باب **16**

5162CH16

احتمال
(PROBABILITY)

❖ ریاضی کے استدلال ہوتے ہوئے کسی اور ذریعہ کا استعمال بالکل ایسا ہی ہے جیسے ہاتھ میں چراغ ہوتے ہوئے کسی شئے کو تاریکی میں ٹٹولنا۔

جون آربیوتھ ناٹ(JOHN ARBUTHNOT) ❖

16.1 تعارف(Introduction)

گزشتہ جماعتوں میں ہم نے احتمال کے تصور کا مطالعہ مختلف معاملوں میں غیر یقینی صورتحال کی پیمائش کے طور پر کیا ہے۔ہم نے کسی پانسے کو پھینکنے پر ایک جفت عدد کے حاصل ہونے کا احتمال $\frac{3}{6}$ یعنی $\frac{1}{2}$ پایا تھا۔یہاں کل ممکنہ نتائج(outcomes) 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 ہیں (جن کی تعداد چھ ہے)۔واقعہ ایک جفت عدد حاصل کرنا، کے مواقع نتائج 2، 4، 6 (یعنی تین اعداد) ہیں۔عمومی طور پر کسی واقعہ کا احتمال معلوم کرنے کے لئے ہم واقعہ کے موافق نتائج کی تعداد کی کل نتائج کی تعداد کے ساتھ نسبت معلوم کرتے ہیں۔ احتمال کے اس اصول کو احتمال کا کلاسیکی اصول (Classical Theory of Probability) کہتے ہیں۔

کولوگروو
(1903-1987)

نویں جماعت میں ہم نے احتمال کو مشاہدات اور جمع شدہ اعداد وشمار کی بنیاد پر معلوم کرنا سیکھا ہے۔اسے احتمال کی شماریاتی طرز رسائی (Statistical Approach) کہتے ہیں۔

ان دونوں اصولوں میں کچھ سنجیدہ مسئلے بھی شامل ہیں۔مثال کے طور پر ان اصولوں کا اطلاق ان سرگرمیوں/تجربات پر نہیں کیا جاسکتا جہاں ممکنہ نتائج کی تعداد لامتناہی ہو۔کلاسیکی اصول میں ہم سبھی ممکنہ نتائج کی برآمدگی مساوی تصور کرتے ہیں۔ یاد کیجیے کہ نتائج کی برآمدگی کو اس وقت مساوی کہا جاتا ہے جب ہمارے پاس اس بات پر یقین کرنے کی کوئی وجہ نہ ہو کہ ایک

نتیجے کے برآمد ہونے کا امکان دوسرے سے زیادہ ہے۔ بالفاظ دیگر ہم یہ مانتے ہیں کہ سبھی نتائج کے برآمد ہونے کا امکان (احتمال) مساوی ہے۔لہٰذا ہم نے احتمال کی تعریف کرنے کے لیے مساوی طور پر آمد ہونے والے یا مساوی ممکنہ نتائج کا استعمال کیا ہے۔منطقی اعتبار سے یہ تعریف درست نہیں ہے۔اس لیے روس کے ریاضی داں A.N.Kolmogorov نے احتمال کے ایک اوراصول پیش کیا۔انہوں نے1933 میں شائع ہونے والی اپنی کتاب احتمال کی بنیاد(Foundation of Probability) میں احتمال کی ترجمانی کے لیے کچھ بدیہات(axioms) متعین کیے۔اس باب میں ہم احتمال کے اسی بدیہی نظریے(axiomatic approach of probability) کا مطالعہ کریں گے۔اس نظریے کو سمجھنے کے لیے کچھ بنیادی اصطلاحات کو جاننا ضروری ہے مثلاً بلامنصوبہ تجربات (random experiment)، سیمپل اسپیس، واقعات (events)وغیرہ۔آیئے ذیل میں ان کا مطالعہ کرتے ہیں۔

16.2 بلامنصوبہ تجربات(Random Experiments)

روزمرہ کی زندگی میں ہم ایسی کئی سرگرمیاں انجام دیتے ہیں جن کے نتائج ہمیشہ ایک ہی ہوتے ہیں بھلے ہی انہیں کتنی مرتبہ کیوں نہ دوہرایا جائے۔مثال کے طور پر کسی دیے ہوئے مثلث کے زاویوں کی قدر نہ جانتے ہوئے بھی ہم یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ زاویں کا حاصل جمع $180°$ ہوگا۔

ہم اس قسم کی بھی کئی تجرباتی سرگرمیاں انجام دیتے ہیں جنہیں یکساں حالات میں دوہرانے پر بھی ایک جیسے نتائج برآمد نہیں ہوتے۔مثال کے طور پر جب ایک سکے کو اچھالا جاتا ہے تو ہیڈ(head) آسکتا ہے یا ٹیل(tail) آسکتا ہے۔لیکن ہم یہ یقین کے ساتھ نہیں کہہ سکتے کہ اصل نتیجہ ان دونوں میں سے کیا ہوگا؟ اس قسم کے تجربات کو بلامنصوبہ تجربات کہا جاتا ہے۔لہٰذا ایک تجربہ اس وقت بلامنصوبہ تجربہ کہلاتا ہے جب یہ مندرجہ ذیل دو شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

(i) اس کے ایک سے زیادہ ممکنہ نتائج ہوں

(ii) تجربہ مکمل ہونے سے پہلے نتیجے کی پیشن گوئی ممکن نہ ہو

جانچ کیجیے کہ پانسہ پھینکنے کا تجربہ بلامنصوبہ تجربہ ہے یا نہیں؟

اس باب میں ہم بلامنصوبہ تجربے کو صرف تجربہ کہیں گے جب تک کہ کہا نہ جائے۔

16.2.1 نتائج اور سیمپل اسپیس-کسی بلامنصوبہ تجربے کے کسی ممکنہ حاصل کونتیجہ کہتے ہیں ایک پانسہ پھینکنے کے تجربے پرغور کیجیے۔اگر ہم اس کے بالائی رخ پر درج شدہ نقطوں کی تعداد میں دلچسپی رکھتے ہیں تو تجربہ کے نتائج 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 ہیں۔سبھی نتائج کا سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ اس تجربہ کا سیمپل اسپیس (Sample Space) کہلاتا ہے۔

لہٰذا کسی بلامنصوبہ تجربہ کے سبھی ممکنہ نتائج کا سیٹ اس تجربہ کا سیمپل اسپیس کہلاتا ہے۔سیمپل اسپیس کو علامت S سے ظاہر کرتے ہیں۔

سیمپل اسپیس کا ہرایک عنصر سیمپل پوائنٹ (Sample Point) کہلاتا ہے۔ بالفاظ دیگر، بلامنصوبہ تجربہ کا ہرایک نتیجہ بھی سیمپل پوائنٹ کہلاتا ہے۔

آیئے کچھ مثالوں پرغور کرتے ہیں۔

مثال 1 دوسکوں (ایک 1 روپے کا اور دوسرا 2 روپے کا) کو ایک مرتبہ اچھالا گیا ہے۔سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔

حل صاف ہے کہ سکے اس معنیٰ میں ایک دوسرے سے مختلف ہیں کہ ہم انہیں پہلا سکہ اور دوسرا سکہ کہہ سکتے ہیں۔ کیونکہ دونوں سکوں میں سے کسی پر بھی ہیڈ (H) یا ٹیل (T) ظاہر ہوسکتے ہیں۔اس لیے ممکنہ نتائج مندرجہ ذیل ہوسکتے ہیں۔

دونوں سکوں پر ہیڈ =	(H,H)=HH
پہلے سکے پر ہیڈ اور دوسرے سکے پر ٹیل =	(H,T)=HT
پہلے سکے پر ٹیل اور دوسرے سکے پر ہیڈ =	(T,H)=TH
دونوں سکوں پر ٹیل =	(T,T)=TT
اس طرح،سیمپل اسپیس مندرجہ ذیل ہوگا	S={HH,HT,TH,TT}

> **نوٹ** تجربے کے نتائج H اور T کے ترتیبی جوڑے ہیں۔آسانی کے لیے ترتیبی جوڑوں میں سے Commas ہٹا دیے گیے ہیں۔

مثال 2 پانسوں کے جوڑے (جس میں ایک سرخ رنگ کا اور دوسرا نیلے رنگ کا ہے) کو ایک مرتبہ پھینکنے کے تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجیے۔سیمپل اسپیس کے عناصر کی تعداد بھی معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے کہ نیلے رنگ کے پانسے پر 1 اور سرخ رنگ کے پانسے پر 2 ظاہر ہوتا ہے۔ہم اس نتیجے کو ترتیبی جوڑے (1,2) سے ظاہر کرتے ہیں۔اسی طرح اگر نیلے پانسے پر 3 اور سرخ پانسے پر 5 ظاہر ہوتا ہے تو اس نتیجے کو (3,5) سے ظاہر کرتے ہیں۔ عمومی شکل میں ہر ایک نتیجے کو ترتیبی جوڑے (x,y) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں x نیلے رنگ کے پانسے پر اور y سرخ رنگ کے پانسے پر ظاہر ہونے والا عدد ہے۔لہٰذا سیمپل اسپیس مندرجہ ذیل ہے:

S={(x,y): x نیلے پانسے پر ظاہر ہوانے والا عدد ہے اور y سرخ پانسے پر ظاہر ہونے والا عدد ہے}

اس سیمپل اسپیس کے عناصر کی تعداد $6\times6=36$ ہے اور سیمپل اسپیس مندرجہ ذیل ہے۔

$$\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),$$
$$(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),$$
$$(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$$

مثال 3 مندرجہ ذیل ہر ایک تجربے کے لیے مناسب سیمپل اسپیس بتائیے:

(i) ایک لڑکے کی جیب میں ایک 1 روپیہ، ایک 2 روپے اور ایک 5 روپے کا سکہ ہے۔وہ اپنی جیب سے ایک کے بعد ایک دو سکے نکالتا ہے۔

(ii) کوئی شخص کسی مصروف شاہراہ پر ایک سال میں ہونے والے حادثات کی تعداد نوٹ کرتا ہے۔

