षा 5 ने मोठा आहे. अंश व छेद यांमध्ये प्रत्येकी 4 मिळवल्यास $\frac{6}{5}$ हा अपूर्णांक मिळतो, तर तो अपूर्णांक काढा.

उकल : अपूर्णांकाचा छेद x मानू.

$\therefore$ त्या अपूर्णांकाचा अंश, छेदापेक्षा 5 ने जास्त म्हणजे $x + 5$ आहे.

$\therefore$ तो अपूर्णांक $\frac{x+5}{x}$ आहे.

त्याच्या अंशात व छेदात 4 मिळवल्यास नवीन अपूर्णांक $\frac{6}{5}$ होईल.

$$\therefore \quad \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \; 5(x + 9) = 6(x + 4)$$

$$\therefore \; 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore \; 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$\therefore \quad 21 = x$$

$\therefore$ अपूर्णांकाचा छेद 21, अंश = 21 + 5 = 26

$\therefore$ तो अपूर्णांक = $\frac{26}{21}$

उदा. (3) रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपयांनी जास्त आहे. रत्नाजवळचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, तर रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट होते; तर रफिकजवळची मूळ रक्कम किती होती ? मूळ रक्कम काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : रत्नाजवळची रक्कम, रफिकजवळ असलेल्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपये जास्त आहे.

रफिकजवळची रक्कम x रुपये मानू. $\therefore$ रत्नाजवळची रक्कम $\square$ रुपये

$\therefore$ रत्नाकडचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, म्हणून रत्नाजवळ उरले $\square$ रुपये

$\therefore$ रफिकजवळ झाले $x + 300$ रु.

रत्नाजवळची नवीन रक्कम ही रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट झाली.

$$\frac{\text{रत्नाजवळची रक्कम}}{\text{रफिकजवळची रक्कम}} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3x-100}{x+300} = \frac{\square}{\square}$$

$$4\,\square = 7\,\square$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \square$$

$$5x = \square$$

$$x = \square$$

$\therefore$ रफिकजवळ $\square$ रुपये होते.

सरावसंच 12.2

1. आईचे वय मुलाच्या वयापेक्षा 25 वर्षांनी जास्त आहे. 8 वर्षांनंतर मुलाच्या वयाचे आईच्या वयाशी गुणोत्तर $\frac{4}{9}$ होईल तर मुलाचे वय काढा.

2. एका अपूर्णांकाचा छेद अंशापेक्षा 12 ने मोठा आहे. त्याच्या अंशातून 2 वजा करून व छेदात 7 मिळवून तयार झालेला अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ शी सममूल्य होतो तर तो अपूर्णांक कोणता ?

3. पितळ या संमिश्रामध्ये तांबे व जस्त यांचे प्रमाण 13:7 असते तर 700 ग्रॅम वजनाच्या पितळेच्या भांड्यात जस्त किती असेल ?

4★. तीन क्रमागत पूर्ण संख्यांची बेरीज 45 पेक्षा जास्त पण 54 पेक्षा कमी आहे तर त्या संख्या काढा.

5. दोन अंकी संख्येतील दशक स्थानचा अंक हा एकक स्थानच्या अंकाच्या दुप्पट आहे. अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या व मूळ दिलेली संख्या यांची बेरीज 66 आहे, तर दिलेली संख्या कोणती ?

6★. एका नाट्यगृहावर नाटकाची 200 रुपये दराची व 100 रुपये दराची काही तिकिटे विकली गेली. 200 रुपये दराच्या तिकिटांची संख्या 100 रुपयांच्या तिकिटांच्या संख्येपेक्षा 20 तिकिटे जास्त खपली होती. दोन्ही प्रकारच्या तिकिट विक्रीतून नाट्यगृहाला 37000 रुपये मिळाले तर 100 रुपयांची किती तिकिटे विकली गेली ?

7. तीन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांपैकी सर्वांत लहान संख्येची पाचपट सर्वांत मोठ्या संख्येच्या चौपटीपेक्षा 9 ने अधिक आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

8. राजूने एक सायकल 8% नफ्याने अमितला विकली. अमितने 54 रुपये खर्च करून ती दुरुस्त करून घेतली. ती सायकल त्याने निखिलला 1134 रुपयांना विकली. तेव्हा अमितला नफा किंवा तोटा झाला नाही. तर राजूने ती सायकल किती रुपयांना खरेदी केली होती ?

9. एका क्रिकेट खेळाडूने एका सामन्यात 180 धावा काढल्या. दुसऱ्या सामन्यात 257 धावा काढल्या. तिसऱ्या सामन्यात त्याने किती धावा काढल्या तर त्याच्या सामन्यातील धावांची सरासरी 230 होईल ?

10. सुधीरचे वय विरूच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 5 ने जास्त आहे. अनिलचे वय सुधीरच्या वयाच्या निमपट आहे. सुधीरचे वय व विरूचे वय यांच्या वयांची बेरीज व अनिलच्या वयाची तिप्पट यांचे गुणोत्तर 5:6 आहे तर विरूचे वय काढा.

उत्तरसूची

सरावसंच 12.1 **1.** समीकरणाची उकल असलेल्या किमती. (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$ (4) $y = -1$ **2.** (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$ (7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

सरावसंच 12.2 **1.** 12 वर्षे **2.** $\frac{23}{35}$ **3.** 245 ग्रॅम **4.** 15, 16, 17 किंवा 16, 17, 18 **5.** 42 **6.** 110 **7.** 17, 18, 19 **8.** ₹ 1000 **9.** 253 **10.** 5 वर्षे

CKVFAT

13 त्रिकोणांची एकरूपता

जरा आठवूया.

शेजारील आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

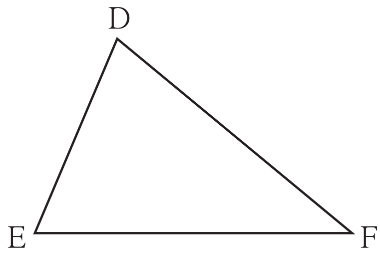
(i) बाजू DE समोरील कोन कोणता आहे?

(ii) $\angle$ E हा कोणत्या बाजूसमोरील कोन आहे ?

(iii) बाजू DE आणि बाजू DF यांनी समाविष्ट केलेला कोन कोणता?

(iv) $\angle$ E आणि $\angle$ F यांनी समाविष्ट केलेली बाजू कोणती?

(v) बाजू DE च्या लगत कोणते कोन आहेत?

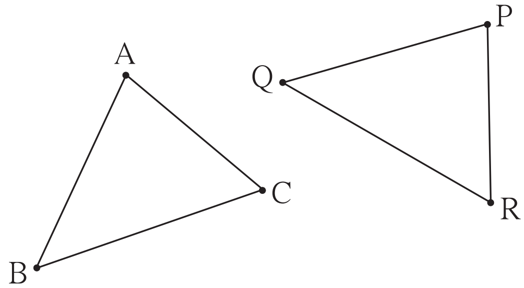


- ज्या आकृत्या परस्परांशी तंतोतंत जुळतात त्या आकृत्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.
- ज्या रेषाखंडांची लांबी समान असते ते रेषाखंड एकरूप असतात.
- ज्या कोनांची मापे समान असतात ते कोन एकरूप असतात.

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of triangles)

कृती : शेजारील आकृत्या पाहा. पारदर्शक ट्रेसिंग पेपरवर Δ ABC काढून घ्या व तो कागद Δ PQR वर ठेवून पाहा. बिंदू A हा बिंदू P वर, बिंदू B हा बिंदू Q वर आणि बिंदू C हा बिंदू R वर ठेवून पाहा. दोन्ही त्रिकोण तंतोतंत जुळतात, म्हणजेच ते एकरूप आहेत हे दिसेल.

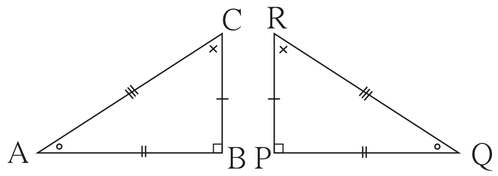


कृतीमध्ये Δ ABC हा Δ PQR वर ठेवण्याची एक पद्धत दिली आहे. परंतु बिंदू A हा Q वर, बिंदू B हा R वर आणि बिंदू C हा P वर ठेवला तर ते त्रिकोण तंतोतंत जुळणार नाहीत. म्हणजे विशिष्ट पद्धतीनेच ते एकमेकांशी जुळवले पाहिजेत. ही जुळवण्याची पद्धत एकास-एक संगतीने दाखवली जाते. बिंदू A ची संगती बिंदू P शी आहे, हे $A \leftrightarrow P$ असे लिहितात. येथे, $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ अशा संगतीत ते त्रिकोण एकरूप आहेत. या पद्धतीने त्रिकोण एकरूप झाले की $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ तसेच रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख BC $\cong$ रेख QR,

रेख CA ≅ रेख RP या सहा एकरूपता मिळतात म्हणून Δ ABC व Δ PQR हे ABC $\leftrightarrow$ PQR या संगतीत एकरूप आहेत असे म्हणतात व Δ ABC ≅ Δ PQR असे लिहितात. अशा लिहिण्यामध्ये A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q, C $\leftrightarrow$ R ही शिरोबिंदूंची एकास एक संगती व त्यांमुळे मिळणाऱ्या वरील सहा एकरूपता यांचा अंतर्भाव होतो, म्हणून दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे लिहिताना शिरोबिंदूंचा क्रम एकरूपतेची एकास एक संगती पाळतो याकडे लक्ष द्यावे.

चला, चर्चा करूया.

Δ ABC आणि Δ PQR या एकरूप त्रिकोणांचे एकरूप घटक सारख्या खुणांनी दाखवले आहेत.



अनिल, रेहाना व सुरजित यांनी या त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे लेखन पुढीलप्रमाणे केले होते.

अनिलचे लेखन : Δ ABC ≅ Δ QPR

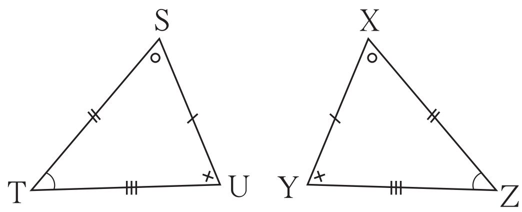
रेहानाचे लेखन : Δ BAC ≅ Δ PQR

सुरजितचे लेखन : Δ ABC ≅ Δ PQR

यांपैकी कोणते लेखन बरोबर आहे आणि कोणते चूक आहे? चर्चा करा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारच्या आकृतीतील त्रिकोणांचे सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत.



(i) शिरोबिंदूंच्या ज्या एकास एक संगतीने हे त्रिकोण एकरूप होतात त्या संगतीत त्रिकोणांची एकरूपता दोन प्रकारे लिहा.

(ii) Δ XYZ ≅ Δ STU हे लेखन बरोबर आहे की चूक, हे सकारण लिहा.

उकल : निरीक्षणावरून दिलेले त्रिकोण STU $\leftrightarrow$ XZY या एकास एक संगतीत एकरूप आहेत.

(i) एक प्रकार : Δ STU ≅ Δ XZY, दुसरा प्रकार: Δ UST ≅ Δ YXZ

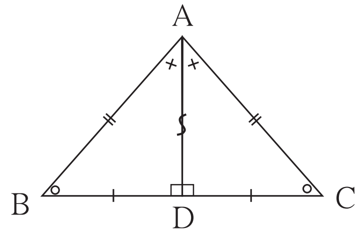
हीच एकरूपता आणखी वेगवेगळ्या प्रकारे लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

(ii) या त्रिकोणांची एकरूपता Δ XYZ ≅ Δ STU अशी लिहिली, तर बाजू ST ≅ बाजू XY असा अर्थ होईल, आणि ते चूक आहे.

$\therefore$ Δ XYZ ≅ Δ STU हे लेखन चूक आहे.

(Δ XYZ $\cong$ Δ STU या लेखनामुळे आणखीही काही चुका होतात. त्या विद्यार्थ्यांनी शोधाव्यात. परंतु उत्तर का चूक आहे, हे सांगण्यासाठी कोणतीही एक चूक दाखवणे पुरेसे असते.)

उदा. (2) पुढे दिलेल्या आकृतीत, त्रिकोणांच्या जोडीतील सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. त्या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास-एक संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील हे सांगा व त्रिकोणांची एकरूपता चिन्हाने दर्शवा.



उकल : ΔABD आणि ΔACD यांमध्ये बाजू AD हा सामाईक रेषाखंड आहे.

प्रत्येक रेषाखंड स्वतःशी एकरूप असतो.

संगती : A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ C, D $\leftrightarrow$ D. Δ ABD $\cong$ Δ ACD

टीप : सामाईक बाजूवर ' ʃ ' अशी खूण करण्याची पद्धत आहे.

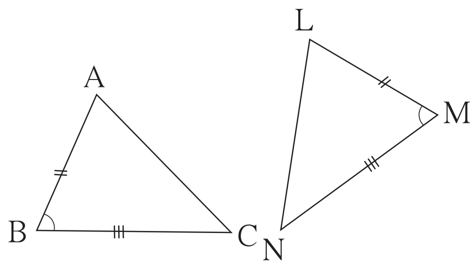
जाणून घेऊया.

