Chapter – 9

வகை நுண்கணிதம் எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

Ex 9.1

1 முதல் 6 வரை உள்ள கணக்குகளுக்குக் கணிப்பானைப் பயன்படுத்தி அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்து அதன் மூலம் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

Question 1.

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

தீர்வு :

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

f(x) = $\frac{x-2}{x^2-x-2}$

=

$\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+1)}$

= $\frac{1}{x+1}$ என்க .

அட்டவணையிலிருந்து x ஆனது 2 ஐ நெருங்கும் போது f (x) ஆனது எல்லா

நிலைகளிலும் $0.\overline{3}$

ஐ நெருங்குகிறது என தெளிவாகிறது.

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = 0.\overline{3}$

Question 2.

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

தீர்வு :

இங்கு f (x) = $\frac{x-2}{x^2-4}$ =

$\frac{\cancel{x-2}}{(x+2)(\cancel{x-2})}$

= $\frac{1}{x+2}$

[$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

அட்டவணையிலிருந்து, X ஆனது 2ஐ நெருங்கும் போது

f(x) ஆனது 0.25 (தோராயமாக) நெருங்குகிறது.

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ = 0.25

Question 3.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \text{ என்க}$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

[$\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்கி வகுக்க]

$$= \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x+\cancel{3}-\cancel{3}}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$[\because (a+b)(a+b) = a^2 - b^2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

x 0-வை நோக்கிச் செல்ல, f(x) = $\frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ நோக்கிச் செல்கிறது.

மேலும் அட்டவணையிலிருந்து x 0வை நோக்கிச் செல்ல, எல்லா நிலைகளிலும் f (x) = 0.288 (தோராயமாக) நோக்கிச் செல்கிறது.

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ = 0.288

Question 4.

$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	– 3.1	– 3.01	– 3.00	– 2.999	– 2.99	– 2.9
$f(x)$	– 0.24845	– 0.24984	– 0.24998	– 0.25001	– 0.25015	– 0.25158

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3} \text{ என்க.}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3} \times \frac{\sqrt{1-x}+2}{\sqrt{1-x}+2}$$

[$\sqrt{1-x}+2$ ஆல் பெருக்கி வகுக்க]

$$= \frac{(1-x)-(2^2)}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)}$$

$$[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{1-x-4}{(x+3)\sqrt{1-x}+2} = \frac{-x-3}{(x+3)\sqrt{1-x}+2)}$$

$$= \frac{-(\cancel{x+3})}{(\cancel{x+3}))\sqrt{1-x+2)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x}+2}$$

-3 ஐ நோக்கி x செல்ல, $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(-3)}+2}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{-1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

மேலும் அட்டவணையிலிருந்து தெளிவாகிது, x_0 ஆனது –3 ஐ நோக்கிச் செல்ல f(x) ஆனது -0.25 (தோராயமாக) ஐ நோக்கி செல்கிறது எல்லா நிலைகளிலும்

$\therefore \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$ = -0.25

Question 5.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

தீர்வு :

f(x) = $\frac{\sin x}{x}$ என்க

அட்டவணையிலிருந்து, 0 விற்கு அருகிலுள்ள மதிப்புகளுக்கு f (x) ஆனது 0.999ஐ நெருங்குகிறது.

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ = 0.999

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ ≈ 1

Question 6.

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x-1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

தீர்வு :

f(x) = $\frac{\cos x - 1}{x}$ என்க

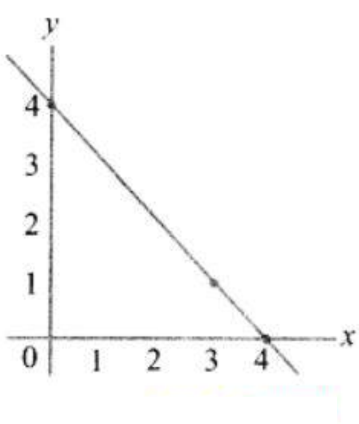
அட்டவணையிலிருந்து தெளிவாகிறது x-ன் மதிப்பு 0வை நெருங்க, f (x)-ன் மதிப்பு 0.0004 (தோராயமாக) வை நெருங்குகிறது.

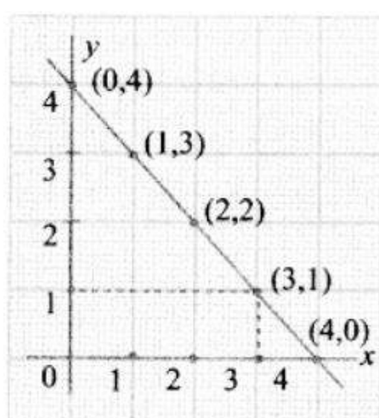
$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (தோராயமாக) 7 முதல் 15 வரை உள்ள கணக்குகளுக்கு வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பு காண்க (உள்ளது எனில்). எல்லை மதிப்பு இல்லை எனில், காரணத்தை விளக்குக.

Question 7.

$\lim_{x \to 3} 4 - x$

தீர்வு:

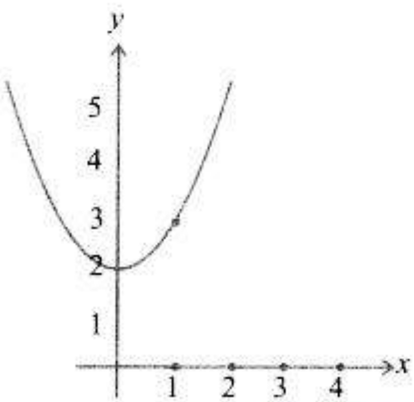


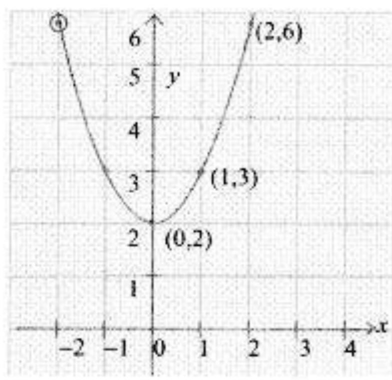


$x = 3$

எனும் பொழுது
y = 1
$\lim_{x \to 3} 4 - x$ = 1

Question 8.
$\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 2\right)$
தீர்வு :





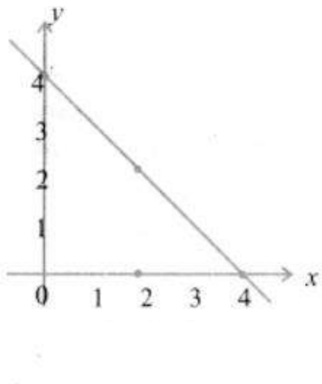
$\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 2\right)$ = 1 x = 1

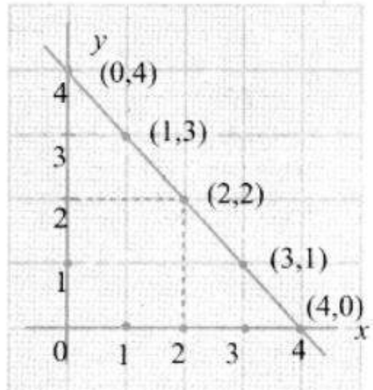
எனும் பொழுது வளைவரை y அச்சின் 3 ஐக் குறிக்கும். x = 1 எனில் y = 3

$\therefore \lim_{x \to 1} \left(x^2 + 2\right)$ = 3

Question 9.
$\lim_{x \to 2}$ இங்கு f(x) = $\begin{cases} \mathbf{4} - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

தீர்வு :





x = 2 எனும் பொழுது

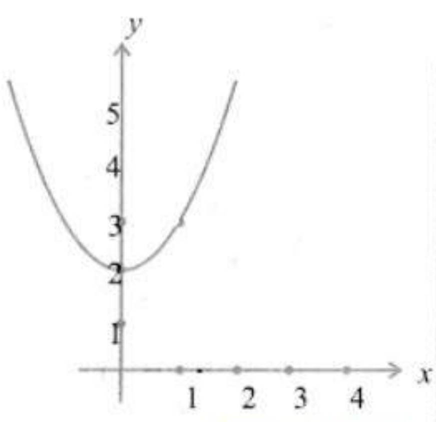
y = 4 – 2 = 2

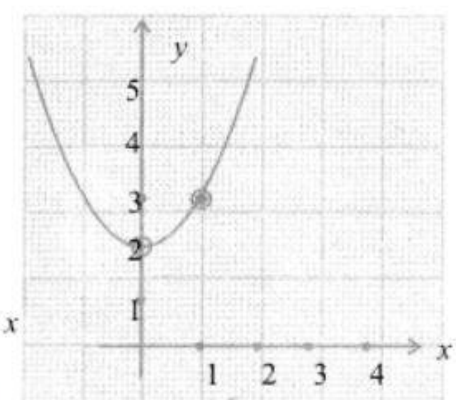
$\therefore \lim_{x \to 2}$ f (x) = 2

Question 10.

$\lim_{x \to 1}$ f(x) இங்கு f(x) = $\begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

தீர்வு :





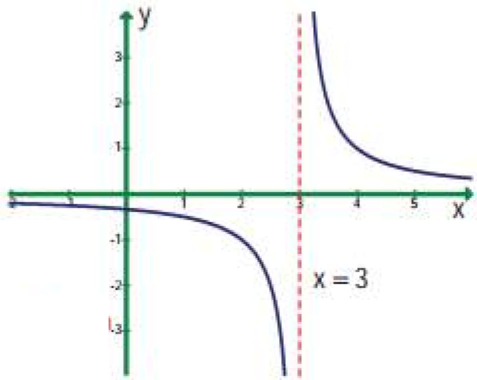
x = 1 எனும் பொழுது

y = 1^2 + 2 = 3

$\therefore \lim_{x \to 1}$ f(x) = 3

Question 11.