حل (i) مان لیجیے **Q** ایک روپیہ کے سکے کو، **H** 2 روپے کے سکے کو اور **R** 5 روپے کے سکے کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کے ذریعہ جیب سے نکالا گیا پہلا سکہ تین سکوں میں سے کوئی بھی ایک سکہ **Q**، **H** یا **R** ہو سکتا ہے۔ پہلے سکے **Q** کے نظیری دوسری مرتبہ نکالا گیا سکہ **H** یا **R** ہو سکتا ہے۔لہٰذا دو سکے نکالنے کے نتیجہ **QH** یا **QR** ہو سکتا ہے۔اسی طرح **H** کے نظیری دوسری مرتبہ نکالا گیا سکہ **Q** یا **R** ہو سکتا ہے، اس لیے نتیجہ **HQ** یا **HR** ہو سکتا ہے۔ بالآخر **R** کے نظیری دوسری مرتبہ نکالا گیا سکہ **H** یا **Q** ہو سکتا ہے اس لیے نتیجہ **RH** یا **RQ** ہوگا۔

اس طرح سیمپل اسپیس **S={QH,QR,HQ,HR,RH,RQ}**

(ii) کسی مصروف شاہراہ پر حادثات کی تعداد 0 (جب کوئی بھی حادثہ نہ ہو) یا 1 یا 2 یا کوئی بھی مثبت صحیح عدد ہو سکتی ہے۔

لہٰذا اس تجربے کے لیے سیمپل اسپیس $S=\{0,1,2,...\}$

مثال 4 ایک سکہ اچھالا جاتا ہے۔ اگر اس پر ہیڈ نظر آئے تو ہم ایک تھیلی، جس میں 3 نیلی اور 4 سفید گیندیں ہیں، میں سے ایک گیند نکالتے ہیں۔ اگر سکے پر ٹیل نظر آئے تو ہم ایک پانسہ پھینکتے ہیں۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس بیان کیجیے۔

حل مان لیجیے ہم نیلی گیندوں کو B_1، B_2، B_3 اور سفید گیندوں کو W_1، W_2، W_3 اور W_4 سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس

$$S=\{HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

یہاں HB_1 کا مطلب ہے کہ سکے پر ہیڈ ہے اور گیند B_1 نکالی گئی ہے۔ HW_1 کا مطلب ہے کہ سکے پر ہیڈ ہے اور گیند W_1 نکالی گئی ہے۔ اسی طرح $T1$ کا مطلب ہے کہ سکے پر ٹیل ہے اور پانسے پر عدد 1 ظاہر ہوا ہے۔

مثال 5 ایک ایسے تجربے پر غور کیجیے جس میں کسی سکے کو بار بار اس وقت تک اچھالا جاتا ہے جب تک کہ اس پر ہیڈ ظاہر نہ ہو جائے۔ سیمپل اسپیس بیان کیجیے:

حل اس تجربے میں ہیڈ پہلے اچھال یا دوسرے اچھال یا تیسرے اچھال وغیرہ میں سے کسی میں بھی ظاہر ہوسکتا ہے۔ لہٰذا

مطلوبہ سیمپل اسپیس $\mathbf{S=\{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \ldots\}}$

مشق 16.1

مندرجہ ذیل سوال 1 تا 7 میں ہر ایک کا سیمپل اسپیس معلوم کیجیے:

1. ایک سکے کو تین مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔
2. ایک پانسے کو دو مرتبہ پھینکا گیا ہے۔
3. ایک سکہ چار مرتبہ اچھالا گیا ہے۔
4. ایک سکہ اچھالا گیا ہے۔
5. ایک سکہ اچھالا جاتا ہے اور صرف اس وقت جب سکے پر ہیڈ ظاہر ہوتا ہے تو ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔
6. کمرہ X میں 2 لڑکے اور 2 لڑکیاں ہیں۔ کمرہ] Y میں 1 لڑکا اور 3 لڑکیاں ہیں اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجیے جس میں پہلے ایک کمرہ منتخب کیا جاتا ہے اور پھر ایک بچہ منتخب کیا جاتا ہے۔

7. ایک پانسہ سرخ رنگ گا، ایک سفید رنگ کا اور ایک نیلے رنگ کا ایک تھیلے میں رکھے ہوئے ہیں۔ ایک پانسہ بلا منصوبہ منتخب کیا گیا اور اسے پھینکا گیا ہے۔ پانسے کا رنگ اور اس کے رخ پر ظاہر ہونے والے عدد کو لکھا گیا ہے۔ سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

8. ایک تجربے میں 2 بچوں والی فیملی میں سے ہر ایک میں لڑکے۔لڑکیوں کی تعداد کو لکھا جاتا ہے۔

(i) اگر ہماری دلچسپی کسی فیملی میں لڑکیوں کی تعداد جاننے میں ہے تو سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

(ii) اگر ہماری دلچسپی کسی فیملی میں لڑکیوں کی تعداد جاننے میں ہے تو سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

9. کسی ڈبے میں ایک سرخ اور ایک جیسی 3 سفید گیندیں رکھی ہوئی ہیں دو گیندین یکے بعد دیگرے (in succession) تبدیل کیے بغیر بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

10. ایک تجربے میں کسی سکے کو اچھالا جاتا ہے اور اگر اس پر ہیڈ ظاہر ہوتا ہے تو اسے دوبارہ اچھالا جاتا ہے۔ اگر پہلی مرتبہ اچھالنے پر ٹیل ظاہر ہوتا ہے تو ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

11. مان لیجئے کہ بلبلوں کے ایک ڈھیر میں سے 3 بلب بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں ہر ایک بلب کی جانچ کی جاتی ہے اور اسے خراب (**D**) یا صحیح (**N**) میں درجہ بند کیا جاتا ہے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

12. ایک سکہ اچھالا جاتا ہے۔ اگر نتیجہ ہید ہو تو ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ اگر پانسے پر ایک جفت عدد ظاہر ہوتا ہے تو پانسے کو دوبارہ پھینکا جاتا ہے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

13. کاغذ کی چار پرچیوں پر اعداد 1، 2، 3 اور 4 علیحدہ علیحدہ لکھے ہوئے ہیں ان پرچیوں کو ایک ڈبے میں رکھ کر اچھی طرح سے ملایا گیا ہے۔ ایک شخص ڈبے میں سے دو پرچیاں ایک کے بعد دوسرے بغیر تبدیل کیے ہوئے نکالتا ہے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

14. کسی تجربے میں ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ اگر پانسے پر ظاہر ہونے والا عدد جفت ہے تو ایک سکہ ایک مرتبہ اچھالا گیا ہے اگر پانسے ہونے والا عدد طاق ہے تو سکے کو دو مرتبہ اچھالتے ہیں۔ سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

15. ایک سکہ اچھالا گیا۔ اگر اس پر ٹیل آتا ہے تو ایک ڈبے میں سے جس میں دو سرخ اور 3 کالی گیندیں رکھی ہیں۔ ایک گیند نکالتے ہیں۔ اگر سکے پر ہیڈ آتا ہے تو ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

16. ایک پانسہ بار بار اس وقت تک پھینکا جاتا ہے جب تک اس پر 6 ظاہر نہ جائے۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس معلوم کیجئے۔

16.3 واقعہ (Event)

ہم نے بلا منصوبہ تجربہ اور اس کے سیمپل اسپیس کا مطالعہ کیا ہے۔ کسی تجربے کا سیمپل اسپیس اس تجربے سے متعلق سبھی سوالات کے لیے آفاقی سیٹ (Universal Set) ہوتا ہے۔

ایک سکے کو دو مرتبہ اچھالنے کے تجربے پر غور کیجئے۔ متعلقہ سیمپل اسپیس $S=\{HH, HT, TH, TT\}$ ہے۔

اب مان لیجئے کہ ہماری دلچسپی ان نتائج میں ہے جو ایک ہیڈ ظاہر ہونے کے نظیری ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اس واقع کے ہونے کے نظیری S کے عناصر صرف HT اور TH ہیں۔ یہ دو عناصر ایک سیٹ $E=\{HT, TH\}$ تشکیل دیتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سیٹ E سیمپل اسپیس S کا ذیلی سیٹ ہے۔ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مختلف واقعات اور S کے ذیلی سیٹ مندرجہ ذیل طریقے سے ایک دوسرے کے نظیری ہیں۔

واقعہ کا بیان	'S' کا نظیری ذیلی سیٹ
ٹیل کی تعداد ٹھیک 2 ہے۔	$A=\{TT\}$
ٹیل کی تعداد کم سے کم 1 ہے۔	$B=\{HT, TH, TT\}$
ہیڈ کی تعداد زیادہ سے زیادہ 1 ہے۔	$C=\{HT, TH, TT\}$
دوسرے اچھال میں ہیڈ نہیں ہے۔	$D=\{HT, TT\}$
ٹیل کی تعداد زیادہ زیادہ 2 ہے۔	$S=\{HH, HT, TH, TT\}$
ٹیل کی تعداد 2 سے زیادہ ہے۔	ϕ

مذکورہ بالا سیٹ سے یہ بات واضح ہو جاتی ہے کہ سیمپل اسپیس کے کسی ذیلی سیٹ کے نظیری ایک واقعہ ہوتا ہے اور کسی واقعہ کے نظیری سیمپل اسپیس کا ایک ذیلی سیٹ ہوتا ہے۔ اس تناظر میں ایک واقعہ کی تعریف مندرجہ ذیل طریقے سے کی جاتی ہے۔

تعریف سیمپل اسپیس S کا کوئی ذیلی سیٹ ایک واقعہ (event) کہلاتا ہے۔

16.3.1 واقعہ پیش آنا (Occurrence of an event)

ایک پانسہ پھینکنے کے تجربے پر غور کیجئے۔ مان لیجئے کہ ایک واقعہ 'پانسے پر 4 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا' کو E سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر پانسے پر حقیقت میں '1' ظاہر ہوتا ہے تو

ہم کہہ سکتے ہیں کہ واقعہ E پیش آیا ہے۔ اگر نتیجہ 2 یا 3 ہے تو ہم کہتے ہیں کہ واقعہ **E** پیش آیا ہے۔

لہٰذا کسی تجربے کے سیمپل اسپیس S کا واقعہ **E** پیش آیا ہے، کہا جاتا ہے اگر تجربے کا نتیجہ ω اس طرح ہے کہ $\omega \in E$ اگر نتیجہ ω اس طرح ہے کہ $\omega \notin E$ تو ہم کہتے ہیں کہ واقعہ **E** پیش نہیں آیا ہے۔

