Chapter 11
நிகழ்தகவு பரவல்கள்

Ex 11.1

கேள்வி 1.
X என்பது மூன்று சீரான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு முறைச் சுண்டும் போது விழும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க
தீர்வு:
மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டும்
போது கூறுவெளி S = {HHH, HHT, THH, HTH, HTT, THT, TTH, TTT}
இங்கு X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.
X (0 பூ) = {HHH} = 1
X (1 பூ) = {HHT, THT, HTH} = 3
X (2 பூக்கள்) = {HTT, THT, TTH} = 3
X (3 பூக்கள்) = {TTT} = 1
∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3.

சமவாய்ப்பு மாறி X இன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

கேள்வி 2.
52 சீட்டுகட்டுகளை உடைய ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் கருப்பாக இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு:
கூறுவெளி s == {26 கருப்பு சீட்டுகள், 26 சிவப்பு சீட்டுகள்}
X எடுக்கப்பட்ட கருப்பு சீட்டுகள் என்க.
X (கருப்பு சீட்டு இல்லை) = $26 \times 25 = 650$
இரண்டு சிவப்பு சீட்டுகள் எடுத்தல்)
X (1 கருப்பு சீட்டு) = $26 \times 26 = 676$ [1 கருப்பு சீட்டு மற்றும் சிவப்பு சீட்டு]
X (2 கருப்பு சீட்டுகள்) = $26 \times 25 = 650$ (இரண்டு கருப்பு சீட்டுகள் எடுத்தல்]
∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2.

சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	650	676	650	1976

கேள்வி 3.
ஒரு கூடையில் 5 மாங்கனிகள் மற்றும் 4 ஆப்பிள்கள் உள்ளன. அதிலிருந்து மூன்று பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் பழங்கள் ஆப்பிள்கள் எனில், சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு. பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
தீர்வு:
கூறுவெளி S = {5 மாங்கனிகள், 4 ஆப்பிள்கள்}
X எடுக்கப்பட்ட ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை

$$X\ (\text{ஆப்பிள் இல்லை}) = 5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$X\ (1\text{ஆப்பிள்}) = 4C_1 \times 5C_2 = 4 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 40$$

$$X\ (2\ \text{ஆப்பிள்கள்}) = 4C_2 \times 5C_1 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 5 = 30$$

$$X\ (3\ \text{ஆப்பிள்கள்}) = 4C_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$\therefore$ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	10	40	30	24	104

கேள்வி 4.
6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு பந்துகள் உள்ள ஒரு கொள்கலனிலிருந்து இரு பந்துகள் ! சீரான முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. ! அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு சிவப்பு பந்திற்கும் ₹ 15 வெல்வதாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்திற்கும் ₹ 10 தோற்பதாகவும் கொள்க. வெல்லும் தொகையை X குறிப்பதாகக் கொண்டால் X – இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி S = {6R, 8B}.

X வெல்லும் தொகையை குறிக்கிறது என்க.

X (சிவப்பு பந்து) = ₹15, X (கருப்பு பந்து) = -₹10

X (இரண்டும் சிவப்பு பந்துகள்) = 2 (15) = ₹ 30

X (1 சிவப்பு மற்றும் | கருப்பு பந்து) = 15 – 10 == ₹5

X (இரண்டும் கருப்பு பந்துகள்) = 2 (-10) =-₹ 20.
∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 30, 5, -20.

X இன் நேர்மாறு பிம்பம் (இரண்டும் சிவப்பு பந்துகள்)

$6C_2 = \frac{\not{6}\times 5}{\not{2}\times 1} = 15$

ஒன்று சிவப்பு மற்றும் ஒன்று கருப்பு பந்தின் நேர்மாறு பிம்பம் = $6C_1 \times 8C_1 = 48$

X இன் நேர்மாறு பிம்பம் (இரண்டும் கருப்பு பந்துகள்) = $8C_2$

$= \frac{\not{8}\times 7}{\not{2}\times 1} = 28.$

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	30	5	–20	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	15	48	28	91

கேள்வி 5.
ஆறு பக்க பகடை ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தில் ‘2’ எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் இரண்டு பக்கங்களில் ‘3’ எனவும், மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் ‘4’ எனவும் உள்ளது. இருமுறை பகடை உருட்டப்படுகிறது. X என்பது இரு உருட்டல்களில் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையை குறிக்கிறது எனில், X-இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
தீர்வு:
கூறுவெளி S= {(2, 2) (2, 3) (2, 3) (2, 4) (2, 4) (2, 4) (3, 2) (3, 3) (3, 3) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (3, 2) (3, 3) (3, 3) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (4, 2) (4, 3) (4, 3) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 2) (4, 3) (4, 3) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 2) (4, 3) (4, 3) (4, 4) (4, 4) (4, 4)}
இரு உருட்டல்களில் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை X என்க.

X (4) = {(2, 2)} = 1
X (5) = {(2, 3) (2, 3) (3, 2) (3, 2)} = 4
X (6) = {(2, 4) (2, 4) (2, 4) (3, 3) (3, 3) (3, 3) (3, 3) (4, 2) (4, 2) (4, 2)}
X (7) = {(3, 4) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (4, 3) (4, 3)(4, 3) (4, 3) (4, 3) (4, 3)}

X (8) = {(4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 4)}

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	4	5	6	7	8	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

Ex 11.2

கேள்வி 1.
மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் காண்க.
தீர்வு:
கூறுவெளி S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}
X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

p(x = 0)
p(தலை இல்லை) = p(TTT)= $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

p(x = 1) = p(1 தலை) = p(THT, HTT, TTH)
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
$\because$ p(H) = $\frac{1}{2}$ p(T) = $\frac{1}{2}$

p(x = 2) = p(2 தலைகள்) = p(HHT, HTH, THH)
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

p(x = 3) = p(3 தலைகள்) = p(HHH) = $\frac{1}{8}$
$\therefore$ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1, 2, 3.
நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \quad x = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & , \quad x = 1, 2 \end{cases}$$

கேள்வி 2.
ஓர் அறுபக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இரு பக்கங்களில் '3' மூன்று எனவும், மற்றும் ஏனைய மூன்று பக்கங்களில் '5' எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு
(ii) குவிவு பரவல் சார்பு
(iii) $P(4 \leq X < 10)$
(iv) $P(X \geq 6)$

தீர்வு:
பகடையின் மீதுள்ள எண்கள் 1, 3, 3, 5, 5, 5 இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறதெனில், அது எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 2, 4, 6, 8, 10.
கூறுவெளி S

I/II	**1**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**
1	2	4	4	6	6	6
3	4	6	6	8	8	8
3	4	6	6	8	8	8
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10

கூறுவெளி S -சிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பது

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	2	4	6	8	10	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

$p(x = 2) = \frac{1}{36}$

$p(x = 4) = \frac{4}{36}$

$p(x = 6) = \frac{10}{36}$

$p(x = 8) = \frac{12}{36}$

$p(x = 10) = \frac{9}{36}$

(i) நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

x	2	4	6	8	10	Total
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

$F(x)x = p(x \leq x)$

$F(2) = \frac{1}{36}$

$F(4) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$

$F(6) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$F(8) = \frac{15}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36} = \frac{9}{12} = \frac{3}{14}$