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$



தீர்வு :

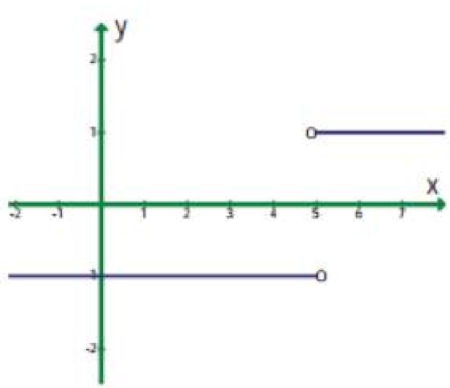
$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$

x = 3 எனில், வரைபடம் x, y அச்சுக்களை சந்திப்பதில்லை

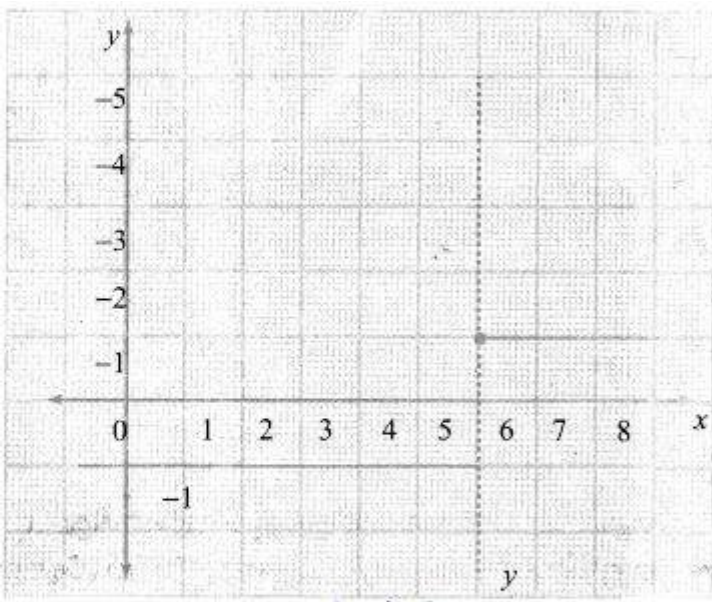
∴ எல்லை மதிப்பு இல்லை.

Question 12.

$\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$



தீர்வு :



$\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$

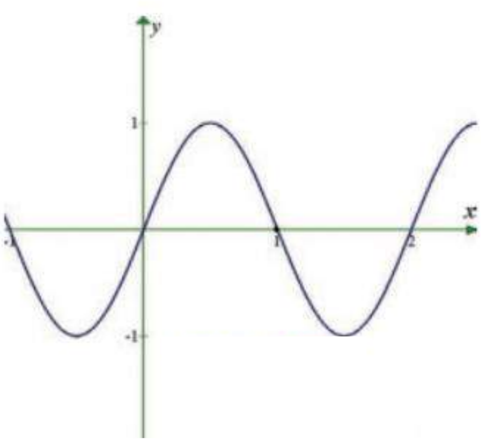
x = 5 எனும் பொழுது வரைபடம் y-அச்சை சந்திப்பதில்லை.

∴ எல்லை மதிப்பு இல்லை.

Question 13.

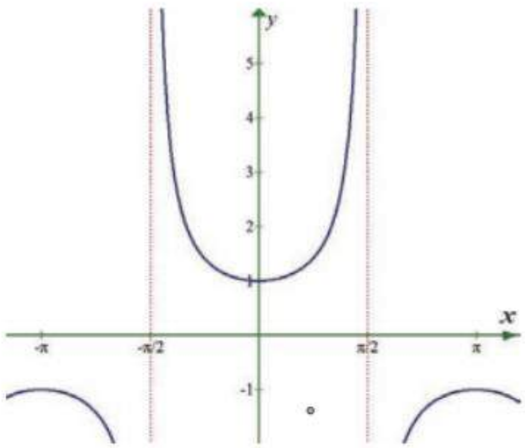
$\lim_{x \to 1}$ sin πx

தீர்வு :

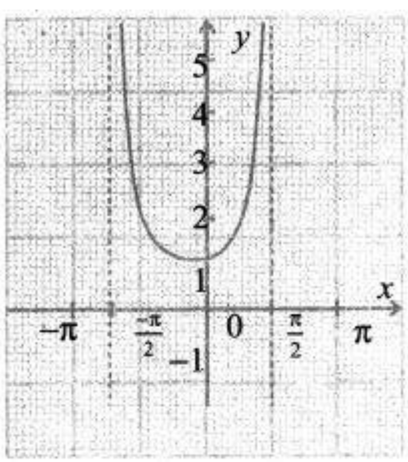


$\lim_{x \to 1}$ sin πx எனும் பொழுது வளைவரை x- அச்சை தொடும்
$\therefore \lim_{x \to 1}$ sin πx = 0

Question 14.
$\lim_{x \to 0}$ sec x



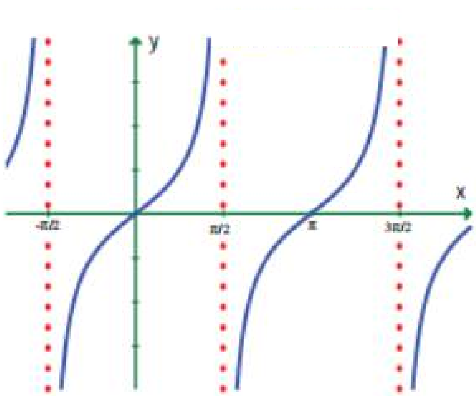
தீர்வு :



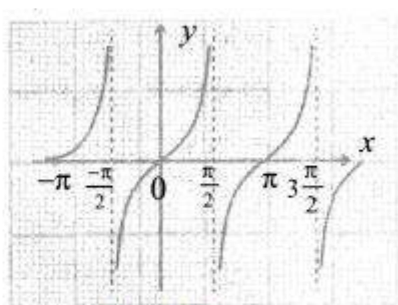
$\lim_{x \to 0}$ sec x
x = 0 எனும் பொழுது வளைவரை y அச்சின் 1-ல் காத்தாகப்
$\therefore \lim_{x \to 0}$ sec x = 1

Question 15.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}$ tan x



தீர்வு :



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}$ tan x = 0

x = $\frac{\pi}{2}$ எனில் வளைவரை y அச்சைத் தொடுவதில்லை.

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}}$ tan x ற்கு தீர்வு இல்லை .

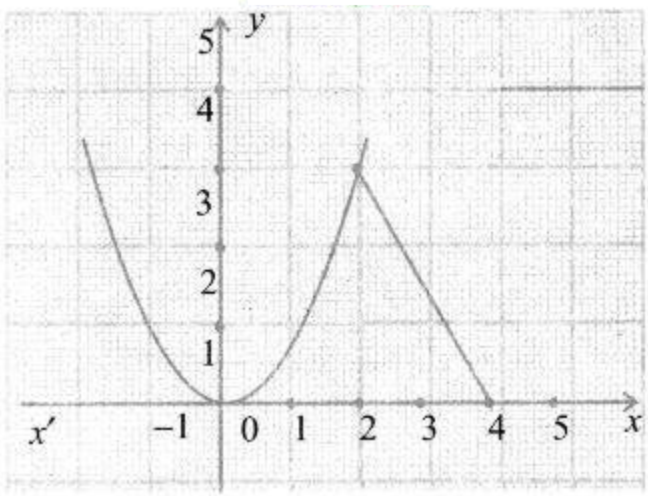
16, 17 கணக்குகளுக்கு f ன் வரைபடம் வரைந்து x, ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $\lim_{x \to x_0}$ f(x) உள்ளது என்பதைக் காண்க.

Question 16.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases}$$

தீர்வு:

x	0	−1	2	3	3.5	4	5	6
$f(x)$	x^2	x^2	x^2	$8-2x$	$8-2x$	4	4	4
$f(x)$	0	1	4	2	1	4	4	4



x = 4 எனில் வளைவரைக்கு தீர்வு இல்லை.

∴ x = 4 ஐத் தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்கு வளைவரைக்கு எல்லை மதிப்புள்ளது.

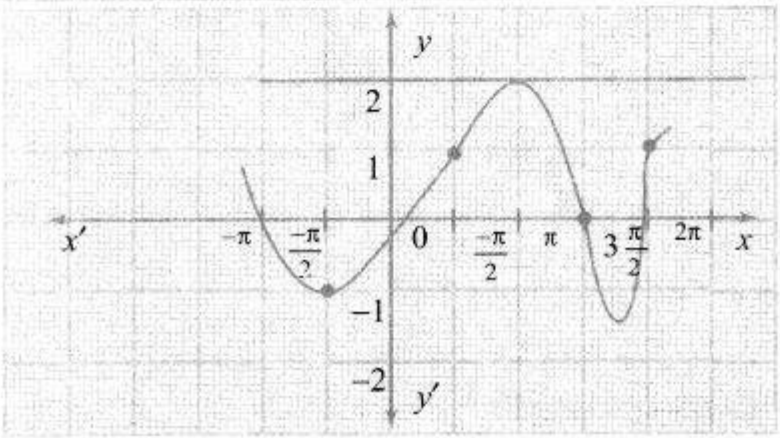
Question 17.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$$

தீர்வு :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$1-\cos 0$	$1-\cos\frac{\pi}{2}$	$1-\cos\pi$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\cos 2\pi$
$f(x)$	-1	0	1	$1-(-1)$ $=2$	0	1



(π, 2) புள்ளி சாத்தியமில்லை. ஏனென்றால் வளைவரையின் வீச்சு (-1, 1).

$x_0 = \pi$, எனும் மதிப்பைத் தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்கு வளைவரைக்கு எல்லை உண்டு.