एखाद्या जोडीतील त्रिकोण एकरूप आहेत हे दाखवण्यासाठी सर्व सहा घटकांची एकरूपता दाखवण्याची आवश्यकता नसते. एका त्रिकोणाचे तीन विशिष्ट घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतात, तेव्हा उरलेल्या तीन घटकांच्या जोड्याही परस्परांशी एकरूप असतात, म्हणजे ते विशिष्ट तीन घटक एकरूपतेची कसोटी निश्चित करतात.

आपण काही त्रिकोण रचना करायला शिकलो आहोत. जे तीन घटक दिले असता त्रिकोणाची एकमेव आकृती काढता येते, तेच घटक एकरूपतेच्या कसोट्या निश्चित करतात, हे आपण पडताळून पाहू.

(1) दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन : बाकोबा कसोटी

बाजूंच्या दोन जोड्या एकरूप असतील आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोनही एकरूप असतील असे ΔABC आणि ΔLMN काढा.



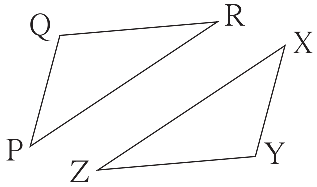
ΔABC व ΔLMN मध्ये l(AB) = l(LM), l(BC) = l(MN), $m\angle$ABC = $m\angle$LMN

ΔABC हा ट्रेसिंग पेपरवर काढून घ्या व ट्रेसिंग पेपर ΔLMN वर असा ठेवा की, शिरोबिंदू A हा शिरोबिंदू L वर, बाजू AB ही बाजू LM वर, $\angle$B हा $\angle$M वर आणि बाजू BC ही बाजू MN वर पडेल. ΔABC $\cong$ ΔLMN आहे हे दिसून येईल.

(2) तीन संगत बाजू : बाबाबा कसोटी

$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$

असे त्रिकोण ΔPQR व ΔXYZ काढा.

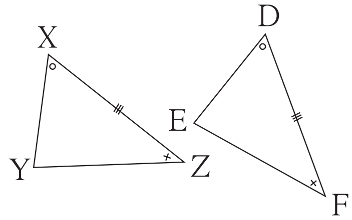


ट्रेसिंग पेपरवर ΔPQR काढून तो ΔXYZ वर $P \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Y$, $R \leftrightarrow Z$ अशा एकास एक संगतीने ठेवा. $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ हे दिसून येईल.

(3) दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू : कोबाको कसोटी

ΔXYZ आणि ΔDEF असे काढा की,

$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D$ आणि $\angle Z \cong \angle F$



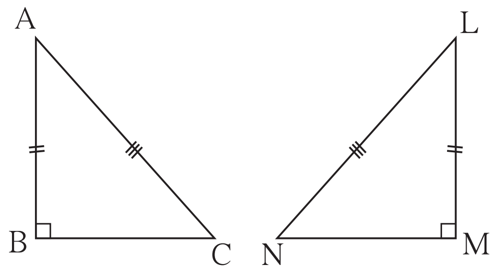
ट्रेसिंग पेपरवर ΔXYZ काढून तो पेपर ΔDEF वर ठेवा. $X \leftrightarrow D$, $Y \leftrightarrow E$, $Z \leftrightarrow F$ या संगतीनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ असे दिसेल.

(4) कोकोबा (किंवा बाकोको) कसोटी :

दोन त्रिकोणांतील संगत कोनांच्या दोन जोड्या एकरूप असतील, तर उरलेले कोन एकरूप असतात; कारण प्रत्येक त्रिकोणातील तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते. म्हणून कोणतेही दोन कोन व एका कोनाची लगतची बाजू दुसऱ्या त्रिकोणातील दोन कोन व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर कोबाको कसोटीची अट पुरी होते व ते त्रिकोण एकरूप असतात.

(5) काटकोन त्रिकोणांची कर्णभुजा कसोटी

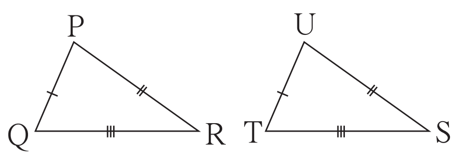
काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दिली असता एकमेव त्रिकोण काढता येतो. एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असलेले दोन काटकोन त्रिकोण काढा. वर दिलेल्या रीतीप्रमाणे ते एकरूप आहेत हे पडताळा.



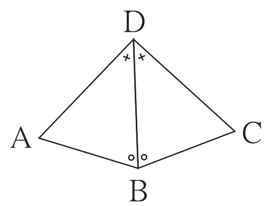
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.

(i)



(ii)

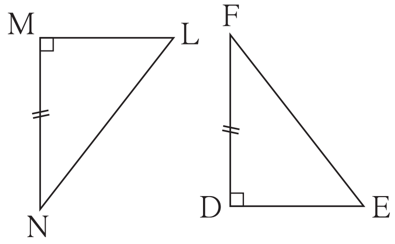


उकल : (i) बा-बा-बा कसोटीने PQR ↔ UTS या संगतीनुसार

(ii) को-बा-को कसोटीने DBA ↔ DBC या संगतीनुसार

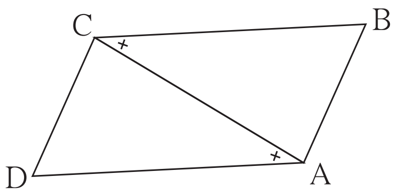
उदा. (2) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीतील समान खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक आकृतीखाली त्रिकोणांच्या एकरुपतेची कसोटी लिहिली आहे. त्या कसोटीने त्रिकोण एकरूप होण्यासाठी आणखी कोणती माहिती देणे आवश्यक आहे आणि ती माहिती दिल्यावर त्रिकोण शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास संगतीने एकरूप होतील, हे लिहा.

(i)



कर्णभुजा कसोटी

(ii)



कोबाको कसोटी

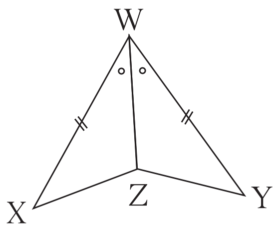
उकल : (i) दिलेले त्रिकोण हे काटकोन त्रिकोण आहेत. त्यांच्या एकेक बाजू एकरूप आहेत. म्हणून त्यांचे रेख LN व EF हे कर्ण एकरूप आहेत, ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर LMN ↔ EDF या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

(ii) आकृतीतील त्रिकोणांची रेख CA ही भुजा सामाईक आहे म्हणून $\angle$ DCA $\cong$ $\angle$ BAC ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर DCA ↔ BAC या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

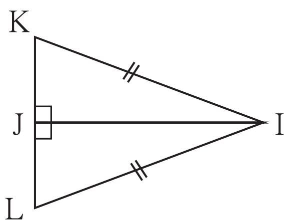
सरावसंच 13.1

1. पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.

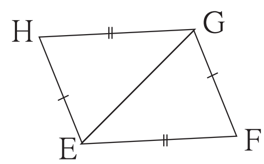
(i)



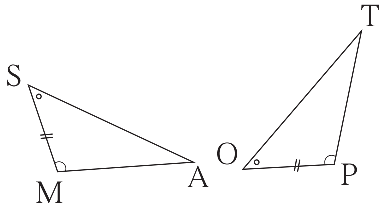
(ii)



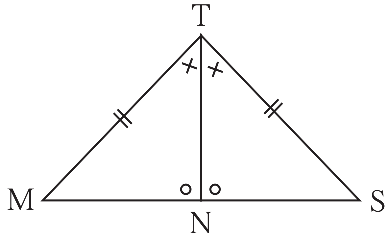
(iii)



(iv)



(v)



हे मला समजले.

(1) **बा–को–बा कसोटी** : जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

(2) **बा–बा–बा कसोटी**: जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू ह्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.

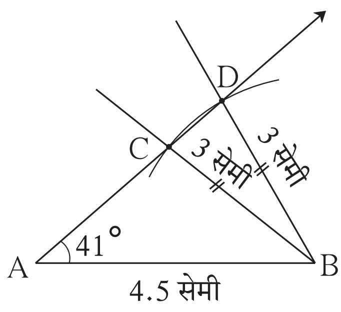
(3) **को–बा–को कसोटी** : जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.

(4) **को–को–बा कसोटी :** जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे संगत कोन आणि त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

(5) **कर्ण–भुजा कसोटी** : जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू हे दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

अधिक माहितीसाठी

एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असेल, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतील का?

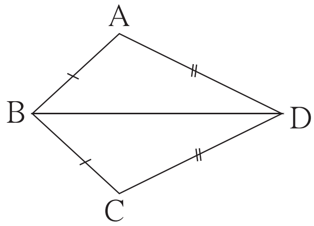


सोबतची आकृती पाहा. Δ ABC आणि Δ ABD यांमध्ये, बाजू AB सामाईक आहे. बाजू BC $\cong$ बाजू BD, $\angle$ A हा सामाईक कोन आहे, परंतु त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेला तो कोन नाही. म्हणजे एका त्रिकोणाचे तीन घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप आहेत, परंतु ते त्रिकोण एकरूप नाहीत.

यावरून, एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण एकरूप असतीलच असे नाही.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) आकृती मध्ये, □ ABCD च्या एकरूप बाजू, सारख्या खुणांनी दाखवल्या आहेत. या आकृतीत एकरूप कोनांच्या जोड्या आहेत का, हे शोधा.



उकल : Δ ABD आणि Δ CBD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CB ..... (दिलेले आहे)

बाजू DA ≅ बाजू DC ..... (दिलेले आहे)

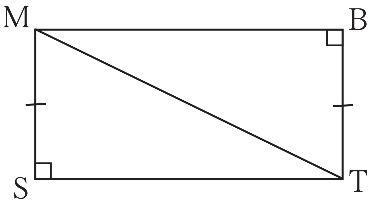
बाजू BD ही सामाईक आहे.

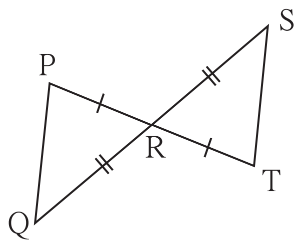
∴ Δ ABD ≅ Δ CBD .... (बा-बा-बा कसोटीनुसार)

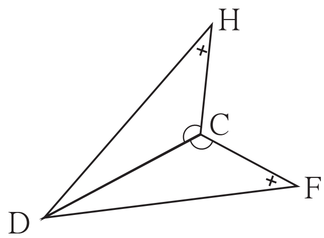
∴ ∠ BAD ≅ ∠ BCD
∠ ABD ≅ ∠ CBD
∠ ADB ≅ ∠ CDB } .....(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

सरावसंच 13.2

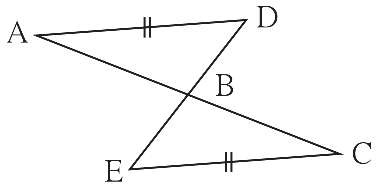
1. पुढीलपैकी प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण, शिरोबिंदूच्या कोणत्या संगतीने आणि कोणत्या कसोटीने एकरूप आहेत हे लिहा. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांचे उरलेले संगत एकरूप घटक लिहा.

(1)


(2)


(3)


2*. सोबतच्या आकृतीत, रेख AD ≅ रेख EC आहे आणखी कोणती माहिती दिली असता Δ ABD व Δ EBC बाकोको कसोटीने एकरूप होतील ?



उत्तरसूची

सरावसंच 13.1 1. (i) बाकोबा, XWZ ↔ YWZ (ii) कर्णभुजा KJI ↔ LJI (iii) बाबाबा HEG ↔ FGE (iv) कोबाको SMA ↔ OPT (v) बाकोको किंवा कोबाको MTN ↔ STN

सरावसंच 13.2 1. (1) Δ MST ≅ Δ TBM - कर्णभुजा, बाजू ST ≅ बाजू MB, ∠ SMT ≅ ∠ BTM, ∠ STM ≅ ∠ BMT (2) Δ PRQ ≅ Δ TRS - बाकोबा, बाजू PQ ≅ बाजू TS, ∠ RPQ ≅ ∠ RTS, ∠ PQR ≅ ∠ TSR
(3) Δ DCH ≅ Δ DCF - बाकोको किंवा कोबाको, ∠ DHC ≅ ∠ DFC, बाजू HC ≅ बाजू FC
2. ∠ ADB ≅ ∠ ECB आणि ∠ ABD ≅ ∠ EBC किंवा ∠ DAB ≅ ∠ CEB

CL5BCG

14 चक्रवाढ व्याज

जरा आठवूया.

एखादी व्यक्ती बँक, पतपेढी, अशा संस्थेकडून काही रक्कम ठरावीक व्याजदराने कर्ज म्हणून घेते आणि काही काळानंतर घेतलेली रक्कम परत करते.ती वापरल्याबद्दल काही अधिक पैसे दर वर्षी मोबदला म्हणून देते, त्याला व्याज म्हणतात. सरळव्याज काढण्यासाठी $I = \frac{PNR}{100}$ हे सूत्र आपण शिकलो. या सूत्रात I = व्याज, P = मुद्दल, N = वर्षांत मुदत आणि R = दसादशे व्याजदर असतो.

जाणून घेऊया.

चक्रवाढव्याज (Compound interest)

ठेव किंवा कर्ज यावर बँक चक्रवाढव्याज आकारते, ते का व कसे हे आपण शिकूया.