$F(10) = \frac{27}{36} + \frac{9}{36} = \frac{36}{36} = 1$

∵ குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{5}{36}, & x \leq 2 \\ \frac{5}{12}, & x \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & x \leq 8 \\ 1, & x \leq 10 \end{cases}$$

(iii) $p(4 \leq x < 10) = p(x = 4) + p(x = 6) + p(x = 8)$

$= \frac{1}{9} + \frac{5}{18} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2+5+6}{18} = \frac{13}{18}$

(iv) $p(r \geq 6) = p(x = 6) + p(x = 8) + (p = 10)$

$= \frac{5}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$

கேள்வி 3.
மகன் மற்றும் மகளுக்கு சமவாய்ப்பு நிகழ்தகவுகள் எனக் கருதி 4 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள மகள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பினையும் குவிவு பரவல் சார்பினையும் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி = {4 குழந்தைகள்}

கொடுக்கப்பட்ட $P(G) = P(B) = \frac{1}{2}$

X குடும்பத்தில் உள்ள மகள்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$P(x = 0)$ = P(மகள் இல்லை)

$= P(BBB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{16}$

$P(x = 1)$ = P(1 மகள்)

$= 4C_1 \times P = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(x = 2)$ = P(2 மகள்கள்)

$= 4C_2 \times P(GGBB)$

$= \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

P(x = 3) = P(3 மகள்கள்)

$= 4C_3 \times P(GGGB)$

$= 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

P(x = 4) = P(4 மகள்கள்)

$= P(GGGG) = \frac{1}{16}$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1, 3 \\ \frac{1}{16}, & x = 0, 4 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \end{cases}$$

குவிவு பரவல் சார்பு

$F(0) = \frac{1}{16}$

$F(1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

$F(2) = \frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$

$F(3) = \frac{11}{16} + \frac{1}{4} = \frac{11}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$

$F(4) = \frac{15}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{0}{16}, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & x \le 0 \\ \frac{5}{16}, & x \le 1 \\ \frac{11}{16}, & x \le 2 \\ \frac{15}{16}, & x \le 3 \\ 1, & x \le 4 \end{cases}$$

கேள்வி 4.

ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி 0, 1, மற்றும் 2 மதிப்புகளை மட்டுமே

கொள்ளும் என்க.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{k}, & x=0,1,2\\ 0, & \text{இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$

(i) k – இன் மதிப்பு

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

(iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{k}, & x=0,1,2\\ 0, & \text{இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$

சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1,2.

ஆதலால் f (x) நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு.

(i) $$\sum_{i=0}^{2} f(x_i) = 1 \Rightarrow f(0)+f(1)+f(2)=1$$

$$\Rightarrow \frac{0+1}{k}+\frac{1+1}{k}+\frac{4+1}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{5}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{k} = 1$$

$$\Rightarrow k = 8$$

$$\because f(x) = \frac{x^2+1}{k}$$

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2	மொத்தம்
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

(ii)

F(0) = $\frac{1}{8}$

F(1) = $\frac{1}{8}$ + $\frac{2}{8}$ = $\frac{3}{8}$

F(2) = $\frac{1}{8}$ + $\frac{2}{8}$ + $\frac{5}{8}$ = $\frac{8}{8}$ = 1

குவிவு பரவல் சார்பு

குவிவு பரவல் சார்பு

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{8}, & x \leq 0 \\ \frac{2}{8}+\frac{1}{8}, & \frac{3}{8}, x \leq 1 \\ \frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1, & x \leq 2 \end{cases}$$

(iii) p(x ≥ 1) = p(x = 1) + p(x = 2) = $\frac{2}{8}$ + $\frac{5}{8}$

p(x ≥ 1) = $\frac{7}{8}$

கேள்வி 5.

F(x) = $\begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \leq x < 0 \\ 0.35 & 0 \leq x < 1 \\ 0.60 & 1 \leq x < 2 \\ 0.85 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases}$

எனக்கொடுக்கப்பட்ட ஒருதனிநிலைசமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு சார்பிற்கு

(i) நிகழ்தகவு சார்பு

(ii) P(X ≥ 1) மற்றும்

(iii) P(X ≥ 2).

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \le x < 0 \\ 0.35 & 0 \le x < 1 \\ 0.60 & 1 \le x < 2 \\ 0.85 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$

சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக்கொள்ளும் மதிப்புகள் -1, 0, 1,2,3

X என்ற தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து

$f(x) = p(X = x)$

$\therefore f(-1) = p(X = -1) = F(-1) - F(0)$

$= 0.15 - 0 = 0.15$

$f(0) = p(X = 0) = F(0) - F(-1)$

$0.35 - 0.15 = 0.20$

$f(1) = p(X = 1) = F(1) - F(0)$

$0.60 - 0.35 = 0.25$

$f(2) = p(X = 2) = F(2) - F(1)$

$= 0.85 - 0.60 = 0.25$

$f(3) = p(X = 3) = F(3) - F(2)$

$= 1 - 0.85 = 0.15$

(i) ∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	–1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $p(X < 1)$
$= p(X = -1) + p(X = 0) = 0.15 + 0.20 = 0.35$

(iii) $p(X \ge 2)$
$= p(X = 2) + p(X = 3) = 0.25 + 0.15 = 0.40$

கேள்வி 6.
ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-க்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

எனில்
(i) k மதிப்பு
(ii) $P(2 \leq X < 5)$
(iii) $P(3 < X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:
கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

(i) f(x) நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு ஆதலால்

$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1$

$\Rightarrow k^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1$

$\Rightarrow 6k^2 + 5k = 1$

$\Rightarrow 6k^2 + 5k - 1 = 0$

$\Rightarrow (k+1)(6k-1) = 0$

$\Rightarrow k = -1$ அல்ல து $k = \frac{1}{6}$ [$\because k = -1$ என்பது சாத்தியமில்லை]

$\Rightarrow k = \frac{1}{6}$

(ii) $p(2 \leq x < 5)$

$= p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$

$= 2k^2 + 3k^2 + 2k = 5k^2 + 2k$

$= 5(\frac{1}{36}) + 2(\frac{1}{6}) = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{5+12}{36} = \frac{17}{36}$

(iii) $p(3 < x) = p(x > 3)$

$= p(x = 4) + p(x = 5) = 2k + 3k = 5k$

$= 5(\frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$

கேள்வி 7.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$

என்பது ஒரு தனிநிலை – சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பு எனில்
(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு
(ii) $P(X < 3)$ மற்றும்
(iii) $P(X = 2)$.

தீர்வு:

$$\text{கொடுக்கப்பு } f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$

(i) சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4.

தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிக்கு நம்மிடம்

f(x) = p(X = x)

$\therefore$ f(0) = F(0) = $\frac{1}{2}$

f(1) = F(1) – F(0)

= $\frac{3}{5} - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

f(2) = F(2) – F(1)

= $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

f(3) = F(3) – F(2)

= $\frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{9-8}{10} = \frac{1}{10}$

f(4) = F(4) – F(3)

= 1 – $\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

X	0	1	2	3	4
$p(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(ii) $p(x < 3) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5+1+2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(iii) $p(x \geq 2) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2+1+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Ex 11.3

கேள்வி 1.