Question 18.
கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை நிறைவு செய்யும் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(i) f(0) வரையறுக்கப்படவில்லை

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) f(-2) = 0

f(2) = 0

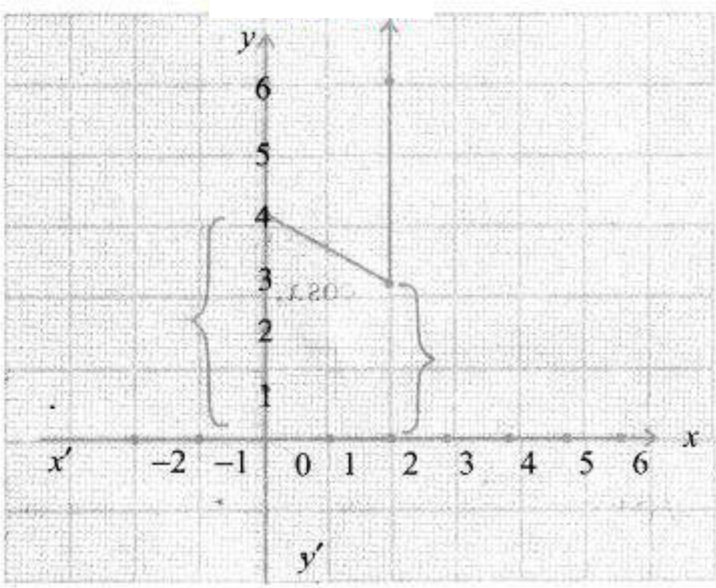
$\lim_{x \to 2}$ f (x) = 0,

$\lim_{x \to 2}$ f (x) என்ற எல்லை மதிப்பு இல்லை

தீர்வு :

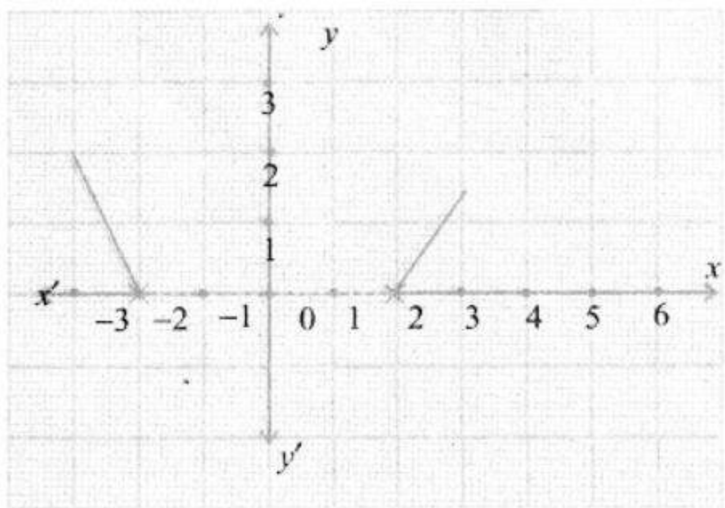
(i)

x	0	2
$f(x)$	∞	6



(ii)

x	– 2	2
$f(x)$	0	0



Question 19.

$\lim_{x \to 8}$ f(x) = 25 என்ற குறியீட்டு முறையின் பொருளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எல்லை மதிப்பு உள்ளது. x → 8 என்பது x ஆனது 8ஐ நெருங்கும்பொழுது சார்பின் மதிப்பு 25ஐ பெறுகிறது. சார்பின் கீழ் (இடது எல்லை) மதிப்பு = வலது பக்க எல்லை மதிப்பு. அதாவது

$\lim_{x \to 8^-}$ f (x) = $\lim_{x \to 8^+}$ f (x) = 25

$f(8^-) = f(8^+) = 25$ ஆகும்.

Question 20.

f(2) = 4, எனில், x-ன் மதிப்பு 2-ஐ நெருங்கும் போது f(x)-ன் எல்லை மதிப்பைப் பற்றி ஏதேனும் முடிவு செய்ய இயலுமா?

தீர்வு :

$\lim_{x \to 2}$ f (x) = 4

சார்பு f(2)-ன் மதிப்பைப் பற்றி எதுவும் முடிவு செய்ய இயலாது. ஏனெனில் சார்பின் மதிப்பும் எப்பொழுதும் எல்லை மதிப்பிற்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

Question 22.

$f(3^-)$ மற்றும் $f(3^+)$ கண்டு, அவற்றின் மூலம் $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ -க்கு மதிப்பு இருக்குமானால் அந்த மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3^-}(x+3) = 3+3 = 6$$

$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3^+}(x+3) = 3+3 = 6$$

Question 23.

$f(x) = \begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ எனில் $\lim_{x\to 1}$ f(x) -ன் மதிப்பு உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$f(x) = \begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$

$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} =$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)}$

= -1

$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} =$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)}$

= 1

$f(1^-) \neq f(1^+)$, f(x) -ற்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை

Ex 9.2

பின்வரும் எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க.

Question 1.

$\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^4-2^4}{x-2}$

$[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = n \cdot a^{n-1}]$

$= 4(2)^{4-1} = 4 \times 2^3 = 4(8) = 32$

Question 2.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, m, n முழு எண்கள.

தீர்வு :

$\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1^m}{x^n-1^n}$

தொகுதி, பகுதியை (x – 1) ஆல் பெருக்க

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1^m}{x-1} \times \frac{x-1}{x^n-1^n} = \left(\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1^m}{x-1}\right) \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\frac{x^n-1^n}{x-1}\right)}$$

$$= m.\ 1^{m-1} \times \frac{1}{n.1^{n-1}} = m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

$$\left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = n.a^{n-1}\right]$$

Question 3.

$\lim_{\sqrt{x} \to 3} \frac{x^2-81}{\sqrt{x-3}}$

தீர்வு :

$\lim_{\sqrt{x} \to 3} \frac{x^2-81}{\sqrt{x-3}}$ = $\lim_{\sqrt{x \to 3}} \frac{x^2-9^2}{\sqrt{x}-3}$

= $\lim_{\sqrt{x} \to 3} \frac{(\sqrt{x^2})^2-(3^2)^2}{\sqrt{x}-3}$

= $\lim_{\sqrt{x} \to 3} \frac{(\sqrt{x})^4-3^4}{\sqrt{x}-3}$

= $4 \times 3^{4-1} = 4 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$

Question 4.

$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x > 0$

தீர்வு :

$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x > 0$

தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ஆல் பெருக்க,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Question 5.

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{x+4}+3$ ஆல் பெருக்க,

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x+4)-3^2}{(x-5)\left[\sqrt{x+4}+3\right]}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{(x-5)\left[\sqrt{x+4}+3\right]} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5+4}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Question 6.

$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}$

=

$$\lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{2x} \times \frac{1}{(x-2)}$$

$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$

Question 7.

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}\left(1^3-(\sqrt{x})^3\right)}{(1-\sqrt{x})}$

[$\because x^2 = (\sqrt{x})^4 = \sqrt{x} . (\sqrt{x})^3$]

=

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}\left[\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+x+\sqrt{x}\right)\right]}{\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

[∵ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

= $\lim_{x\to1} \sqrt{x}(1 + x + \sqrt{x})$

= $\sqrt{1}(1 + 1 + \sqrt{1}) = 3$

Question 8.

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to0} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}-(16)^{\frac{1}{2}}}$

தொகுதி, பகுதியை x^2 ஆல் பெருக்க

$= \lim_{x\to0} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{x^2} \times \frac{x^2}{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{2}}}$

$= \lim_{x\to0} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)-1} \times \frac{(x^2+16)-16}{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{2}}}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)-1}\times\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+16\right)^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+16\right)-16}}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} \times \frac{1}{\frac{1}{2}16^{\frac{1}{2}-1}} \quad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n.a^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}(16)^{-1/2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$

Question 9.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

தொகுதி, பகுதியை $(\sqrt{1+x}+1)$ ஆல் பெருக்க

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Question 10.

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(7+x^3)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{7+x^3-8}\times\frac{x^3-1}{x-1}-\frac{(3+x^2)^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}}{3+x^2-4}\times\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{7+x^3\to 8}\frac{(7+x^3)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(7+x^3)-8}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$-\lim_{3+x^2\to 4}\frac{(3+x^2)^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}}{3+x^2-4}\times\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

[$\because x\to 1$ எனில் $x^3\to 1$ மேலும் $7+x^3\to 7+1=8$,
$x\to 1$ எனும் பொழுது, $x^2\to 1$ மேலும் $3+x^2\to 4$]

$$=\lim_{7+x^3\to 8}\frac{(7+x^3)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(7+x^3)-8}(x^2+x+1)$$

$$-\lim_{3+x^2\to 4}\frac{(3+x^2)^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}}{(3+x^2)-4}\times(x+1)$$

$$=\frac{1}{3}(8)^{\frac{1}{3}-1}(1^2+1+1)-\frac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{2}-1}\right)(1+1)$$

$$=\frac{1}{3}(8)^{\frac{-2}{3}}(3)-\frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}}(2)=8^{-\frac{2}{3}}-4^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1-2}{4}=\frac{-1}{4}$$

Question 11.

$\lim_{x \to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{4-x}-\sqrt[3]{2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}-\left(2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(4-x)^{\frac{1}{3}}-(2)^{\frac{1}{3}}}$$

தொகுதி, பகுதியை $(x-2)$ ஆல் பெருக்க

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}}{x-2} \times \frac{(x-2)}{(4-x)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}-(4)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)-4} \times \frac{-(2-x)}{(4-x)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \left[\lim_{(x+2) \to 4} \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}}{(x+2)-4}\right] \times \frac{-1}{\lim_{x \to 2} \frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}{4-x-2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times (4)^{\frac{1}{2}-1} \times \frac{-1}{\frac{1}{3} \times (2)^{\frac{1}{3}-1}}$$

$$= \frac{1}{2}(4)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{-1}{\frac{1}{3}(2)^{-2/3}}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \times 2^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-3}{4} \times \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$$

Question 12.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

தொகுதி, பகுதியை $\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)$ ஆல் பெருக்க

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x^2\right)-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\left[\sqrt{1+x^2}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Question 13.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$

தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{1-x}+1$ ஆல் பெருக்க

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2} \times \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-x-1)}{x^2\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x^2\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \frac{-1}{0\left(\sqrt{1-0}+1\right)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Question 14.

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{x-1}+2$ ஆல் பெருக்க

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-1)-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Question 15.

$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} (a > b)$

தீர்வு:

$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} (a > b)$

தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}$ ஆல் பெருக்க

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} \times \frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-b)-(a-b)}{x^2-a^2} \times \frac{1}{\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}}$$

$$= \lim_{x \to a}\left[\frac{(x-\cancel{b}-a+\cancel{b})}{(x+a)(x-a)} \times \frac{1}{\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{(x+a)\cancel{(x-a)}\left[\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right]}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}$$

$$= \frac{1}{(a+a)(\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b})} = \frac{1}{2a(2\sqrt{a-b})}$$

$$= \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$$

Ex 9.3

Question 1.
பின்வரும் சார்புகளுக்கு இடப்புற, வலப்புற எல்லைகளில் மதிப்பைக் காண்க

(a) x = -2-ல் f(x) = $\frac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

(b) x = $\frac{\pi}{2}$-ல் f(x) = tan x

(a) x = -2-ல் f(x) = $\frac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

தீர்வு :

f(x) = $\frac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

f(-2^-) =

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x+2)(x+3)}$$

$= \lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{(x+2)(x+3)}$

$= \frac{-Ve}{0(-Ve)} = \infty$

$\therefore$ $f(-2^-) \to \infty$ ($x \to -2^-$ எனும் பொழுது)

$f(-2^+) =$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{(x+2)^{\cancel{2}}(x+3)}$$

$f(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{(x+2)(x+3)}$

$=$

$$\frac{\text{குறை எண்}}{0(\text{மிகை எண்})}$$

$= -\infty$

$\therefore$ $f(-2^+) \to \infty$ ($x \to -2^+$ எனும் பொழுது)

(b) $f(x) = \tan x$ at $x = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \tan x$

$x = \frac{\pi}{2}$-ல் $f(x) = \tan x$ ஐக் காளை

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$

$\therefore \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \to \infty$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}$ f(x) = $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}$ tan x = – ∞

∴ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}$ f(x) → – ∞

பின்வரும் எல்லைகளின் மதிப்பைக் காண்க

Question 2.