शिक्षिका : सज्जनरावांनी एका बँकेतून द.सा.द.शे. 10 दराने 1 वर्षाने परतफेडीच्या अटीवर 10,000 रुपये कर्ज घेतले, तर वर्षअखेर त्यांना व्याजासह किती रक्कम द्यावी लागेल?

विद्यार्थी : येथे P = 10,000 रु. ; R = 10; N = 1 वर्ष.

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ रुपये.}$$

∴ सज्जनरावांना वर्षअखेर व्याजासह 10,000 + 1000 = 11,000 रुपये द्यावे लागतील.

विद्यार्थी : पण एखादा कर्जदार वर्षअखेर व्याजाची रक्कम देखील भरू शकला नाही तर ?

शिक्षिका : बँक प्रत्येक वर्षाच्या शेवटी व्याज आकारणी करते व दरवर्षी कर्जदाराने ती व्याजाची रक्कम बँकेत भरावी अशी अपेक्षा करते. कर्जदाराने पहिल्या वर्षानंतर व्याज दिले नाही, तर बँक दुसऱ्या वर्षासाठी मुद्दल व पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून होणारी रक्कम कर्ज आहे असे मानते. म्हणून मुद्दल आणि पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून जी रास होते, तीच रक्कम दुसऱ्या वर्षी मुद्दल मानून पुढे व्याज आकारले जाते. म्हणजे दुसऱ्या वर्षी व्याज आकारणी करताना मुद्दलाची रक्कम पहिल्या वर्षीच्या राशीएवढी असते. या पद्धतीने केलेल्या व्याज आकारणीस **चक्रवाढव्याज** असे म्हणतात.

विद्यार्थी : सज्जनरावांनी कर्जफेडीची मुदत आणखी एक वर्ष वाढवली तर?

शिक्षिका : तर दुसऱ्या वर्षासाठी 11,000 रुपये मुद्दल मानून त्यावर व्याज आणि रास काढावी लागेल.

विद्यार्थी : यासाठी आधीच्या इयत्तेत शिकलेले $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}} = \frac{110}{100}$ हे गुणोत्तर वापरले तर चालेल ना ?

शिक्षिका : नक्कीच ! प्रत्येक वर्षासाठी $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे. चक्रवाढव्याजाची आकारणी करताना प्रत्येक वर्षी मागील वर्षाची रास ही पुढच्या वर्षाचे मुद्दल असते. म्हणून व्याजाऐवजी थेट रास काढणे सोईचे ठरते. पहिल्या वर्षानंतर रास A_1, दुसऱ्या वर्षानंतर रास A_2, तिसऱ्या वर्षानंतर रास A_3 असे लिहू.

प्रथम मुद्दल P होते.

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

दुसऱ्या वर्षाची रास काढण्यासाठी

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

विद्यार्थी : मग तिसऱ्या वर्षाची रास A_3 काढताना

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

शिक्षिका : शाब्बास ! हे चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याचे सूत्रच आहे. येथे, $\frac{110}{100}$ ही एक रुपयाची वर्षअखेर होणारी रास आहे हे लक्षात घ्या. जेवढ्या वर्षांची रास काढावयाची तेवढ्या वेळा मुद्दलाला या गुणोत्तराने गुणावे.

विद्यार्थी : म्हणजे पहिल्या वर्षाअखेर $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर M आहे आणि P हे मुद्दल आहे असे मानले तर वर्ष अखेर रास $P\times M$, दुसऱ्या वर्षाअखेर $P\times M^2$, तिसऱ्या वर्षाअखेर रास $P\times M^3$ होते. या रीतीने कितीही वर्षांची रास काढता येते.

शिक्षिका : बरोबर ! द.सा.द.शे. R हा व्याजाचा दर असेल, तर

$$\therefore \text{ 1 रुपयाची 1 वर्षाने होणारी रास } = 1 \times M = 1 \times \frac{100+R}{100} = 1 \times \left(1+\frac{R}{100}\right) \text{ आहे.}$$

$$\therefore \text{ P रुपयांची 1 वर्षाची रास } = P \times \frac{100+R}{100} = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$\therefore$ मुद्दल P, व्याजाचा दसादशे दर R, मुदत N वर्षे असेल, तर

$$\text{N वर्षांनंतर रास, } A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) 4000 रुपयांचे 3 वर्षांचे द.सा.द.शे. $12\frac{1}{2}$ दराने चक्रवाढव्याज काढा.

उकल : येथे, P = 4000 रु.; $R = 12\frac{1}{2}\%$; N = 3 वर्षे.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{12.5}{100}\right)^3$$

$$= 4000\left(1+\frac{125}{1000}\right)^3$$

$$A = 4000\left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000\left(\frac{9}{8}\right)^3$$

$= 5695.31$ रुपये

$\therefore$ तीन वर्षांचे चक्रवाढव्याज (I) = रास – मुद्दल

= 5695.31 – 4000 = 1695.31 रुपये

सरावसंच 14.1

1. चक्रवाढव्याजाने येणारी रास व चक्रवाढव्याज काढा.

अ.क्र.	मुद्दल (रुपये)	दर (द.सा.द.शे.)	मुदत (वर्षे)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. समीररावांनी एका पतपेढीतून द.सा.द.शे. 12 दराने 3 वर्षांसाठी 12500 रुपये कर्ज घेतले. तर त्यांना तिसऱ्या वर्षअखेर चक्रवाढव्याज आकारणीने एकूण किती रुपये परतफेड करावी लागेल ?

3. शलाकाने व्यवसाय सुरू करण्यासाठी द.सा.द.शे. $10\frac{1}{2}$ दराने 8000 रुपये कर्ज घेतले. तर 2 वर्षांनंतर कर्ज परतफेड करताना चक्रवाढव्याज आकारणीने तिला किती व्याज भरावे लागेल ?

अधिक माहितीसाठी

1. काही आर्थिक व्यवहारात दर सहा महिन्यांना व्याज आकारणी करतात. N वर्षे मुदतीसाठी व्याजाचा दर R असेल तर सहामाही व्याज आकारणीमध्ये दिलेल्या मुद्दलासाठी व्याजाचा दर $\frac{R}{2}$ घेतात. N वर्षांसाठी सहा महिन्यांचे 2N टप्पे होतात हे लक्षात घेऊन व्याज आकारणी करतात.

2. अनेक वित्तसंस्था मासिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात. तेव्हा व्याजाचा मासिक दर $\frac{R}{12}$ घेतात आणि मुदत $12 \times N$ एकूण महिन्यांएवढी घेऊन व्याज आकारणी करतात.

3. अलीकडील काळात बँका दैनिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात.

उपक्रम : तुमच्या जवळच्या बँकेत जाऊन तिथे वेगवेगळ्या योजनांची माहिती मिळवा. त्या योजनांच्या व्याजांच्या दरांची सारणी करून ती वर्गात लावा.

जाणून घेऊया.

चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचे उपयोजन (Application of formula for compound interest)

चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याच्या सूत्राचा उपयोग दैनंदिन जीवनातील इतर क्षेत्रांतील उदाहरणे सोडवण्यासाठीही करता येतो; जसे लोकसंख्येतील वाढ, एखाद्या वाहनाची दरवर्षी कमी होणारी किंमत इत्यादी.

एखादी वस्तू काही काळ वापरून ती विकल्यास तिची किंमत खरेदीच्या किमतीपेक्षा कमी होते. कमी होणाऱ्या किमतीला घट किंवा घसारा (depreciation) असे म्हणतात.

किमतीतील घसारा ठरावीक काळात ठरावीक दराने होत असतो. उदा. यंत्राची किंमत दरवर्षी ठरावीक टक्क्यांनी कमी होते. काही काळानंतर कमी झालेली किंमत काढण्यासाठी चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचा उपयोग होतो.

ही किंमत काढण्यासाठी घसाऱ्याचा दर माहीत असावा लागतो. वस्तूची किंमत कमी होत असल्याने घसाऱ्याचा (घटीचा) दर R हा ऋण घेतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका शहराची लोकसंख्या दरवर्षी 8% दराने वाढते. 2010 साली त्या शहराची लोकसंख्या 2,50,000 असल्यास 2012 मध्ये त्या शहराची लोकसंख्या किती होती ?

उकल : येथे, P = 2010 ची लोकसंख्या = 2,50,000

A = 2012 मधील लोकसंख्या;

R = लोकसंख्या वाढीचा दर = दरसाल 8%

N = 2 वर्षे

A = 2012 मध्ये म्हणजेच 2 वर्षांनी होणारी लोकसंख्या

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600.$$

$\therefore$ 2012 मध्ये शहराची लोकसंख्या 2,91,600 होती.

उदा. (2) रेहानाने एक स्कूटर 2015 मध्ये 60000 रुपयांस विकत घेतली. घसाऱ्याचा दर द.सा.द.शे 20 असल्यास 2 वर्षांनंतर त्या स्कूटरची किंमत किती होईल ?

उकल : येथे, P = 60000 रु. A = 2 वर्षांनंतर मिळणारी किंमत

R = घसाऱ्याचा दर = −20 % दरसाल N = 2 वर्षे

A = 2 वर्षांनंतर मिळणारी किंमत

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1+\frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1-\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

A = 38400 रु.

∴ दोन वर्षांनी स्कूटरची किंमत 38400 रुपये होईल.

चक्रवाढ पद्धतीने व्याज आकारणीच्या सूत्रातील A, P, N, R या चार बाबींपैकी तीन बाबी दिल्यास चौथी बाब कशी काढता येते, हे पुढील उदाहरणांतून अभ्यासा.

उदा. (3) एका रकमेची द.सा.द.शे 10 दराने 3 वर्षांनी चक्रवाढ व्याजाने 6655 रुपये रास होते. तर ती रक्कम काढा.

उकल : येथे A = 6655 रुपये; R = द.सा.द.शे. 10; N = 3 वर्षे.

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore P = \frac{6655\times10^3}{11\times11\times11} \qquad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ ती रक्कम 5000 रुपये आहे.

उदा. (4) द.सा.द.शे. 10 दराने 9000 रुपयांचे किती वर्षांचे चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल ?

उकल : येथे R = 10; P = 9000; चक्रवाढव्याज = 1890

अगोदर चक्रवाढव्याजाने होणारी रास काढू.

A = P + I = 9000 + 1890 = 10890

चक्रवाढव्याजाने होणाऱ्या राशीचे सूत्र लिहू व त्यात किमती घालू.

$$A = 10890 = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \qquad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore \quad N = 2$$

$\therefore$ 2 वर्षांत चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल.

सरावसंच 14.2

1. एका उड्डाणपुलाच्या बांधकामावर सुरुवातीला 320 मजूर होते. दरवर्षी 25% मजूर वाढवण्यात आले, तर दोन वर्षांनंतर त्या कामावर किती मजूर असतील ?
2. एका मेंढपाळाकडे 200 मेंढ्या असतील आणि दरवर्षी त्यांच्या संख्येत 10% ने वाढ होत असेल तर 2 वर्षांनंतर त्याच्याकडे किती मेंढ्या असतील ?
3. एका अभयारण्यात 40,000 झाडे आहेत. दरवर्षी 5% दराने वृक्षवाढ करण्याचे उद्दिष्ट ठरवण्यात आले असेल, तर 3 वर्षांनंतर त्या अभयारण्यातील झाडांची संख्या किती असली पाहिजे ?
4. आज एक मशीन 2,50,000 रुपयांना खरेदी केले. घसाऱ्याचा दर दरवर्षी 10% असल्यास दोन वर्षांनंतर मशीनची किंमत खरेदीपेक्षा किती कमी होईल ?
5. एका मुद्दलाची द.सा.द.शे. 16 दराने चक्रवाढव्याजाने दोन वर्षांची रास 4036.80 रुपये झाली. तर दोन वर्षांत झालेले व्याज किती?
6. 15000 रुपये चक्रवाढव्याजाने द.सा.द.शे. 12 दराने कर्जाऊ घेतले तर 3 वर्षांनी कर्ज फेडताना किती रुपये द्यावे लागतील ?
7. द.सा.द.शे. 18 दराने चक्रवाढव्याजाने एका मुद्दलाची 2 वर्षांची रास 13,924 रुपये झाली, तर मुद्दल किती होते ?
8. शहराच्या एका उपनगराची लोकसंख्या विशिष्ट दराने वाढते. आजची व दोन वर्षांनंतरची लोकसंख्या अनुक्रमे 16000 व 17640 असतील, तर लोकसंख्या वाढीचा दर काढा.
9. 700 रुपयांची द.सा.द.शे. 10 दराने किती वर्षांत 847 रुपये रास होईल ?
10. द.सा.द.शे. 8 दराने होणारे 20,000 रुपयांवरील 2 वर्षांचे सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज यांतील फरक काढा.

उत्तरसूची

सरावसंच 14.1

1. (1) 2205, 205 (2) 6298.56, 1298.56 (3) 4622.5, 622.5
2. 17561.60
3. 1768.2

सरावसंच 14.2

1. 500
2. 242
3. 46,305
4. ₹ 47500
5. ₹ 1036.80
6. ₹ 21073.92
7. ₹ 10,000
8. दसादशे 5
9. 2 वर्षांत
10. ₹ 128

CLE7E4

15 क्षेत्रफळ

जरा आठवूया.