16.3.2 واقعات کی اقسام (*Types of events*)

واقعات کی ان کے عناصر کی بنیاد پر مختلف اقسام میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

1. ناممکن اور یقینی واقعات (*Impossible and sure Events*) خالی سیٹ $\varnothing$ اور سیمپل اسپیس S بھی واقعات کو ظاہر کرتے ہیں۔ درحقیقت $\varnothing$ کو ناممکن واقعہ اور S یعنی مکمل سیمپل اسپیس کو یقینی واقعہ کہتے ہیں۔

انھیں سمجھنے کے لیے آیئے پانسے پھینکنے کے تجربے پر غور کرتے ہیں۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ہے۔

مان لیجئے E، واقعہ 'پانسے پر ظاہر ہونے والے عدد 7 کا ضعف ہے' کو ظاہر کرتا ہے۔ کیا آپ واقعہ **E** کے نظیری ذیلی سیٹ لکھ سکتے ہیں؟

ظاہر ہے تجربے کو کوئی بھی نتیجہ واقعہ **E** کی شرط کو مطمئن نہیں کرتا ہے یعنی سیمپل اسپیس کا کوئی بھی عنصر واقعہ **E** کے پیش آنے تیقن نہیں ہے۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صرف خالی سیٹ ہی واقعہ **E** کے نظیری سیٹ ہے۔ بالفاظ دیگر ہم کہہ سکتے ہیں کہ پانسے کے اوپری رخ پر 7 کے ضعف کا ظاہر ہونا ناممکن ہے۔ اس طرح واقعہ $E = \varnothing$ ایک ناممکن واقعہ ہے۔

آیئے اب ہم ایک اور واقعہ F 'پانسے پر آنے والا عدد یا تو جفت ہے یا طاق' پر غور کرتے ہیں۔ واضح ہے

$$F=\{1,2,3,4,5,6\} = S$$

یعنی تمام نتائج واقعہ **F** کے پیش آنے کا تیقن کرتے ہیں۔ لہٰذا $F=S$ ایک یقینی واقعہ ہے۔

2. سادہ واقعہ (Simple Event) اگر کسی واقعہ **E** میں صرف ایک ہی سیمپل نقطہ ہو تو واقعہ **E** کو سادہ (یا ابتدائی) واقعہ کہتے ہیں۔

n واضح عناصر پر مشتمل سیمپل اسپیس میں، n سادہ واقعات موجود ہوتے ہیں مثال کے طور پر ایک سکے کے دو اچھال والے تجربے کا سیمپل اسپیس $S=\{HH, HT, TH, TT\}$ ہے۔

یہاں اس سیمپل اسپیس کے نظیری چار سادہ واقعات ہیں جو مندرجہ ذیل ہیں۔

$$E_1=\{HH\}, E_2=\{HT\} E_3\{TH\}, E_4\{TT\}$$

3. مرکب واقعات (Compound Events) اگر کسی واقعہ میں ایک سے زیادہ سیمپل نقطے ہوتے ہیں تو اسے مرکب واقعہ کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر ایک سکے کے تین اچھال والے تجربے میں مندرجہ ذیل واقعات مرکب واقعات ہیں۔

E: صرف اور صرف ایک ہیڈ آتا ہے۔

F: کم سے کم ایک ہیڈ آتا ہے۔

G: زیادہ سے زیادہ ایک ہیڈ آتا ہے۔

ان واقعات کے نظیری S کے ذیلی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں۔

$$E=\{HTT, THT, TTH\}$$

$$F=\{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$$

$$G=\{TTT, THT, HTT, TTH\}$$

مذکورہ بالا ہر ایک ذیلی سیٹ میں ایک سے زیادہ سیمپل نقطے ہیں اس لیے یہ سب مرکب واقعات ہیں۔

16.3.3 واقعات کا الجبرا (*Algebra of Events*) سیٹ کے باب میں ہم نے دو یا دو سے زیادہ سیٹ کے اتحاد کے مختلف طریقوں کا مطالعہ کیا تھا جیسے یونین (union) تقاطع (Intersection)، فرق (difference)، سیٹ کا تکملہ (Complement of a set) وغیرہ کے بارے میں پڑھا تھا۔ اسی طرح ہم دو یا زیادہ واقعات کا اتحاد مشابہ سیٹ علامتوں کی مدد سے کر سکتے ہیں۔

مان لیجئے **A**، **B** اور **C** ایسے تجربے سے وابستہ واقعات ہیں جس کا سیمپل اسپیس S ہے۔

1. تکملی واقعہ (Complementary Event) ہر ایک واقعہ **A** کے نظیری ایک اور واقعہ **'A'** ہوتا ہے جسے واقعہ **A** کا تکملی واقعہ کہتے ہیں۔ **'A'** کو واقعہ **'A'** نہیں، بھی کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک سکے کی تین اچھالوں پر غور کیجیے۔ اس کا سیمپل اسپیس

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} ہے۔

مان لیجیے **A={HTH, HHT,THH}** واقعہ 'صرف ایک ٹیل کا ظاہر ہونا' کو ظاہر کرتا ہے۔ نتیجہ **HTT** کے ہونے پر واقعہ **A** پیش نہیں آیا۔ لیکن ہم کہہ سکتے ہیں کہ واقعہ **'A'** نہیں، پیش آتا ہے۔ اس طرح ہر ایک نتیجے کے لیے جو کہ **A** میں نہیں ہے ہم کہتے ہیں کہ **A** نہیں، پیش آیا ہے۔ اس طرح واقعہ **A** کے لیے تکملی واقعہ **'A'**۔ نہیں، یعنی

$$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

یا $A' = \{\omega : \omega \in S$ اور $\omega \notin A\} = S - A$

2. واقعہ A یا B (The Event A or B) یاد کیجیے کہ دو سیٹ A اور B کا اتحاد $A \cup B$ (Union) سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں وہ تمام عناصر شامل ہوتے ہیں جو یا تو A میں ہیں یا B میں ہیں یا دونوں میں ہیں۔

جب سیٹ A اور B کسی سیمپل اسپیس سے وابستہ دو واقعات ہوں تو '$A \cup B$' واقعہ A اور B یا دونوں کو ظاہر کرتا ہے۔

واقعہ '$A \cup B$' کو A یا B، بھی کہا جاتا ہے۔

اس لیے واقعہ $'A$ یا $B' = A \cup B$

$$= \{\omega : \omega \in A \text{ یا } \omega \in B\}$$

3. واقعہ A اور B (Event A and B) ہم جانتے ہیں کہ دو سیٹ کا تقاطع $A \cap B$ وہ سیٹ ہوتا ہے جس میں وہ عناصر ہوتے ہیں جو A اور B دونوں میں مشترک ہوتے ہیں یعنی جو A اور B دونوں میں ہوتے ہیں۔

اگر A اور B دو واقعات ہوں تو سیٹ $A \cap B$ واقعہ 'A اور B'، کو ظاہر کرتا ہے۔

اس طرح $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ اور $\omega \in B\}$

مثال کے طور پر ایک پانسے کو دو مرتبہ پھینکنے کے تجربے میں مان لیجیے واقعہ A 'پہلی مرتبہ پھینکنے میں عدد 6 ظاہر ہوتا ہے'، اور واقعہ B 'دو مرتبہ پھینکنے پر ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع کم سے کم 11 ہوتا ہے' کو ظاہر کرتے ہیں، تو

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}, \text{ and } B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

اس لیے $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

نوٹ کیجیے کہ سیٹ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ واقعہ، پہلی مرتبہ پھینکنے پر 6 ظاہر ہوتا ہے دونوں مرتبہ پھینکنے پر ظاہر ہونے والے عدد کا کم سے کم حاصل جمع 11 ہے، کو ظاہر کرتا ہے۔

4. واقعہ 'A لیکن B نہیں' (Event A but not B) ہم جانتے ہیں کہ A-B ان سبھی عناصر کا سیٹ ہوتا ہے جو A میں تو ہیں لیکن B میں نہیں ہیں۔ اس لیے، سیٹ A–B واقعہ A لیکن B نہیں، کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $A - B = A \cap B'$

مثال 6 ایک پانسے کو پھینکنے کے تجربے پر غور کیجیے۔ واقعہ 'ایک مفرد عدد حاصل ہونا' کو A سے اور واقعہ 'ایک طاق عدد حاصل ہونا' کو B کو ظاہر کیا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل واقعات (i) A یا B (ii) A اور B (iii) A لیکن B نہیں (iv) A- نہیں کو ظاہر کرنے والے سیٹ لکھیے۔

حل یہاں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $A = \{2, 3, 5\}$ اور $B = \{1, 3, 5\}$ ظاہر ہے۔

(i) 'A یا B' $= A \cup B = \{1,2,3,5\}$

(ii) 'A اور B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A لیکن B نہیں' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A – نہیں' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 باہمی مستثنیٰ واقعات (*Mutually Exclusive events*)

پانسہ پھینکنے کے تجربے کا سیمپل اسپیس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔ مان لیجیے A 'ایک طاق عدد کا ظاہر ہونا'، اور B 'ایک جفت عدد کا ظاہر ہونا'، کو

ظاہر کرتے ہیں۔

ظاہر ہے واقعہ A، واقعہ B کو خارج کر رہا ہے اور اس کے برعکس بھی درست ہے۔ بالفاظ دیگر، ایسا کوئی نتیجہ نہیں ہے جو واقعہ A اور B کے ایک ساتھ پیش آنے کا تیقن کرتا ہے یہاں

$A = \{1, 3, 5\}$ اور $B = \{2, 4, 6\}$

واضح ہے $A \cap B = \phi$ یعنی A اور B غیر اتحادی (disjoint) سیٹ میں عمومی طور پر دو واقعات A اور B باہمی مستثنیٰ کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونا دوسرے کے وقوع کو خارج کرتا ہے یعنی وہ ایک ساتھ واقع نہیں ہو سکتے۔ اس صورت میں A اور B غیر اتحادی ہوتے ہیں۔

دوبارہ، کسی پانسے کو پھینکنے کے تجربے میں واقعہ A 'ایک طاق عدد کا ظاہر ہونا' اور واقعہ B، 4 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا' پر غور کیجیے۔

صاف ہے $A = \{1, 3, 5\}$ اور $B = \{1, 2, 3\}$

اب $3 \in A$ نیز $3 \in B$

لہٰذا A اور B باہمی مستثنیٰ نہیں ہیں۔

ریمارک سیمپل اسپیس کے سادہ واقعات ہمیشہ باہمی مستثنیٰ ہوتے ہیں۔

16.3.5 (*Exhaustive events*)

پانسے پھینکنے کے ایک تجربے پر غور کیجیے ہم دیکھتے ہیں کہ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ آیئے مندرجہ ذیل واقعات کی تعریف بیان کرتے ہیں۔

A : '4 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا'

B : '2 سے بڑا لیکن 5 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا'

اور C : '4 سے بڑا عدد ظاہر ہونا'

اب $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{3,4\}$ اور $C = \{5, 6\}$

ہم دیکھتے ہیں کہ $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S.$

A، B اور C جیسے واقعات Exhaustive events کہلاتے ہیں۔

مجموعی طور پر اگر $E_1, E_2, ...E_n$ کسی سیمپل اسپیس S کے n واقعات ہیں اور اگر

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

تو $E_1, E_2, ...E_n$ کو exhaustive events کہا جاتا ہے۔ بالفاظ دیگر واقعات $E_1, E_2, ...E_n$ exhaustive events کہلاتے ہیں اگر تجربہ کیئے جانے پر ان میں سے کم از کم واقعہ ضرور پیش آئے۔

مزید یہ کہ اگر $i \neq j$ کے لیے $E_i \cap E_j = \phi$ یعنی E_i اور E_j باہمی مستثنیٰ ہیں اور $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ ہو، تو واقعات $E_1, E_2, ..., E_n$ باہمی مستثنیٰ اور exhaustive events کہلاتے ہیں۔

آیئے اب کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7 دو پانسے پھینکے جاتے ہیں اور پانسوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع نوٹ کرلیا جاتا ہے۔ آیئے اس تجربے سے متعلق مندرجہ ذیل واقعات پر غور کرتے ہیں۔

A: 'حاصل جمع جفت ہے'

B: 'حاصل جمع 3 کا صفت ہے'

C: 'حاصل جمع 4 سے کم ہے'

D: 'حاصل جمع 11 سے زیادہ ہے'

ان میں سے واقعات کے کون سے جوڑے باہمی مستثنیٰ ہیں۔

حل سیمپل اسپیس $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ میں 36 عناصر ہیں۔

اب

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4,2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (3,3), (2,4), (4,2), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ اور $D = \{(6, 6)\}$

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A \cap B = \{(1,5), (2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\} \neq \phi$$

اسی طرح A اور B باہمی مستثنیٰ نہیں ہیں۔

اسی طرح $B \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $A \cap C \neq \phi$ اور $B \cap D \neq \phi$

اسی طرح (B,D)، (A,D)، (A,C) باہمی مستثنیٰ نہیں ہیں۔

نیز $C \cap D = \phi$ اس لیے C اور D باہمی مستثنیٰ واقعات ہیں۔

مثال 8 کسی سکے کو تین مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل واقعات پر غور کیجیے

A: 'کوئی ہیڈ ظاہر نہیں ہوتا'، B: 'صرف ایک ہیڈ ظاہر ہوتا ہے' اور C: 'کم از کم دو ہیڈ ظاہر ہوتے ہیں'

کیا باہمی مستثنیٰ اور exhaustive events کا سیٹ تشکیل دیتے ہیں۔

حل نتیجے کا سیمپل اسپیس

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$A = \{TTT\}$، $B = \{HTT, THT, TTH\}$ اور $C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

اب

$$A \cup B \cup C = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\} = S$$

اس لیے A، B اور C exhaustive events ہیں۔

ساتھ ہی $A \cap C = \phi$, $A \cap B = \phi$ اور $B \cap C = \phi$

لہٰذا یہ واقعات جوڑے وار غیر اتحادی ہیں یعنی وہ باہمی مستثنیٰ ہیں۔

اس طرح A، B اور C باہمی مستثنیٰ اور exhaustive events کا سیٹ تشکیل دیتے ہیں۔

مشق 16.2

1. ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔مان لیجئے واقعہ E' پانسے پر عدد 4 کے ظاہر ہونے ، اور واقعہ F' پانسے پر جفت عدد کے ظاہر

ہونے' کوظاہر کرتا ہے۔کیا E اور F باہمی مستثنیٰ ہیں؟

.2 ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل واقعات کو بیان کیجئے۔

(i) A: عدد 7 سے کم ہے۔ (ii) B: عدد 7 سے بڑا ہے۔

(iii) C: عدد 3 کا ضعف ہے۔ (iv) D: عدد 4 سے کم ہے۔

(v) E: جفت عدد جو کہ 4 سے بڑا ہے۔ (vi) F: عدد 3 سے کم نہیں ہے

$A \cup B, A \cap B, E \cup F, D \cap E, A - C, D - E, F', E \cap F'$, بھی معلوم کیجئے۔

.3 کسی تجربے میں پانسے کا ایک جوڑا پھینکا جاتا ہے اور ان پر ظاہر ہونے والے اعداد کو نوٹ کیا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل واقعات کو بیان کیجئے۔

A: ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع 8 سے زیادہ ہے۔

B: دونوں پانسوں پر عدد 2 ظاہر ہوتا ہے۔

C: ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع کم سے کم 7 ہے اور 3 کا ضعف ہے۔ان میں سے واقعات کے کون کون سے جوڑے باہمی مستثنیٰ ہیں؟

.4 تین سکوں کو ایک مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔مان لیجئے کہ واقع 'تین ہیڈ ظاہر ہونا' کو A سے، واقعہ، دو ہیڈ اور ایک ٹیل ظاہر ہونا، کو B سے واقع تین ٹیل کو C سے اور اور واقع 'پہلے سکے پر ہیڈ ظاہر ہونا' کو D سے ظاہر کرتے ہیں۔بتائیے ان میں سے کون سے واقعات (i) باہمی مستثنیٰ ہیں (ii) سادہ واقعات ہیں (iii) مرکب ہیں۔

.5 تین سکے ایک مرتبہ اچھالے جاتے ہیں۔بیان کیجئے۔

(i) دو واقعات جو کہ باہمی مستثنیٰ ہیں۔

(ii) تین واقعات جو باہمی مستثنیٰ اور exhaustive events ہیں۔

(iii) دو واقعات جو باہمی مستثنیٰ نہیں ہیں۔

(iv) دو واقعات جو باہمی مستثنیٰ ہیں لیکن exhaustive نہیں ہیں۔

(v) تین واقعات جو باہمی مستثنیٰ ہیں لیکن exhaustive نہیں ہیں۔

.6 دو پانسے پھینکے جاتے ہیں۔واقعہ A، B اور C مندرجہ ذیل میں:

A: پہلے پانسے پر جفت عدد حاصل ہونا

B: پہلے پانسے پر طاق عدد حاصل ہونا

C: پانسوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کو حاصل جمع ≤ 5 ہونا

مندرجہ ذیل واقعات کو بیان کیجیے

(i) A' (ii) B-نہیں (iii) A یا B

(iv) A اور B (v) A لیکن C نہیں (vi) B یا C

(vii) B اور C (viii) $A \cap B' \cap C'$

.7 مذکورہ بالا سوال نمبر 6 دیکھئے اور مندرجہ ذیل میں صحیح اور غلط کی نشاندہی کیجیے۔

(i) A اور B باہمی مستثنٰی ہیں

(ii) A اور B باہمیں مستثنٰی اور exhaustive ہیں۔

(iii) $A = B'$

(iv) A اور C باہمی مستثنٰی ہیں۔

(v) A اور B' باہمی مستثنٰی ہیں۔

(vi) A'، B'، C باہمی مستثنٰی اور exhaustive ہیں۔

16.4 احتمال کا بدیہی نظریہ (Axiomatic Approach to probability)

اس باب کے پہلے سیکشنوں میں ہم نے بلامنصوبہ تجربہ، سیمپل اسپیس اور ان تجربات سے وابستہ واقعات پر غور کیا ہے۔ ہم اپنی روزمرہ کی زندگی میں کسی واقعہ کے پیش آنے کے امکان کے لیے متعدد الفاظ کا استعمال کرتے ہیں۔ نظریہ احتمال کسی واقعے کے ہونے یا نہ ہونے کے امکان کا مقدار عطا کرنے کی کوشش ہے۔

گزشتہ جماعتوں میں ہم نے کسی تجربے میں کل ممکنہ نتائج کی تعداد معلوم ہونے پر کسی واقعے کا احتمال معلوم کرنے کے کچھ طریقوں کا مطالعہ کیا ہے۔

مان لیجئے کہ کسی بلا منصوبہ تجربے کا سیمپل اسپیس S ہے۔ احتمال P ایک حقیقی قدر والا تفاعل (real valued function) ہے جس کا ڈومین (domain) S کا پاور سیٹ (power Set) ہے اور رینج وقفہ [0,1] ہے جو مندرجہ ذیل

بدیہات کومطمئن کرتا ہے۔

(i) کسی واقعہ E، کے لیے $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) اگرE اور F باہمی مستثنیٰ واقعات ہیں تو $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

بدیہہ(iii) سے یہ معلوم ہوت ہے کہ $P(\phi) = 0$ ۔اسے ثابت کرنے کے لیے ہم $F=\phi$ لیتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ Eاور ϕ باہمی مستثنیٰ واقعات ہیں۔اس لیے بدیہہ(iii)ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ:

$$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi) \quad \text{یا} \quad P(E) = P(E) + P(\phi)$$

یعنی $P(\phi) = 0$

مان لیجئے کہ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ سیمپل اسپیس Sکے نتائج ہیں۔یعنی

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

احتمال کی بدیہی تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(i) ہرایک $\omega_i \in S$ کے لیے $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

(ii) $P(\omega_1) + P(w_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) کسی واقعہ Aکے لیے $P(A) = \sum P(\omega_i), \omega_i \in A.$

نوٹ غور کیجئے کہ واحدسیٹ $\{\omega_1\}$ کوسادہ واقعہ کہتے ہیں اور علامت کی سہولت کے لیے $P(\{\omega_1\})$ کو $P(\omega_1)$ لکھتے ہیں۔