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$

=

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{x^2(x-3)\cancel{(x-3)}}$$

= $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2(x-3)}$

= $\frac{6}{\cancel{6}(3-3)} = -\frac{2}{0}$ = – ∞

x → 3^- எனில் f (3) → – ∞

$\lim_{x\to 3^+}$ f(x) = $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2(x-3)}$ = ∞

Question 3.

$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2} - \frac{2x+11}{x^2+x-6}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2} - \frac{2x+11}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-2} - \frac{2x+11}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3(x+3) - 2x + 11}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 9 - 2x + 11}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+20}{(x+3)(x-2)}$$

பகுதி, தொகுதியை x ஆல் வகுக்க

$$= \lim_{\frac{1}{x} \to 0} \frac{1 + \frac{20}{x}}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)(x-2)} \quad [x \to \infty \text{ எனில் } \frac{1}{x} \to 0]$$

$$= \frac{1}{(1+0)(\infty - 2)} = \infty \quad \therefore f(x) \to \infty \quad (\because x \to \infty)$$

Question 4.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$

தொகுதியிலிருந்து x^3, பகுதியிலிருந்து x^4 ஐ வெளியில் எடுக்க

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$[\because \frac{1}{x} \to 0; x \to \infty]$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = 0$$

Question 5.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \infty$

[$\because \frac{1}{x} \to 0; x \to \infty$]

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} = \infty$

Question 6.

$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3\right)}{\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3\right)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3} = -1$$

Question 7.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^3-\cancel{2x^4}+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4}$$

$$\left[\because x\to\infty;\ \frac{1}{x}\to 0\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right]=\frac{1}{4}$$

Question 8.

நிறுவுக

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2} = \frac{1}{6}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)} = \frac{9}{25}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1$

தீர்வு :

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2} = \frac{1}{6}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2}$ = $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+7n+2}$

[∵ Σn = $\frac{n(n+1)}{2}$]

=

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

= $\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$ = RHS

∴ எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)} = \frac{9}{25}$

$$\text{L.H.S.} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\cancel{3}n)(3n+1)(6n+1)}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{6}(5n)(5n+1)(2n+3)}{\cancel{2}}}$$

$$\left[\because \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ மற்றும் } \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(3n+1)(6n+1)}{5\cancel{n}(5n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(3+\frac{1}{n}\right)\cancel{n}\left(6+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(5+\frac{1}{n}\right)\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{1}{n}\right)}{\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{5} \times \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{9}{25} = \text{RHS}$$

எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1$

LHS = $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

= $\lim_{n\to\infty} \Sigma \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1+3)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+4)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{n(n+1)\cancel{2}(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{3}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{n^3(1+0)(1+0)}$$

$$= \frac{3}{(1+0)(1+0)} \times \frac{1}{n^3} = 1 = \text{R.H.S}$$

Question 9.
மீன் வள அறிவியலின் முக்கிய பிரச்சனை நீரோடைகளில் உள்ள முட்டையிடத் தகுதியான மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டு இந்தத் தகவலைப் பயன்படுத்தி இனப்பெருக்கக் காலத்தில் ஆற்றுக்குள் நுழையும் மீன் பிடிப்புக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதாகும்.

S என்பது முட்டையிடும் நிலையில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் R என்பது மீன் பிடிப்புக்கு தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையாகும். “பிவர்ட்டன் ஹோல்ட்”ன் இனப்பெருக்கச் சார்பு $R(S) = S/(\alpha S + \beta)$ பா இங்கு α β என்பன மிகை மாறிலிகள். இந்தச் சார்பு இனப்பெருக்க நிலையில் இருக்கும் மீன்களின் எண்ணிக்கை தேவையான அளவு அதிகரிக்கும் போது அறுவடைக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கை தோராயமாக மாறிலியாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

R(S) = $\frac{\mathbf{S}}{(\alpha\mathbf{S}+\beta)}$
இனப்பெருக்கம் அதிகம் வர வாய்ப்பு உள்ளதால்
நாம் lim R(S) ஐக் காண்போம்.
$\therefore \lim_{S\to\infty} R(S) = \lim_{S\to\infty} \frac{S}{\alpha S+\beta}$
=

$$\lim_{S\to\infty} \frac{\not{S}}{\not{S}\left(\alpha+\frac{\beta}{S}\right)}$$

= $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\alpha+\frac{\beta}{S}}$
[∵ S → ∞ ஆகும் பொழுது $\frac{1}{S}$ → 0 ஆகும்]
= $\frac{1}{\alpha+0} = \frac{1}{\alpha}$

∴ இனப்பெருக்கச் R(S) ஆனது ஒரு மாறிலி என
நிருபிக்கப்பட்டது.

Question 10.
ஒரு தொட்டியில் 5000 லிட்டர் நல்ல நீர் உள்ளது என்க. ஒரு லிட்டருக்கு 30 கி அளவு உப்பு கொண்ட உவர் நீர் 25 லி/நிமிடம் என்ற அளவில் தொட்டியில் செலுத்தப்படுகின்றது. 1 நிமிடங்களில் இந்த உவர் 30t நீரின் அடர்த்தி (கிராம் / லிட்டர்) C(t) = 30t/200+t என தரப்பட்டுள்ளது. 1 – 0 எனில் அடர்த்தி எவ்வாறு மாறும்?

தீர்வு :

C(t) = $\frac{30t}{200+t}$
$\lim_{t\to\infty}$ C(t) = $\lim_{t\to\infty} \frac{30t}{200+t} = \lim_{t\to\infty} \frac{30t}{t\left(1+\frac{200}{t}\right)}$

= $\lim_{t\to\infty} \frac{30}{1+\frac{200}{t}} = \frac{30}{0+1}$ = 30

[$\because$ t → ∞ எனில் $\frac{1}{t}$ → 0]

t → ∞ எனில் உவர்நீரின் அடர்த்தி 30 கிராம் ஆகும்.

Ex 9.4

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

Question 1.

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$ என்க

தீர்வு :

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{7}$

$\frac{1}{x}$ = t என்க

x → ∞ எனில், $\frac{1}{x}$ → 0 ஆகும்.

$\therefore$ $\frac{1}{x}$ → 0 எனில், t → 0 ஆகும்

$\therefore \lim_{t\to 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{7}$ = e^7 [$\because \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = e]

$\therefore \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$ = e^7

Question 2.

$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$ = $\left[\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}$ = $e^{\frac{1}{3}}$

[$\because \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = e]

Question 3.

$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

$\frac{1}{x}$ = t என்க

$\therefore \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}} = \lim_{\frac{1}{x} \to 0} (1 + kt)^{mt}$

$= \lim_{t \to 0} (1 + 0)^{m(0)} = \lim_{t \to 0} 1^0 = 1$

Question 4.

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{8x^2+20}\right)^{8x^2+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{8x^2+20}\right)^{8x^2+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{8x^2+20}\right)^{8x^2+20 \times \frac{8x^2+3}{8x^2+20}}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 2x^2+5 & 2x^2+3 \\ & 2x^2+5 \\ & (-)\quad(-) \\ \hline & -2 \end{array}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{8x^2+20}\right)^{8x^2+20}\right]^{\frac{8x^2+3}{8x^2+20}}$$

$$= e^{-8} \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+3}{8x^2+20} \qquad \left[\because \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}\right]$$

$= e^{-8} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2^2}\left(8+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(8+\frac{20}{x^2}\right)}$

$= e^{-8} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{8+\frac{3}{x^2}}{8+\frac{20}{x^2}}\right)$ [∵ x → ∞ எனில் $\frac{1}{x}$ → 0]

Question 5.

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^x . (1 + \frac{3}{x})^2$

$= \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^x . \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^2$

$= e^3 . \lim_{\frac{1}{x}\to 0}(1 + \frac{3}{x})^2$

$[\because \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{k}{x})^x = e^k]$

$= e^3 . (1) = e^3$

Question 6.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^3}{8}\times 8}$

$= \frac{1}{8} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3}$

$= \frac{1}{8} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^3$

$= \frac{1}{8} \times 1^3 = \frac{1}{8}$ $[\because \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1]$

Question 7.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \times \frac{\alpha \cancel{x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x} \times \beta \cancel{x}}$$

$$= \left(\lim_{\alpha x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \right) \times \left(\lim_{x \to 0} \frac{\alpha x}{\beta x} \right) \times \frac{1}{\left(\lim_{\beta x \to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x} \right)}$$

$$\left[\because \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \right]$$

$$= 1 \times \frac{\alpha}{\beta} \times 1 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \right]$$

Question 8.

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \times \sin 5x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{\frac{5x \times \sin 5x}{5x}} \times \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\cos 2x} \times \frac{2x}{5x} \times \frac{1}{\lim_{5x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= 1 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{5} \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1\right]$$

Question 9.