आपल्याला माहीत आहे की बंदिस्त बहुभुजाकृतीच्या बाजू सेंटिमीटर, मीटर, किलोमीटर या एककात दिलेल्या असतील तर त्यांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे चौसेमी, चौमी, चौकिमी या एककांत दिली जातात, कारण क्षेत्रफळ चौरसांनी मोजले जाते.

(1) चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू^{2}

(2) आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

(3) काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$= \frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

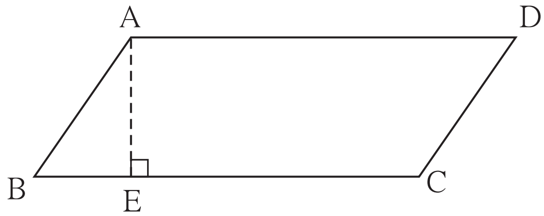
(4) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ पाया × उंची

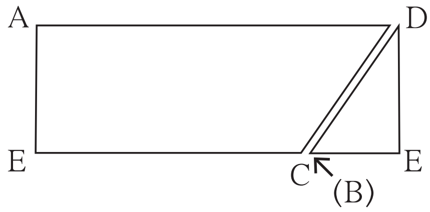
जाणून घेऊया.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a parallelogram)

कृती :

- एका कागदावर एक पुरेसा मोठा समांतरभुज चौकोन ABCD काढा. A बिंदूतून बाजू BC वर लंब काढा. Δ AEB हा काटकोन त्रिकोण कापा. तो सरकवत दुसऱ्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे □ ABCD च्या उरलेल्या भागाला जोडून ठेवा. तयार झालेली आकृती आयत आहे हे लक्षात घ्या.





- समांतरभुज चौकोनापासूनच हा आयत तयार झाला आहे, म्हणून दोन्हींचे क्षेत्रफळ समान आहे.
- समांतरभुज चौकोनाचा पाया म्हणजे आयताची एक बाजू (लांबी) व त्याची उंची म्हणजे आयताची दुसरी बाजू (रुंदी) होय.

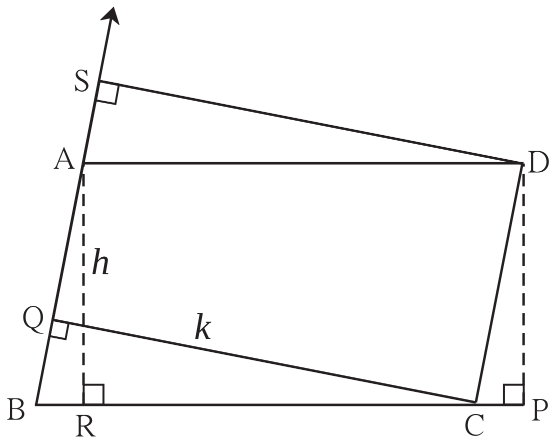
∴ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची

लक्षात घ्या की, समांतरभुज चौकोनाच्या समांतर भुजांपैकी एक भुजा पाया मानला तर त्या समांतर भुजांमधील अंतर ही त्या चौकोनाची त्या पाया संगत उंची असते.

□ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रेख DP ⊥ बाजू BC, रेख AR ⊥ बाजू BC. बाजू BC हा पाया मानला तर उंची = $l(AR) = l(DP) = h$.

जर रेख CQ ⊥ बाजू AB असून जर AB ही बाजू पाया मानली, तर त्या पायाची संगत उंची म्हणजे $l(QC) = k$ आहे.



∴ A(□ABCD) = $l(BC) \times h = l(AB) \times k$.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका समांतरभुज चौकोनाचा पाया 8 सेमी व उंची 5 सेमी असेल तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची = 8 × 5

= 40

∴ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = 40 चौसेमी

उदा. (2) एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 112 चौसेमी असून त्याचा पाया 10 सेमी असेल तर त्याची उंची काढा.

उकल : समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची ∴ 112 = 10 × उंची

$\frac{112}{10}$ = उंची

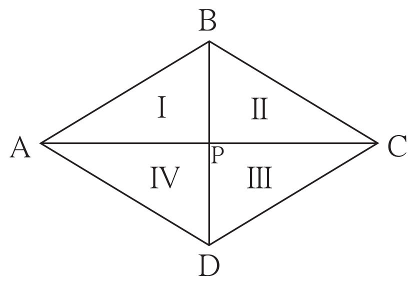
∴ समांतरभुज चौकोनाची उंची 11.2 सेमी

सरावसंच 15.1

1. एका समांतरभुज चौकोनाचा पाया 18 सेमी व उंची 11 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.
2. एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 29.6 चौसेमी व पाया 8 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाची उंची काढा.
3. एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 83.2 चौसेमी आहे. त्याची उंची 6.4 सेमी असेल तर त्याचा पाया किती लांबीचा असेल ?

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a rhombus)

कृती : आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एक समभुज चौकोन काढा. आपल्याला माहीत आहे की समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.



$l(AC) = d_1$ आणि $l(BD) = d_2$ मानू.

□ ABCD हा समभुज चौकोन आहे. त्याचे कर्ण P बिंदूत छेदतात. त्यामुळे आपल्याला चार एकरूप काटकोन त्रिकोण मिळतात. प्रत्येक काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू $\frac{1}{2}\, l(AC)$ व $\frac{1}{2}\, l(BD)$ एवढ्या आहेत. चारही त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान आहेत.

$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2}\, l(AC) = \frac{d_1}{2}$,

तसेच $l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2}\, l(BD) = \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ समभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ $= 4 \times A(\Delta\ APB)$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$

$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$\therefore$ **समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ** $= \frac{1}{2} \times$ **कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार**

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी अनुक्रमे 11.2 सेमी व 7.5 सेमी आहे तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

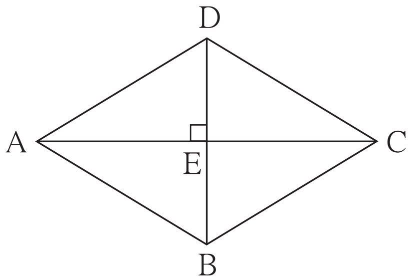
उकल : समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार

$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} \qquad = 5.6 \times 7.5$

$= 42$ चौसेमी.

उदा.(2) एका समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 96 चौसेमी आहे. त्याचा एक कर्ण 12 सेमी आहे तर त्या चौकोनाच्या बाजूची लांबी काढा.

उकल : समजा, □ ABCD हा समभुज चौकोन आहे. त्याच्या कर्ण BD ची लांबी 12 सेमी आहे. त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ 96 चौसेमी आहे. यावरून प्रथम कर्ण AC ची लांबी काढू.



समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार

$$\therefore\ 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore\ l(AC) = 16$$

समजा कर्णांचा छेदनबिंदू E आहे. समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.

$\therefore\ \Delta$ ADE मध्ये, $m\angle E = 90^\circ$,

$l(DE) = \frac{1}{2}l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$; | $l(AE) = \frac{1}{2}l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

$$l(AD)^2 = l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2$$

$$= 64 + 36 = 100$$

$\therefore\ l(AD) = 10$

$\therefore$ समभुज चौकोनाची बाजू 10 सेमी.

सरावसंच 15.2

1. एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी 15 व 24 सेमी आहे, तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

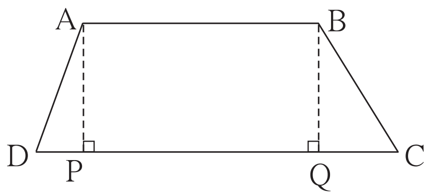
2. एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी अनुक्रमे 16.5 सेमी व 14.2 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

3. एका समभुज चौकोनाची परिमिती 100 सेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 48 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती येईल ?

4★. एका समभुज चौकोनाचा एक कर्ण 30 सेमी असून त्याचे क्षेत्रफळ 240 चौसेमी आहे. तर त्या चौकोनाची परिमिती काढा.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a trapezium)

कृती : रेख AB || रेख DC असेल असा □ ABCD हा समलंब चौकोन एका कागदावर काढा.



रेख AP ⊥ बाजू DC आणि

रेख BQ ⊥ बाजू DC काढा.

$l(AP) = l(BQ) = h$ मानू.

समलंब चौकोनाची उंची h, म्हणजेच समांतर रेषांमधील अंतर,

लंब काढल्यामुळे ABCD या चौकोनी क्षेत्राचे 3 भाग झाले. त्यांपैकी Δ DPA व Δ BQC हे काटकोन त्रिकोण आहेत. ABQP हा आयत आहे. बिंदू P आणि Q हे रेख DC वर आहेत.

समलंब चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ

$$= A(\Delta\ APD) + A(\square APQB) + A(\Delta BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2}\ l(QC) \times h$$

$$= h\ [\frac{1}{2}\ DP + PQ + \frac{1}{2}\ QC]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \ldots \quad l(PQ) = l(AB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

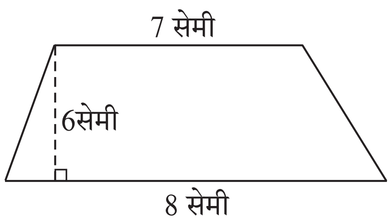
$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DC) + l(AB)]$$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}$ (समांतर असलेल्या बाजूंच्या लांबींची बेरीज) $\times h$

$\therefore$ **समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ** $= \frac{1}{2} \times$ **समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज** $\times$ **उंची**

सोडवलेले उदाहरण

उदा.(1) एका समलंब चौकोनाच्या संमुख भुजांची एक जोडी परस्परांना समांतर आहे. त्या भुजांमधील अंतर 6 सेमी आहे व समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 7 सेमी व 8 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.



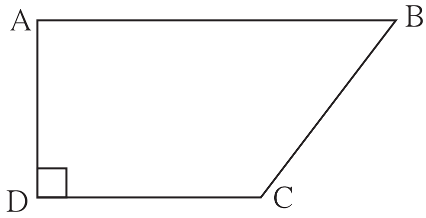
उकल : समांतर भुजांमधील अंतर = समलंब चौकोनाची उंची = 6 सेमी

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज) $\times$ उंची

$= \frac{1}{2}(7 + 8) \times 6 = 45$ चौसेमी

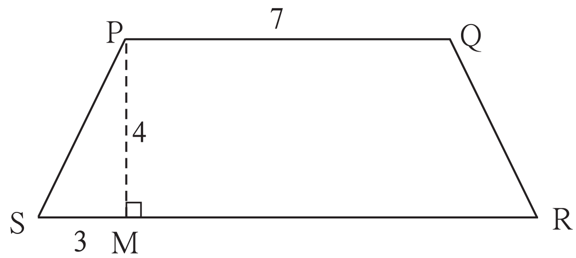
सरावसंच 15.3

1. चौकोन ABCD मध्ये $l(AB) = 13$ सेमी, $l(DC) = 9$ सेमी, $l(AD) = 8$ सेमी, तर $\square$ ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.



2. एका समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 8.5 सेमी व 11.5 सेमी आहे. त्याची उंची 4.2 सेमी आहे तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

3★. $\square$ PQRS हा समद्विभुज समलंब चौकोन आहे. $l(PQ) = 7$ सेमी, रेख PM $\perp$ बाजू SR, $l(SM) = 3$ सेमी, समांतर बाजूंमधील अंतर 4 सेमी आहे, तर $\square$ PQRS चे क्षेत्रफळ काढा.

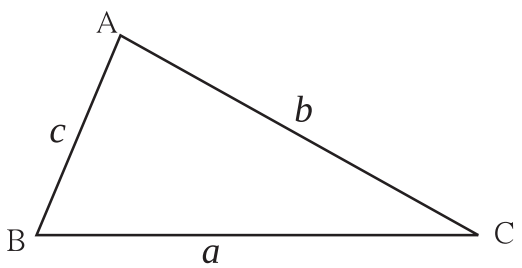


जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of a Triangle)

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची हे आपल्याला माहीत आहे.

आता त्रिकोणाची उंची दिली नाही परंतु त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची लांबी दिली आहे. तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ कसे काढतात ते पाहू.



Δ ABC च्या बाजूंची लांबी a, b, c आहे.

या त्रिकोणाची अर्धपरिमिती काढू.

अर्धपरिमिती = $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

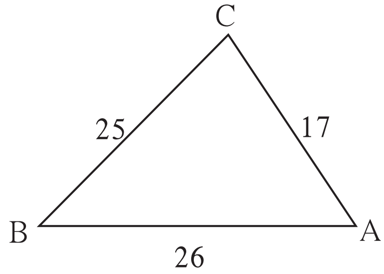
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

या सूत्राला **हिरोचे सूत्र** (Heron's Formula) असे म्हणतात.

उदा. (1) एका त्रिकोणाच्या बाजू 17 सेमी, 25 सेमी व 26 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : $a = 17,\ b = 25,\ c = 26$

अर्धपरिमिती $= s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+25+26}{2} = \frac{68}{2} = 34$



त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$

$= \sqrt{34\times17\times9\times8}$

$= \sqrt{17\times2\times17\times3\times3\times2\times2\times2}$

$= \sqrt{17^2\times2^2\times2^2\times3^2}$

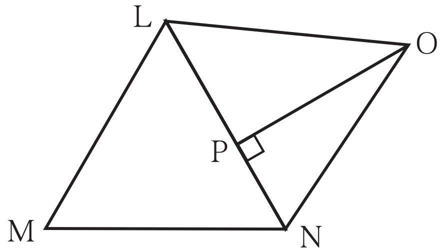
$= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204$ चौसेमी

उदा. (2) एका भूखंडाची आकृती व मापे दिली आहेत.

l(LM) = 60 मी. l(MN) = 60 मी.

l(LN) = 96 मी. l(OP) = 70 मी.