சமவாய்ப்பு மாறி X – யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு f (x) = $\begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ எனில் k மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $\begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad k\int_{0}^{\infty} xe^{-2x}dx = 1 \quad \Rightarrow k \cdot \frac{1!}{(2)^2} = 1$$

$$[\int_{0}^{\infty} x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}, \text{இங்கு } a = 2, n = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

கேள்வி 2.

கவு பரவலகள் 2. சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

f (x) = $\begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) P(0.2 ≤ X <0.6)

(ii) P(1.2 ≤ X < 1.8)

(iii) P(0.5 ≤ X < 1.5)

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f (x) = $\begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) $P(0.2 \le X < 0.6)$

$= \int_{0.2}^{0.6} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.6} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.2}^{0.6}$

$= \frac{1}{2}\,[(0.6)^2 - (0.2)^2]$

$= \frac{1}{2}\,[0.36 - 0.04]$

$= \frac{1}{2}\,[0.32] = 0.16$

(ii) $P(1.2 \le X < 1.8)$

(ii) $P(1.2 \le X < 1.8)$

$$= \int_{1.2}^{1.8} f(x)dx = \int_{1.2}^{1.8} (2-x)dx$$

$[\because 2 - x,\ 1 \le x < 2]$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1.2}^{1.8} = \left[2(1.8) - \frac{(1.8)^2}{2}\right] - \left[2(1.2) - \frac{(1.2)^2}{2}\right]$$

$$= 3.6 - \frac{3.24}{2} - 2.4 + \frac{1.44}{2}$$

$$= 3.6 - 1.62 - 2.4 + 0.72 = 0.3$$

(iii) $P(0.5 \le X < 1.5)$

$$= \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx = \int_{0.5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{1.5} f(x)dx$$

$$= \int_{0.5}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1.5} (2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{1.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(0.5)^2}{2} + \left[2(1.5) - \frac{(1.5)^2}{2}\right] - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0.25}{2} + 3 - \frac{2.25}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1 - 0.25 + 6 - 2.25 - 3}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75.$$

கேள்வி 3.
ஒரு பால் விற்பனையகத்தில் வினியோகிக்கப் படும் பாலின் அளவு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. குறைந்தபட்சம் 200 லிட்டர்கள் மற்றும் அதிகபட்சம் 600 லிட்டர்களுடன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு இன் பிற மதிப்புகளுக்கு

$$\begin{cases} k & 200 \le x \le 600 \\ 0 & x \text{ இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) k மதிப்பு காண்க.
(ii) பரவல் சார்பு காண்க.
(iii) 300 லிட்டர்கள் மற்றும் 500 லிட்டர்களுக்கிடையே தினசரி விற்பனை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $\begin{cases} k & 200 \le x \le 600 \\ 0 & x \text{ இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) f(x) ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{200}^{600} k\,dx = 1$

$\Rightarrow k[x]_{200}^{600} = 1 \Rightarrow k(600 - 200) = 1$

$\Rightarrow 400k = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{400}$

(ii) பரவல் சார்பு $F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$x < 200$ எனில், $F(x) = \int_{-\infty}^{200} f(x)dx = \int_{-\infty}^{200} 0\, dx = 0$

$200 \le x \le 600$ எனில்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{200} f(x)dx + \int_{200}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{200} 0\, dx + \int_{200}^{x} k\, dx = 0 + [kx]_{200}^{x}$$

$$= kx - k(200) = \frac{x}{400} - \frac{200}{400} = \frac{x}{400} - \frac{1}{2}$$

$x > 600$ எனில்,$F(x) = \int_{600}^{\infty} f(x)dx = \int_{600}^{\infty} 0\, dx = 0$

∴ பரவல் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 200 \\ \frac{x}{400} - \frac{1}{2}, & 200 \le x \le 600 \\ 0, & x > 600 \end{cases}$$

(iii) $P(300 < X < 500) = \int_{300}^{500} f(x)dx$

$$= \int_{300}^{500} k\, dx = \frac{1}{400}[x]_{300}^{500}$$

$$= \frac{1}{400}[500 - 300] = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

கேள்வி 4.

சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு f (x) = $\begin{cases} ke^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

எனில்

(i) k மதிப்பு காண்க.

(ii) பரவல் சார்பு காண்க.

(iii) P(X < 3) (iv) P(5 ≤ X) (v) P(X ≤ 4) தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட f (x) = $\begin{cases} ke^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ எனில்

(i) f(x) ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} k \cdot e^{\frac{-x}{3}} dx = 1 \Rightarrow k \frac{\left[e^{\frac{-x}{3}}\right]_0^{\infty}}{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow -3k[e^{-\infty} - e^0] = 1$$

$$\Rightarrow -3k[0-1] = 1 \quad [\because e^{-\infty} = 0, e^0 = 1]$$

$$\Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

(ii) பரவல் சார்பு $F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

$x < 0$ **எனில்,,** $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0.$ $x > 0$ **எனில்,**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^x f(x)dx$$

$$= 0 + k\int_0^x e^{\frac{-x}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^{\frac{-x}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_0^x = -[e^{-\frac{x}{3}} - e^0]$$

$$= -[e^{-\frac{x}{3}} - 1]$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{3}}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

(iii) $p(X < 3)$

$$= \int_0^3 k e^{-\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{\frac{-1}{3}}\right]_0^3$$

$$= -[e^{-1} - e^0] = -[e^{-1} - 1]$$

$$= 1 - e^{-1}$$

(iv) $p(5 \le X) = p(X \ge 5) = \int_5^\infty f(x)dx$

$$= \int_5^\infty k e^{-\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{3}\frac{[e^{-\frac{x}{3}}]_5^\infty}{\frac{-1}{3}}$$

$$= -[e^{-\infty} - e^{\frac{-5}{3}}] = -[0 - e^{\frac{-5}{3}}]$$

$$= e^{\frac{-5}{3}}$$

(v) $p(X \le 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{4} ke^{-\frac{x}{3}}dx = k\left[\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\frac{[e^{-\frac{x}{3}}]_0^4}{-\frac{1}{3}} = -[e^{\frac{-4}{3}} - e^0]$$

$$= -[e^{\frac{-4}{3}} - 1] = 1 - e^{\frac{-4}{3}}$$

கேள்வி 5.

சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$\begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) பரவல் சார்பு F(x)

(ii) P(-0.5 ≤ X ≤ 0.5) காண்க .

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $\begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) பரவல் சார்பு

F(x) = p(X ≤ x)

இங்கு -1 ≤ x < 0,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(x)dx = \int_{-1}^{x} (x+1)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{x}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$0 \le x < 1$ எனில், $F(x) = \int_{0}^{x} (-x+1)dx$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{0}^{x}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x\right) - (0) = -\frac{x^2}{2} + x$$

$1 \le x$ எனில், $F(x) = \int_{1}^{x} f(x)dx = \int_{1}^{x} 0\, dx$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & -1 \le x < 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(ii) $p(-0.5 \le X \le 0.5)$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx = \int_{-0.5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{0.5} f(x)dx$$

$$= \int_{-0.5}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{0.5} (-x+1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-0.5}^{0} + \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_{0}^{0.5}$$

$$= 0 - \left(\frac{0.5^2}{2} - 0.5\right) + \left(-\frac{(0.5)^2}{2} + 0.5\right) - 0$$

$$= -\left(\frac{.25}{2} - 0.5\right) + \left(\frac{-0.25}{2} + 0.5\right)$$

$$= -\frac{.25}{2} + 0.5 - \frac{0.25}{2} + 0.5 = -0.25 + 1 = 0.75$$

கேள்வி 6.