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\alpha^{n}\right)}{(\sin \alpha)^{m}}$

தீர்வு :

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\alpha^{n}\right)}{(\sin \alpha)^{m}}$

நிலை (i): m = n ஆக இருந்தால்

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^m)}{(\sin \alpha)^m} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^m)}{\alpha^m} \times \frac{\alpha^m}{(\sin \alpha)^m}$$

$$= \lim_{\alpha^m \to 0} \frac{\sin(\alpha^m)}{(\alpha)^m} \times \frac{1}{\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^m}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1^m} = 1 \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1\right]$$

$$\therefore \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m} = 1$$

நிலை (ii) m > n ஆக இருந்தால்

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\alpha^{n}\right)}{(\sin \alpha)^{m}}$ = \lim _{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\alpha^{n}\right)}{\alpha^{n}} \times \frac{\alpha^{n}}{\frac{(\sin \alpha)^{m} \cdot \alpha^{m}}{\alpha^{m}}}

$$= \left(\lim_{\alpha^n \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{\alpha^n}\right) \cdot \frac{\alpha^n}{\alpha^m} \cdot \frac{1}{\left(\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^m}$$

= 1 . $\alpha^{n-m} \times 1 = \alpha^{n-m} = 0$ ($\because$ m > n)

நிலை (iii) m < n ஆக இருந்தால்

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha^n}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^n}{\frac{(\sin \alpha)^m}{\alpha^m} \times \alpha^m}$$

$$= \lim_{\alpha^n \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^n}{\alpha^m} \times \frac{1}{\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^m}$$

= 1 × α^{n-m} × 1 = $\frac{1}{\alpha^{m-n}}$

($\because$ m < n, $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m} \to \infty$)

Question 10.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$

=

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{(a + x - a + x)}{2} \cdot \cos\frac{(a + x + a - x)}{2}}{x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{2x}{2} \cdot \cos\frac{2a}{2}}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos a}{x} = 2\cos a\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= 2\cos a \times 1 = 2\cos a \quad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right]$$

Question 11.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

=

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\times\frac{x^2}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-(b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

[$\because x^2$ ஆல் பெருக்கி வகுக்க]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+a^2-a^2}\times\frac{x^2+b^2-b^2}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-(b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left[\lim_{x^2+a^2\to a^2}\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)-a^2}\right]\times\frac{1}{\left[\lim_{x^2+b^2\to b^2}\frac{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-(b^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+b^2)-b^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2)^{\frac{1}{2}-1}\times\frac{1}{\frac{1}{2}(b^2)^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{(a^2)^{\frac{-1}{2}}}{(b^2)^{\frac{-1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\frac{b}{a}$$

Question 12.

$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\frac{2}{3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc}(\sin x)}{x}$$

$=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

Question 13.

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

தீர்வு :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\tan x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\sin x-\cancel{1}+\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\cancel{\sin x}.\cos x}{\cancel{\sin x}\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\cancel{2}\times\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = 1$$

Question 14.

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x\cos 2x}$$

$$= \lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cos 2x}$$

$$= 2\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\left[\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x\right]}$$

$$= 2\times 1\times \frac{1}{1} = 2 \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$$

Question 15.

$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1-3^x+1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} - \frac{(3^x-1)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x-1}{x}\right) - \lim_{x\to 0} \left(\frac{3^x-1}{x}\right)$

= log 2 – log 3

= log $(\frac{2}{3})$ [$\because \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ = a]

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x}$ = log $(\frac{2}{3})$

Question 16.

$\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(3^x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(3^x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{x} \cdot \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)$

= log 3 . (2) = 2 log 3 = log 3^2 = log 9

Question 17.

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{nx \sin 2x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{nx \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(2 \sin x \cos x)}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ [$\because$ cos 0 = 1]

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{nx \sin 2x} = \frac{1}{2}$

Question 18.

$\lim_{x\to\infty} x\left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}}\right]$

தீர்வு :

$\lim_{x\to\infty} x\left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}}\right]$

$\frac{1}{x} = y$ என்க.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left[3^y + 1 - \cos y - e^y\right]$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{3^y - 1 + 1 + 1 - \cos y - e^y}{y}$$

[1 ஐக் கூட்டி 1ஐ கழிக்க]

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{3y-1}{y}\right] - \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y - 1}{y}\right) + \lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)}{y} \times \frac{y}{y}$$

$$= \log 3 - 1 + \lim_{y\to 0} 2y \frac{\sin^2 \frac{y}{2}}{\frac{y^2}{4} \times 4}$$

$$= \log 3 - 1 + \lim_{y\to 0} \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2$$

$$= \log 3 - 1 + 0 = \log 3 - 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}\right] = \log 3 - 1$$

Question 19.

$\lim_{x\to\infty}$ {x[log(x + a) – log(x)]}

தீர்வு :

$\lim_{x\to\infty}$ {x[log(x + a) – log(x)]}

= $\lim_{x\to\infty}$ x . log $(\frac{x+a}{x})$

= $\lim_{x\to\infty}$ xlog(1 + $\frac{a}{x}$)

= $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\frac{a}{x})\times a}{\frac{1}{x}\times a}$, $\frac{1}{x}$ = y என்க

$= a \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = a(1) = a$

$[\because \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1]$

Question 20.

$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \to \pi} \frac{-\sin 3x}{-\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(3x-3\pi)}{-\sin(2x-2\pi)}$$

$[\because \sin(3x-3\pi) = -\sin 3x; \sin(2x-2\pi) = \sin 2x]$

$$= -\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(3x-3\pi)}{(3x-3\pi)} \times \frac{(3x-3\pi)}{(2x-2\pi)} \times \frac{(2x-2\pi)}{\sin(2x-2\pi)}$$

$$= -\lim_{3x \to 3\pi} \frac{\sin(3x-3\pi)}{(3x-3\pi)} \times \frac{(3x-3\pi)}{(2x-2\pi)} \times \frac{1}{\lim_{2x \to 2\pi} \frac{\sin(2x-2\pi)}{(2x-2\pi)}}$$

$$= -1 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{-3}{2} \quad \left[\because \lim_{x \to \pi} \frac{(3x-3\pi)}{(2x-\pi)} = \frac{3(x-\pi)}{2(x-\pi)} = \frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore \lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = -\frac{3}{2}$$

Question 21.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\operatorname{cosec} x}\right)^{2\operatorname{cosec} x}$$

$y = \operatorname{cosec} x$ என்க $\left[\because \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}\right]$

$\Rightarrow x \to \pi$, எனில் $y \to \operatorname{cosec} \pi$

$\Rightarrow x \to \pi$ எனில் $y \to \infty$ $\left[\because \operatorname{cosec}\pi = \frac{1}{\sin \pi} = \frac{1}{0} = \infty\right]$

$$\therefore \lim_{x\to \pi}\left(1+\frac{1}{\operatorname{cosec} x}\right)^{2\operatorname{cosec} x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^2 = e^2 \qquad \left[\because \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x} = e^2$$

Question 22.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

தீர்வு :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2 x} \qquad \left[\because 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{4}}{\sin^2 x}$$

$$=2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{\left(\frac{x^2}{16}\right)}\times\frac{\frac{x^2}{16}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}\times x^2}$$

$$=2\sqrt{2}\left[\lim_{\frac{x}{4}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)\right]^2\left(\frac{x^2}{16\times x^2}\right)\times\frac{1}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{2}\times 1\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{1}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Question 23.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}\times\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$

(தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$ ஆல் பெருக்க)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\tan x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-1+\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin x.\cos x}{\sin x\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \cancel{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = 1$$

Question 24.

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} \right)^x$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^2-4x+2} \right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\left[\left[1 + \frac{2x-1}{x^{-} - 4x+2} \right]^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}} \right]^{\frac{(2x-1)x}{x^2-4x+2}} \right)$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ x^2-4x+2 & x^2-2x+1 \\ & (-) \;\; (+) \;\; (-) \\ & x-4x+2 \\ \hline & \quad 2x \; -1 \end{array}$$

$$= e^{\left(\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-x}{x^2-4x+2} \right)} \quad \left[\because \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \right]$$

$$= e^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right)} \quad [\because x \to \infty \text{ எனில் } \frac{1}{x} \to 0]$$

$$= e^{\left(\frac{2-0}{1-\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}}\right)} = e^2$$

Question 25.

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1-e^{-x}+1}{\frac{\sin x}{x}\times x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{e^x-1}{x}-\frac{\left(e^{-x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$

$= \frac{\left(\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}\right)-\left(\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}-1}{x}\right)}{\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}}$

($\because \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$ = 1)

$= \frac{1-(-1)}{1} = \frac{2}{1}$ = 2

Question 26.

$\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

தீர்வு :

$\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}$

$= \left(\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \times a\right) - \left(\lim_{x\to0} \frac{e^{bx}-1}{bx} \times b\right)$

$= \log a - \log b = \log(\frac{a}{b})$

Question 27.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

தீர்வு :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \times \left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right)$$

$$= 2(1) \times \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4} \times 4} = 2 \times \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{4}} \right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Question 28.

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} \right)$$

$$= 1 \times \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x . x^2} = 1 \times \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \frac{x^2}{4} \times 4}$$

$$= 2 \times \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

Ex 9.5

Question 1.
$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ R-ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

தீர்வு :
$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
ஒரு இயற்கணித சார்பு, பல்லுறுப்புச் சார்பு இச்சார்பு R-மெய்யெண்கள் தொகுப்பில் தொடர்ச்சி யானது என்பதால் f(x)-ம் R தொடர்ச்சியானது.

Question 2.
பின்வருவனவற்றின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க .
(i) x + sin x
(ii) $x^2 \cos x$
(iii) $e^x \tan x$
(iv) $e^{2x} + x^2$
(v) x.inx

(vi) $\frac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\frac{x^2-16}{x+4}$

(viii) |x + 2| + |x – 1|

(ix) $\frac{|x-2|}{|x+1|}$

(x) cot x + tan x

தீர்வு :

(i) x + sin x

f(x) = x + sin x என்க. பல்லுறுப்பு இயற்கணிதச் சார்பு R-ல் தொடர்ச்சியானது. மேலும் வட்டச்சார்பு sin x- ம் x ∈ IR -ல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) x^2 cos x

f(x) = x^2 cos x இதில் x^2 ஆனது R-ல் தொடர்ச்சியானது.
வட்டச்சார்பு cos x -ம் R-ல் தொடர்ச்சியானது.
f(x) = x^2 cos x -ம் x ∈ R-ல் தொடர்ச்சியானது.

(iii) f(x) = e^x tan x என்க.

e^x -ஆனது R-ல் தொடர்ச்சியானது. tan x-ஆனது π/2-ன் ஒற்றைப்படை மடங்குகளுக்கு R-ல் தொடர்ச்சியற்றது.
∴ f(x) = e^x tan x ஆனது π/2-ன் ஒற்றைப்படை மடங்குகளுக்கு R-ல் தொடர்ச்சியற்றது.

(iv) f(x) = e^{2x} + x^2 என்க .

படிக்குறிச்சார்பு f(x) = e^x, R-ன் எல்லா புள்ளிகளுக்கு, தொடர்ச்சியானது. மேலும் x^2 என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை R-ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது.
∴ f(x) = e^{2x} + x^2 ஆனது R-ன் எல்லா புள்ளி களிலும் தொடர்ச்சியானது.

(v) f(x) = x. ln(x)

பல்லுறுப்புக்கோவை x ஆனது R-ல் தொடர்ச்சியானது. ஆனால்

மடக்கைச் சார்பு lnx ஆனது (x > 0), (0, ∞)-ல் தொடர்ச்சியானது.
∴ f(x) = x ln (x) ஆனது (0, ∞)-ல் தொடர்ச்சியானது.