तर या भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : या आकृतीत Δ LMN व Δ LON तयार झालेले दिसतात. Δ LMN च्या सर्व बाजूंची लांबी माहीत आहे, म्हणून हिरोचे सूत्र वापरून त्याचे क्षेत्रफळ काढू. Δ LON मध्ये बाजू LN हा पाया आणि l(OP) ही उंची घेऊन Δ LON चे क्षेत्रफळ काढू.

Δ LMN ची अर्धपरिमिती, $s = \frac{60+60+96}{2} = \frac{216}{2} = 108$ मी

$\therefore\ \Delta$ LMN चे क्षेत्रफळ $= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)}$

$= \sqrt{108\times48\times48\times12}$

$= \sqrt{12\times9\times48\times48\times12}$

A(Δ LMN) = $12 \times 3 \times 48 = 1728$ चौमी.

A(Δ LNO) = $\frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची

$= \frac{1}{2} \times 96 \times 70$

$= 96 \times 35 = 3360$ चौमी

भूखंड LMNO चे क्षेत्रफळ = A(Δ LMN) + A(Δ LNO)

$= 1728 + 3360$

$= 5088$ चौमी.

हे मला समजले.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज × उंची

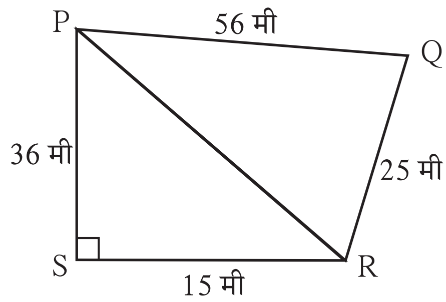
ABC त्रिकोणाच्या बाजू जर a, b, c असतील तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे हिरोचे सूत्र

$$A(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \; ; \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

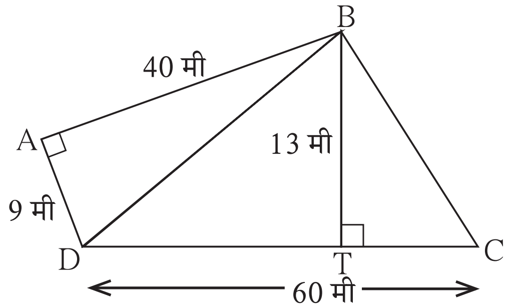
सरावसंच 15.4

1. एका त्रिकोणाच्या बाजू 45 सेमी, 39 सेमी व 42 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

2. आकृतीत दाखवलेली मापे लक्षात घ्या व □ PQRS चे क्षेत्रफळ काढा.



3. शेजारी दिलेल्या आकृतीत काही मापे दर्शवली आहेत, त्यावरून □ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

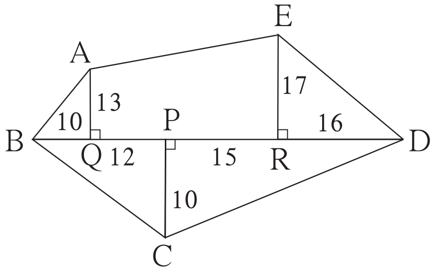


जाणून घेऊया.

अनियमित आकाराच्या जागेचे क्षेत्रफळ

भूखंड, शेतजमिनी यांचे आकार सामान्यपणे अनियमित आकाराचे बहुभुज असतात. त्यांचे विभाजन त्रिकोण किंवा विशिष्ट चौकोनांत करता येते. असे विभाजन करून त्यांचे क्षेत्रफळ कसे काढतात, हे पुढील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. शेजारील आकृतीत ABCDE ही बहुभुजाकृती आहे. आकृतीतील सर्व मापे मीटरमध्ये आहेत. या आकृतीचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : येथे Δ AQB, Δ ERD हे काटकोन त्रिकोण आहेत. $\square$ AQRE हा समलंब चौकोन आहे. Δ BCD चा पाया BD व उंची PC दिली आहे. प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळ काढू.

$A(\Delta\ AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65$ चौमी

$A(\Delta\ ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136$ चौमी

$A(\square\ AQRE) = \frac{1}{2}\ [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR)$

$= \frac{1}{2}\ [13 + 17] \times (12 + 15)$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405$ चौमी

$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53$ मी

$A(\Delta\ BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265$ चौमी

$\therefore$ बहुभुजाकृती ABCDE चे क्षेत्रफळ

$= A(\Delta\ AQB) + A(\square AQRE) + A(\Delta\ ERD) + A(\Delta\ BCD)$

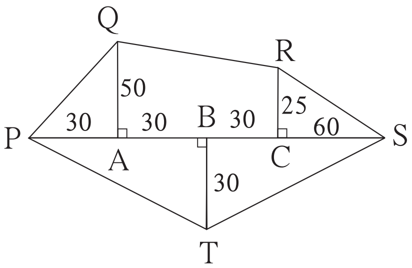
$= 65 + 405 + 136 + 265$

$= 871$ चौमी

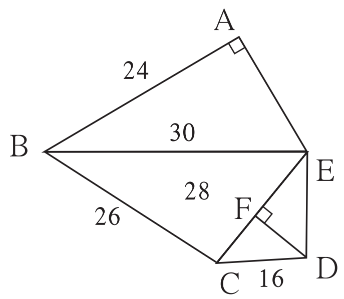
सरावसंच 15.5

1. खालील भूखंडांच्या आराखड्यांवरून त्यांची क्षेत्रफळे काढा. (सर्व मापे मीटरमध्ये आहेत.)

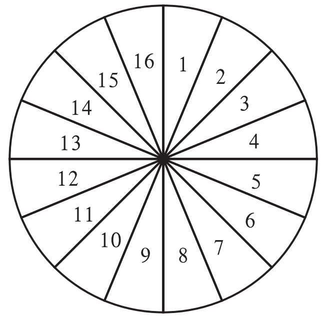
(1)



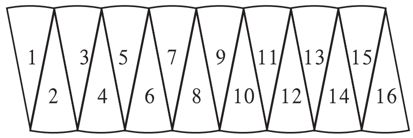
(2)



वर्तुळाचे क्षेत्रफळ (Area of a circle)



कृती : एका जाड कागदावर एक वर्तुळ काढा. वर्तुळाकार भाग कापून वेगळा करा. घड्या घालून त्याचे 16 किंवा 32 समान भागांत विभाजन करा. किंवा 360° चे समान भाग करून वर्तुळाचे 18 किंवा 20 समान भाग करा. नंतर ते भाग त्रिज्यांवर कापून वेगवेगळ्या पाकळ्या मिळवा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे त्या जोडा. आपल्याला जवळपास आयत तयार झालेला दिसेल. वर्तुळाच्या समान भागांची संख्या जेवढी जास्त असेल तेवढी आकृती अधिकाधिक आयताकार होईल.



वर्तुळाचा परीघ = $2\pi r$

$\therefore$ आयताची लांबी πr, म्हणजे अर्धपरिघाएवढी, आणि रुंदी r एवढी आहे.

$\therefore$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी = $\pi r \times r$ = πr^2

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) एका वर्तुळाची त्रिज्या 21 सेमी असेल तर त्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ चौसेमी}$$

उदा.(2) एका वर्तुळाकृती मैदानाचे क्षेत्रफळ 3850 चौमी आहे, तर त्या मैदानाची त्रिज्या काढा.

उकल : वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22} \qquad r^2 = 1225 \qquad r = 35 \text{ मी.}$$

$\therefore$ मैदानाची त्रिज्या 35 मी आहे.

सरावसंच 15.6

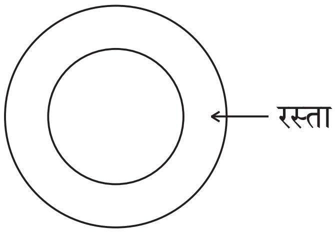
1. खाली वर्तुळांच्या त्रिज्या दिल्या आहेत. त्या वर्तुळांची क्षेत्रफळे काढा.

   (1) 28 सेमी (2) 10.5 सेमी (3) 17.5 सेमी

2. खाली काही वर्तुळांची क्षेत्रफळे दिली आहेत. त्या वर्तुळांचे व्यास काढा.

   (1) 176 चौसेमी (2) 394.24 चौसेमी (3) 12474 चौसेमी

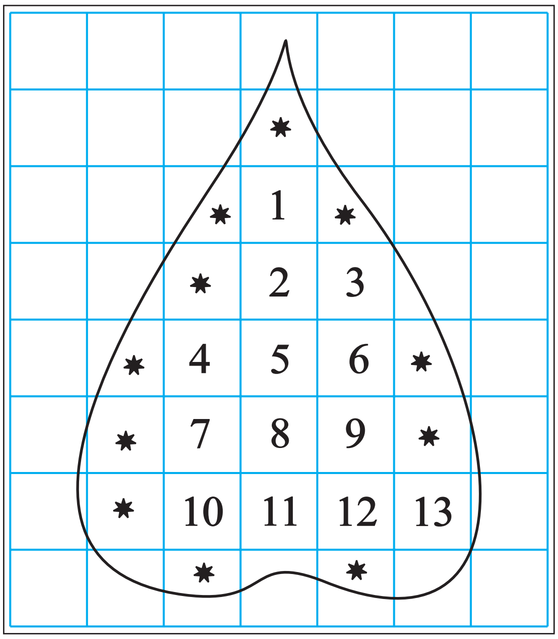
3. एका वर्तुळाकार बागेचा व्यास 42 मी आहे. त्या बागेभोवती 3.5 मी रुंदीचा रस्ता आहे, तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



4. एका वर्तुळाचा परीघ 88 सेमी आहे, तर त्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

अनियमित आकाराच्या आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढणे.

आलेख कागदाच्या साहाय्याने कोणत्याही बंदिस्त आकृतीचे क्षेत्रफळ काढता येते. दिलेली आकृती किंवा वस्तूचे एखादे पृष्ठ आलेख कागदावर ठेवून त्याच्या कडेने पेन्सिल फिरवा. आलेख कागदावरील आकृतीचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी चौरसांची संख्या कशी मोजायची व क्षेत्रफळ कसे काढायचे ते खालील कृतीवरून समजून घ्या.



(1) आकृतीतील 1 चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या पूर्ण चौरसांची संख्या = 13

$\therefore$ त्यांचे क्षेत्रफळ 13 चौसेमी.

(2) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी पेक्षा जास्त परंतु 1 चौसेमी पेक्षा कमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या भागांची संख्या = 11

$\therefore$ त्यांचे क्षेत्रफळ = अंदाजे 11 चौसेमी

(3) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या भागांची संख्या = 0

$\therefore$ त्यांचे क्षेत्रफळ = 0 चौसेमी

(4) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी पेक्षा कमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या भागाच्या क्षेत्रफळाचा विचार करायचा नाही.

$\therefore$ त्यांचे एकूण क्षेत्रफळ = 0 चौसेमी

$\therefore$ दिलेल्या आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ

= 13 + 11 + 0 + 0 = 24 चौसेमी

मोजण्यासाठी वापरलेले चौरस जेवढे लहान तेवढा क्षेत्रफळाचा अंदाज अधिक बरोबर असतो.

कृती : आलेख कागदावर 28 मिमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ, कोणताही एक त्रिकोण आणि कोणताही एक समलंब चौकोन काढा. या तीनही आकृत्यांची क्षेत्रफळे आलेख कागदावरील लहान चौरस मोजून काढा. ती सूत्रांनी मिळणाऱ्या क्षेत्रफळांबरोबर पडताळून पाहा.

उत्तरसूची

सरावसंच 15.1	1. 198 चौसेमी	2. 3.7 सेमी	3. 13 सेमी	
सरावसंच 15.2	1. 180 चौसेमी	2. 117.15 चौसेमी	3. 336 चौसेमी	4. 68 सेमी
सरावसंच 15.3	1. 88 चौसेमी	2. 42 सेमी	3. 40 चौसेमी	
सरावसंच 15.4	1. 756 चौसेमी	2. 690 चौसेमी	3. 570 चौसेमी	
सरावसंच 15.5	1. 6,000 चौमी	2. 776 चौमी		
सरावसंच 15.6	1. (1) 2464 चौसेमी	(2) 346.5 चौसेमी	(3) 962.5 चौसेमी	
	2. (1) $2\sqrt{56}$ सेमी	(2) 22.4 सेमी	(3) 126 सेमी	
	3. 500.50 चौमी	4. 616 चौसेमी		

अधिक माहितीसाठी :

आपल्या देशाने मापनासाठी दशमान पद्धत स्वीकारली आहे.

शासकीय दस्तऐवजांत जमिनींची क्षेत्रफळे आर, हेक्टर या दशमान एककांत नोंदलेली असतात.

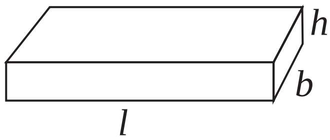
100 चौमी = 1 आर, 100 आर = 1 हेक्टर = 10,000 चौमी

व्यवहारात मात्र जमिनीचे क्षेत्रफळ गुंठा, एकर या एककांत मोजण्याची पद्धत अजूनही रूढ आहे. 1 गुंठा हे क्षेत्रफळ सुमारे 1 आर एवढे, म्हणजे सुमारे 100 चौमी असते. 1 एकर क्षेत्रफळ सुमारे 0.4 हेक्टर भरते.