مثال کے طور پرایک سکے کواچھالنے کے تجربے میں ہم ہرایک نتیجہ Hاور Tکے ساتھ $\frac{1}{2}$ متعین کرسکتے ہیں۔

یعنی $P(H) = \frac{1}{2}$ اور $P(T) = \frac{1}{2}$ (1)

ظاہر ہے یہ تعین دونوں شرائط کومطمئن کرتا ہےیعنی ہرایک عددنہ توصفر سے چھوٹاہےاورنہ 1 سے بڑا ہے۔

اور $P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

اسی طرح اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\text{H کا احتمال} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \text{T کا احتمال} = \frac{1}{2}$$

آیئے ہم $P(H) = \frac{1}{4}$ اور $P(T) = \frac{3}{4}$ لیے ہیں۔ (2)

کیا یہ تعین بدیہی نظریے کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے؟

جی ہاں، اس معاملے میں H کا احتمال $= \frac{1}{4}$ اور T کا احتمال $= \frac{3}{4}$ ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں احتمالی تعین (1) اور (2) H اور T کے احتمال کے لیے درست ہیں۔

درحقیقت دونوں نتائج کے لیے اعداد p اور (1–p) متعین کر سکتے ہیں، جبکہ

$$0 \le p \le 1 \quad \text{اور} \quad P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$$

یہ احتمالی تعین بھی بدیہی نظریے کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی تجربے کے نتائج کے ساتھ احتمال کا تعین متعدد طریقوں (اگر لاانتہا کہا جائے تو زیادہ بہتر ہوگا) سے کیا جا سکتا ہے۔

آیئے اب کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 9 مان لیجئے کہ ایک سیمپل اسپیس $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ ہے۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک نتیجے کے لیے کون سا احتمال تعین درست ہیں۔

نتائج	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

حل شرط (1): ہر ایک عدد $P(\omega_i)$ مثبت ہے اور ایک سے کم ہے

شرط (ii) احتمال کا حاصل جمع

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

لہٰذا یہ احتمال تعین درست ہے۔

(b) شرط (i) ہر ایک عدد $P(\omega_i)$ یا تو صفر ہے یا 1 ہے۔

شرط (ii) احتمال کا حاصل جمع $=1+0+0+0+0+0=1$

لہٰذا یہ تعین درست ہے۔

(c) شرط (i) دو احتمال $P(\omega_6)$ اور $P(\omega_6)$ منفی ہیں۔ اس لیے یہ تعین درست نہیں ہے۔

(d) کیونکہ $P(\omega_6)\frac{3}{2}>1$، اس لیے یہ تعین درست نہیں ہے۔

(e) کیونکہ احتمال کا حاصل جمع $0.1+0.2+0.3+0.4+0.5+0.6=2.1$ ہے۔
اس لیے یہ تعین درست نہیں ہے۔

16.4.1 واقعہ احتمال (*Probability of an event*)

ایک مشین کے ذریعے تیار کیے گئے پین کا تجربہ انھیں اچھے (non-defective) اور خراب (defective) کے زمروں میں رکھنے کے لیے کیا گیا ہے۔ مان لیجیے کہ اس تجربے کا سیمپل اسپیس S ہے۔ اس تجربے کے نتیجے میں ہمیں 0، 1، 2 یا 3 پین خراب مل سکتے ہیں۔

اس تجربے سے وابستہ سیمپل اسپیس

S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG} ہے۔

جہاں **B** کسی خراب پین کو اور **G** اچھے پین کو ظاہر کرتا ہے۔

مان لیجیے کہ نتائج کے لیے مندرجہ ذیل احتمال متعین کیے گئے ہیں۔

سیمپل نقطہ:	**BBB**	**BBG**	**BGB**	**GBB**	**BGG**	**GBG**	**GGB**	**GGG**
احتمال:	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

مان لیجئے کہ واقعہ A 'صرف اور صرف 1 خراب پین اور واقعہ B: کم سے کم دو خراب پین

ظاہر ہے کہ **A = {BGG, GBG, GGB}** اور **B = {BBG, BGB, GBB, BBB}**

اب $P(A) \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$$=P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

اور $P(B)=\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$=P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

آیئے کسی سکے کو دو مرتبہ اچھالنے کے ایک اور تجربے پر غور کرتے ہیں۔

اس تجربے کا سیمپل اسپیس **S = {HH, HT, TH, TT}** ہے۔

مان لیجئے کہ مختلف نتائج کے لیے مندرجہ ذیل احتمال متعین کیے گئے ہیں۔

$$P(HH) = \frac{1}{4}, P(HT) = \frac{1}{7}, P(TH) = \frac{2}{7}, P(TT) = \frac{9}{28}$$

ظاہر ہے کہ یہ احتمال تعین بدیہی نظریے کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ آیئے اب ہم واقعہ E، دونوں اچھالوں میں ایک جیسا نتیجہ ہے، کا احتمال معلوم کرتے ہیں۔

یہاں **E = {HH, TT}**

اب سبھی $\omega_i \in E$ کے لیے

$$P(E) = \sum P(\omega_i)=P(HH)+P(TT)=\frac{1}{4}+\frac{9}{28}=\frac{4}{7}$$

واقعہ F: 'صرف اور صرف 2 ہیڈ' کے لیے ہم پاتے ہیں **F = {HH}**

اور $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 مساوی ممکنہ نتائج کا احتمال (Probability of equally likely outcomes)

مان لیجئے کہ ایک تجربے کا سیمپل اسپیس

$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ ہے۔

مان لیجئے کہ سبھی نتائج ممکنہ مساوی ہیں یعنی ہر ایک سادہ واقعہ کے پیش آنے کا امکان مساوی ہے۔

یعنی سبھی $\omega_i \in S$ کے لیے $P(\omega_i) = p$ جہاں $0 \le p \le 1$

کیونکہ $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$، اس لیے $p + p + ... + p$ (n مرتبہ) $= 1$

یا $np = 1$ یا $p = \frac{1}{n}$

مان لیجئے کہ سیمپل اسپیس S کا کوئی ایک واقعہ E، اس طرح ہے کہ $n(S) = n$ اور $n(E) = m$۔ اگر ہر ایک نتیجہ مساوی ممکنہ ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{کل ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

16.4.3 واقعہ A' یا B' کا احتمال (Probability of the event A' or B')

آیئے A' یا B' کا احتمال یعنی $P(A \cup B)$ معلوم کرتے ہیں۔

مان لیجیے $A = \{HHT, HTH, THH\}$ اور $B = \{HTH, THH, HHH\}$ ایک سکے کے تین اچھالوں کے تجربے کے دو واقعات ہیں۔

صاف ظاہر ہے $A \cup B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

اب $P = A \cup B = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

اگر یہ سبھی نتائج مساوی ممکنہ ہوں تو

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $\mathbf{P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}}$

اور $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

اس لیے $P(A)+P(B)= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

یہ صاف ہے کہ $P(A \cup B) \neq P(A)+P(B)$

نقاط HTH اور THH ، A اور B میں مشترکہ عناصر ہیں۔ P(A)+P(B) کی تحسیب میں HTH اور THH (یعنی $A \cap B$ کے عناصر) کے احتمال کو دو مرتبہ شامل کیا گیا ہے۔ لہٰذا $P(A \cup B)$ معلوم کرنے کے لیے ہمیں $(A \cup B)$ کے سیمپل نقاط کے احتمال کو P(A)+P(B) میں سے گھٹانا ہوگا۔

یعنی $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

لہٰذا $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

عمومی طور پر اگر A اور B کسی بلا منصوبہ تجربے سے وابستہ کوئی دو واقعات ہیں تو کسی واقعہ کے احتمال کی تعریف کے مطابق ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$P(A \cup B) = \sum p(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cup B$$

کیونکہ $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$ اس لیے

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B - A\right]$$

کیونکہ $A - B, A \cap B$ اور $B - A$ باہمی مستثنیٰ ہیں ...(1)

مزید یہ کہ $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in B\right]$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B - A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i \in (A\cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i \in (B-A)\right] +$$

$$\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i \in (A\cap B)\right]$$

$$= P(A\cup B) + \left[\sum P(\omega_i)\forall\,\omega_i \in A\cap B\right]$$

$$= P(A\cup B) + P(A\cap B)$$

اس لیے $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

متبادل طور پر اسے مندرجہ ذیل طریقے سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:

$A\cup B = A\cup(B-A)$ جہاں $A\cap B$ اور $A\cap B$ باہمی مستثنیٰ ہیں

احتمال کے بدیہہ (iii) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B-A) \quad \text{...(2)}$$

$$P(B) = P(A\cap B) + P(B-A) \quad \text{...(3)}$$

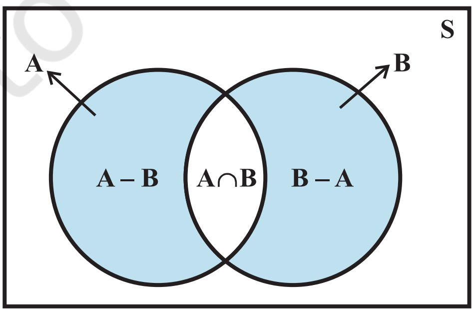
(2) میں سے (3) گھٹانے پر

$$P(A\cup B) - P(B) = P(A) - P(A\cap B)$$

یا

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

مذکورہ بالا نتیجہ کے وین ڈائیگرام (شکل 16.1) کا مشاہدہ کر کے بھی دوبارہ تصدیق کی جا سکتی ہے۔



شکل 16.1

اگر A اور B غیر اتحادی سیٹ ہوں یعنی یہ دونوں باہمی مستثنٰی واقعات ہوں تو $A \cap B = \phi$

اس لیے $P(A \cap B) = (\phi) = 0$

لہٰذا باہمی مستثنٰی واقعات A اور B کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

جو کہ احتمال کا بدیہہ (iii) ہی ہے۔

16.4.4 واقعہ 'A-نہیں' کا احتمال *(Probability of event 'not A')* ایسے 10 پتوں، جن پر 1 سے 10 تک کے اعداد درج ہیں، کی گڈی میں سے ایک پتہ نکالنے کے تجربے سے وابستہ واقعہ $A=\{2,4,6,8\}$ پر غور کیجیے۔ واضح ہے کہ سیمپل اسپیس $S=\{1,2,3,...,10\}$ ہے۔