(vi) f(x) = $\frac{\sin x}{x^2}$

f(x) = x ஆனது x = 0 -ல் வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆனால் sin x ஆனது R-ல் உள்ள எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை .
∴ f(x) ஆனது R -{0} -ல் தொடர்ச்சியானது.

(vii) f(x) = $\frac{x^2-16}{x+4}$

பல்லுறுப்புக் கோவை R-ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது. இருப்பினும் f(x) ஆனது x=-4-ல் வரையறுக்கப்படவில்லை.

∴ f(x) = $\frac{x^2-16}{x+4}$ ஆனது R – {-4} -ல் தொடர்ச்சியானது.

(viii) f(x) = |x + 2| + |x – 1|
மட்டுச்சார்பு R-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

(ix) f(x) = $\frac{|x-2|}{|x+1|}$

மட்டுச்சார்பு R-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது. ஆனால் x = -1 -ல் வளை வரை அமையாது. எனவே f(x)-ஆனது

R – (-1) -ல் மட்டுமே தொடர்ச்சியானது.

(x) f(x) = cot x + tan x
cotx ஆனது -ன் மடங்குகளிலும் tanx ஆனது (2n+1)π/2-லும் தொடர்ச்சியற்றது.
∴ f(x) = cot x + tan x ஆனது (2n+1)π/2 + π/2 -ல் உள்ள புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியற்றது. ⇒ f(x)ஆனது R – nπ/2, n∈ Z-ல் தொடர்ச்சியானது.

Question 3.
பின்வரும் சார்புகளுக்குத் தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்காத புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) f(x) = $\begin{cases} 4x+5, & x \leq 3 \\ 4x-5, & x > 3 \end{cases}$

(ii) f(x) = $\begin{cases} x+2, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ (iii) f(x) = $\begin{cases} x^3-3, & x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$

(iv) f(x) = $\begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ தீர்வு : (i) fx) = $\begin{cases} 4x+5, & x \leq 3 \\ 4x-5, & x > 3 \end{cases}$ $\lim_{x \to 3^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 3^-}$(4x + 5)
= 4(3) + 5 = 17

$\lim_{x \to 3^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 3^+}$ (4x – 5)
= 12 – 5 = 7

$\lim_{x \to 3^-}$ f(x) ≠ $\lim_{x \to 3^+}$ f(x)
∴ f(x) ஆனது x = 3-ல் தொடர்ச்சியற்றது.

(ii) f(x) = $\begin{cases} x+2, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 2^-}$ x^2 = 2^2 = 4

$\lim_{x \to 2^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 2^+}$ x + 2 = 2 + 2 = 4
Also f(2) = x + 2 = 2 + 2 = 4

$\therefore \lim_{x\to 2^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 2^+}$ f(x) = f(2) = 4
∴ f(x) ஆனது R-ல் உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

(iii) f(x) = f(x) = $\begin{cases} x^3 - 3, & x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 2^-}$(x^3 – 3) = 8 – 3 = 5

$\lim_{x\to 2^+}$ f(x) = $\lim_{x\to 2^+}$ x^2 + 1 = 4 + 1 = 5

மேலும் f(2) = x^3 – 3 = 2^3 – 3 = 8 – 3 = 5
$\therefore \lim_{x\to 2^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 2^+}$ f(x) = f(2) = 5
∴ f(x) ஆனது R-ன் எல்லா புள்ளிகளுக்கும், தொடர்ச்சியானது.

(iv) f(x) = $\begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}$ f(x) = $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}$ cos x = cos $\frac{pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}$ f(x) = $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}$ sin x = sin $\frac{pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
மேலும், f($\frac{pi}{4}$) = sin $\frac{pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}$ f(x) = $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}$ f(x) = f($\frac{pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
∴ ஆனது (0, $\frac{pi}{2}$)-ல் தொடர்ச்சியானது.

Question 4.
கொடுக்கப்பட்ட சார்புக்குக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி x_0-இல் தொடர்ச்சியானதா அல்லது தொடர்ச்சியற்றதா எனக் காரணத்துடன் கூறுக.

(i) $x_0 = 1$, f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

(ii) $x_0 = 3$, f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

தீர்வு :

(i) f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$

=

$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$

= $\lim_{x\to 1^-}$ x + 1 = 1 + 1 = 2

$\lim_{x\to 1^+}$ f(x) = $\lim_{x\to 1^+}$ x + 1 = 2

f(1) = 2

$\therefore \lim_{x\to 1^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 1^+}$ f(x) = f(1) = 2

∴ f(x) ஆனது x_0 = 1-ல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-9}{x-3}$

=

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

= $\lim_{x \to 3^-}$ x + 3 = 6

ஆனால் f (3) = 5

∴ $\lim_{x \to 3^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 3^+}$ f (x) ≠ f(3)

∴ f(x)ஆனது x_0 = 3 -ல் தொடர்ச்சியானது.

Question 5.

$\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ என்ற சார்பு (-∞, ∞)-இல் 3, x=1 தொடர்ச்சியானது எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1}$

=

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

= $\lim_{x \to 1^-}$ $(x^2 + x + 1)$ = 3

$\lim_{x \to 1^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^+}$ $(x^2 + x + 1)$

$\lim_{x \to 1^-}$ f (x) = $\lim_{x \to 1^+}$ f(x) = f (1)= 3

∴ f(x)ஆனது (-∞, ∞)-ல் தொடர்ச்சியானது.

Question 6.

f (x) = $\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்ட x = 1 சார்பில் x = 1-இல் சார்பு தொடர்ச்சியானது எனில் -ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-}$ f(x) = $\frac{x^4-1}{x-1}$

= $\lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2)^2-1^2}{x-1}$

= $\lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$

=

$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)}$

= (2) (2) = 4

$\lim_{x \to 1^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^+}$ α =

$\lim_{x \to 1^+}$ α= $\lim_{x \to 1^+}$ $(x^2 + 1)(x + 1) = 4$

$\lim_{x \to 1^+}$ α = 4

f(x) ஆனது x = 1, ஒரு பக்க எல்லை = சார்பின் மதிப்பு.

∴ f(1) = α = 4

∴ α = 4

Question 7.

f(x) = $\begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$, என்ற சார்பின் வளைவரையை வரைக. இச்சார்பு (- 0,)-ல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

தீர்வு :

f (x) = $\begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$

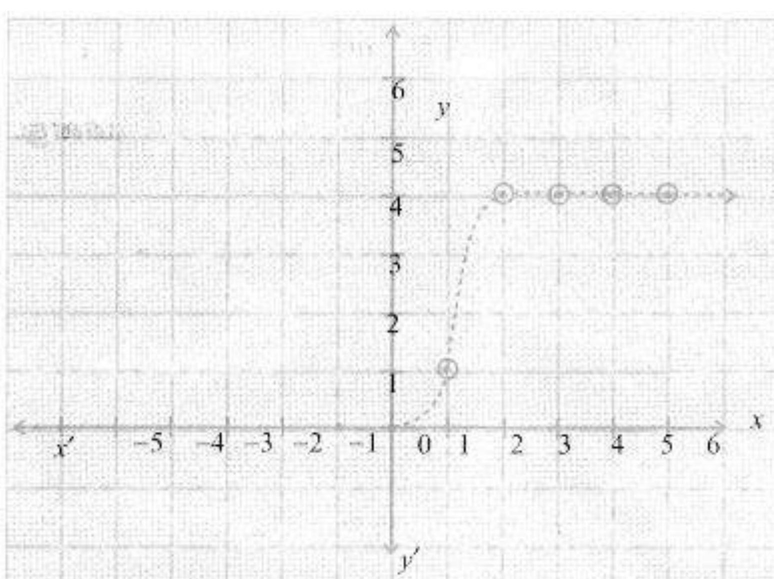
$\lim_{x \to 2^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 2^-}$ x^2 = 4

$\lim_{x \to 2^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 2^+}$ 4 = 4

மற்றும் f(2) = 4

∴ $\lim_{x \to 2^+}$ f (x) = $\lim_{x \to 2^+}$ f (x) = f(2) = 4 ஃ ∴ f(x) ஆனது (-∞, ∞)-ல் தொடர்ச்சியானது.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0	1	4	4	4	4



Question 8.

f மற்றும் g தொடர்ச்சியான சார்புகள் மேலும் f(3) = 5 மற்றும் $\lim_{x \to 3}$[2 f (x) – g(x)] = 4, எனில் g(3)-ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$\lim_{x \to 3}$[(2f (x) – g(x)] = 4

f(3) = 5

⇒ $\lim_{x \to 3}$ 2 . f (x) – $\lim_{x \to 3}$ g(x) = 4

⇒ 2. f(3) – g(3) = 4 [∵ f(x), g(x) தொடர்ச்சியான சார்பு]

⇒ 2(5) – g(3) = 4

⇒ 10 – g(3) = 4

⇒ -g(3) = 4 – 10

⇒ -g(3) = -6

⇒ g(3) = 6

Question 9.

சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க. இந்தப் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளிகளுக்கு f-க்கு வலப்பக்கத் தொடர்ச்சி, இடப்பக்கத் தொடர்ச்சி மற்றும் எதுவுமில்லை என உள்ளதைக் காண்க. f -ன் வளைவரையை வரைக.