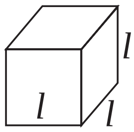
16 पृष्ठफळ व घनफळ

जरा आठवूया.

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$



घनाचे एकूण पृष्ठफळ = $6l^2$



1 मी = 100 सेमी   1 चौमी = 100×100 चौसेमी = 10000 चौसेमी = 10^4 चौसेमी

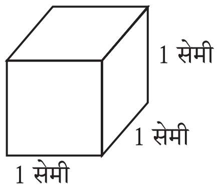
1 सेमी = 10 मिमी   1 चौसेमी= 10×10 चौमिमी = 100 चौमिमी = 10^2 चौमिमी

जाणून घेऊया.

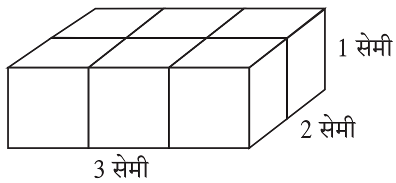
इष्टिकाचिती, घन आणि वृत्तचिती हे त्रिमितीय आकार म्हणजेच घनाकृती असतात. त्या घनाकृती अवकाशातील जागा व्यापतात. **घनाकृतीने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेचे माप म्हणजे त्या घनाकृतीचे घनफळ होय.**

घनफळाचे प्रमाणित एकक (Standard unit of volume)

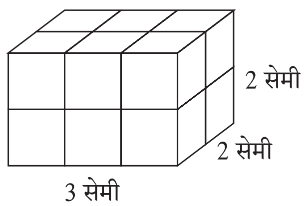
आकृती 16.3 मधील घनाची प्रत्येक बाजू 1 सेमी आहे. या घनाने व्यापलेली जागा हे, घनफळ मापनाचे एक प्रमाणित एकक आहे. ते 1 घनसेंटिमीटर, थोडक्यात 1 घसेमी किंवा 1 सेमी ^{3} असे लिहितात.



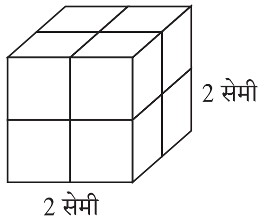
कृती I : प्रत्येक बाजू 1 सेमी असेल असे बरेच घन मिळवा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 6 घन एकमेकांना चिकटून ठेवा. एक इष्टिकाचिती तयार होईल. या इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 1 सेमी आहे. 1 सेमी बाजू असलेले 6 घन मिळून ती इष्टिकाचिती तयार झाली आहे. या इष्टिकाचितीचे घनफळ $3 \times 2 \times 1 = 6$ घसेमी आहे, हे लक्षात घ्या.



कृती II : शेजारील इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 2 सेमी आहे. या इष्टिकाचितीमध्ये 1 घसेमी घनफळ असलेले $3 \times 2 \times 2 = 12$ घन आहेत. म्हणून या इष्टिकाचितीचे घनफळ 12 घसेमी आहे. यावरून, इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची हे सूत्र मिळते. लांबीसाठी l रुंदीसाठी b आणि उंचीसाठी h ही अक्षरे घेऊन. **इष्टिकाचितीचे घनफळ = $l \times b \times h$**



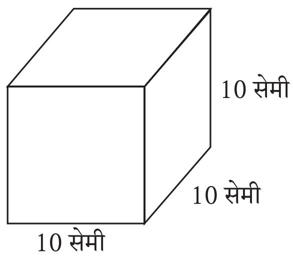
कृती III :



शेजारील आकृतीत 1 घसेमी घनफळ असलेले 8 घन एकमेकांना चिकटून ठेवले आहेत. त्यामुळे मिळणारी घनाकृती ही बाजू 2 सेमी असलेला घन आहे. या घनाचे घनफळ = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ हे लक्षात घ्या.

यावरून घनाची बाजू l असेल तर **घनाचे घनफळ = $l \times l \times l = l^3$ असते.**

द्रवाचे घनफळ : द्रवाचे आकारमान म्हणजेच द्रवाचे घनफळ होय. द्रवाचे आकारमान मोजण्यासाठी मिलिलीटर आणि लीटर ही एकके वापरतात हे आपल्याला माहीत आहे.



सोबतच्या आकृतीत 10 सेमी बाजू असलेला एक पोकळ घन आहे. याचे घनफळ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ घसेमी आहे. हा घन पाण्याने भरला तर त्यातील पाण्याचे आकारमान म्हणजेच घनफळ 1000 घसेमी असेल. या आकारमानालाच 1 लीटर असे म्हणतात.

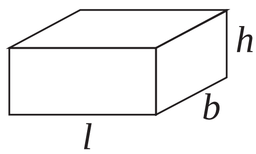
$\therefore$ 1 लीटर = 1000 मिली, हे आपल्याला माहीत आहे.

$\therefore$ 1 लीटर = 1000 घसेमी = 1000 मिली, यावरून 1 घसेमी = 1 मिली हेही लक्षात घ्या.

म्हणजेच 1 सेमी बाजू असलेल्या घनामध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे आकारमान 1 मिली असते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) इष्टिकाचिती आकाराच्या, मासे ठेवण्याच्या काचेच्या पेटीची लांबी 1 मीटर, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे तर त्या पेटीत किती लीटर पाणी मावेल ते काढा.



उकल : पेटीमध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे घनफळ त्या पेटीच्या घनफळाएवढे असेल.

पेटीची लांबी 1 मीटर = 100 सेमी, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे.

पेटीचे घनफळ = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 200000$ घसेमी,

200000 घसेमी = $\frac{200000}{1000}$ = 200 ली. ($\because$ 1000 घसेमी = 1 ली)

$\therefore$ पेटीमध्ये 200 लीटर पाणी मावेल.

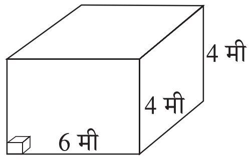
उदा. (2) एका इष्टिकाचिती आकाराच्या गोदामाची लांबी 6 मी, रुंदी 4 मी आणि उंची 4 मी आहे. या गोदामात 40 सेमी बाजू असलेली घनाकृती खोकी जास्तीत जास्त किती मावतील ?

उकल : रचलेल्या खोक्यांनी गोदाम पूर्ण भरेल तेव्हा सर्व खोक्यांचे एकूण घनफळ हे गोदामाच्या घनफळाएवढे असेल. उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील पायऱ्यांचा विचार करू.

(1) गोदामाचे घनफळ काढू.

(2) एका खोक्याचे घनफळ काढू .

(3) खोक्यांची संख्या काढू.



पायरी (1) : गोदामाची लांबी 6 मी = 600 सेमी, रुंदी = उंची = 4 मी = 400 सेमी

गोदामाचे घनफळ = लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची = $600 \times 400 \times 400$ घसेमी

पायरी (2) : एका खोक्याचे घनफळ = बाजू^{3} = $(40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ घसेमी

पायरी (3) : खोक्यांची संख्या = $\frac{\text{गोदामाचे घनफळ}}{\text{एका खोक्याचे घनफळ}} = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ त्या गोदामात जास्तीत जास्त 1500 खोकी मावतील.

उदा. (3) बर्फी तयार करण्यासाठी खवा व साखर यांचे वितळलेले 5 लीटर मिश्रण इष्टिकाचिती आकाराच्या ट्रेमध्ये ओतल्यास तो काठोकाठ भरतो. ट्रेची रुंदी 40 सेमी व उंची 2.5 सेमी असल्यास त्याची लांबी काढा.

उकल: उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील चौकटींत योग्य संख्या भरा.

पायरी (1) : ट्रेची धारकता = 5 लीटर = ☐ घनसेमी ($\because$ 1 ली = 1000 घसेमी)

पायरी (2) : मिश्रणाचे घनफळ = ☐ घनसेमी

पायरी (3) : आयताकृती ट्रेचे घनफळ = मिश्रणाचे घनफळ

लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची = ☐ घनसेमी

लांबी $\times 40 \times 2.5$ = ☐ घनसेमी, $\therefore$ ट्रे ची लांबी = $\frac{\square}{100}$ = 50 सेमी

हे मला समजले.

- इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी $\times$ रुंदी $\times$ उंची = $l \times b \times h$
- घनाचे घनफळ = बाजू^{3} = l^3

सरावसंच 16.1

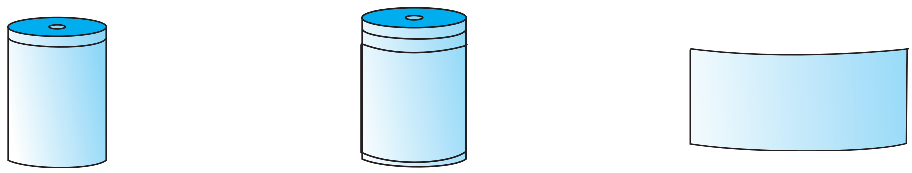
1. एका खोक्याची लांबी 20 सेमी, रुंदी 10.5 सेमी व उंची 8 सेमी असल्यास त्याचे घनफळ काढा.
2. एका इष्टिकाचिती आकाराच्या साबणाच्या वडीचे घनफळ 150 घसेमी आहे. तिची लांबी 10 सेमी व रुंदी 5 सेमी असेल तर तिची जाडी किती असेल?
3. 6 मीटर लांब, 2.5 मी उंच व 0.5 मी रुंद अशी भिंत बांधायची आहे यासाठी 25 सेमी लांबी, 15 सेमी रुंदी व 10 सेमी उंचीच्या किती विटा लागतील ?

4. पावसाचे पाणी साठवण्यासाठी एका वसाहतीत 10 मी लांब, 6 मी रुंद व 3 मी खोल अशा मापांची टाकी बांधून घेतली आहे. तर त्या टाकीची धारकता किती आहे? टाकीत किती लीटर पाणी मावेल ?

जाणून घेऊया.

वृत्तचितीचे पृष्ठफळ (Surface area of a cylinder)

वृत्तचिती आकाराचा डबा घ्या. त्याच्या उंचीएवढी रुंदी असलेला एक आयताकार कागद घ्या. तो डब्याभोवती वक्रपृष्ठभाग नेमका झाकला जाईल असा गुंडाळा. कागदाचा उरलेला भाग कापून वेगळा करा.



वृत्तचिती   कागद गुंडाळला   वर्तुळाचा परीघ = लांबी

गुंडाळलेला कागद उलगडा. तो आयताकार असल्याचे दिसेल. या आयताचे क्षेत्रफळ, म्हणजे वृत्तचितीच्या वक्राकार भागाचे क्षेत्रफळ म्हणजेच वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ.

आयताची लांबी म्हणजे वर्तुळाच्या तळाचा परीघ व आयताची रुंदी म्हणजे वृत्तचितीची उंची होय.

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= वृत्तचितीच्या तळाचा परीघ × वृत्तचितीची उंची

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बंदिस्त वृत्तचितीच्या तळाचे पृष्ठ आणि वरचे पृष्ठ वर्तुळाकार असते.

∴ बंदिस्त वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = व्रकपृष्ठफळ + वरच्या पृष्ठाचे क्षेत्रफळ + तळाचे क्षेत्रफळ

∴ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ + 2 × वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीचा व्यास 1 मीटर आणि उंची 2 मीटर आहे. टाकीला झाकण लावले आहे. झाकणासह टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. रंगाचा खर्च 80 रुपये प्रतिचौमी आहे. तर टाकी रंगवण्यासाठी किती खर्च येईल? ($\pi = 3.14$)

उकल : टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. म्हणजे रंग लावण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ हे टाकीच्या एकूण बाह्यपृष्ठफळाच्या दुप्पट आहे.

वृत्तचितीच्या तळाचा व्यास 1 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या 0.5 मी आणि वृत्तचितीची उंची 2 मी आहे.

$\therefore$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ चौमी

$\therefore$ रंग देण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ $= 2 \times 7.85 = 15.70$ चौमी

$\therefore$ टाकीला रंग देण्याचा एकूण खर्च $= 15.70 \times 80 = 1256$ रुपये.

उदा. (2) जस्ताच्या एका आयताकार पत्र्याची लांबी 3.3 मी व रुंदी 3 मी आहे. या पत्र्यापासून 3.5 सेमी त्रिज्येच्या आणि 30 सेमी लांबीच्या जास्तीत जास्त किती नळ्या तयार करता येतील ?

उकल: आयताकार पत्र्याचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी

$= 3.3 \times 3$ चौमी $= 330 \times 300$ चौसेमी

एका नळीची लांबी म्हणजेच वृत्तचितीची उंची $= h = 30$ सेमी

नळीची त्रिज्या = वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या $= r = 3.5$ सेमी,

एक नळी तयार करण्यासाठी लागलेला पत्रा = एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$$

$= 2 \times 22 \times 15 \quad = 660$ चौसेमी.

पत्र्यापासून तयार झालेल्या नळ्या $= \dfrac{\text{पत्र्याचे क्षेत्रफळ}}{\text{एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ}} = \dfrac{330 \times 300}{660} = 150$

सरावसंच 16.2

1. खालील प्रत्येक उदाहरणात वृत्तचितीच्या पायाची त्रिज्या r व उंची h दिली आहे ; त्यावरून प्रत्येक वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.