சமவாய்ப்பு X -யின் பரவல் சார்ப்பு F(x)

$$F(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & -x < x < \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) & 1 \le x < \infty \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு f(x)

(ii) P(0.3 ≤ X ≤ 0.6) ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $F(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & -x < x < \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) & 1 \le x < \infty \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

F(x)-இன் தொடர்ச்சியுடைய புள்ளிகளில் 'X'ஐ பொறுத்து F(x)ஐ வகையிட கிடைப்பது,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & -x < x < \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) & 1 \le x < \infty \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(ii) $p(0.3 \le X \le 0.6) = \int_{0.3}^{0.6} f(x)dx$

$$= \int_{0.3}^{0.6} \frac{1}{2}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_{0.3}^{0.6}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)_{0.3}^{0.6} = \frac{1}{2}[(0.6^2 + 0.6) - (0.3^2 + 0.3)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [(.36 + .6) - (.09 + 0.3)]$$

$$= \frac{1}{2}[0.96 - 0.39] = \frac{0.57}{2} = 0.285$$

Ex 11.4

கேள்வி 1.

கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்புகளுக்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

(i) f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2, 5 \\ \frac{1}{5} & x = 0, 1, 3, 4 \end{cases}$

(ii) f(x) = $\begin{cases} \frac{4-x}{6} x = 1, 2, 3 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2, 5 \\ \frac{1}{5} & x = 0, 1, 3, 4 \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore \text{சராசரி} = E(x) = \Sigma x f(x) = 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2+2+6+8+5}{10} = \frac{23}{10} = 2.3$$

$f(x^2) = \Sigma x^2 f(x)$

$$= 0^2\left(\frac{1}{5}\right) + 1^2\left(\frac{1}{5}\right) + 2^2\left(\frac{1}{10}\right) + 3^2\left(\frac{1}{5}\right) + 4^2\left(\frac{1}{5}\right) + 5^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{4}{10} + \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + \frac{25}{10}$$

$$= \frac{2+4+18+32+25}{10} = \frac{81}{10} = 8.1$$

பரவற்படி $= E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 8.1 - (2.3)^2 = 8.1 - 5.29 = 2.81$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \frac{4-x}{6},\ x = 1, 2, 3$

$$f(x) = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \frac{4-x}{6}$, $x = 1, 2, 3$

$f(x) = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$f(2) = \frac{4-2}{6}\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(3) = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

சராசரி $= \Sigma(X) = \Sigma x f(x)$

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

சராசரி $= \Sigma(X) = \Sigma xf(x)$

$$= 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6} = \frac{3+4+3}{6}$$

$$= \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$E(x^2) = \Sigma x^2 f(x)$

$$= 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6} = \frac{3+8+9}{6}$$

$$= \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3.33$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9}$$

$$= \frac{30-25}{9} = \frac{5}{9} = 0.56$$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

சராசரி $= E(X) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 2(x-1)dx$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= 2\left[\left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= 2\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$E(x^2) = \int_1^2 x^2 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \cdot 2(x-1)dx$$

$$= 2\int_1^2 (x^3 - x^2)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= 2\left[\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{12}\right] = 2\left[\frac{16+1}{12}\right]$$

$$= \frac{17}{6}$$

$\therefore \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{17}{6} - 1^2 = \frac{17-6}{6} = \frac{11}{6}$$

(iv) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

$$\int_0^\infty x \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x \cdot e^{\frac{-x}{2}} dx$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1!}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2!}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

$$\therefore Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 8 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

கேள்வி 2.

நான்கு சிவப்பு பந்துகள் மற்றும் மூன்று கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து பதிலீடாக இடாது அடுத்தடுத்து இரு பந்துகள் வெளியில் எடுக்கப்படுகின்றன. சிவப்பு பந்து வெளியில் எடுக்கும் சாத்திய கூறுகளை X என்க. X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பையும் சராசரியையும் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி = {4R, 3B}

X எடுக்கப்பட்ட சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2

P(X = 0) = P(சிவப்பு பந்து இல்லை)

$$= \frac{3C_2}{7C_2} = \frac{\frac{3 \times 2}{2 \times 1}}{\frac{7 \times 6}{2 \times 1}} = \frac{1}{7}$$

P(X = 1) = P(1 சிவப்பு பந்து)

$$= \frac{3C_1 \times 4C_1}{7C_2} = \frac{12}{\frac{7 \times 6}{2 \times 1}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(X = 2) = P(2 \text{ சிவப்பு பந்து}) = \frac{4C_2}{7C_2} = \frac{\frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{7 \times 6}{2 \times 1}}$$

$$= \frac{12}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$\Sigma(X) = \Sigma x \,.\, f(x)$

$= 0(\frac{1}{7}) + 1(\frac{4}{7}) + 2(\frac{2}{7})$

$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = 8$

கேள்வி 3.

μ மற்றும் σ^2 ஆகியவை முறையே தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி மற்றும் $E(X + 3) = 10$ மற்றும் $E(X + 3)^2 = 116$,
எனில் 4 மற்றும் 5 காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $E(X + 3) = 10$

$\Rightarrow E(X) + 3 = 10$

$\Rightarrow E(X) = 7$

$\Rightarrow \mu = 7$ ……………….. (1)

$E(X + 3)^2 = 116$

$E(X^2 + 6X + 9) = 116$

$E(X^2) + 6E(X) + 9 = 116$ [$\because E(9) = 9$)

$E(X^2) + 6(7) + 9 = 116$

$E(X^2)\ 116 - 42 - 9 = 116 - 51$

$E(X^2) = 65$ | ………..(2)

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 65 - 7^2 = 65 - 49 = 16$

∴ $u = 7$ மற்றும் $\sigma^2 = 16$.

கேள்வி 4.

நான்கு சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. தலைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்விற்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு, சராசரி , மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு:

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4.

p(X = (0) = p(தலை இல்லை) = p(TTT) = $\frac{1}{16}$ } [∵ p(T) = $\frac{1}{2}$, p(H) = $\frac{1}{2}$]

p(X = 1) = p(1 தலை) = $4C_1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

p(X = 2) = p(2 தலைகள்) = $4C_2 \times \frac{1}{16} = \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{1}{16}$

$= \frac{3}{8}$

p(X = 3) = p(3 தலைகள்) = $4C_3 \times \frac{1}{16} = 4 \times \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{4}$

p(X = 4) = p(4 தலைகள்) = $4C_4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

∴ சராசரி = $E(X) = \Sigma x f(x)$

$$= 0\left(\frac{1}{16}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$E(X^2) = \Sigma x^2 f(x)$

$$= 0^2\left(\frac{1}{16}\right) + 1^2\left(\frac{1}{4}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{4}\right) + 4^2\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{1+6+9+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

∴ $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

கேள்வி 5.
ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு அரை மணி நேரத்திற்கும் ஒரு நிலையத்திற்கு சரியான நேரத்தில் வந்து சேரும். ஒவ்வொரு நாள் காலை யிலும், ஒரு மாணவர் தனது வீட்டிலிருந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். மாணவர் ரயில் நிலையத்தை அடையும் நேரத்திலிருந்து ரயிலுக்காக காத்திருக்கும் நேரத்தை X என நிமிடங்களில் குறிக்கலாம். X – ன் நிகழ்தகவு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு
தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

$$\text{சராசரி} = E(X) = \int_0^{30} x \cdot f(x)dx$$

$$= \int_0^{30} x \cdot \frac{1}{30} dx$$

$$E(X) = \frac{1}{30}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{30} = \frac{1}{60}[302 - 02] = \frac{1}{60}(900)$$

$E(X) = 15$ நிமிடங்கள்

கேள்வி 6.
கணினி தயாரிக்கப்படும் போது ஆயிரக் கணக்கான மணிநேரம் பயன்படுத்தப்படும் ஒருமின்னணு சாதனமொன்றின் பழுதடையும் நேரத்தின் அடர்த்தி சார்பு

$$\begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

இம்மின்னனு சாதனத்தின் எதிர்பார்க்கப்படும் ஆயுட்காலத்தை காண்க.
தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $\begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x)dx = \int_0^\infty x \cdot 3 \cdot e^{-3x} dx$$

$$= 3\int_0^\infty x \cdot e^{-3x} dx \quad \left[\because \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right]$$

$$= 3 \times \frac{1!}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

∴ மின்னனு சாதனத்தின் எதிர் பார்க்கப்படும் ஆயுட் காலம் $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

கேள்வி 7.

சமவாய்ப்பு மாறி X-ன்சராசரி நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு |

f (x) = $\begin{cases} 16xe^{-4x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ ஆகும் சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட f(x) = $\begin{cases} 16xe^{-4x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$

சராசரி $= E(x) = \int_0^\infty x \cdot f(x)dx$

$$= \int_0^\infty x \cdot 16x \cdot e^{-4x} dx$$

$$= 16\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-4x} dx = 16 \times \frac{2!}{4^3}$$

$$\left[\because \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right]$$

$$= 16 \times \frac{2}{64} = \frac{1}{2}$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \cdot 16x\, e^{-4x}\, dx$$

$$= 16\int_0^\infty x^3 e^{-4x} dx = 16 \times \frac{3!}{4^4}$$

$$= \frac{16 \times 3 \times 2}{_8 16 \times 16} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{Var}(X) = \frac{1}{8}$$

கேள்வி 8.

600 டிக்கெட்டுகள் கொண்ட ஒரு லாட்டரியில் ஒரு பரிசு 7.200 – க்கும் நான்கு பரிசுகள் ₹.100 – க்கும், ஆறு பரிசுகள் 1.50 – க்கும் எனக்கொடுக்கிறது. டிக்கெட் செலவு 7.2 என்றால், ஒரு டிக்கெட்டின் எதிர்பார்க்கப்படும் வெற்றி தொகையைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$E(X) = 200 \times \frac{1}{600} + 100 \times \frac{4}{600}$$

$$+ 50 \times \frac{6}{600} - 2 \times \frac{600}{600}$$

$$= \frac{200}{600} + \frac{400}{600} + \frac{300}{600} - 2$$

$$= \frac{900}{600} - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} = ₹ - 0.50$$

Ex 11.5

கேள்வி 1.

கீழ்காணும் ஈருறுப்பு பரவல் B(n, p)-க்காக P(X = k) என்பதைக் கணிக்க.

(i) n = 6, p = $\frac{1}{3}$, k = 3

(ii) n = 10, p = $\frac{1}{5}$, k = 4

(i) n = 9, n = $\frac{1}{2}$, k = 7

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டா n = 6, p = $\frac{1}{3}$, k = 3

ஈருறுப்பு பரவல்

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots n$$

$$\therefore P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots n$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1-p)^{6-3}$$

$$= \binom{6}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{\not{6} \times 5 \times 4}{\not{3} \times \not{2} \times 1} \times \frac{1}{27} \times \frac{8}{27}$$

$$P(X = 3) = \frac{160}{729}$$

$$\text{(ii)} \quad P(X = 10) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10-4}$$

$$= \binom{10}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{10 \times \not{9}^3 \times \not{8} \times 7}{\not{4} \times \not{3} \times \not{2} \times 1}$$

$$\times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$= 210\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

(iii) $n = 9, p = \frac{1}{2}, k = 7$

$$P(X = 7) = \binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-7}$$

$$= \binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \binom{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{9\times \not{8}^4}{\not{2}\times 1}\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= 36\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

கேள்வி 2.

எந்த முயற்சியிலும் ஒரு இலக்கைத் திரு. தாக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். பத்து முறை இலக்கை அவர் தாக்க முயற்சிக்கிறார் எனக் கொள்க. இலக்கைத் தாக்க

(i) சரியாக 4 முறைகள்

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை தாக்குவதற்கு ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட P(இலக்கத்தை தாக்க) = $\frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

n = 10.

(i) $P(X = 4) = \binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x}$, x

= 0, 1, 2, ... n

$P(x=4) = \binom{10}{4} (\frac{1}{4})^4 (1 - \frac{1}{4})^{10-4}$

$= 10C_4 (\frac{1}{4})^4 (\frac{3}{4})^6$

(ii) P(குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை)

$= P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - 10C_0(\frac{1}{4})^0 (1 - \frac{1}{4})^{10}$

$= 1 - 1(1) (\frac{3}{4})^{10}$

$P(X \geq 1) = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}}$

கேள்வி 3.
கீழ்க்காணும் சோதனைகளில் ஈருறுப்பு பரவலைப் பயன்படுத்தி சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.
(i) 100 தடவை ஒரு சீரான நாணயம் சுண்டப்படுகிறது. தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.
(ii) 240 தடவை ஒரு சீரான பகடை ! சுண்டப்படுகிறது. எண் நான்கு தோன்றுவதற்கான எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட n = 100

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பதால், $p = \frac{1}{2}$;

சராசரி $= np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

பரவற்படி $= npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட n = 240 மேலும், X- என்பது எண் நான்கு தோன்றுவதற்கான எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

$p = \frac{1}{6}$ [∵ 4 ஒருமுறை மட்டும் தோன்றும்]

∴ சராசரி $= 240 \times \frac{1}{6} = 40$

பரவற்படி $= npq = 240 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ [∵ $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$]

பரவற்படி $= \frac{100}{3}$

கேள்வி 4.

ஒரு மின்சோதனையில் ஒரு குறிப்பிட்ட சாதனத்தின் தாங்கும் திறனுக்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$. சோதிக்கப்பட ஐந்தில் சரியாக மூன்று சாதனங்களின் தாங்கு திறனுக்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட p = $\frac{3}{4}$

n = 5

$$P(X = x) = nC_x\, p^x\, (1 - p)^{n-x}$$

$$P(X = 3) = 5C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(X = 3) = 5C_2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$[\because nCr = nC_{n-r}]$$

$$P(X = 3) = \frac{5 \times \not{4}}{2 \times 1} \times \frac{3 \times 3 \times 3}{\not{4} \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$= \frac{135}{512}$$

கேள்வி 5.

ஒரு உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட மின்வகைக் கருவியை ஒரு விற்பனையாளர் கொள்முதல் செய்கிறார். உற்பத்தியாளர் கருவியின் பழுதாகும் சதவீதம் 5 எனக்கூறுகிறார். கொள்முதல் செய்யப்பட்ட சரக்கிலிருந்து 10 பொருட்களை விற்பனையாளரின் பரிசோதகர் சமவாய்ப்பு முறையில் பரிசோதிக்கிறார். அவற்றுள்

(i) குறைந்தபட்சம் ஒரு பழுதான பொருள்

(ii) சரியாக இரு பொருட்கள் பழுதாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட n = 10

P = 5% = $\frac{5}{100}$

(i) P(குறைந்த பட்சம் ஒரு பழுதான பொருள்)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - 10C_0\left(\frac{5}{100}\right)^0\left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10}$

$- 1 - (1)(1)$

$P(X > 1) = 1 (0.95)^{10}$</sup<

(ii) $P(X = 2) = 10C_2 \left(\frac{5}{100}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10-2}$

$= 10C_2(0.05)^2 \left(\frac{95}{100}\right)^8$

$P(X = 2) = 10C_2(0.05)^2 (0.95)^8$

கேள்வி 6.

ஒரு பாதரச ஆவி விளக்கின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு 0.9. எனில் அத்தகைய 12 விளக்குகளில்
(i) சரியாக 10 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு;
(ii) குறைந்தபட்சம் 11 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகளுக்கான நிகழ்தகவு
(iii) குறைந்தபட்சம் 2 விளக்குகளின் பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணித்துளிகள் கூட இல்லாததற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $n = 12$
$P = 0.9$
(i) $P(X = 10) = 12C_{10}(0.9)^{10} (1 - 0.9)^2$
$= 12C_{10}(0.9)^{10} (0.1)^2$

(ii) $P(X \geq 11) = P(X = 11) + P(X = 12)$
$= 12C_{11}(0.9)^{11} (0.1)^1 + 12C_{12}(0.9)^{12} (0.1)^6$
$= 12C_1(0.9)^{11} (0.1) + (0.9)^{12}$
$= 12(0.9)^{11} (0.1) + (0.9)^{12}$
$= (0.9)^{11} ((12)(0.1) + 0.9)$
$= (0.9)^{11} (1.2 + 0.9) = (0.9)^{11} (2.1)$

(iii) P(குறைந்தபட்சம் 2 விளக்குகளில் பயன்படும் காலம் 600 மணித்துளிகள் கூட இல்லாதது)
= 1 – P(குறைந்தபட்சம் 11 விளக்குகளில் பயன்படும் காலம் -600 மணித்துளிகளாவது உள்ளது)
$= 1 - P(X \geq 11) = 1 - 2.1 (0.9)^{11}$

கேள்வி 7.

ஓர் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 6 மற்றும் 2 ஆகும்.

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

(ii) P(X = 3)

(iii) P(X ≥ 2)ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சராசரி = np = 6 .... (1)

திட்ட விலக்கம் = $\sqrt{npq}$ = 2

⇒ npq = 4 ....(2)

(2) ÷ (1) → $\frac{npq}{np} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

⇒ q = $\frac{2}{3}$

⇒ 1 – p = $\frac{2}{3}$

⇒ 1 – $\frac{2}{3}$ = p

∴ p = $\frac{1}{3}$

p = $\frac{1}{3}$ என்பதை (1)ல் பிரதியிட கிடைப்பது.

n × $\frac{1}{3}$ = 6 ⇒ n = 18

(i) நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

$$P(X = x) = nC_x\, p^x (1-p)^{n-x},\quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore P(X = x) = 18C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{18-x},\quad x = 0, 1, 2, \ldots, 8$$

(ii)

$$P(X = 3) = 18C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{18-3} = 18C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

(iii)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[18C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{18} + 18C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{18} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{17}\left[\frac{2}{3} + 6\right]$$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{17}\left(\frac{20}{3}\right)$

$= 1 - \frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$

கேள்வி 8.

4P(X = 4) = P(X = 2) மற்றும் n = 6 எனும்படி உள்ள X ~ B(n, p)-ன் பரவலின், சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட 4 – P(X = 4) = P(X = 2) மற்றும்

n = 6.

$4 - [6C_4 p^4 (1 - p)^2] = 6C_2 p^4 (1 - p)^4$

$\Rightarrow \frac{6\times5}{2\times1} \times p^4(1 - p)^2 = \frac{6\times5}{2\times1}\ p^2 (1 - p)^4$

$\Rightarrow p^2(1 - p)^2 [4 \times p^2] = p^2(1 - p)^4$

$\Rightarrow 4p^2 = (1 - p)^2$ [∵ நீக்க $p^2 (1 - p)^2$]

$\Rightarrow 4p^2 = 1 + p^2 - 2p$

$\Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0$

$\Rightarrow (p + 1)(3p - 1) = 0$

$p = -1, p = \frac{1}{3}$ [∵ p =- 1க்கு] சாத்தியமில்லை]

∴ ஈருறுப்பு பரவல்

$P(X = x) = nC_x p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots n$

(i) $P(X = x) = 6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$, x = 0, 1, 2 –

(ii) சராசரி = $np = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

(iii) திட்ட விலக்கம் = $\sqrt{npq} = \sqrt{6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$

கேள்வி 9.
5 சார்பற்ற சோதனைகளை உடைய ஒரு ஈருறுப்பு பரவலின் 1 மற்றும் 2 வெற்றிக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4096 மற்றும் 0.2048 ஆகும். ஈருப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.
தீர்வு:
கொடுக்கப்பட்ட $n = 5$ மற்றும்
$P(X = 1) = 0.4096$,
$P(X = 2) = 0.2048$
$\therefore nC_1p^1q^4 = 0.4096$
$\Rightarrow 5C_1p^1q^4 = 0.4096$ .... (1)
$p(x = 2) = 0.2048$
$5C_2p^2q^3 = 0.2048$
$\Rightarrow p^2q^3 = 0.2048$ .... (2)
(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க கிடைப்பது
$$\frac{10p^2q^3}{5pq^4} = \frac{0.2048}{0.4096}$$
$$\Rightarrow \frac{2p}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4p = q$$
$$\Rightarrow 4p = 1 - p \Rightarrow 5p = 1$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{5}$$
$$\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$
சராசரி $= np = 5 \times \frac{1}{5} = 1$
பரவற்படி $= npq = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

Ex 11.6

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

கேள்வி 1.

X எனும் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

f(x) = $\begin{cases} \frac{2}{x^3} & 0 < x \geq l \\ 0 & l \leq x < 2l \end{cases}$

எனில், இவற்றில் எந்த கூற்றுச் சரியானது?
(1) சராசரி மற்றும் பரவற்படி உள்ளது.
(2) சராசரி உள்ளது ஆனால் பரவற்படி இல்லை .
(3) சராசரி பரவற்படி மற்றும் இரண்டும் இல்லை .
(4) பரவற்படி உள்ளது ஆனால் இல்லை .
விடை:
(2) சராசரி உள்ளது ஆனால் பரவற்படி இல்லை

குறிப்பு:

சரா = $\int_1^x x \cdot \frac{2}{x^3} dx = \int_1^x \frac{2}{x^2} dx = \int_1^x 2x^{-2} dx$

= $2\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = -2\left[\frac{1}{\infty} - 1\right]$

= -2(0 – 1) = 2

பரவற்படி = $\int^x x^2 \cdot \frac{2}{x^3} dx = \int_1^\infty \frac{2}{x} dx$

= $[2 \log]_\infty^x$

[log ∞ வரையறுக்கப்படவில்லை]

கேள்வி 2.

21 நீளமுள்ள ஒரு கம்பி சமவாய்ப்பு முறையில் இரு துண்டாக உடைந்தது. இரு துண்டுகளில் குட்டையானதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

f(x) = $\begin{cases} \frac{2}{x^3} & 0 < x \geq l \\ 0 & l \leq x < 2l \end{cases}$

எனில் குட்டையான பகுதிக்கான சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே

(1) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{3}$
(2) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{6}$
(3) $1, \frac{l^2}{12}$
(4) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$
விடை:
(4) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$

குறிப்பு :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, 0 < x < l \\ 0, l \leq x < 2l \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^l x \cdot f(x) dx = \int_0^l x \cdot \frac{1}{l} dx$$

$$= \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2l} \cdot l^2 = \frac{l}{2}$$

$$E(X)^2 = \int_0^l x^2 \cdot \frac{1}{l} \cdot dx = \left[\frac{1}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{l^2}{3}$$

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - 3l^2}{12} = \frac{l^2}{12}$$

கேள்வி 3.
ஒரு விளையாட்டில் அறுபக்க பகடையை விளையாடுபவர் உருட்டுகிறார். பகடை எண் 6-ஐக் காட்டினால், விளையாடுபவர் ₹36 வெல்லுவார், இல்லையெனில் ₹k, தோற்பார். இங்கு k என்பது பகடை காட்டும் எண். k = {1, 2, 3, 4, 5 } விளையாட்டில் எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை ₹
(1) $\frac{19}{6}$
(2) $-\frac{19}{6}$

(3) $\frac{3}{2}$
(4) $-\frac{3}{2}$
விடை:
(2) $-\frac{19}{6}$

குறிப்பு :

x	36	$-k^2$
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X) = 36 \cdot \frac{1}{6} - k^2 \cdot \frac{5}{6}$

கேள்வி 4.
1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 எண்ணிடப்பட்ட அறுபக்க பகடையும் 1, 2 , 3 , 4 என எண்ணிடப்பட்ட நான்கு பக்க பகடையும் சோடியாக உருட்டப்பட்டு இரண்டும் காட்டும் எண்களின் கூட்டல் தொகை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இந்த கூட்டலைத் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க . இனி 7 – இன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4
விடை:
(4) 4

குறிப்பு:

*	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	(7)
2	3	4	5	6	(7)	8
3	4	5	6	(7)	8	9
4	5	6	(7)	8	9	10

அட்டவணையிலிருந்து 7 இன் நேர்மாறு உறுப்பு 4.

கேள்வி 5.
n = 25 மற்றும் p = 0.8 என்று உள்ள ஈருறுப்பு பரவல் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் X-ன் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு
(1) 6
(2) 4
(3) 3

(4) 2
விடை:
(4) 2

குறிப்பு:
n = 25, p = 0.8, q = 1 – p = 1 – 0.8 = 0.2
திட்டவிலக்கம் = $\sqrt{npq}$
= $\sqrt{25(0.8)(0.2)} = \sqrt{25(.16)}\sqrt{25(0.8)(0.2)} = \sqrt{25(.16)}$
= 5(4) = 2

கேள்வி 6.
n முறை சுண்டப்படும் ஒரு நாணயத்தினால் பெறப்படும் தலை மற்றும் பூக்களின் எண்ணிக்கை வேறுபாட்டை X குறிக்கிறது என்க. X – இன் சாத்திய மதிப்புகள்
(1) i + 2n, i = 0, 1, 2…n
(2) 2i – n, i = 0, 1, 2…..n
(3) n – i, i = 0, 1, 2…n
(4) 2i + 2n, i = 0, 1, 2…n
விடை:
(2) 2i – x, i = 0, 1, 2,…. n

கேள்வி 7.
f(x) = 112, a < x < b, எனும் சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினைக் குறிக்கிறது எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது 1 மற்றும் –இன் மதிப்புகளாக இராது?
(1) 0 மற்றும் 12
(2) 5 மற்றும் 17
(3) 7 மற்றும் 19
(4) 16 மற்றும் 24
விடை:
(4) 16 மற்றும் 24

குறிப்பு:
$\int_a^b \frac{1}{12} dx = \frac{1}{12}[x]_a^b$ ஆதலால் a = 16,மற்றும் b = 24 எனில்,
$\int_{16}^{24} \frac{1}{12} dx = \left[\frac{x}{12}\right]_{16}^{24} = \frac{24}{12} - \frac{16}{12} \neq 1$

கேள்வி 8.

ஒரு கால்பந்தாட்ட அரங்கிற்கு ஒரே பள்ளியிலிருந்து நான்கு பேருந்துகள் 160 மாணவர்களை ஏற்றிக்கொண்டு வருகிறது. அப்பேருந்துகளில் முறையே 42 ,36 ,34, மற்றும் 48 மாணவர்கள் பயணிக்கின்றனர். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவ்வாறு சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர் பயணிக்கும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க . நான்கு பேருந்து ஓட்டுனர்களில் ஒருவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஓட்டுநர் ஓட்டி வரும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை Y குறிக்கிறது என்க. இனி E(X)மற்றும் E(Y) முறையே

(1) 50, 40

(2) 40, 50

(3) 40.75, 40

(4) 41, 41

விடை:

(3) 40.75, 40

குறிப்பு :

E(x) = $\frac{42+36+34+48-1+4}{4}$ = $\frac{163}{4}$ = 40.75 [∵ முன்பே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 1 மாணவன் ஓட்டுநர்கள்]

E(Y) = $\frac{42+36+34+48}{4}$ = 40

கேள்வி 9.

இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. முதல் நாணயத்தில் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 மற்றும் இரண்டாவது நாணயத்தின் மூலம் தலை கிடைக்க நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். சுண்டி விடுதலின் முடிவுகள் சார்பற்றவை எனக் கருதுக. X என்பது மொத்ததலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க . E(X)-ன் மதிப்பு

(1) 0.11

(2) 1.1

(3) 11

(4) 1

விடை:

(2) 1.1

குறிப்பு:

$E(X) = 0.6 + 0.5 = 1.1$

கேள்வி 10.

பலவுள் தேர்வு ஒன்றில் 5 வினாக்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 3 சாத்தியமானக் கவனச்சிதறல் விடைகள் உள்ளது. ஊகத்தின் அடிப்படையில் 4 அல்லது அதற்கு மேல் சரியான விடையை ஒரு மாணவர் அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு (1) $\frac{11}{243}$

(2) $\frac{3}{8}$

(3) $\frac{1}{243}$

(4) $\frac{5}{243}$

விடை:

(1) $\frac{11}{243}$

குறிப்பு :

n = 5, p = $\frac{1}{3}$ P(X > 4) = P(X = 4) + P(X = 5)

$$= 5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^1 + 5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$= 5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^4\left[\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{81}\times\frac{11}{3} = \frac{11}{243}$$

கேள்வி 11.

P{X = 0} = 1 – P{X = 1} மற்றும் E[X] = 3Var(X), எனில், P{X = 0} காண்க.

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{2}{5}$

(3) $\frac{1}{5}$

(4) $\frac{1}{3}$

விடை:

(4) $\frac{1}{3}$

குறிப்பு :

E(X) = 3 var(X)

$\Rightarrow np = 3npq$

$\Rightarrow 1 = 3q$

$\Rightarrow q = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow p = \frac{2}{3}$

கொடுக்கப்பட்ட p(X = 0) = 1 – p(X = 1)

$\Rightarrow n \cdot p^0 q^n = 1 - p \cdot p^1 q^{n-1} n$

$\Rightarrow n \cdot q^n = 1 - np\, q^{n-1}$

$\Rightarrow n \cdot q^n = 1 - n \cdot p \cdot q^{n-1}$

$$\Rightarrow n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{3n}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(n) = 1 \qquad \therefore n = 1$$

$\therefore P(X = 0) = nC_0 p^0\, q^{n-0} = q^1 = \frac{1}{3}$

கேள்வி 12.

எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு 6 மற்றும் பரவற்படி 2.4 கொண்ட ஒரு ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் P(X = 5) – இன் மதிப்பு

(1) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$

(2) $\binom{10}{5}\binom{3}{5}^5$

(3) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6$

(4) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

விடை:

(4) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

குறிப்பு :

E(X) = 6, var(X) = 2.4

⇒ np = 6, npq = 2.4

⇒ = 0.4 = q

⇒ q = $\frac{2}{5}$ ∴ p = $\frac{3}{5}$

n × $\frac{3}{5}$ = 6

⇒ n = $\frac{30}{3}$ = 10

∴ P(X = 5) = $10C_5\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

கேள்வி 13.

சமவாய்ப்பு மாறி X – ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

மற்றும் E(X) = $\frac{7}{12}$, எனில் – மற்றும் நான் மதிப்புகள் முறையே

(1) 1 மற்றும் $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{2}$ மற்றும் 1

(3) 2 மற்றும் 1

(4) 1 மற்றும் 2

விடை:

(1) 1 மற்றும் $\frac{1}{2}$,

குறிப்பு:
f(x) = ax + b

$$E(X) = \int_0^1 x(ax+b)dx = \int_0^1 (ax^2+bx)dx$$

$$= \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{b}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+3b}{6} = \frac{7}{12_2}$$

$$\Rightarrow 4a+6b = 7$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1}{2}$$

கேள்வி 14.

0, மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளில் ஒன்றை X கொள்கிறது என்க. ஏதோ ஒரு மாறிலி k-விற்கு P(X = i) = k P(X = 1 – 1), i = 1, 2 மற்றும் P(X = 0) = $\frac{1}{7}$ எனில் – இன் மதிப்பு காண்க.

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

விடை:
(2) 2.

குறிப்பு:

கொடுக்கப்பட்ட P(X = 1) = k · P(X = 0)

$\Rightarrow p(x = 1) = k\left(\frac{1}{7}\right)$

$\Rightarrow n \cdot c_1 p^1 q^{n-1} = \frac{k}{7}$

$\Rightarrow np\, q^{n-1} = \frac{k}{7}$

P(X = 2) = k P(X = 1)

$\Rightarrow nC_{,2}\, p^2 q^{n-2} = k \cdot n \cdot p \cdot q^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \cdot p^2 q^{n-2} = \frac{k}{7}$

கேள்வி 15.

பின்வருவனவற்றுள் எது தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி?
I. ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட சமிக்கையைக் கடக்கும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை
II. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் தொடர்வண்டி பயணச் சீட்டு வாங்க வரிசையில் காத்திருக்கும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை.
III. ஒரு தொலைபேசி அழைப்பை நிறைவு செய்யும் காலம்.

(1) I மற்றும் II
(2) II மட்டுமே
(3) III மட்டுமே
(4) II மற்றும் III
விடை:
(1) I மற்றும் II

கேள்வி 16.
ஒரு சம வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4
விடை:
(1) 1

குறிப்பு:

$$\int_0^a 2x\,dx \Rightarrow \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^a = 1$$

$a^2 - 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

கேள்வி 17.
ஒரு நிகழ்தகவு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

எனில், E(X) -க்கு சமமான மதிப்பு

(1) $\frac{1}{15}$
(2) $\frac{1}{10}$
(3) $\frac{1}{3}$
(4) $\frac{2}{3}$
விடை:
(4) $\frac{2}{3}$

குறிப்பு:
$k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1$
$\Rightarrow 15k = 1$
$\Rightarrow k = \frac{1}{15}$
$E(X) - 2k - 2k + 0 + 4k + 10k$
$= 10k$
$= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

கேள்வி 18.
சராசரி 0.4 கொண்ட ஒரு பெர்னோலி பரவல் X எனில் (2X – 3)-ன் பரவல்
(1) 0.24
(2) 0.48
(3) 0.6
(4) 0.96
விடை:
(4) 0.96

குறிப்பு:
பெர்னோலி பரவலுக்கு
$\mu = p$ மற்றும் $\sigma^2 = pg$
கொடுக்கப்பட்ட $\mu = p = 0.4$
$\Rightarrow q = 0.6$
பரவற்படி $(X) = pq = (0.4)(0.6) = 0.24$
$\therefore$ Var $(2x - 3) = 4$
$Var(X) = 4(0.24) = 0.96$

கேள்வி 19.
ஈருறுப்பு மாறி X ஆறு முயற்சிகளில் $9P(X = 4) = P(X = 2)$ எனும்

தொடர்பினை அனுசரிக்கிறது எனில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு
(1) 0.125
(2) 0.25
(3) 0.375
(4) 0.75
விடை:
(2) 0.25

குறிப்பு:
⇒ $9P(X = 4) = P(X = 2)$
⇒ $9[6C_4p^4q^2] = 6C_2p^2q^4$
⇒ $9[6C_2p^4q^2] = 6C_2p^2q^4$
⇒ $9p^2 = q^2$
⇒ $9p^2 = (1 - p)^2$
⇒ $9p^2 = 1 + p^2 - 2p$
⇒ $8p^2 + 2p - 1 = 0$
⇒ $(2p + 1)(4p - 1) = 0$
⇒ $p = \frac{-1}{2}$;
$p = \frac{1}{4}$
⇒ $p = \frac{1}{4} = 0.25$

கேள்வி 20.
ஒரு கணினி விற்பனையாளர் தனது கடந்த கால அனுபவத்திலிருந்து தனது காட்சி கூடத்திற்குள் நுழையும் ஒவ்வொரு இருபது வாடிக்கையாளர்களில் ஒருவருக்கு கணினிகளை விற்கிறார் என்பது தெரியும். அடுத்த மூன்று வாடிக்கையாளர்களில் சரியாக இரண்டு பேருக்கு அவர் ஒரு கணினியை விற்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
(1) $\frac{57}{20^3}$
(2) $\frac{57}{20^2}$
(3) $\frac{19^3}{20^3}$
(4) $\frac{57}{20}$
விடை:
(1) $\frac{57}{20^3}$

குறிப்பு:

கொடுக்கப்பட்டற $p = \frac{1}{20}$, $q = \frac{19}{20}$ மற்றும் = 3

$P(X = 2) = 3C_2 \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^1 = \frac{3\times19}{20} = \frac{57}{20^3}$