(i) f (x) = $\begin{cases} 2x+1, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

(ii) f(x) = $\begin{cases} (x-1)^3, & x < 0 \\ (x+1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$

தீர்வு :

$\lim_{x \to 1^-}$ f (x) = $\lim_{x \to 1^-}$ 3x = 3

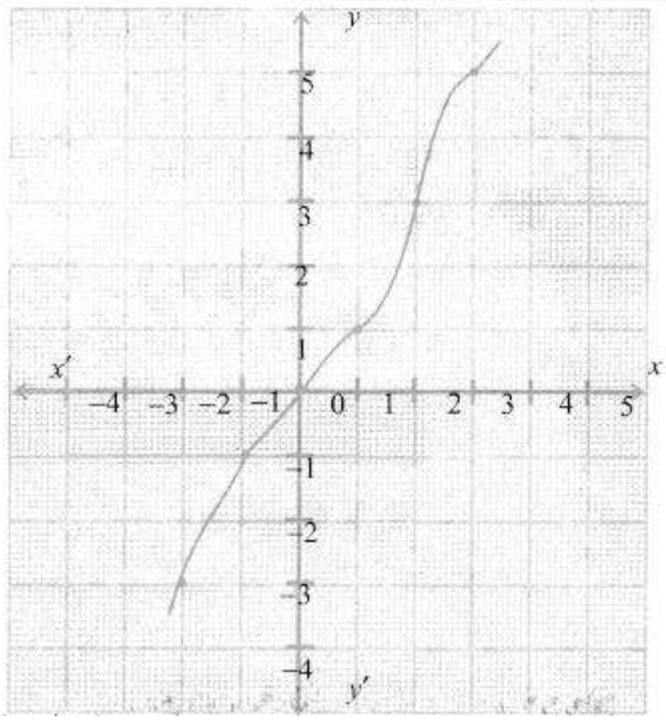
$\lim_{x \to 1^+}$ f (x) = $\lim_{x \to 1^+}$ 2x – 1 = 2 – 1 = 1

$\lim_{x \to 1^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^+}$ f(x)

f(1) = (2x – 1) = 2(1) – 1 = 2 – 1 = 1

∴ f(x) ஆனது x = 1-ல் தொடர்ச்சியானது.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2x + 1$ $= -3$	$2x + 1$ $= -1$	$3x$ $= 0$	$2x - 1$ $= 1$	$2x - 1$ $= 3$	$2x - 1$ $= 5$



(ii) f(x) = $\begin{cases} (x-1)^3, & x < 0 \\ (x+1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$

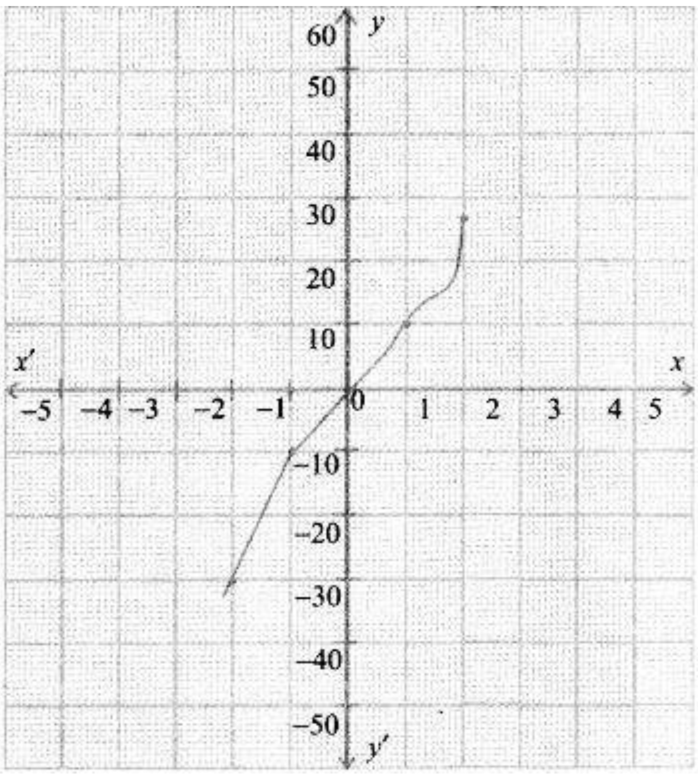
$\lim_{x \to 1^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 0^-}$ $(x - 1)^3$ = $(-1)^3$ = -1

$\lim_{x \to 0^+}$ f(x) = $\lim_{x \to 1^-}$ $(x + 1)^3$ = 1^3 = 1

f(0) = $(x + 1)^3$ = 1^3 = 1

∴ $\lim_{x \to 0^-}$ f(x) = $\lim_{x \to 0^+}$ f(x) = f(0)

x	-1	-2	0	1	2
$f(x)$	$(x-1)^3$ $=-8$	$(x-1)^3$ $=-27$	$(x+1)^3$ $=1$	$(x+1)^3$ $=8$	$(x+1)^3$ $=27$



Question 10.

f பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:

$$f(x) = \begin{cases} 0. & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \leq x < 3 \\ 4 - x, & x \geq 3 \end{cases}$$ இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியானதா?

தீர்வு :

$$\begin{cases} 0. & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 3 \\ 4 - x, & x \ge 3 \end{cases}$$

(i) x = 0 எனும் புள்ளியில்

$\lim_{x\to 0^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 0^-}$ 0 = 0

$\lim_{x\to 0^+}$ f(x) = x = 0 மற்றும் f (0) = x = 0

$\lim_{x\to 0^-}$ f(x) = $\lim_{x\to 0^+}$ f(x) = f(0) = 0

∴ f(x) ஆனது x = 0 -ல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) x = 1 என்னும் புள்ளியில்

$\lim_{x\to 1^-}$ f (x) = x = 1

$\lim_{x\to 1^+}$ f(x) = $-x^2 + 4x - 2$ = -1 + 4- 2 = 4 – 3= 1

f(1) = $-x^2 + 4x - 2$ = -1 + 4 – 2 = 1

$\lim_{x\to 1^-}$ f (x) = $\lim_{x\to 1^+}$ f (x) = (1) = 1

∴ f(x) ஆனது x = 1 -ல் தொடர்ச்சியானது.

(iii) x = 3 எனும் புள்ளியில்

$\lim_{x\to 3^-}$ f (x) = $\lim_{x\to 3^-}$ $-x^2 + 4x - 2$

= $-(3)^2 + 4(3) - 2$

= -9 + 12 – 2 = 1

$\lim_{x\to 3^+}$ f (x) = $\lim_{x\to 3^+}$ 4 – x = 4 – 3 = 1

f(3) = 4 – 3 = 1| .

∴ $\lim_{x\to 3^-}$ f (x) = $\lim_{x\to 3^+}$ f(x) = f (3) = 1

∴ f(x) ஆனது x= 3 -ல் தொடர்ச்சியானது.

Question 11.
பின்வரும் சார்புகளில் எவற்றுக்கு x = x_0 ல் நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனக் காண்க?
தொடர்ச்சியற்ற தன்மை இருக்குமானால், f -ன் x ≠ x_0 -க்கு ஏற்றவாறு R-இல் தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறு g என்ற சார்பைக் காண்க.

(i) f(x) = $\frac{x^2-2x-8}{x+2}$, x_0 = -2
(ii) f(x) = $\frac{x^3+64}{x+4}$, x_0 = -4
(iii) f(x) = $\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$, x_0 = 9
தீர்வு:
f(x) = $\frac{x^2-2x-8}{x+2}$, x_0 = -2
f(x) ஆனது x =-2-ல் அமையாது.
∴ இதற்கு x=- 2 – ல் நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது.
$\lim_{x\to-2}$ f(x) = $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-2x-8}{x+2}$

$\lim_{x\to-2}$ f(x) = $\lim_{x\to-2} \frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)}$
= $\lim_{x\to-2}$ x – 4 = -2 -4 = -6
∴ g(x) ஓர் தொடர்ச்சியான சார்பு

g(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x+2} & , x \neq -2 \\ -6, & x = -2 \end{cases}$ என எழுதலாம்.

(ii) f(x) = $\frac{x^3+64}{x+4}$

x = – 4 -ல் சார்பு அமையாது.

∴ f(x) ஆனது x = -4 -ல் நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை பெற்றுள்ளது.

$\lim_{x\to-4}$ f(x) = $\lim_{x\to-4}$ $\frac{x^3+64}{x+4}$

= $\lim_{x\to-4}$ $\frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{(x+4)}$

= $\lim_{x\to-4}$ x^2 – 4x + 16

= $(-4)^2$ -4(-4) + 16

= 16 + 16 + 16 = 48

∴ தொடர்ச்சியான சார்பு g(x) ஆனது.

g(x) = $\begin{cases} \frac{x^3+64}{x+4} & , x \neq -4 \\ 48 & , x = -4 \end{cases}$ என எழுதலாம்.

(iii) f(x) = $\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

x = 9 -ல் வளைவரை அமையாது.

∴ f(x) ஆனது x = 9 -ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மையை பெற்றுள்ளது.

$\lim_{x\to9}$ f(x) = $\lim_{x\to9}$ $\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

= $\lim_{x\to9}$ $\frac{(3-\sqrt{x})}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$

= $\lim_{x\to9}$ $\frac{1}{(3+\sqrt{x})} = \frac{1}{3+\sqrt{9}}$

= $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியை நீக்கியபின் தொடர்ச்சியான சார்பு g(x) ஆனது.

g(x) = $\begin{cases} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} & , x \neq 9 \\ \frac{1}{6} & , x = 9 \end{cases}$ என எழுதலாம்.

Question 12.

g(x) = $\begin{cases} x^2 - b^2 & ; x < 4 \\ bx + 20 & ; x \geq 4 \end{cases}$ என்ற சார்பு (-∞, ∞) ல் தொடர்ச்சியானது எனில் மாறிலி ந -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - b^2 & ; x < 4 \\ bx + 20 & ; x \geq 4 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^-} x^2 - b^2$

$= 4^2 - b^2 = 16 - b^2$ …………(1)

$\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^+} bx + 20$

$= b(4) + 20$ …………. (2)

$g(4) = bx + 20$

$= b(4) + 20$ …………..(3)

g(x) ஆனது (-∞, ∞)ல் தொடர்ச்சியானது என்பதால்

$\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^-} g(x) = g(4)$

(1), (2), (3)

$16 - b^2 = 4b + 20$

$\Rightarrow b^2 + 4b + 4 = 0$

$\Rightarrow (b + 2)(b + 2) = 0$

$\Rightarrow (b + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow b + 2 = 0$

$\Rightarrow b = -2$

Question 13.

f(x) = x sin π/x என்க. f(0) ன் எந்த மதிப்புக்கு எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்?

தீர்வு :

$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$

$-x \leq x \sin \frac{\pi}{x} \leq x$

g(x) = -x, f(x) =x sin $\frac{\pi}{x}$

h(x) = x

$\lim_{x\to 0}$ g(x) = 0, $\lim_{x\to 0}$ h(x) = 0

இடையீட்டுத் தேற்றத்தின்படி

$\lim_{x\to 0}$ x sin $\frac{\pi}{x}$ = 0 = f(0)

⇒ f(0) = 0

f(x) தொடர்ச்சியானதாக இருக்க வேண்டும் எனில்

$\lim_{x\to 0}$ x sin $\frac{\pi}{x}$ = 0 = f(0)

⇒ f(0) = 0

Question 14.

f(x) = $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ என்ற சார்பு x = 1-ல் வரையறுக்கப் படவில்லை f(1)-ன் எந்து மதிப்பிற்கு x = 1-ல் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்?