   (1) $r = 7$ सेमी, $h = 10$ सेमी (2) $r = 1.4$ सेमी, $h = 2.1$ सेमी (3) $r = 2.5$ सेमी, $h = 7$ सेमी

   (4) $r = 70$ सेमी, $h = 1.4$ सेमी (5) $r = 4.2$ सेमी, $h = 14$ सेमी

2. दोन्ही बाजू बंद असलेल्या, 50 सेमी व्यास व 45 सेमी उंचीच्या पिंपाचे एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

3. एका वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 660 चौसेमी व उंची 21 सेमी आहे, तर तिची त्रिज्या व तळाचे क्षेत्रफळ काढा.

4. एका वृत्तचिती आकाराच्या पत्र्याच्या डब्याचा व्यास 28 सेमी आहे व त्याची उंची 20 सेमी आहे. तो एका बाजूने उघडा आहे तर त्यासाठी लागलेल्या पत्र्याचे क्षेत्रफळ काढा. त्या डब्यास 2 सेमी उंचीचे झाकण तयार करण्यासाठी अंदाजे किती चौसेमी पत्रा लागेल ते काढा.

जाणून घेऊया.

वृत्तचितीचे घनफळ (Volume of a cylinder)

वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीत किती पाणी मावते हे काढण्यासाठी त्या टाकीचे घनफळ काढावे लागते.

कोणत्याही चितीचे घनफळ = तळाचे क्षेत्रफळ × उंची, हे सामान्य सूत्र आहे.

वृत्तचितीचा तळ हा वर्तुळाकार असतो. वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी असून तिची उंची 10 सेमी आहे. तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या $r = 5$ सेमी आणि उंची $h = 10$ सेमी

वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ घसेमी.

उदा. (2) एका वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाची उंची 56 सेमी आहे. त्या पिंपाची धारकता 70.4 लीटर आहे. तर त्या पिंपाची त्रिज्या काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाच्या तळाची त्रिज्या = r मानू

पिंपाची धारकता = पिंपाचे घनफळ = 70.4 × 1000 घसेमी = 704 × 100 घसेमी

1 ली = 1000 मिली $\therefore$ 70.4 ली = 70400 मिली

$\therefore$ पिंपाचे घनफळ = $\pi r^2 h = 70400$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

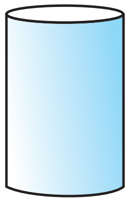
$\therefore r = 20$,

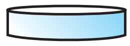
$\therefore$ पिंपाची त्रिज्या 20 सेमी आहे.

उदा. (3) तांब्याच्या भरीव वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 4.2 सेमी असून तिची उंची 16 सेमी आहे. ती वितळवून 1.4 सेमी व्यास व 0.2 सेमी जाडी असलेल्या किती चकत्या तयार करता येतील?

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या = R = 4.2 सेमी उंची = H = 16 सेमी

वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi R^2 H$ = $\pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$





चकतीच्या तळाची त्रिज्या = $1.4 \div 2 = 0.7$ सेमी

चकतीची जाडी = वृत्तचितीची उंची = 0.2 सेमी

चकतीचे घनफळ = $\pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

वितळलेल्या वृत्तचितीपासून n चकत्या तयार होतील, असे मानू

$\therefore$ $n \times$ एका चकतीचे घनफळ = वृत्तचितीचे घनफळ

$$n = \frac{\text{वृत्तचितीचे घनफळ}}{\text{एका चकतीचे घनफळ}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 चकत्या तयार होतील.

हे मला समजले.

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi rh$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2\pi r(h + r)$

वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

सरावसंच 16.3

1. खाली वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या (r) व उंची (h) दिली आहे त्यावरून वृत्तचितीचे घनफळ काढा.

   (1) r =10.5 सेमी, h = 8 सेमी (2) r = 2.5 मी, h = 7 मी

   (3) r = 4.2 सेमी, h = 5 सेमी (4) r = 5.6 सेमी, h = 5 सेमी

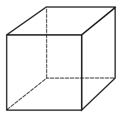
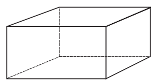
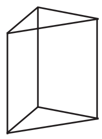
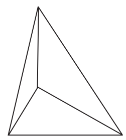
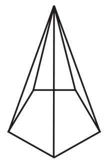
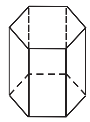
2. लांबी 90 सेमी व व्यास 1.4 सेमी असेल अशी लोखंडी सळई तयार करण्यासाठी लागणाऱ्या लोखंडाचे घनफळ काढा.

3. वृत्तचिती आकाराच्या एका हौदाचा आतील व्यास 1.6 मी असून त्याची खोली 0.7 मी आहे, तर त्या हौदात जास्तीत जास्त किती पाणी मावेल ?

4. एका वृत्तचितीच्या पायाचा परीघ 132 सेमी असून त्याची उंची 25 सेमी आहे, तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ किती?

ऑयलरचे सूत्र

पृष्ठे (F), शिरोबिंदू (V) आणि कडा (E) असलेल्या घनाकृतींसंबंधी एक मनोरंजक सूत्र खूप लहान वयात लिओनार्ड ऑयलर या थोर गणितीने शोधले. खालील सारणीतील घनाकृतींच्या कडा, कोपरे व पृष्ठे मोजून सारणी पूर्ण करा आणि $V + F = E + 2$ हे ऑयलरचे सूत्र पडताळून पाहा.

नाव	घन	इष्टिकाचिती	त्रिकोणीचिती	त्रिकोणी सूची	पंचकोनी सूची	षटकोनी चिती
आकार						
पृष्ठे (F)	6					8
शिरोबिंदू (V)	8					12
कडा (E)		12			10	

उत्तरसूची

सरावसंच 16.1

1. 1680 घसेमी **2.** 3 सेमी **3.** 2000 विटा **4.** 1,80,000 ली.

सरावसंच 16.2

1. (1) 440 चौसेमी, 748 चौसेमी (2) 18.48 चौसेमी, 30.80 चौसेमी

(3) 110 चौसेमी, 149.29 चौसेमी (4) 616 चौसेमी, 31416 चौसेमी

(5) 369.60 चौसेमी, 480.48 चौसेमी

2. 10,990 चौसेमी **3.** 5 सेमी, 78.50 चौसेमी

4. 2376 चौसेमी, झाकणासाठी अंदाजे 792 चौसेमी पत्रा लागेल.

सरावसंच 16.3

1. (1) 2772 घसेमी (2) 137.5 घमी (3) 277.2 घसेमी (4) 492.8 घसेमी

2. 138.6 घसेमी **3.** 1408 ली **4.** 34650 घसेमी

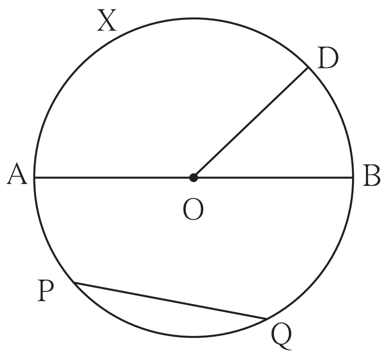
CLHYHE

17 वर्तुळ – जीवा व कंस

जरा आठवूया.

शेजारील आकृतीत बिंदू O हे वर्तुळकेंद्र आहे.

आकृतीच्या संदर्भाने खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.



- रेख OD ही वर्तुळाची .... आहे.
- रेख AB हा वर्तुळाचा .... आहे.
- रेख PQ ही वर्तुळाची .... आहे.
- .... हा केंद्रीय कोन आहे.
- लघुकंस : कंस AXD, कंस BD, ..., ..., ...
- विशालकंस : कंस PAB, कंस PDQ, ...
- अर्धवर्तुळकंस : कंस ADB, ...
- m(कंस DB) = m∠.......
- m(कंस DAB) = 360° – m∠.......

जाणून घेऊया.

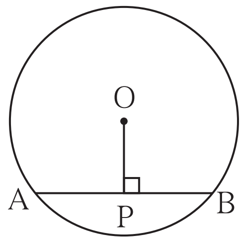
वर्तुळाच्या जीवेचे गुणधर्म (Properties of chord of a circle)

कृती I :

केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा काढा.

केंद्र O मधून जीवा AB वर रेख OP लंब काढा.

रेख AP व रेख PB ची लांबी मोजा.

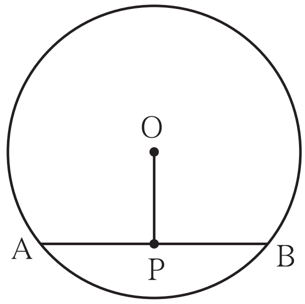


याप्रमाणे वेगवेगळ्या त्रिज्येची पाच वर्तुळे कागदावर काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढून त्या जीवेवर केंद्रातून लंब काढा. जीवेचे झालेले दोन भाग समान आहेत का हे कर्कटकाच्या साहाय्याने तपासून पाहा.

तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल. अनुभव घ्या.

वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

कृती II :



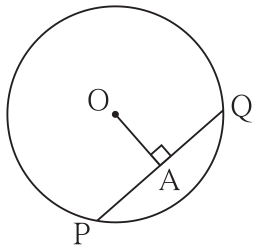
एका कागदावर वेगवेगळ्या त्रिज्यांची 5 वर्तुळे काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढा. त्या जीवेचा मध्यबिंदू मिळवा. वर्तुळकेंद्र O व जीवेचा मध्य जोडा. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे प्रत्येक जीवेला AB आणि जीवेच्या मध्यबिंदूला P हे नाव द्या. $\angle$ APO व $\angle$ BPO काटकोन आहेत हे गुण्याने किंवा कोनमापकाने तपासून पाहा.

प्रत्येक वर्तुळातील जीवेच्या संदर्भात हाच अनुभव येतो हे पाहा.

यावरून तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल.

वर्तुळाचे केंद्र व त्या वर्तुळातील जीवेचा मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड हा त्या जीवेला लंब असतो.

सोडवलेली उदाहरणे



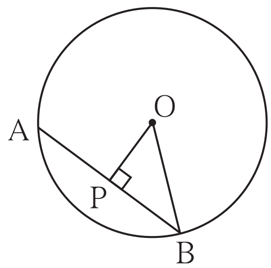
उदा. (1) O केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा PQ ची लांबी 7 सेमी आहे. रेख OA $\perp$ जीवा PQ, तर l(AP) काढा.

उकल : रेख OA $\perp$ जीवा PQ, $\therefore$ बिंदू A हा जीवा PQ चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore\ l(PA) = \frac{1}{2}\ l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ सेमी

उदा. (2) केंद्र O असलेल्या एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाची एक जीवा केंद्रापासून 6 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या जीवेची लांबी काढा.

उकल : वर्तुळाच्या जीवेचे केंद्रापासूनचे अंतर म्हणजे केंद्रापासून त्या जीवेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडाची लांबी होय.



O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा आहे.

रेख OP $\perp$ जीवा AB.

वर्तुळाची त्रिज्या = l(OB) = 10 सेमी.

l(OP) = 6 सेमी. येथे Δ OPB हा काटकोन त्रिकोण तयार झाला.

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$

$\therefore\ 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = (10 + 6)\ (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$

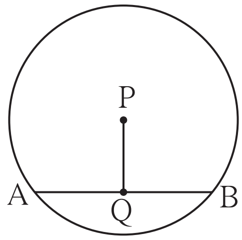
$\therefore \quad l(PB) = 8$ सेमी

आपल्याला माहीत आहे की, वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

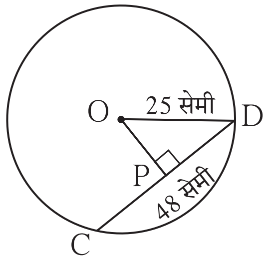
$\therefore \; l(AB) = 2l(PB) = 2 \times 8 = 16$

$\therefore$ जीवा AB ची लांबी 16 सेमी आहे.

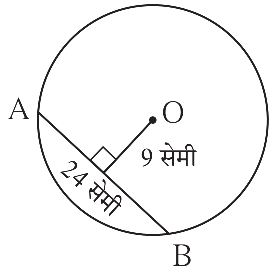
सरावसंच 17.1



1. केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी 13 सेमी आहे. रेख PQ $\perp$ जीवा AB, तर $l(QB)$ काढा.



2. केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 25 सेमी आहे. या वर्तुळात 48 सेमी लांबीची एक जीवा काढली, तर वर्तुळ केंद्रापासून ती किती अंतरावर असेल ?

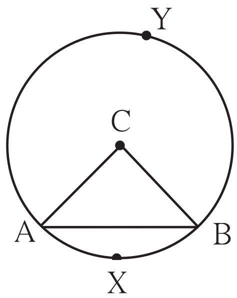


3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची एक जीवा 24 सेमी लांबीची असून ती वर्तुळ केंद्रापासून 9 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

4. एका वर्तुळाचे केंद्र C असून त्याची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 12 सेमी असेल तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर असेल ?

जाणून घेऊया.

वर्तुळाच्या जीवेचे संगत कंस (Arcs corresponding to chord of a circle)



सोबतच्या आकृतीत, रेख AB ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची जीवा आहे. कंस AXB हा लघुकंस असून कंस AYB हा विशालकंस आहे. या दोन्ही कंसांना जीवा AB चे संगत कंस म्हणतात. याउलट जीवा AB ही कंस AXB आणि कंस AYB यांची संगत जीवा आहे.

एकरूप कंस (Congruent arcs)

जर एकाच वर्तुळाच्या दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतात.

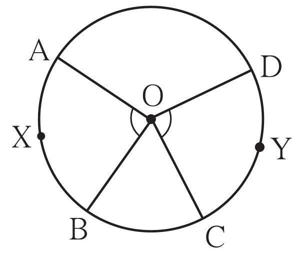
O केंद्र असलेल्या वर्तुळात

$\therefore$ $m\angle AOB = m\angle COD$

$\therefore$ m(कंस AXB) = m(कंस CYD)

$\therefore$ कंस AXB $\cong$ कंस CYD

हे ट्रेसिंग पेपरच्या सहाय्याने पडताळून पाहा.

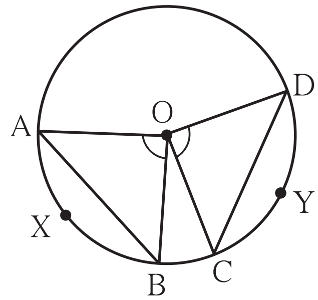


वर्तुळाची जीवा आणि संगत कंस यांचे गुणधर्म पुढील कृतींतून शोधा आणि लक्षात ठेवा.

कृती I :

(1) O केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.

(2) वर्तुळात $\angle$COD व $\angle$AOB हे समान मापाचे कोन काढा. त्यावरून कंस AXB आणि AYB हे एकरूप कंस मिळतील.



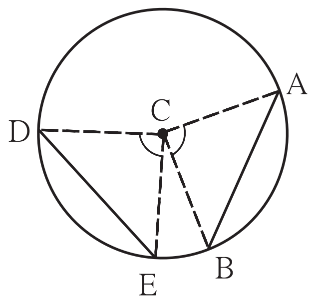
(3) जीवा AB व जीवा CD काढा.

(4) कर्कटकाच्या साहाय्याने जीवा AB व जीवा CD यांची लांबी समान आहे याचा अनुभव घ्या.

कृती II :

(1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा.

(2) या वर्तुळाच्या रेख AB आणि रेख DE या एकरूप जीवा काढा. रेख CA, रेख CB, रेख CD, रेख CE या त्रिज्या काढा.



(3) $\angle$ ACB व $\angle$ DCE एकरूप आहेत, हे दाखवा.

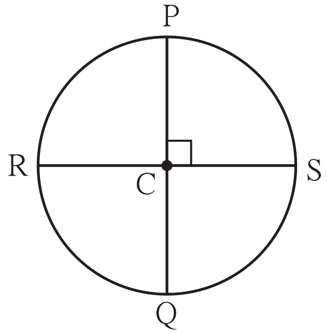
(4) त्यावरून कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, म्हणजेच हे कंस एकरूप आहेत, हे दाखवा.

हे मला समजले.

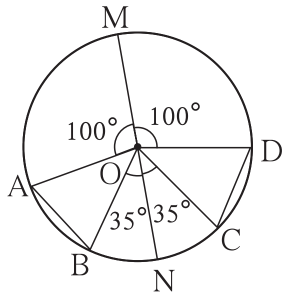
एका वर्तुळाच्या एकरूप कंसांशी निगडित असलेल्या जीवा एकरूप असतात. एका वर्तुळात दोन जीवा एकरूप असतील तर त्यांच्या संबंधित संगत लघुकंस व संगत विशालकंस एकरूप असतात.

सरावसंच 17.2

1. केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे रेख PQ व रेख RS हे व्यास काटकोनात छेदतात. तर (1) कंस PS आणि कंस SQ एकरूप का आहेत, हे सांगा. (2) कंस PS शी एकरूप असलेल्या इतर कंसांची नावे लिहा.



2. आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा रेख MN हा व्यास आहे. काही केंद्रीय कोनांची मापे दिली आहेत.
   त्यावरून (1) ∠ AOB आणि ∠ COD यांची मापे काढा.
   (2) कंस AB ≅ कंस CD हे दाखवा.
   (3) जीवा AB ≅ जीवा CD हे दाखवा.



१२९

उत्तरसूची

सरावसंच 17.1

1. 6.5 सेमी 2. 7 सेमी 3. 15 सेमी 4. 8 सेमी

सरावसंच 17.2

1. (1) कारण कंसाशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 90° आहेत.
   (2) कंस PS ≅ कंस PR ≅ कंस RQ
2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45°$
   (2) कंस AB ≅ कंस CD कारण कंसांशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 45° आहेत.
   (3) जीवा AB ≅ जीवा CD कारण एकरुप कंसाशी संगत जीवा एकरुप असतात.

CH6UJ2

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. पुढील प्रश्नांसाठी पर्यायी उत्तरे दिली आहे. त्यांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

   (1) एका वर्तुळाचे क्षेत्रफळ 1386 चौसेमी असेल तर त्याचा परीघ किती असेल ?

   (A) 132 चौसेमी (B) 132 सेमी (C) 42 सेमी (D) 21 चौसेमी

   (2) एका घनाची बाजू 4 मी आहे. ती दुप्पट केली तर त्याचे घनफळ किती पटीने वाढेल?

   (A)दोन पटीने (B) तीन पटीने (C) चार पटीने (D)आठ पटीने

2. प्रणाली 100 मीटर धावण्याच्या शर्यतीचा सराव करत होती. त्यासाठी ती 100 मीटर अंतर 20 वेळा धावली. प्रत्येक वेळी त्यासाठी लागलेला वेळ सेकंदांत खालील प्रमाणे होता.

   18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

   15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15 धावण्यासाठी तिला लागलेल्या वेळांचा मध्य काढा.

3. Δ DEF आणि Δ LMN हे त्रिकोण EDF $\leftrightarrow$ LMN या एकास एक संगतीत एकरुप आहेत. तर या संगतीनुसार होणाऱ्या एकरुप बाजूंच्या आणि एकरुप कोनांच्या जोड्या लिहा.

4. एका यंत्राची किंमत 2,50,000 रुपये आहे. ती दरसाल 4% दराने घटते. तर यंत्र घेतल्यापासून तीन वर्षांनी त्या यंत्राची किंमत किती असेल ?

5. $\square$ ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू DC, रेख AE $\perp$ बाजू DC जर l (AB) = 9 सेमी, l (AE) = 10 सेमी, A($\square$ ABCD) = 115 सेमी^{2}, तर l (DC) काढा.

6. वृत्तचिती आकाराच्या एका टाकीच्या तळाचा व्यास 1.75 मी आणि उंची 3.2 मी आहे. तर त्या टाकीची क्षमता किती लीटर आहे ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

7. त्रिज्या 9.1 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 16.8 सेमी आहे. तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर आहे ?

8. रोजगार हमी योजनेखाली A, B, C, D या गावांत सुरु असलेल्या कामांवरील पुरुष व स्त्री कामगारांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे.

गाव	A	B	C	D
स्त्रिया	150	240	90	140
पुरुष	225	160	210	110

   (1) ही माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.

   (2) ही माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

9. पुढील समीकरणे सोडवा.

(1) $17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2} + \frac{y+4}{4} = 5 - \frac{y-2}{4}$ (3) $5(1-2x) = 9(1-x)$

10. पुढील कृती दिलेल्या पायऱ्यांनुसार करा.

(1) समभुज □ ABCD आणि त्याचा कर्ण AC काढा.

(2) एकरुप घटक समान चिन्हाने दाखवा.

(3) Δ ADC व Δ ABC कोणत्या संगतीत व कोणत्या कसोटीने एकरुप होतात ते लिहा.

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, तसेच $\angle DAC \cong \angle BAC$ दाखवण्यासाठी कारण लिहा.

(5) वरील पायऱ्यांवरून लक्षात येणारा समभुज चौकोनाचा गुणधर्म लिहा.

11. एका शेतजमिनीचा आकार चौकोनी आहे. त्याच्या चार कोपऱ्यांना P, Q, R, S ही नावे देऊन घेतलेली मोजमापे पुढीलप्रमाणे आली.

l(PQ) = 170 मी, l(QR) = 250 मी, l(RS) = 100 मी,

l(PS) = 240 मी, l(PR) = 260 मी

या शेतजमिनीचे क्षेत्रफळ हेक्टरमध्ये काढा. (1 हेक्टर =10,000 चौमी)

12. एका ग्रंथालयातील एकूण पुस्तकांच्या 50% पुस्तके मराठीची आहेत. मराठीच्या पुस्तकांच्या $\frac{1}{3}$ पुस्तके इंग्रजीची आणि, इंग्रजीच्या पुस्तकांच्या 25% पुस्तके गणिताची आहेत. उरलेली 560 पुस्तके इतर विषयांची आहेत. तर त्या ग्रंथालयात एकूण किती पुस्तके आहेत?

13. $(2x+1)$ या द्विपदीने $(6x^3+11x^2-10x-7)$ या बहुपदीला भागा. भागाकार व बाकी लिहा.

उत्तरसूची

1. (1) B (2) D **2.** 15.7 सेकंद

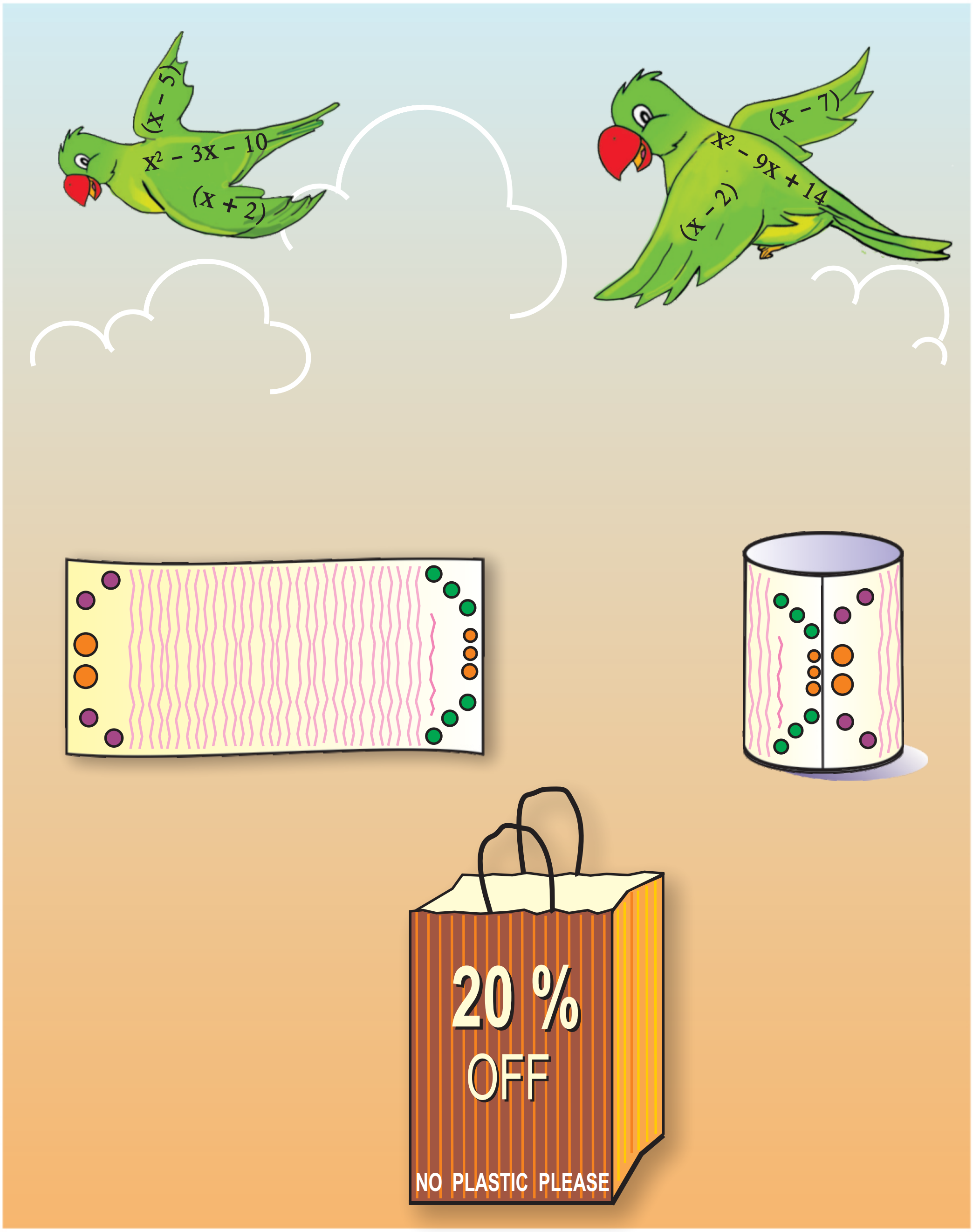
3. बाजू ED $\cong$ बाजू LM, बाजू DF $\cong$ बाजू MN, बाजू EF $\cong$ बाजू LN,
$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

4. ₹ 2,21,184 **5.** 14 सेमी

6. 7700 **7.** 3.5 सेमी

9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ **11.** 3.24 हेक्टर

12. 1920 **13.** भागाकार $3x^2 + 4x - 7$; बाकी 0



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४.

₹ ४८.००