اگر سبھی نتائج $1, 2, ..., 10$ کو مساوی ممکنہ تصور کرلیں تو ہر ایک نتیجے کا احتمال $\frac{1}{10}$ ہوگا۔

اب $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

مزید یہ کہ واقع 'A-نہیں' $= A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

اب $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اس طرح $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ A' اور A باہمی مستثنٰی اور exhaustive واقعات

لہٰذا $A \cup A' = S$ اور $A \cap A' = \phi$

یا $P(A \cup A') = P(S)$

اب $P(A) + P(A') = 1$ بدیہات (ii) اور (iii) کے استعمال سے

یا $P(A') = P(\text{نہیں } A) = 1 - P(A)$

آیئے ہم مساوی ممکنہ نتائج والے تجربات کے لیے کچھ سوالات اور مثالوں پر غور کرتے ہیں جب تک کہ کچھ اور کہا نہ جائے۔

مثال 10 تاش کے 52 پتوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی ہوئی گڈی میں سے ایک پتہ نکالا گیا ہے۔ نکالے گئے پتے کا احتمال معلوم کیجیے۔ اگر

(i) پتہ اینٹ کا ہے (ii) پتہ اکا نہیں ہے

(iii) پتہ کالے رنگ کا ہے (یعنی چڑی یا حکم کا)

(iv) پتہ اینٹ کا نہیں ہے (v) پتہ کالے رنگ کا نہیں ہے

حل جب 52 پتوں کی اچھی طرح پھینٹی ہوئی گڈی میں سے اے پتہ نکالا جاتا ہے تو ممکنہ نتائج کی تعداد 52 ہے۔

(i) مان لیجیے واقعہ 'نکالا گیا پتہ اینٹ کا ہے' کو A سے ظاہر کیا گیا ہے۔

واضح ہے کہ A میں عناصر کی تعداد 13 ہے

اس لیے $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

یعنی ایک اینٹ کا پتہ نکالنے کا احتمال $= \frac{1}{4}$

(ii) مان لیجیے کہ واقعہ 'نکالا گیا پتہ اکا ہے' کو B سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس لیے 'نکالا گیا پتہ اکا نہیں ہے' کو B' سے ظاہر کیا جائے گا۔

اب $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) مان لیجیے واقعہ 'نکالا گیا پتہ کالے رنگ کا ہے' کو C سے ظاہر کرتے ہیں

اس لیے سیٹ C میں عناصر کی تعداد =26

یعنی $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

اس طرح کالے رنگ کا پتہ نکالنے کا احتمال $= \frac{1}{2}$

(iv) ہم نے مذکورہ بالا (i) میں یہ مانا ہے کہ واقعہ 'نکالا گیا پتہ اینٹ کا ہے' کو A سے ظاہر کرتے ہیں اس لیے واقعہ 'نکالا گیا

پتہ اینٹ کا نہیں ہے' کو 'A یا 'A-نہیں' سے ظاہر کیا جائے گا۔

اب $\quad P(\text{A-نہیں}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(v) واقعہ 'نکالا گیا پتہ کالے رنگ کا نہیں ہے' کو 'C یا 'C-نہیں' سے دکھایا جا سکتا ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ

$$P(\text{C-نہیں}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اس لئے پتہ کالے رنگ کا نہ ہونے کا احتمال $= \frac{1}{2}$

مثال 11 ایک تھیلے میں 9 ڈسک ہیں جن میں سے 4 سرخ رنگ کی، 3 نیلے رنگ کی اور 2 پیلے رنگ کی ہیں۔ ڈسک سائز اور شکل کے اعتبار سے یکساں ہیں۔ تھیلے میں سے ایک ڈسک بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالی گئی ڈسک (i) سرخ رنگ کی ہے، (ii) پیلے رنگ کی ہے، (iii) نیلے رنگ کی ہے، (iv) نیلے رنگ کی نہیں ہے، (v) سرخ رنگ کی ہے یا پیلے رنگ کی ہے۔

حل ڈسک کی کل تعداد 9 ہے اس لیے ممکنہ نتائج کی کل تعداد 9 ہوئی

مان لیجیے واقعات A، B اور C کی اس طرح تعریف کی جاتی ہے کہ

A: نکالی گئی ڈسک سرخ رنگ کی ہے

B: نکالی گئی ڈسک پیلے رنگ کی ہے

C: نکالی گئی ڈسک نیلے رنگ کی ہے

(i) سرخ رنگ کی ڈسک کی تعداد = 4 یعنی $n(A) = 4$

لہٰذا $\quad P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) پیلے رنگ کی ڈسک کی تعداد = 2 یعنی $n(B) = 2$

اس لیے $\quad P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) نیلے رنگ کی ڈسک کی تعداد = 3 یعنی $n(C) = 3$

اس لیے $P(C) = \frac{3}{9}$

(iv) ظاہر ہے واقعہ 'ڈسک نیلے رنگ کی نہیں ہے' 'C-نہیں' ہی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $= 1 - P(C)$
P(نہیں-C)

اس لیے $P(\text{نہیں-}C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) واقعہ سرخ رنگ کی ڈسک یا نیلے رنگ کی ڈسک، کا سیٹ A یا C سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ A اور C باہمی مستثنیٰ واقعات ہیں اس لیے

$$P(A\text{ یا }C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

مثال 12 دو طالب علم انل اور آ شیما نے ایک امتحان میں شرکت کی۔ انل کے امتحان میں پاس ہونے کے احتمال 0.05 ہے اور آ شیما کے امتحان میں پاس ہونے کا احتمال 0.10 ہے۔ دونوں کے امتحان میں پاس ہونے کا احتمال 0.02 ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ

(a) انل اور آ شیما دونوں ہی امتحان میں پاس نہیں ہو پائیں گے

(b) دونوں میں سے کم سے کم ایک امتحان میں پاس نہیں ہوگا

(c) دونوں میں سے صرف ایک امتحان میں پاس ہوگا

حل مان لیجیے E اور F واقعات 'انل امتحان میں پاس ہوجائے گا' اور 'آ شیما امتحان میں پاس ہوجائے گی' کو بالترتیب ظاہر کرتے ہیں۔

اس لیے $P(E) = 0.05$ ، $P(F) = 0.10$ اور $P(E \cap F) = 0.02$

تب

(a) واقعہ 'دونوں امتحان میں پاس نہیں ہوں گے' کو $E' \cap F'$ سے دکھایا جاسکتا ہے کیونکہ E' واقعہ E-نہیں' یعنی 'انل امتحان میں پاس نہیں ہوگا' اور F' واقعہ F-نہیں' یعنی 'آ شیما امتحان میں پاس نہیں ہوگی' کو ظاہر کرتا ہے۔

مزید یہ کہ $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ڈی مارگن کے کلیے کے مطابق)

اب $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$

یا $P(E\cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

اس لیے $P(E'\cap F') = P(E\cup F)' = 1 - P(E\cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P(دونوں میں سے کم ازکم 1 پاس نہیں ہوگا)

$=1-P$ (دونوں پاس ہونگے)

$=1-0.02=0.98$

(c) واقعہ 'دونوں میں سے صرف ایک پاس ہوگا' مندرجہ ذیل واقعہ کے مشابہ ہے(انل پاس ہوگا اور آشیما پاس نہیں ہوگی) یا(انل پاس نہیں ہوگا اور آشیما پاس ہوگی)یعنی $E\cap F'$ یا $E'\cap F$، جہاں $E\cap F'$ اور $E'\cap F$ باہمی مستثنیٰ ہیں

اس لیے P(دونوں میں سے صرف ایک کے پاس ہوگا)

$P = (E\cap F'$ یا $E'\cap F)$

$$P = (E\cap F') + P(E'\cap F) = P(E) - P(E\cap F) + P(F) - P(E\cap F)$$

$$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$$

مثال 13 دو مرد اور دو عورتوں کے گروپ میں سے دو افراد کی ایک کمیٹی تشکیل دی گئی ہے۔احتمال معلوم کیجیے کہ کمیٹی (a) میں کوئی مرد نہ ہو(b) ایک مرد ہو(c) دونوں ہی مرد ہوں۔

حل گروپ میں افراد کی کل تعداد $4 = 2+2$ ، ان چاروں افراد میں سے دو کو $^4C_2$ طریقے سے منتخب کیا جاسکتا ہے۔

(a) کمیٹی میں کوئی مرد نہ ہونے کا مطلب ہے کہ کمیٹی میں دو عورتیں ہیں۔دو عورتوں میں سے دونوں کے منتخب ہونے کا طریقہ $^2C_2=1$ ہے۔

اس طرح P(کوئی مرد نہیں) $= \dfrac{^2C_2}{^4C_2} = \dfrac{1\times2\times1}{4\times3} = \dfrac{1}{6}$

(b) کمیٹی میں ایک مرد ہونے کا مطلب ہے کہ اس میں ایک عورت ہے۔2 مردوں میں سے ایک مرد منتخب ہونے کا طریقہ $^2C_1$ ہے اور دو عورتوں میں سے ایک کو منتخب کرنے کا طریقہ بھی $^2C_1$ ہے۔دونوں انتخابات کو ایک ساتھ کرنے کے

${}^2C_1 \times {}^2C_1$ طریقے ہیں۔

اس لیے $P(\text{ایک مرد}) = \dfrac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \dfrac{2\times 2}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$

(c) دو مردوں کو ${}^2C_2$ طریقے سے منتخب کیا جاسکتا ہے۔

لہٰذا $P(\text{دو مرد}) = \dfrac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \dfrac{1}{{}^4C_2} = \dfrac{1}{6}$

مشق 16.3

.1 سیمپل اسپیس $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ کے نتائج کے لیے مندرجہ ذیل میں سے کون سے احتمالی تعین درست نہیں ہیں:

نتائج	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	–0.1	0.2	0.3	0.4	–0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

.2 ایک سکہ دو مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ کم سے کم 1 ٹیل ظاہر ہونے کا احتمال کیا ہے؟

.3 ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل واقعات کا احتمال معلوم کیجیے:

(i) ایک مفرد عدد ظاہر ہونا

(ii) 3 یا 3 سے بڑا عدد ظاہر ہونا

(iii) 1 یا 1 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا

(iv) 6 سے بڑا عدد ظاہر ہونا

(v) 6 سے چھوٹا عدد ظاہر ہونا

4. تاش کی ایک گڈی کے 52 پتوں میں سے ایک پتہ بلا منصوبہ نکالا گیا ہے۔

(a) سیمپل اسپیس میں کتنے نقطے ہیں؟

(b) پتے کا حکم کا اکا ہونے کا احتمال کیا ہے؟

(c) احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ (i) اکا ہے (ii) کالے رنگ کا ہے۔

5. ایک فیئر (fairs) سکہ جس کے ایک رخ پر 1 اور دوسرے رخ پر 6 درج ہے، اور ایک فیئر (fairs) پانسہ دونوں کو اچھالا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع (i) 3 ہے (ii) 12 ہے۔

6. شہری کونسل میں 4 مرد اور 6 عورتیں ہیں۔ اگر ایک کمیٹی کے لیے بلا منصوبہ ایک کونسل ممبر کو منتخب کیا گیا ہے تو عورت کے منتخب ہونے کا احتمال کیا ہے؟

7. ایک فیئر (fairs) سکے کو چار مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور ایک شخص ہر ایک ہیڈ پر 1 روپیہ جیت لیتا ہے جب کہ ہر ایک ٹیل پر 1.50 روپیہ ہار جاتا ہے۔ اس تجربے کے سیمپل اسپیس سے معلوم کیجیے کہ آپ چار اچھالوں میں کتنی مختلف رقومات حاصل کر سکتے ہیں ساتھ ہی ان رقومات میں سے ہر ایک کا احتمال بھی معلوم کیجیے؟

8. تین سکے ایک مرتبہ اچھالے جاتے ہیں۔ مندرجہ ذیل کا احتمال معلوم کیجیے:

(i) 3 ہیڈ ظاہر ہونا

(ii) 2 ہیڈ ظاہر ہونا

(iii) کم از کم 2 ہیڈ ظاہر ہونا

(iv) زیادہ سے زیادہ 2 ہیڈ ظاہر ہونا

(v) ایک بھی ہیڈ نہ ہو

(vi) 3 ٹیل ہوں

(vii) صرف اور صرف 2 ٹیل ظاہر ہونا

(viii) کوئی بھی ٹیل نہ ہو

(ix) زیادہ سے زیادہ 2 ٹیل ظاہر ہونا

9. اگر کسی واقعہ A کا احتمال $\frac{2}{11}$ ہے تو واقعہ 'A-نہیں' کا احتمال معلوم کیجیے۔

10. لفظ ASSASSINATION میں سے ایک حرف بلا منصوبہ منتخب کیا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ منتخب کیا گیا حرف (i) vowel ہے (ii) consonant ہے۔

11. کسی لاٹری میں ایک شخص 1 سے 20 تک کے اعداد میں سے 6 مختلف اعداد بلامنصوبہ منتخب کرتا ہے اور اگر منتخب کیے گئے یہ 6 اعداد ان 6 اعداد سے میل کھاتے ہیں، جنہیں لاٹری کمیٹی نے پہلے سے متعین کر رکھا ہے، تو وہ شخص انعام جیت لیتا یہ۔لاٹری کے کھیل میں انعام جیتنے کا احتمال کیا ہے؟ (**اشارہ**:اعداد کے حاصل ہونے کی ترتیب کی اہمیت نہیں ہے)

12. جانچ کیجیے کہ مندرجہ ذیل احتمال P(A) اور P(B) واضح طور پر معروف ہیں

(i) $P(A) = 0.5$، $P(B) = 0.7$، $P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5$، $P(B) = 0.4$، $P(A \cup B) = 0.8$

13. مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہوں کو پر کیجیے:

	P(A)	P(B)	$P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	...
(ii)	0.35	...	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	...	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ اور $P(B) = \frac{1}{5}$ دیا گیا ہے۔اگر A اور B باہمی مستثنیٰ واقعات ہیں تو P(A یا B) معلوم کیجیے۔

15. اگر E اور F واقعات اس طرح ہیں کہ $P(E) = \frac{1}{4}$ ، $P(F) = \frac{1}{2}$ اور P(E اور F) $= \frac{1}{8}$ تو معلوم کیجیے

(i) P(E یا F) (ii) P(نہیں E اور نہیں F)

16. واقعات E اور F اس طرح ہیں کہ P(نہیں-E اور نہیں-F)=0.25، بتائیے کہ E اور F باہمی مستثنیٰ ہیں یا نہیں؟

17. واقعات A اور B اس طرح ہیں کہ P(A)=0.42، P(B)=0.48 اور P(A اور B)=0.16 معلوم کیجیے

(i) P(نہیں-A) (ii) P(نہیں-B) (iii) P(A یا B)

18. ایک اسکول کی گیارہویں جماعت کے 40% طلبا ریاضی پڑھتے ہیں اور 30% حیاتیات پڑھتے ہیں۔ 10% طلبا ریاضی اور حیاتیات دونوں پڑھتے ہیں۔اگر کلاس کے ایک طالب علم کو بلامنصوبہ منتخب کیا جاتا ہے تو احتمال معلوم کیجیے کہ وہ ریاضی یا حیاتیات پڑھتا ہوگا۔

.19 ایک داخلہ جاتی امتحان کو دو ٹیسٹ کی بنیاد پر گریڈ کیا جاتا ہے۔ کسی بلا منصوبہ منتخب کیے گئے طالب علم کے پہلے ٹیسٹ میں پاس ہونے کا احتمال 0.8 ہے اور دوسرے ٹیسٹ میں پاس ہونے کا احتمال 0.7 ہے۔ دونوں میں سے کم سے کم ایک ٹیسٹ پاس کرنے کا احتمال 0.95 ہے۔ دونوں ٹیسٹ پاس کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.20 ایک طالب علم کے آخری امتحان میں انگریزی اور ہندی دونوں مضامین کو پاس کرنے کا احتمال 0.5 ہے، اور دونوں میں سے کسی بھی مضمون میں پاس نہ ہونے کا احتمال 0.1 ہے۔ اگر انگریزی کا امتحان پاس کرنے کا احتمال 0.75 ہو تو ہندی کا امتحان پاس کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.21 کسی کلاس کے 60 طلبا میں سے 30 نے این سی سی (NCC)، 32 نے این ایس ایس (NSS) اور 24 نے دونوں کو منتخب کیا ہے۔ اگر ان میں سے ایک طالب علم کو بلا منصوبہ منتخب کیا جائے تو احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) طالب علم نے این سی سی یا این ایس ایس کو چنا ہے

(ii) طالب علم نے نہ تو این سی سی اور نہ ہی این ایس ایس کو چنا ہے۔

(iii) طالب علم نے این ایس ایس کو چنا ہے لیکن این سی سی کو نہیں۔

متفرق مثالیں

مثال 14 چھوٹیوں میں وینا نے چار شہروں A، B، C اور D کا بلا منصوبہ ترتیب میں سفر کیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ اس نے

(i) A کا سفر B سے پہلے کیا ہو

(ii) A کا سفر B سے پہلے اور B کا C سے پہلے کیا ہو

(iii) A کا سفر سب سے پہلے اور B کا سفر سب سے آخیر میں کیا ہو

(iv) A کا سفر یا تب سب سے پہلے یا پھر دوسرے نمبر پر کیا ہو

(v) A کا سفر B سے ٹھیک پہلے کیا ہو۔

حل وینا کے ذریعے چار شہروں A، B، C اور D کے سفر کی ترتیب کی تعداد 4 یعنی 24 ہے۔ اس لیے $n(S) = 24$، کیونکہ تجربے کے سیمپل اسپیس کے عناصر کی تعداد 24 ہے۔ یہ سبھی نتائج مساوی ممکنہ تصور کیے گئے ہیں۔ اس تجربے کا سیمپل اسپیس

$$S = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB$$
$$BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA$$
$$CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA$$
$$DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA\}$$

(i) مان لیجیے واقعہ 'وینا نے A کا سفر B سے پہلے کیا ہے' کو E سے ظاہر کرتے ہیں

اس لیے

$$E = \{ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB$$
$$ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB\}$$

اس طرح $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

(ii) مان لیجیے واقعہ 'وینا نے A کا سفر B سے پہلے اور B کا سفر C سے پہلے کیا' کو F سے ظاہر کرتے ہیں

یہاں $F = \{ABCD, DABC, ABDC, ADBC\}$

اس لیے $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

طلبا کو یہ مشورہ دیا جاتا ہے کہ (iii)، (iv) اور (v) کا احتمال خود معلوم کریں۔

مثال 15 جب تاش کے 52 پتوں کی اچھی طرح پھینٹی ہوئی گڈی میں سے 7 پتے ایک ساتھ نکالے جاتے ہیں تو اس بات کا احتمال معلوم کیجیے کہ اس میں (i) سبھی بادشاہ ہوں (ii) 3 بادشاہ ہوں (iii) کم از کم 3 بادشاہ ہوں۔

حل ممکنہ ہاتھوں کی کل تعداد $= {}^{52}C_7$

(i) 4 بادشاہ والے ہاتھوں کی تعداد $= {}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (دیگر 3 پتے باقی 48 پتوں میں سے منتخب کیے جاتے ہیں)

لہٰذا $P(\text{4 بادشاہ}) = \frac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{1}{7735}$

(ii) 3 بادشاہ اور 4 غیر بادشاہ والے پتوں کے ہاتھوں کی تعداد $= C_3 \times {}^{48}C_4$

اس طرح $P(3\text{بادشاہ}) = \dfrac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(ii) $P(\text{کم از کم 3 بادشاہ}) = P(\text{3 بادشاہ یا 4 بادشاہ})$

$$= P(3\text{بادشاہ}) + P(4\text{بادشاہ})$$

$$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$$

مثال 16 اگر A، B، C کسی بلا منصوبہ تجربے سے وابستہ تین واقعات ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

حل غور کیجیے $E = B \cup C$

تب $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$

$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \text{(1)...}$$

اب $P(E) = P(B \cup C)$

$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \quad \text{(2)...}$$

مزید $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(سیٹ کی یونین پر سیٹ کے تقاطع کے تقسیمی صفت کا استعمال کرنے پر)

لہٰذا $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \quad \text{(3)...}$$

(2) اور (3) کو استعمال (1) میں کرنے پر

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال 17 ایک رِلے دوڑ میں A، B، C، D اور E یعنی 5 ٹیموں نے شرکت کی۔

(a) A، B اور C کو بالترتیب پہلا، دوسرا اور تیسرا مقام حاصل ہونے کا احتمال کیا ہے؟

(b) A، B اور C کے پہلے تین مقامات (کسی بھی ترتیب میں) پر پہونچنے کا احتمال کیا ہے؟

(مان لیجیے کہ سبھی اختتامی ترتیب مساوی ممکنہ ہیں)

حل اگر ہم پہلے تین مقامات کے لیے اختتامی ترتیب کے سیمپل اسپیس پر غور کریں تو ہم دیکھیں گے کہ اس میں $^5P_3$ یعنی $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ سیمپل نقطے ہیں اور ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{60}$ ہے۔

(a) A، B اور C بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے مقام پر رہتے ہیں۔ اس کے لیے صرف ایک ہی اختتامی ترتیب ہے یعنی ABC

لہٰذا P(A، B اور C بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے مقام پر رہتے ہیں) $= \frac{1}{60}$

(b) A، B اور C پہلے تین مقامات پر ہیں۔ A، B اور C کے لیے 3! طریقے ہیں۔ اس لیے اس واقعہ کے نظیری 3! سیمپل نقطے ہوں گے۔

لہٰذا P(A، B اور C پہلے تین مقامات پر رہتے ہیں) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

باب 16 پر متفرق مشق

.1 ایک ڈبے میں 10 سرخ، 20 نیلے اور 30 ہرے کنچے رکھے ہوئے ہیں۔ ڈبے سے 5 کنچے بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) سبھی کنچے نیلے ہیں (ii) کم از کم 1 کنچہ ہرا ہے

.2 تاش کے 52 پتوں کی ایک اچھی طرح ملائی ہوئی گڈی میں سے 4 پتے نکالے جاتے ہیں۔ اس بات کا احتمال معلوم کیجیے کہ نکالے گئے پتوں میں سے 3 پتے اینٹ کے اور ایک حکم کا ہے؟

.3 ایک پانسے کے دو رخوں میں سے ہر ایک پر 1 درج ہے۔ تین رخوں میں سے ہر ایک پر عدد 2 درج ہے اور ایک رخ پر عدد 3 درج ہے۔ اگر پانسہ ایک مرتبہ پھینکا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل معلوم کیجیے۔

(i) P(2)　　(ii) P(1یا3)　　(iii) P(نہیں 3)

4. ایک لاٹری میں 10,000 ٹکٹ فروخت کیے گئے جن میں 10 انعامات مساوی ہیں۔کوئی بھی انعام حاصل ہونے کا احتمال کیا ہے اگر آپ (a) ایک ٹکٹ خریدتے ہیں (b) دو ٹکٹ خریدتے ہیں (c) 10 ٹکٹ خریدتے ہیں؟

5. 100 طلبا میں سے 40 اور 60 طلبا کے دو گروپ بنائے گئے ہیں۔ اگر آپ اور آپ کا دوست 100 طلبا میں ہے تو احتمال معلوم کیجیے کہ

(a) آپ دونوں ایک ہی گروپ میں ہوں

(b) آپ دونوں علیحدہ علیحدہ گروپوں میں ہوں

6. تین افراد کے لیے تین خط لکھوائے گئے ہیں اور ہر ایک کے لیے پتہ لکھا ہوا ایک لفافہ ہے۔ خطوط کو لفافوں میں بلا منصوبہ اس طرح ڈالا گیا کہ ہر ایک لفافے میں ایک ہی خط ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ کم از کم ایک خط اپنے صحیح لفافے میں ڈالا گیا ہے۔

7. A اور B دو واقعات اس طرح ہیں کہ $P(A) = 0.54$، $P(B) = 0.69$ اور $P(A \cap B) = 0.35$۔ معلوم کیجیے:

(i) $P(A \cup B)$　　(ii) $P(A' \cap B')$　　(iii) $P(A \cap B')$　　(iv) $P(B \cap A')$

8. کسی کمپنی کے ملازمین میں سے 5 ملازمین کا انتخاب کمپنی کی انتظامیہ کمیٹی کے نمائندے کے طور پر کیا گیا ہے۔ پانچ ملازمین کی تفصیلات مندرجہ ذیل ہیں:

نمبر شمار	نام	جنس	عمر برسوں میں
1.	ہرش	M	30
2.	وحید	M	33
3.	شیتل	F	46
4.	ایلس	F	28
5.	سلیم	M	41

اس گروپ میں سے اسپوکس پرسن (spokesperson) کے عہدے کے لیے بلا منصوبہ ایک شخص کا انتخاب کیا گیا ہے۔

اسپوکس پرسن کے مرد یا 35 سال سے زیادہ عمر کا ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.9 اگر 0، 1، 3، 5 اور 7 ہندسوں کے ذریعے 5000 سے بڑے چار ہندسی عدد بلا منصوبہ تشکیل دیا گیا ہو تو پانچ سے تقسیم ہونے والے عدد کی تشکیل کا احتمال کیا ہے جب (i) ہندسوں کو دوہرایا نہ جائے؟ (ii) ہندسوں کو دوہرایا جائے؟

.10 کسی سوٹ کیس کے تالے میں چار ہندسوں کے تسلسل (ہندسوں کو دوہرایا نہیں جاتا) سے ہی کھلتا ہے۔ اس بات کا احتمال کیا ہے کہ کوئی شخص سوٹ کیس کھولنے کے لیے صحیح تسلسل کا پتہ لگائے؟

خلاصہ (Summary)

اس باب میں ہم نے احتمال کے بدیہی نظریے کا مطالبہ کیا ہے۔ اس باب کی اہم سرخیاں مندرجہ ذیل ہیں:

- سیمپل اسپیس : سبھی ممکنہ نتائج کا سیٹ
- سیمپل نقطے : سیمپل اسپیس کے عناصر
- واقعہ : سیمپل اسپیس کا ایک ذیلی سیٹ
- ناممکن واقعہ : خالی سیٹ
- یقینی واقعہ : مکمل سیمپل اسپیس
- تکمیلی واقعہ یا 'نہیں-واقعہ': سیٹ A' یا $S-A$
- واقعہ **A** یا **B** : سیٹ $A \cup B$
- واقعہ **A** اور **B** : سیٹ $A \cap B$
- واقعہ **A** لیکن **B** نہیں : سیٹ $A-B$
- باہمی مستثنیٰ واقعات : A اور B باہمی مستثنیٰ ہوتے ہیں اگر $A \cap B = \phi$
- Exhaustive اور باہمی مستثنیٰ: واقعات $E_1, E_2, ..., E_n$ باہمی مستثنیٰ اور exhaustive ہوتے ہیں،

  اگر $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ اور $E_i \cap E_j = \phi \ \forall i \neq j$
- احتمال: سیمپل نقطہ ω_i سے وابستہ ایک عدد $P(\omega_i)$ ایسا ہے کہ

  (i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ (ii) $\sum P(\omega_i)$ for all $\omega_i \in S = 1$

(iii) $P(A) = \sum P(\omega_i)$ for all $\omega_i \in A$ عدد $P(\omega_i)$ کو نتیجہ ω_i کا احتمال کہا جاتا ہے۔

- مساوی ممکنہ نتائج: مساوی احتمال والے سبھی نتائج
- واقعہ کا احتمال: مساوی ممکنہ احتمال والے متناہی سیمپل اسپیس کے لیے

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ واقعہ A کا احتمال ہے

جہاں $n(A)$ = سیٹ A میں عناصر کی تعداد اور $n(S)$ = سیٹ S میں عناصر کی تعداد

- اگر A اور B کوئی دو واقعات ہوں، تو P(A یا B)=P(A)+P(B)–P(A اور B)

مساوی طور پر $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- اگر A اور B باہمی مستثنیٰ ہیں تو P(A یا B)= P(A) + P(B)
- کسی واقعہ A کے لیے

P(نہیں-A)= 1 – P(A)

تاریخی نوٹ (Historical Note)

احتمال کے نظریے کا فروغ، ریاضی کی دیگر شاخوں کی طرح عملی وجوہات کی بنا پر ہوا ہے۔ اس کا ارتقا 16ویں صدی میں ہوا تھا جب اٹلی کے ایک طبیب اور ریاضی داں Jerome Cardan (1501–1576) نے ''اتفاق کے کھیل (Book on Games of Chance)'' موضوع پر پہلی کتاب (Biber de Ludo Aleae) لکھی۔ یہ کتاب ان کی وفات کے بعد 1633 میں شائع ہوئی۔

1654 میں Chevalier de Metre نام کے جواری نے پانسے سے متعلق کچھ مسئلوں کو لے کر مشہور فرانسیسی فلسفی اور ریاضی داں Blaise Pascal (1623–1662) سے رابطہ قائم کیا۔ پاسکل اس قسم کے مسئلوں میں دلچسپی لینے لگے اور انہوں نے اس کا ذکر مشہور فرانسیسی ریاضی داں Pierre de Fermat (1601–1665) سے کیا۔ پاسکل اور فرمیٹ دونوں نے آزادنہ طور پر مسئلوں کو حل کیا۔ پاسکل اور فرمیٹ کے علاوہ ایک ڈچ باشندے Christian Huygenes (1629–1665)، ایک سیوئز باشندے J.Bernoulli

(1651–1705)، ایک فرانسیسی De Moivre (1667–1754) ایک اور فرانسیسی باشندے Pierre Laplace(1749–1827) اور روسی باشندے P.L Chebyshev(1821–1897)، A. A Markov(1856–1922) اور A. N Kolmogorove(1903–1987) نے بھی احتمال کے نظریے میں بیش بہا تعاون عطا کیا ہے۔ احتمال کے بدیہی نظریے کا سہرا Kolmogorov کے سر ہے۔ 1933 میں شائع ہونے والی ان کی کتاب 'احتمال کی بیاد' (Foundations of Probability) میں احتمال کو سیٹ تفاعل (Set function) کے طور پر پیش کیا گیا ہے اور یہ کتاب کلاسک تصور کی جاتی ہے۔