தீர்வு:

f(x) = $\frac{x^2-1}{x^3-1}$

f(x) ஆனது x= 1-ல் வரையறுக்கப்படவில்லை .

∴ $\lim_{x\to 1}$ f(x) = $\lim_{x\to 1}$ $\frac{x^2-1}{x^3-1}$

= $\lim_{x\to 1}$ $\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

= $\lim_{x\to 1}$ $\frac{x+1}{x^2+x+1}$

= $\frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$

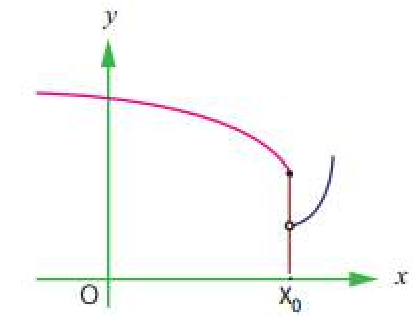
x = 1 -ல் f(x) தொடர்ச்சியானதாக இருக்க,

$\lim_{x\to 1}$ f(x) = f (1) = $\frac{2}{3}$

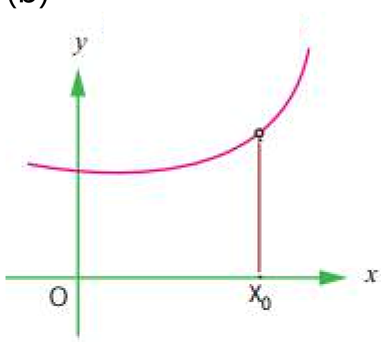
⇒ f(x) = $\frac{2}{3}$

Question 15.
பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு x = x_0 -ல் எவ்வாறு தொடர்ச்சியற்று உள்ளது எனக்கூறுக?

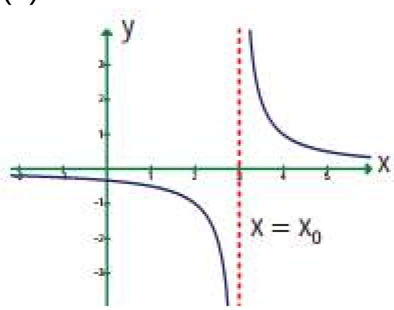
(a)



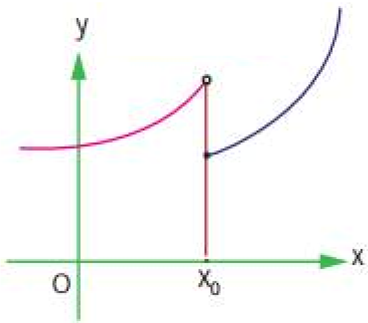
(b)



(c)



(d)



தீர்வு :

(a) இடது பக்க எல்லையும் வலது பக்க எல்லையும் $x = x_0$ -ல் சமமாக இல்லை .

(b) $x = x_0$ f(x) -ன் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை .

∴ $x = x_0$ -ல் தொடர்ச்சியற்றதாய் அமையும்.

(c) $x = x_0$ -ல் f(x) ன் எல்லை அமையாது.

(d) $x = x_0$ -ல் இடதுபக்க எல்லையும் வலது பக்க எல்லையும் சமமாக இல்லை.

Ex 9.6

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

Question 1.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

(1) 1

(2) 0

(3) ∞

(4) -∞

குறிப்பு :

-1 ≤ sinx ≤ 1

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\frac{1}{8}$ = 0

விடை :

(2) 0

Question 2.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

(1) 2

(2) 1

(3) -2

(4) 0

விடை :

(3) – 2

Question 3.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(1) 0

(2) 1

(3) √2

(4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

விடை :

(4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

Question 4.
$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}}$

(1) 1

(2) -1

(3) 0

(4) 2

குறிப்பு :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} \times \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} \quad [\sqrt{\theta} \text{ ஆல் பெருக்கி வகுக்க}]$$

$$= \left(\lim_{\sqrt{\theta} \to 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\right) \times \lim_{\theta \to 0} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \quad [\because \theta \to 0 \text{ எனில் } \sqrt{\theta} \to 0]$$

$$= 1 \times \lim_{\theta \to 0} \sqrt{\frac{1}{\frac{\sin \theta}{2}}} \quad \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= 1 \times \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \times 1 = 1$$

விடை :
(1) 1

Question 5.
$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$

(1) e^4

(2) e^2

(c) e^3

(d) 1

விடை :

(1) e

Question 6.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

(1) 1

(2) 0

(3) -1

(4) $\frac{1}{2}$

விடை :

(4) $\frac{1}{2}$

Question 7.

$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x-b^x}{x}$

(1) log ab

(2) log $(\frac{a}{b})$

(3) log$(\frac{b}{a})$

(4) $\frac{a}{b}$

விடை :

(2) log $(\frac{a}{b})$

Question 8.
$\lim_{x \to 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1^x}{x^2}$

(1) 2 log 2

(2) 2 $(\log 2)^2$

(3) log 2

(4) 3 log 2

(விடை :

(2) 2 $(\log 2)^2$

Question 9.
f (x) = x(-1)[latex]\frac{1}{x}[/latex] x ≤ 10, இங்கு x என்பது x-க்குச் சமமான அல்லது குறைவான மீப்பெரு முழு எண்,
எனில் $\lim_{x \to 0}$ f(x) ன் மதிப்பு
(1) -1
(2) 0
(3) 2
(4) 4

விடை :
(2) 0

Question 10.
$\lim_{x \to 3}$ [x] =

(1) 2

(2) 3

(3) மதிப்பு இல்லை

(4) 0

குறிப்பு :
$\lim_{x \to 3^-}$ [x] = 2,
$\lim_{x \to 3^+}$ (x) = 3
விடை :
(3) மதிப்பு இல்லை

Question 11.
f(x) = $\left\{\begin{array}{cc} 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ -3x+5 & 1 \end{array}\right.$ எனில்,
(1) $\lim_{x \to 1}$ f (x) = 1
(2) $\lim_{x \to 1}$ f (x)= 3
(3) $\lim_{x \to 1}$ f(x) = 2
(4) $\lim_{x \to 1}$ f(x) இல்லை
குறிப்பு :
$\lim_{x \to 1^+}$ f (x) = -3(1) + 5 = 2;
$\lim_{x \to 1^-}$ f (x) = 3(1) = 3
விடை :
(4) $\lim_{x \to 1}$ f(x) இல்லை

Question 12.
f: R → R என்பது f(x) = [x – 3] + [x – 4], x ∈ R, என வரையறுக்கப்பட்டால் $\lim_{x \to 3^-}$ f(x) -ன் மதிப்பு
(1) – 2
(2) -1
(3) 0
(4) 1

விடை :
(3) 0

Question 13.

$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 0

குறிப்பு :

$\lim_{x\to 0}$ e^x – $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ = 1 – 1 = 0

விடை :

(4) 0

Question 14.

If $\lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{\tan 3x}$ = 4 எனில் p ன் மதிப்பு

(1) 6

(2) 9

(3) 12

(4) 4

விடை :

(3) 12

Question 15.

$\lim_{\alpha\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\alpha - \frac{\pi}{4}}$ -ன் மதிப்பு

(1) √2

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) 1

(4) 2

விடை :

(1) √2

Question 16.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$ மதிப்பு |

(1) $\frac{1}{2}$

(2) 0

(3) 1

(4) ∞

குறிப்பு:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$ = $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}\left[1+\frac{1}{n}\right]$ = $\frac{1}{2}$

விடை :

(1) $\frac{1}{2}$

Question 17.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

(1) 1

(2) e

(3) $\frac{1}{e}$

(4) 0

விடை :

(1) 1

Question 18.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}$

(1) 1

(2) e

(3) $\frac{1}{2}$

(4) 0

விடை :

(1) 1

Question 19.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$

(1) 1

(2) – 1

(3) 0

(4) ∞

விடை :

(4) ∞

Question 20.

$\lim_{x \to k^-}$ x – [x]-ன் மதிப்பு இங்கு k

(1) -1

(2)1

(3) 0

(4) 2

குறிப்பு :

$\lim_{x \to k^-}$ x – [x] = k = (k – 1) = 1

விடை :

(2) 1

Question 21.

x = $\frac{3}{2}$ -ல் f(x) = $\frac{|2x-3|}{2x-3}$ – என்பது

(1) தொடர்சசியானது

(2) தொடர்ச்சியற்றது

(3) வகையிடத்தக்கது

(4) பூஜ்ஜியமற்றது

விடை :

(2) தொடர்ச்சியற்றது

வஎன்

x ; x ஒரு விகிதமுறா எண்

Question 22.

f: R → R என்பது

$$f(x)=\begin{cases} x & ; x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ 1-x & ; x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$$

எனில் f என்பது

(1) x = $\frac{1}{2}$ ல் தொடர்ச்சியற்றது

(2) x = $\frac{1}{2}$ ல் தொடர்ச்சியானது

(3) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது

(4) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியற்றது

விடை :

(2) x = $\frac{1}{2}$ ல் தொடர்ச்சியானது !

Question 23.
சுராவின் f(x) = $\frac{x^2-1}{x^3+1}$, x = -1 ஆம் வகுப்பு கணிதவியல் f(-1)-ன் எம்மதிப்பிற்கு இந்த சார்பு தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்.
(1) $\frac{2}{3}$
(2) $-\frac{2}{3}$
(3) 1
(4) 0
குறிப்பு :
⇒ f (x) = $\begin{cases} \frac{x-1}{x^2-x+1}, & x \neq -1 \\ P, & x = -1 \end{cases}$

⇒ f(-1) = $-\frac{2}{3}$
(விடை :
(2)- $\frac{2}{3}$

Question 24.
f என்ற சார்பு [2, 5] -இல் தொடர்ச்சியானது என்க. x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் விகிதமுறு மதிப்புகளை மட்டுமே பெறும். மேலும் f(3) = 12 எனில் f(4.5)-ன் மதிப்பு
(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5} /latex](2)12(3)17.5(4)[latex] \frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$
குறிப்பு :
f ஒரு மாறிலி சார்பு.
விடை :
(2) 12

Question 25.
f -என் சார்பு f(x) = $\frac{x-|x|}{x}$, x ≠ 0 என வரையறுக்கப்பட்டு f(0) = 2 எனில் ரீ என்பது
(1) எங்கும் தொடர்ச்சியானது அல்ல
(2) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது
(3) x = 1ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.
(4) x = 0-ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

விடை :

(4) $x = 0$ -ஐ தவிர எல்லா X மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது