باب 11

الجبرا

(Algebra)

11.1 تعارف (Introduction)

اب تک ہم نے اعداد اور اشکال کے بارے میں پڑھا ہے اور اعداد، اعداد پر عملیات اور اعداد کی خصوصیات کے بارے میں بھی پڑھا ہے، ہم نے اعداد کی اس جانکاری کو اپنی روز مرہ زندگی کے مختلف مسئلوں کو حل کرنے پر استعمال بھی کیا۔ ریاضی کی وہ شاخ جس میں ہم اعداد کے بارے میں پڑھتے ہیں ”حساب“ کہلاتی ہے۔ ہم نے دو اور سہ ابعادی (two and three dimensional) اشکال اور ان کی خصوصیات کے بارے میں بھی پڑھا ہے۔ ریاضی کی وہ شاخ جس میں ہم اشکال کے بارے میں پڑھتے ہیں ”جیومیٹری“ کہلاتی ہے۔ اب ہم ریاضی کی ایک اور شاخ کے بارے میں پڑھنے جارہے ہیں جس کو ”الجبرا“ کہتے ہیں۔

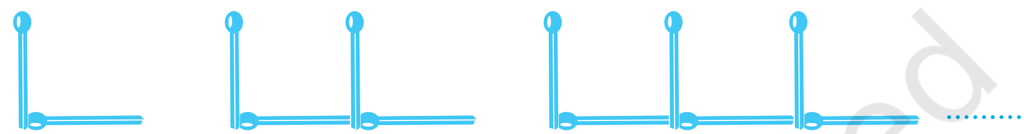
جس نئی شاخ کو ہم پڑھنے جارہے ہیں اس کی اصل خاصیت حروف کا استعمال ہے، حروف کا استعمال ہمیں عام طریقے سے اصول (rules) اور فارمولے لکھنے میں مددگار ہوگا۔ حروف کا استعمال کرکے ہم کسی مخصوص عدد کے بارے میں ہی نہیں بلکہ ہر عدد کے بارے میں بات کرسکتے ہیں۔ دوسرے یہ کہ ان حروف کا استعمال نا معلوم مقدار کو ظاہر کرنے کے لیے کیا جاسکتا ہے۔ نا معلوم کو معلوم کرنے کے طریقے سیکھنے سے ہمارے اندر روز مرہ زندگی کے مسائل اور مختلف معموں کو حل کرنے کی صلاحیت بڑھتی ہے۔ تیسرے یہ کہ کیونکہ حروف اعداد کے لیے ہی استعمال ہوتے ہیں اس لیے اعداد پر کیے جانے والے سبھی عملیات ان حروف پر بھی نافذ ہوتے ہیں جس کی وجہ سے ہم یہ الجبری عبارتوں اور ان کی خصوصیات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

آپ الجبرا کو بہت دلچسپ اور کارآمد پائیں گے۔ یہ مختلف سوالات کو حل کرنے میں بہت مددگار ہوتا ہے۔ آیئے ہم اپنے مطالعہ کا آغاز آسان مثالوں سے کریں۔

11.2 ماچس کی تیلیوں کے پیٹرن (Matchstick Patterns)

امینہ اور سریتا ماچس کی تیلیوں سے پیٹرن بنا رہی ہیں۔ انھوں نے طے کیا کہ وہ انگریزی کے حروفِ تہجی کے آسان پیٹرن بنائیں گی۔ امینہ نے دو تیلیاں لیں اور حرف L بنایا جیسا کہ شکل (a)11.1 میں دکھایا گیا ہے۔

پھر سریتا نے بھی دو تیلیاں لیں اور اس نے بھی حرف L بنایا اور امینہ کے بنائے ہوئے L کے برابر رکھ دیا (شکل (b)11.1)۔



شکل 11.1

پھر امینہ نے ایک اور L بنا کر جوڑ دیا اور یہ سلسلہ چلتا گیا جیسا کہ شکل (c) 11.1 میں نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔تبھی ان کا ایک دوست اپّو آ گیا۔ اس نے اس پیٹرن کو دیکھا۔ اپّو کو سوالات کرنے کی بہت عادت ہے اس نے لڑکیوں سے پوچھا۔ سات L بنانے میں کتنی تیلیاں درکار ہوں گی؟ امینہ اور سریتا دونوں اصول پسند لڑکیاں ہیں۔ وہ یہ پیٹرن بناتی گئیں۔ 1L، 2L، 3L وغیرہ۔ اور ان کے لیے ایک جدول بھی تیار کیا۔

جدول 1

بنائے گئے "L" کی تعداد	1	2	3	4	5	6	7	8	......	......
مطلوبہ تیلیوں کی تعداد	2	4	6	8	10	12	14	16	......	......

اپّو کو اپنے سوال کا جواب اس جدول سے مل گیا۔ سات L بنانے کے لیے 14 تیلیوں کی ضرورت ہوگی۔

جدول لکھتے ہوئے امینہ کو محسوس ہوا کہ مطلوبہ تیلیوں کی تعداد L کی تعداد کی دو گنا ہے۔

آسانی کے لیے ہم L کی تعداد کو n لیتے ہیں۔ اگر ایک L بنایا گیا تو $n = 1$ ہوگیا۔ اگر 2L بنائے گئے تو $n = 2$ ہوگا اور اسی طرح آگے بھی۔ اس طرح n میں سے 1، 2، 3، کوئی بھی طبعی عدد ہوسکتا ہے۔ تب ہم لکھتے ہیں۔ مطلوبہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد $= 2 \times n$

$2 \times n$ لکھنے کے بجائے ہم $2n$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یاد رکھیے کہ $2n$ اور $n \times 2$ ایک جیسے ہی ہیں۔

امینہ نے اپنے دوستوں سے کہا کہ اس کا اصول یہ بتا سکتا ہے کہ کتنے L بنانے میں کتنی تیلیاں درکار ہوں گی۔

اس طرح اگر $n = 1$ ہے تو مطلوبہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد $= 2 \times 1 = 2$ ہوگی

اگر $n = 2$ ہے تو مطلوبہ تبدیلیوں کی تعداد $= 2 \times 2 = 4$ ہوگی

اگر $n = 3$ ہے تو مطلوبہ تیلیوں کی تعداد $= 2 \times 3 = 6$ ہوگی

یہ اعداد جدول 1 میں دیے گئے اعداد جیسے ہی ہیں۔

سریتا نے کہا، یہ اصول تو بڑا زبردست ہے۔ اس اصول کا استعمال کر کے تو میں یہ بھی بتا سکتی ہوں کہ 100L بنانے کے لیے کتنی تیلیوں کی ضرورت ہوگی۔ اگر اصول معلوم ہو تو مجھ کو L بنا کر تیلیاں گننے اور جدول بنانے کی بھی ضرورت نہیں ہوگی۔

کیا آپ سریتا کی بات کو درست مانتے ہیں؟

11.3 متغیر کا تصور (The Idea of a Variable)

اوپر دی گئی مثال میں ہم نے ایک ایسا اصول معلوم کیا جس کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ "L" کا پیٹرن بنانے میں کتنی ماچس کی تیلیوں کی ضرورت ہوگی۔ یہ اصول تھا:

مطلوبہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد $= 2n$

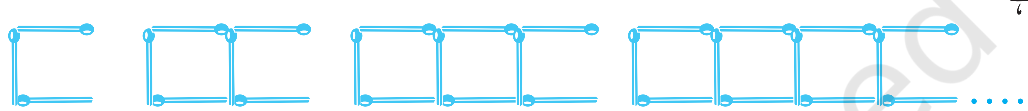
پیٹرن میں L کی تعداد کو ہم n سے ظاہر کر رہے ہیں۔ اور n کی قیمت 1، 2، 3، 4، .... میں سے کوئی بھی ہوسکتی ہے۔ ذرا جدول 1 کو پھر سے ایک بار دیکھیے۔ اس جدول میں n کی قیمت مستقل بدل رہی ہے۔ (بڑھ رہی ہے) نتیجہ کے طور پر تیلیوں کی تعداد بھی بدل رہی ہے (بڑھ رہی ہے)۔

متغیر کی ایک مثال n ہے۔ اس کی قدر طے نہیں ہے۔ اس کی قدر 1، 2، 3، 4، ... میں سے کوئی بھی ہوسکتی ہے۔ مطلوبہ تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کا اصول ہم نے متغیر n کا استعمال کر کے لکھا۔ لفظ متغیر کی قدر طے نہیں ہوتی ہے۔ اس کی مختلف قدریں ہوسکتی ہیں۔

اب ہم ماچس کی تیلیوں کے پیٹرن کی ایک اور مثال لیتے ہیں جس سے ہم متغیر کے بارے میں اور زیادہ جان سکیں گے۔

11.4 ماچس کی تیلیوں کے کچھ اور پیٹرن (More Matchstick Patterns)

امینہ اور سریتا کو ماچس کی تیلیوں سے پیٹرن بنانا بہت دلچسپ لگا۔ اب وہ انگریزی حرف 'C' بنانے کا پیٹرن بنانا چاہتی ہیں۔ ایک C بنانے کے لیے ان کو تین تیلیوں کی ضرورت ہوگی جیسا کہ شکل (a)11.2 میں دکھایا گیا ہے۔



(a) (b) (c) (d)

شکل 11.2

جدول 2 میں C کے پیٹرن بنانے کے لیے مطلوبہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد دکھائی گئی ہے۔

جدول 2

C کی تعداد	1	2	3	4	5	6	7	8	....	....	....
ماچس کی تیلیوں کی تعداد	3	6	9	12	15	18	21	24	....	....	....

کیا آپ جدول میں چھوڑی گئی خالی جگہوں کو پر کر سکتے ہیں؟

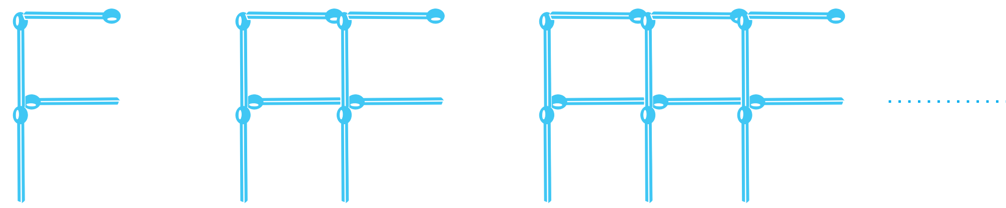
سریتا نے اس کا ایک اصول بنایا۔

مطلوبہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد $= 3n$

اس نے C کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے حرف n کا استعمال کیا ہے۔ n ایک متغیر ہے جس کی قیمت 1، 2، 3، 4، .... میں سے کوئی بھی ہوسکتی ہے کیا آپ کو سریتا کی بات درست لگتی ہے؟

یاد کیجیے کہ $3n$ اور $3 \times n$ ایک ہی ہیں۔

اس کے بعد امینہ اور سریتا F کے پیٹرن بنانا چاہتی ہیں۔ انھوں نے 4 تیلیوں کا استعمال کر کے ایک F بنایا جیسا کہ نیچے شکل (a)11.3 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.3

کیا اب آپ F کا پیٹرن بنانے کا اصول لکھ سکتے ہیں؟

کچھ اور حروف یا ایسی اشکال کے بارے میں سوچیے جو ماچس کی تیلیوں سے بنائے جاسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر (⊔) U، (V) V، (△) مثلث اور (□) وغیرہ کوئی پانچ اشکال چنیے۔ ان ماچس کی تیلیوں سے بنائے جانے والے پیٹرن کے لیے اصول بھی لکھیے۔

11.5 متغیر کی کچھ اور مثالیں (More Examples of Variables)

ہم نے متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے حرف 'n' کا استعمال کیا ہے 'm' کیوں نہیں استعمال کیا؟ n میں کوئی خاص بات نہیں ہے۔ کوئی بھی حرف استعمال کیا جاسکتا ہے۔

''متغیر کو کسی بھی حرف m، l، p، x، y، z وغیرہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یاد رکھئے متغیر ایک عدد ہی ہوتا ہے جس کی قدر طے نہیں ہے۔ مثال کے طور پر عدد 5 یا عدد 100 یا کوئی اور دیا گیا عدد متغیر نہیں ہوتا کیونکہ ان کی قدریں طے ہیں۔ اسی طرح کسی مثلث کے زاویوں کی تعداد تین طے ہے۔ یہ ایک متغیر نہیں ہے۔ کسی چوکور کے کونوں کی تعداد (4) بھی طے ہے۔ یہ بھی متغیر نہیں ہے لیکن اوپر دی گئی مثالوں میں n، متغیر ہے۔ اس کی قیمت 1، 2، 3، 4،... میں سے کوئی بھی ہوسکتی ہے۔

آیئے اب ہم متغیر کا استعمال کچھ اور جانی پہچانی صورتوں میں کرتے ہیں۔

کچھ طلبا اسکول کی کتابوں کی دکان سے کاپیاں خریدنے جاتے ہیں۔ ایک کاپی کی قیمت 5 روپے ہے۔ منو 5 کاپیاں اور اپّو 7 کاپیاں خریدنا چاہتا ہے اور سارا 4 کاپیاں خریدنا چاہتی ہے۔ ان طلبا کے پاس کتنے روپے ہونے چاہیے جب وہ کاپیاں خریدنے دکان پر جائیں؟

یہ اس بات پر منحصر ہے کہ طلبا کو کتنی کاپیاں خریدنی ہیں ان طلبا نے مل کر ایک جدول بنایا۔

جدول 3

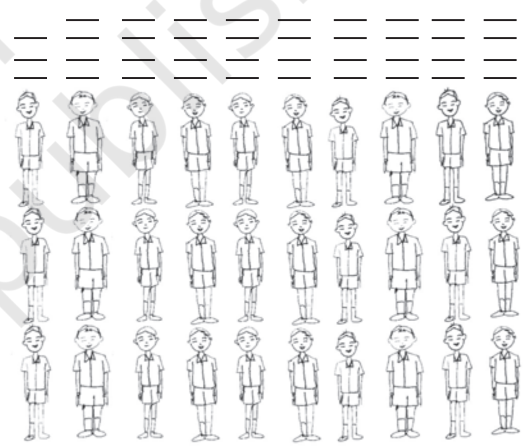
کاپیوں کی مطلوبہ تعداد	1	2	3	4	5	—	m	—
کل قیمت روپے میں	5	10	15	20	25	—	$5m$	—

1، 2، 3، 4،... میں کوئی بھی قیمت ہوسکتی ہے۔ m کاپیوں کی کل قیمت درج ذیل اصول سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

کل خرچ روپے میں = 5 × کاپیوں کی مطلوبہ تعداد = $5m$

اگر منّو پانچ کاپیاں خریدنا چاہتا ہے تو $m = 5$ لیجیے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ منّو کے پاس اسکول کی دکان پر جانے کے لیے 5 × 5 ₹ یا 25 ₹ ہونے چاہیے۔

آیئے ایک اور مثال لیتے ہیں۔ اسکول میں یوم جمہوریہ کی تقریبات میں مہمان خصوصی کو سلامی دینے کے لیے طلبا قطاروں میں کھڑے ہوئے ہیں ہر قطار 10 طلبا پر مشتمل ہے (شکل 11.4)۔ سلامی کے وقت طلبا کی کتنی تعداد ہوگی؟



شکل 11.4

طلبا کی تعداد قطاروں کی تعداد پر منحصر ہوگی۔ اگر 1 قطار ہے تو 10 ہوں گے۔ اگر 2 قطاریں ہیں تو 2×10 یا 20 طلبا ہوں گے۔ اگر یہاں قطاروں کی تعداد 'r' ہے تو سلامی میں طلبا کی تعداد '10r' ہوگی۔ یہاں پر 'r' ایک متغیر ہے جو کہ قطاروں کی تعداد کو ظاہر کررہا ہے۔ اور اس کی قیمت 1، 2، 3، 4، ... میں سے کچھ بھی ہوسکتی ہے۔

اب تک ہم نے جتنی بھی مثالیں دیکھیں ہیں ان سب میں ہی متغیر کو ایک عدد سے ضرب کیا گیا ہے۔ کچھ ایسی بھی صورتیں ہوسکتی ہیں جہاں متغیر میں کسی عدد کو جوڑا یا گھٹایا جاسکتا ہے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے۔

سریتا کہتی ہے کہ اس کے پاس امینہ سے دس زیادہ ماربل ہیں۔ اگر امینہ کے پاس 20 ماربل ہیں تو سریتا کے پاس 30 ہوں گے۔ اگر امینہ کے پاس 30 ماربل ہیں تو سریتا کے پاس 40 ہوں گے، وغیرہ۔ ہم یہ نہیں

جانتے کہ امینہ کے پاس اصل میں کتنے ماربل ہیں۔ اس کے پاس کتنے بھی ماربل ہوسکتے ہیں لیکن ہم یہ جانتے ہیں کہ سریتا کے ماربل= امینہ کے ماربل +10

اب ہم امینا کے ماربل کو حرف x سے ظاہر کریں گے۔ یہاں x متغیر ہے جس کی قدر 1، 2، 3، 4، ...، 10، ...، 20، ...، 30، ... میں کوئی بھی ہوسکتی ہے۔ x کا استعمال کرکے ہم سریتا کے ماربل= $x + 10$ لکھتے ہیں۔ عبارت $(x + 3)$ کو ہم پڑھتے ہیں x جمع 10 اس کا مطلب ہے x میں 10 کو جمع کیا گیا۔ اگر x، 20 ہے تو $(x + 10)$، 30 ہوگا۔ اور اگر x، 30 ہے تو $(x + 10)$، 40 ہوگا۔ اور اسی طرح اور آگے بھی۔

عبارت $(x + 10)$ کو اور زیادہ آسان نہیں کرسکتے ہیں۔ $x + 10$ اور $10x$ الگ الگ ہیں ان کو ایک مت سمجھنا۔ $10x$ میں x کو 10 سے ضرب دی جاتی ہے۔ اور $(x + 10)$ میں x میں 10 کو جوڑا جاتا ہے۔ اس کو جانچنے کے لیے ہم x کی کچھ اور قدر لیتے ہیں۔ مثال کے طور پر

اگر $x = 2$ تو $10x = 10 \times 2 = 20$، اور $x + 10 = 2 + 10 = 12$

اگر $x = 10$ ہے تو $10x = 10 \times 10 = 100$ اور $x + 10 = 10 + 10 = 20$

راجو اور بالو دو بھائی ہیں بالو راجو سے 3 سال چھوٹا ہے اگر راجو 12 سال کا ہے تو بالو 9 سال کا ہے۔ اور اگر راجو 15 سال کا ہے تو بالو 12 سال کا ہے مگر ہم کو راجو کی اصل عمر نہیں معلوم ہے یہ کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ اگر راجو کی عمر x سال ہے تو بالو کی عمر $(x - 3)$ سال ہوگی۔ یہاں x ایک متغیر ہے۔ اس عبارت $(x - 3)$ کو ہم x گھٹا تین پڑھیں گے۔ اب آپ عمر کو کچھ بھی مان سکتے ہیں اگر x، 12 ہے تو $(x - 3)$، 9 ہوگا اور اگر x، 15 ہے تو $(x - 3)$، 12 ہوگا۔

مشق 11.1

1۔ مندرجہ ذیل پیٹرن بنانے کے لیے ماچس کی تیلیوں کی مطلوبہ تعداد جاننے کا اصول معلوم کیجیے۔ اصول لکھنے کے لیے ایک متغیر کا استعمال کیجیے:

(a) حرف T کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا۔

(b) حرف Z کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا۔

(c) حرف U کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا۔

(d) حرف V کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا —

(e) حرف E کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا —

(f) حرف S کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا —

(g) حرف R کے لیے ماچس کی تیلیوں کا پیٹرن ایسا ہوگا —

2۔ حروف L، C اور F کے پیٹرن ہم پہلے ہی جانتے ہیں۔ (اوپر دیے گئے) سوال نمبر 1 میں دیے گئے کچھ حروف کے پیٹرن کو لکھنے میں بھی وہی اصول لاگو ہوگا جو L کو لکھنے میں لاگو ہوتا ہے۔ وہ کون سے حروف ہیں؟ اور ایسا کیوں ہوا؟

3۔ ایک پریڈ میں کچھ کیڈٹ مارچ کررہے ہیں۔ ایک قطار میں 5 کیڈٹ ہیں۔ کیڈٹ کی تعداد کس اصول سے معلوم ہوسکے گی جبکہ قطاروں کی تعداد معلوم ہے؟ (قطاروں کی تعداد کے لیے حرف 'n' کا استعمال کیجیے)

4۔ اگر ایک ڈبہ میں 50 آم ہیں تو ڈبوں کی تعداد کو استعمال کرتے ہوئے آپ آموں کی تعداد کو کیسے لکھیں گے۔ (ڈبوں کی تعداد کے لیے 'b' کو استعمال کیجیے)

5۔ استاد نے ہر طالب علم کو 5 پنسلیں دیں۔ اگر طلبا کی تعداد معلوم ہو تو کیا آپ پنسلوں کی تعداد معلوم کرسکتے ہیں؟ (طلبا کی تعداد کو 'S' سے ظاہر کیجیے)

6۔ ایک چڑیا ایک منٹ میں اڑکر 1 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ کیا آپ چڑیا کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ، اس کے اڑنے کے وقت (منٹ میں) کرسکتے ہیں۔ (اس کے اڑنے کے وقت (منٹ میں) کو t سے ظاہر کیجیے)

7۔ رادھا نے نقطوں کی مدد سے ایک رنگولی بنائی (چاک کے پاؤڈر سے نقطے جوڑ کر خطوط بنانے کا ایک خوبصورت پیٹرن) جیسا کہ شکل (5) میں دکھایا گیا ہے) اس نے ایک قطار میں 8 نقطے لگائے۔ اس کو رنگولی کی 'r' کتنے نقطے بنانے ہوں گے۔ اگر یہاں 8 قطاریں ہیں تو کتنے نقطے ہوں گے؟ اور اگر 10 قطاریں ہیں تو؟

شکل 11.5

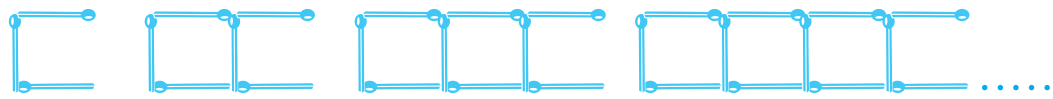
8۔ لیلا، رادھا کی چھوٹی بہن ہے۔ لیلا رادھا سے 4 سال چھوٹی ہے۔ کیا آپ رادھا کی عمر کے مقابلے میں لیلا کی عمر بتا سکتے ہیں؟ رادھا کی عمر کو x سال مان لیجیے۔

9۔ ماں نے لڈو بنائے۔ اس نے کچھ لڈو گھر کے لوگوں کو اور کچھ مہمانوں کو دیے۔ پھر بھی 5 لڈو بچ رہے۔ اگر ماں نے L لڈو دے دیے تو بتائیے اس نے کل کتنے لڈو بنائے تھے؟

10۔ سنتروں کو ایک بڑے ڈبے سے چھوٹے ڈبے میں منتقل کرنا ہے۔ جب ایک بڑا ڈبہ خالی کیا جاتا ہے تو اس میں سے نکلنے والے سنتروں سے دو چھوٹے ڈبے مکمل طور پر بھر جاتے ہیں 10 سنترے باقی بچتے۔ اگر چھوٹے ڈبے میں سنتروں کی تعداد x ہے تو بڑے ڈبے میں کتنے سنترے تھے؟

11۔ (a) مندرجہ ذیل ماچس کی تیلیوں سے بنے مربعوں کے پیٹرن کو دیکھیے (شکل 6)۔ یہ مربع الگ الگ نہیں ہیں۔ دو مشتمل مربعوں میں ایک تیلی مشترک ہے پیٹرن پر دھیان دیجیے اور اگر مربعوں کی تعداد معلوم ہو تو تیلیوں کی

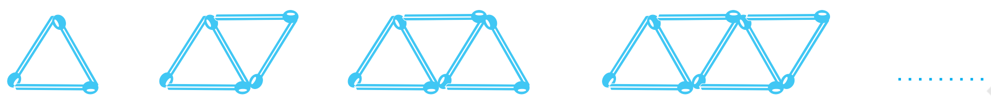
تعداد معلوم کرنے کا اصول بتائیے؟ (اشارہ : اگر آپ کنارے کی ایک آخری تیلی ہٹا دیں تو آپ کو C کا پیٹرن مل جائے گا)



(a) (b) (c) (d)

شکل 11.6

(b) شکل 7 میں ماچس کی تیلیوں سے مثلث بنانے کا ایک پیٹرن دیا گیا ہے جیسا کہ اوپر مشق 11(a) میں کہا گیا ہے اگر مثلثوں کی تعداد معلوم ہو تو تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے اصول بنائیے۔



(a) (b) (c) (d)

شکل 11.7

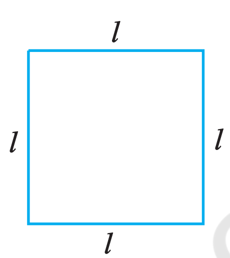
11.6 عام اصولوں میں متغیروں کا استعمال
(Use of Variables in Common Rules)

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ ریاضی کے بعض عام اصول جن کو ہم پہلے پڑھ چکے ہیں، متغیر کے استعمال سے کیسے ظاہر کیے جاتے ہیں۔

جیومیٹری کے اصول:

مساحت کے باب میں ہم مربع اور مستطیل کے احاطہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ان کو ایک اصول کی شکل میں لکھنے کے لیے ہم ان کو دوبارہ دیکھیں گے۔

1۔ مربع کا احاطہ:



شکل 11.8

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی کثیر الاضلاع (3 یا زیادہ قطعات خط سے بننے والی بند شکل) احاطہ اس کے اضلاع کی لمبائیوں کی حاصل جمع ہوتی ہے۔ ایک مربع کے چار اضلاع ہوتے ہیں۔ جن کی لمبائی آپس میں برابر ہوتی ہے (شکل 11.8)۔ اس لیے

مربع کا احاطہ = مربع کے اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ

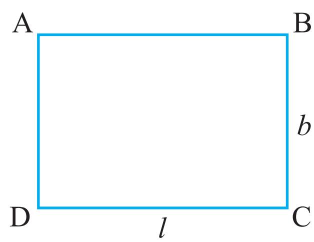
= مربع کے کسی ایک ضلع کی لمبائی کا 4 گنا ہوتا ہے۔

$= 4 \times l = 4l$

اس طرح ہم کو مربع کے احاطے کے لیے ایک اصول حاصل ہوگیا۔ متغیر l کا استعمال ہم کو ایک اصول لکھنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے جو کہ چھوٹا بھی ہے اور آسانی سے یاد بھی ہو جاتا ہے۔

ہم احاطہ کو بھی ایک متغیر مان سکتے ہیں۔ اگر ہم اس کو p مان لیتے ہیں مربع کے احاطہ کے اصول کو ہم مربع کے احاطہ اور اس کے اضلاع کے درمیان کے رشتہ سے ظاہر کرسکتے ہیں، $p = 4l$

2۔ **مستطیل کا احاطہ:**



شکل 11.9

ہم جانتے ہیں کہ مستطیل کے چار اضلاع ہوتے ہیں مثال کے طور پر مستطیل ABCD کے چار اضلاع AB، BC، CD اور DA ہیں۔ کسی بھی مستطیل کے آمنے سامنے کے اضلاع ہمیشہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ اس لیے مستطیل ABCD میں اضلاع AB یا CD کی لمبائی کو L سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ اس طرح AD یا BC کی لمبائی کو b سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح

مستطیل کا احاطہ = AB کی لمبائی + BC کی لمبائی + CD کی لمبائی + AD کی لمبائی

$2 \times$ CD کی لمبائی $+ 2 \times$ BC کی لمبائی $= 2l + 2b$

اس لیے اس کا اصول بنا:

مستطیل کا احاطہ $= 2l + 2b$

اگر ہم مستطیل کے احاطہ کو p سے ظاہر کرتے ہیں تو مستطیل کے احاطہ کا اصول ہو جائے گا $p = 2l + 2b$

> نوٹ : یہاں l اور b دونوں متغیر ہیں۔ دونوں کی قدریں الگ الگ ہیں یعنی ایک متغیر کی قدر کا اثر دوسرے متغیر کی قدر پر نہیں پڑتا ہے۔

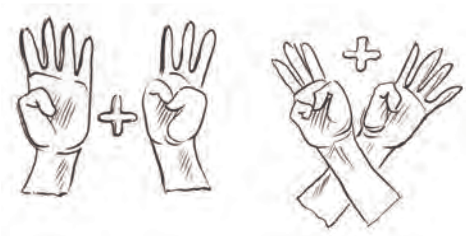
جیومیٹری کے مطالعہ کے دوران آپ کا سابقہ مستوی اشکال کے رقبوں اور احاطوں اور تین پیمائشی اشکال کے حجم اور سطحی رقبوں کے مختلف اصول اور فارمولوں سے پڑے گا۔ اور ساتھ ہی ساتھ کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے جوڑ اور ان کے وتروں (diagonals) کی تعداد معلوم کرنے کے فارمولے پڑھیں گے۔ متغیر کے بارے میں آپ نے ابھی پڑھا ہے یہ ان تمام اصولوں اور فارمولوں کو لکھنے میں بہت مددگار ثابت ہوگا۔

حساب کے اصول:

3۔ **دو اعداد کے جمع کی تقلیبیت (Commutativity of Addition of two Numbers):**

ہم جانتے ہیں کہ $4 + 3 = 7$ اور $3 + 4 = 7$

یعنی $4 + 3 = 3 + 4$



جیسا کہ ہم نے مکمل اعداد کے باب میں دیکھا یہ کوئی بھی دو اعداد کے لیے درست ہوتا ہے۔ اعداد کی اس خاصیت کو اعداد کی جمع کا تقلیبیت کلیہ کہتے ہیں۔ 'تقلیبیت کا مطلب دل بدل ہے۔اعداد کی ترتیب کو اگر ادل بدل دیا جائے تو حاصل جمع پر کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔ متغیر کا استعمال ہمیں اس خاصیت کی عمومیت کا اظہار آسان طریقہ سے کرنے میں مدد کرتا ہے۔ مان لیا a اور b دو متغیر ہیں جن کی قدر کوئی بھی عدد ہوسکتا ہے۔

اس طرح $\boldsymbol{a + b = b + a}$

جب ہم ایک یا دو اصول کو اس طرح لکھ لیتے ہیں تو تمام مخصوص حالتیں بھی اس میں شامل ہوجاتی ہیں۔ اگر $a = 4$ اور $b = 3$ ہے تو $4 + 3 = 3 + 4$ ہوگا۔ اور اگر $a = 37$ اور $b = 73$ ہے تو ہم کو $37 + 73 = 73 + 37$ حاصل ہوگا۔ اور اسی طرح آگے بھی۔

4۔ دو اعداد کے ضرب کی تقلیبیت

ہم نے مکمل اعداد کے باب میں یہ بھی دیکھا تھا کہ دو اعداد کی ضرب میں، ضرب دیے جانے والے اعداد پر ان کی ترتیب کا کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔

مثال کے طور پر

$3 \times 4 = 12$ ، $4 \times 3 = 12$

اس طرح $4 \times 3 = 3 \times 4$

اعداد کی اس خاصیت کو اعداد کی ضرب کی تقلیبیت کہتے ہیں۔ اعداد کی ترتیب کی ادل بدل سے ان کے حاصل ضرب پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔ جمع کی طرح یہاں بھی متغیر a اور b لیتے ہوئے ہم دو اعداد کے ضرب کی تقلیبیت کچھ اس طرح ظاہر کرسکتے ہیں۔ $\boldsymbol{a \times b = b \times a}$

یاد رکھیے کہ a اور b کی کوئی بھی قدر لی جاسکتی ہے۔ تمام مخصوص حالتوں جیسے $4 \times 3 = 3 \times 4$ یا $37 \times 73 = 73 \times 37$ پر یہ اصول لاگو ہوتا ہے۔

5۔ اعداد کا تقسیمیت (Distributivity of numbers)

مان لیجیے ہم سے 38×7 کی قدر معلوم کرنے کے لیے کہا جائے۔ ظاہر ہے ہم کو 38 کا پہاڑا نہیں آتا ہے۔ تو اس کو ہم کچھ اس طرح حاصل کریں گے۔

$$7 \times 38 = 7 \times (30 + 8) = 7 \times 30 + 7 \times 8 = 210 + 56 = 266$$

یعنی ہم 7 کی تقسیم کو 30 اور 8 کی جمع پر بانٹ سکتے ہیں۔ یہ بات کوئی بھی تین اعداد کے لیے ہمیشہ درست ہوگی۔ جیسے 30,7 اور 8۔ اس کو ہم ضرب کی جمع پر تقسیمی خصوصیت (distributivity of multiplication over addition of numbers) کہتے ہیں۔

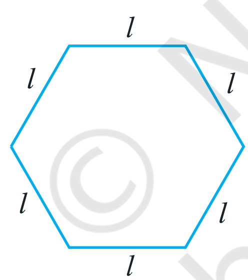
متغیر کا استعمال کر کے ہم اعداد کی اس خاصیت کو عام اور چھوٹے طریقہ سے لکھ سکتے ہیں۔ مان لیا جائے a، b اور c تین متغیر ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کی کوئی بھی عددی قیمت طے ہوسکتی ہے۔

اس لئے $\boldsymbol{a \times (a + b) = a \times b + a \times c}$

اعداد کی خصوصیات بہت دلچسپ ہوتی ہیں اور بہت سی خصوصیات ہم اس سال پڑھیں گے اور باقی آگے آنے والی جماعتوں میں پڑھیں گے۔ متغیر کا استعمال ان خصوصیات کو ایک عام اور مختصر طریقہ سے لکھنے میں مددگار ہوتا ہے۔ اعداد کی ایک اور خصوصیت مشق 11.2 کے سوال نمبر 5 میں دی گئی ہے۔ اعداد کی ایسی کچھ اور خصوصیات معلوم کرنے کی کوشش کیجیے، اور ان کو متغیر کا استعمال کر کے یاد کرنے کی کوشش کیجیے۔

مشق 11.2

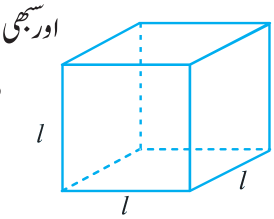
1۔ ایک مساوی ضلعی مثلث کے ضلع کو l سے ظاہر کیجیے اور l کا استعمال کرتے ہوئے مساوی ضلعی مثلث کے احاطہ کو ظاہر کیجیے۔



شکل 11.10

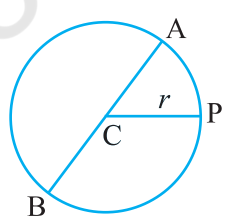
2۔ ایک منظّم چھ ضلعی (شکل 11.10) کے ایک ضلع شکل 11.10 کی لمبائی کو l سے ظاہر کیا گیا ہے۔ l کا استعمال کرتے ہوئے چھ ضلعی کا احاطہ معلوم کیجیے۔ (**اشارہ۔** ایک منظّم چھ ضلعی کے تمام ضلع آپس میں برابر ہوتے ہیں اور سبھی زاویے برابر ہوتے ہیں)۔

3۔ ایک کعب ایک سہ البعادی شکل ہے جیسا کہ شکل 11.11 کہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے چھ رخ ہوتے ہیں اور یہ سبھی رخ یکساں مربع ہوتے ہیں۔ کعب کے ایک کنارے کی لمبائی کو l سے ظاہر کیجیے۔ کعب کے تمام کناروں کی کل لمبائی معلوم کرنے کا فارمولہ معلوم کیجیے۔



شکل 11.11

4۔ کسی دائرہ کا قطر ایک ایسا قطع خط ہوتا ہے جو دائرہ کے دو نقطوں کو ملاتا ہے اور دائرہ کے مرکز سے ہو کر گزرتا ہے (دی گئی شکل 11.12 میں دائرہ کا قطر A B اور مرکز C)۔ دائرہ کے قطر (d) کو اس کی نصف قطر (r) کی مدد سے ظاہر کیجیے۔



شکل 11.12

5۔ تین اعداد 27، 14 اور 13 کی حاصل جمع پر دھیان دیجیے اس کو ہم دو طرح سے معلوم کرسکتے ہیں۔

(a) ہم پہلے 14 اور 27 کو جوڑیں تو 41 حاصل ہوگا اور پھر اس میں 13 کو جمع کریں تو ہم کو 54 حاصل ہو جائے گا یا

(b) ہم پہلے 27 اور 13 کو جوڑیں تو 40 حاصل ہوگا اور پھر اس میں 14 کو جوڑ دیں تو ہم کو 54 حاصل ہو جائے گا۔ اس طرح $(14 + 27) + 13 = 14 + (27+13)$

اس عمل کو کسی بھی تین اعداد کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس خصوصیت کو اعداد کی جمع کا تلازمیت کلیہ، کہتے ہیں۔ اس خاصیت کو ہم پہلے مکمل اعداد کے باب میں پڑھ چکے ہیں اس کو متغیر a، b اور c کا استعمال کر کے لکھیے۔

11.7 متغیر والی عبارتیں (Expression with Variables)

یاد کیجیے کہ حساب میں ہم نے $4 + (10 \times 2) + 100 \times 3$، $3 + (10 \times 2)$ وغیرہ جیسی عبارتوں پر بھی کام کیا ہے یہ عبارتیں مختلف اعداد جیسے 2، 3، 4، 10، 100 وغیرہ سے مل کر بنی ہیں۔ عبارت بنانے میں ہم اعداد کے چاروں بنیادی عملیات جمع گھٹا، ضرب اور تقسیم کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر عبارت $2 \times 10 + 3$ بنانے کے لیے ہم 2 کو 10 سے ضرب کرتے ہیں اور پھر حاصل ضرب میں 3 کو جمع کرتے ہیں۔ حسابی عبارتوں کی کچھ اور مثالیں درج ذیل ہیں۔

$3 + (4 \times 5)$، $(-3 \times 4) + 5$،

$8 - (7 \times 2)$، $14 - (5 - 2)$،

$(6 \times 2) - 5$، $(5 \times 7) - (3 \times 4)$،

$7 + (8 \times 2)$ $(5 \times 7) - (3 \times 4 - 7)$ وغیرہ۔

متغیر کے ساتھ بھی عبارتیں بنائی جا سکتی ہیں۔ ایسی عبارتیں ہم پہلے دیکھ بھی چکے ہیں جیسے $2n$، $5m$، x، $x + 10$، $x - 3$، وغیرہ ایسی ہی عبارتیں ہیں جن میں متغیر کا استعمال کیا گیا ہے۔ ان عبارتوں میں متغیر پر بنیادی عملیات جمع، گھٹا، ضرب اور تقسیم وغیرہ کیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اور متغیر n کو ضرب کرنے پر عبارت $2n$ بنی ہے، 10 اور متغیر x کو جمع کرنے سے عبارت $(x + 10)$ بنی ہے۔ اور اسی طرح باقی بھی۔

ہم جانتے ہیں کہ متغیر کی مختلف قدریں ہوسکتی ہیں یعنی اس کی کوئی طے شدہ قدر نہیں ہوتی ہے، مگر یہ دراصل اعداد ہی تو ہیں اس لیے اعداد کے لیے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ سے وابستہ سبھی اصول (نشان والے بھی) ان پر بھی نافذ ہوتے ہیں۔

متغیر والی عبارتوں میں ایک اہم نقطہ کو ضرور نوٹ کیجیے۔ اعداد کی عبارت جیسے $(4 \times 3) + 5 = 12 + 5 = 17$ کو فوراً ہی حل کیا جا سکتا ہے۔

لیکن $(4x + 5)$ جیسی عبارت، جس میں متغیر بھی شامل ہے، کو جلدی حل نہیں کیا جاسکتا ہے۔ اگر x کی کوئی قدر دی جائے تب ہی صرف اس عبارت $(4x + 5)$ کو حل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر $x = 3$

ہے تو ہم اس کو اوپر والی عبارت کی طرح ہی حل کر سکتے ہیں۔

$$4x + 5 = (4 \times 3) + 5 = 17$$

مندرجہ ذیل مثالوں میں ہم دیکھیں گے کہ کچھ آسان عبارتیں کیسے بنتی ہیں۔

	عبارتیں	کیسے بنی
(a)	$y + 5$	y میں 5 کو جمع کیا
(b)	$t - 7$	t میں سے 7 کو گھٹایا
(c)	$10\,a$	a کو 10 سے ضرب کیا
(d)	$\frac{x}{3}$	x کو 3 سے تقسیم کیا
(e)	$-5\,q$	q کو 5 سے ضرب کیا
(f)	$3\,x + 2$	x کو پہلے 3 سے ضرب کیا اور پھر حاصل ضرب میں 2 کو جمع کیا۔
(g)	$2\,y - 5$	y کو پہلے 2 سے ضرب کیا اور پھر حاصل ضرب سے 5 کو گھٹایا۔

اسی طرح کی 10 اور مثالیں لکھیے اور یہ بھی بتایئے کہ یہ کیسے بنائی گئیں۔

اگر ہم کو یہ بتا دیا جائے کہ کسی عبارت کو کیسے بنانا ہے تو بھی ہم اس کو لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل مثالوں پر دھیان دیجیے۔

مندرجہ ذیل کے لیے عبارتیں لکھیے۔

(a)	z میں سے 12 کو گھٹایے	$z - 12$
(b)	r میں 25 کو جمع کیجیے	$r + 25$
(c)	p کو 16 سے ضرب کیجیے	$16\,p$
(d)	y کو 8 سے تقسیم کیجیے	$\frac{y}{8}$
(e)	m کو 9– سے ضرب کیجیے	$-9\,m$
(f)	y کو پہلے 10 سے ضرب کیجیے اور پھر حاصل ضرب میں 7 کو جمع کیجیے	$10\,y + 7$
(g)	n کو پہلے 2 سے ضرب کیجیے اور پھر حاصل ضرب میں l کو گھٹایے	$2\,n - 1$

امینہ اور سریتا نے طے کیا کہ وہ عبارتوں کا ایک کھیل کھیلیں گے۔ انھوں نے ایک متغیرہ x اور ایک عدد 3 لیا اور پھر دیکھا کہ ان دونوں سے وہ کتنی عبارتیں بناسکتی ہیں۔ جبکہ یہ شرط رکھی گئی کہ اعداد کے چاروں بنیادی عمل میں سے وہ ایک سے زیادہ ایک بار میں استعمال نہیں کریں گی۔ اور ہر بار x کو ضرور استعمال کیا جائے گا۔ کیا آپ ان کی کچھ مدد کرسکتے ہیں؟

کیا $(3x + 5)$ بنایا جاسکتا ہے؟
کیا $(3x + 3)$ بنایا جاسکتا ہے؟

سریتا نے بنایا $(x + 3)$

پھر امینہ نے بنایا $(x - 3)$

پھر اس نے کہا $3x$، سریتا نے فوراً ہی بنادی $\frac{x}{3}$

دی گئی شرط کے مطابق کیا صرف یہی چار عبارتیں بن سکتی ہیں جو انھوں نے بنائیں؟

اس کے بعد انھوں نے y، 3 اور 5 کو لے کر یہی کھیل کھیلا، شرط تھی کہ جمع اور تفریق کے عمل سے ایک بار میں صرف کوئی ایک ہی عمل لیا جاسکتا ہے اور اسی طرح ضرب اور تقسیم میں سے بھی ایک عمل ایک سے زیادہ بار نہیں لیا جاسکتا ہے اور ہر عبارت میں y ضرور ہوگا۔ دیکھیے کیا ان کے جوابات درست ہیں۔

مندرجہ ذیل مشقوں میں ہم دیکھ سکیں گے کہ کچھ سادہ عبارتیں کس طرح تشکیل پاتی ہیں۔

$y + 5$، $y + 3$، $y - 5$، $y - 3$، $3y$،

$5y$، $\frac{y}{3}$، $\frac{y}{5}$، $3y + 5$،

$3y - 5$، $5y + 3$، $5y - 3$

کیا آپ کچھ اور عبارتیں بناسکتے ہیں؟

کیا $\left(\frac{y}{3} + 5\right)$
اور $(y + 8)$ بن سکتا ہے؟
کیا $15y$ بن سکتا ہے؟

مشق 11.3

1۔ اعداد 5، 7 اور 8 کا استعمال کرتے ہوئے (متغیر نہیں ہے) آپ جتنی عبارتیں بناسکتے ہیں۔ ہر عدد ایک سے زیادہ بار استعمال نہیں کیجیے گا۔ صرف، جمع، تفریق اور ضرب کا استعمال کیجیے گا۔

(**اشارہ:** تین ممکنہ عبارتیں ہیں $5 + (8 - 7)$، $5 - (8 - 7)$، $(5 \times 8) + 7$؛ ایسی عبارتیں بنائیے)۔

2۔ مندرجہ ذیل میں سے کون سی عبارتیں صرف اعداد سے بنی ہیں؟

(a) $y + 3$ (b) $(7 \times 20) - 8z$

(c) $5(21 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5

(e) $3x$ (f) $5 - 5n$

(g) $(7 \times 20) - (5 \times 10) - 45 + p$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتیں بنانے میں استعمال ہوئے حسابی عملیات (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) کو پہچانیے اور بتائیے کہ یہ عبارتیں کیسے بنی ہیں؟

(a) $y - 17$ ،$y + 17$ ،$z - 1$ ،$z + 1$ (b) $5z$ ،$\frac{y}{17}$ ،$17y$

(c) $2y + 17$ ،$2y + 17$ (d) $-7m - 3$ ،$-7m + 3$ ،$7m$

4۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے عبارتیں بنائیے۔

(a) p میں 7 جمع کیا گیا (b) p میں سے 7 گھٹایا

(c) p کو 7 سے ضرب کیا (d) p کو 7 سے تقسیم کیا

(e) $-m$ میں سے 7 گھٹایا (f) $-p$ کو 5 سے ضرب کیا

(g) $-p$ کو 5 سے تقسیم کیا۔ (h) p کو -5 سے ضرب کیا۔

5۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے عبارت بنائیے۔

(a) $2m$ میں 11 کو جمع کیا۔ (b) $2m$ میں سے 11 کو گھٹایا۔

(c) y کے 5 گنے میں 3 کو جمع کیا (d) y کے 5 گنے میں سے 3 گھٹایا۔

(e) y کو -8 سے ضرب کیجیے۔

(f) y کو -8 سے ضرب کیجیے اور پھر جواب میں 5 کو جمع کیجیے۔

(g) y کو 5 سے ضرب کیجیے اور جواب میں سے 16 کو گھٹائیے۔

(h) y کو -5 سے ضرب کیجیے اور جواب میں 16 کو جمع کیجیے۔

6۔ (a) t اور 4 کو استعمال کرتے ہوئے عبارت لکھیے۔ ایک سے زیادہ بنیادی عمل کو استعمال نہ کریں اور ہر عبارت میں t ضرور ہو۔

(b) 2، y اور 7 کا استعمال کرتے ہوئے عبارتیں بنائیے۔ ہر عبارت میں y ضرور ہو۔ صرف دو مختلف بنیادی عمل استعمال کیجیے۔

11.8 عبارتوں کا عملی استعمال (Using Expressions Practically)

ہم کو اکثر ایسی عملی صورتِ حال کا سامنا ہوتا ہے جس میں عبارتوں کا استعمال ہوتا ہے۔ ان میں سے کچھ کو یاد کیجیے۔

عبارتوں کا استعمال کرتے ہوئے بیانات	متغیر	صورت حال (عام زبان میں بیان کی ہوئی)
سریتا کے پاس $(x+10)$ ماربل ہیں۔	مان لیجیے امینہ کے پاس x ماربل ہیں۔	1۔ سریتا کے پاس امینہ سے 10 ماربل زیادہ ہیں۔
بالو کی عمر $(x-3)$ سال ہے۔	مان لیجیے راجو کی عمر x سال ہے۔	2۔ بالو، راجو سے تین سال چھوٹا ہے۔
بکاش کی عمر $2x$ سال ہے۔	مان لیجیے راجو کی عمر x سال ہے۔	3۔ و کاش کی عمر راجو کی عمر کی دوگنی ہے۔
راجو کے ابا کی عمر $(3x+2)$ سال ہے۔	مان لیجیے راجو کی عمر x سال ہے۔	4۔ راجو کے ابا کی عمر راجو کی عمر کے تین گنے سے 2 سال زیادہ ہے۔

آیئے ایسی ہی کچھ اور صورت حال دیکھیں۔

عبارتوں کا استعمال کرتے ہوئے بیانات	متغیر	صورت حال (عام زبان میں بیان کی ہوئی)
اب سے پانچ سال بعد سوسن کی عمر $(y+5)$ سال ہوگی۔	مان لیجیے سوسن کی موجودہ عمر y سال ہے	5۔ اب سے پانچ سال بعد سوسن کی عمر کیا ہوگی۔
اب سے 4 سال پہلے سوسن کی عمر $(y-4)$ سال تھی۔	مان لیجیے سوسن کی موجودہ عمر y سال ہے۔	6۔ 4 سال پہلے سوسن کی عمر کیا تھی۔
ایک کلو گیہوں کی قیمت $(p-5)$ روپے ہے۔	مان لیجیے ایک کلو چاول کی قیمت p روپے ہے۔	7۔ ایک کلو گیہوں کی قیمت ایک کلو چاول کی قیمت سے 5 روپے کم ہے۔
ایک لیٹر تیل کی قیمت $5p$ روپے ہے۔	مان لیجیے ایک کلو چاول کی قیمت p روپے ہے۔	8۔ ایک لیٹر تیل کی قیمت ایک کلو چاول کی قیمت سے 5 گنا ہے۔
بس کی رفتار $(y+10)$ کلو میٹر فی گھنٹہ ہے۔	مان لیجیے ٹرک کی رفتار y کلو میٹر فی گھنٹہ ہے۔	9۔ ایک بس کی رفتار اسی سڑک پر جانے والے ٹرک کی رفتار سے 15 کلو میٹر فی گھنٹہ زیادہ ہے۔

ایسی ہی کچھ اور صورت حال معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ عام زبان میں ایسے بیانات ہیں جن کو آپ متغیر والی عبارتوں کا استعمال کرکے بیانات میں بدل سکتے ہیں۔ اگلے حصہ میں ہم دیکھیں گے کہ عبارتوں والے بیانات کو ہم اپنے مقصد کے لیے کیسے استعمال کر سکتے ہیں۔

مشق 11.4

1۔ مندرجہ ذیل کے جواب دیجیے۔

(a) مان لیجیے سریتا کی موجودہ عمر y سال ہے۔

(i) اب سے پانچ سال بعد اس کی عمر کیا ہوگی؟

(ii) 3 سال پہلے اس کی عمر کیا تھی؟

(iii) سریتا کے دادا کی عمر اس کی عمر کے 6 گنی ہے۔ دادا کی عمر کیا ہے؟

(iv) دادا سے 2 سال چھوٹی دادی ہیں۔ دادی کی عمر کیا ہے؟

(v) سریتا کے ابا کی عمر سریتا کی عمر کے تین گنے سے 5 سال زیادہ ہے۔ ابّا کی عمر بتائیے؟

(b) ایک مستطیل نما ہال کی لمبائی، ہال کی چوڑائی کے 3 گنے سے 4 میٹر زیادہ ہے اگر ہال کی چوڑائی b میٹر ہے تو لمبائی کیا ہوگی؟

(c) ایک مستطیل نما ڈبّے کی اونچائی h سینٹی میٹر ہے۔ اس کی لمبائی، اونچائی کی 5 گنا اور اس کی چوڑائی، لمبائی سے 10 سینٹی میٹر کم ہے۔ ڈبے کی لمبائی اور چوڑائی کو اس کی اونچائی کا استعمال کرتے ہوئے ظاہر کیجیے؟

(d) مینا، بینا اور لینا نے ایک پہاڑی پر چڑھنے کے لیے قدم بڑھائے۔ مینا 's' قدم پر تھی۔ بینا اس سے 8 قدم آگے اور لینا 7 قدم پیچھے تھی۔ بینا اور مینا کہاں ہیں؟ پہاڑی کی چوٹی پر پہنچنے کے کل جتنے قدم چاہئیں مینا کے قدم کے 4 گنے سے 10 کم ہیں۔ s کا استعمال کرتے ہوئے کل قدم بتائیے۔

(e) ایک بس v کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتی ہے۔ یہ بس دس پور سے بیس پور جا رہی ہے بس کے چلنے کے 5 گھنٹے کے بعد بھی بیس پور 20 کلو میٹر دور ہے۔ دس پور اور بیس پور کے درمیان کا فاصلہ کتنا ہے؟ v کا استعمال کر کے اس فاصلہ کو ظاہر کیجیے۔

2۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کے بیانات کو عام زبان کے بیانات میں بدلیے۔

(مثال کے طور پر، دیا گیا ہے، سلیم ایک کرکٹ میچ میں x رن بنا تا ہے۔ نالن $(x + 15)$ رن بنا تا ہے۔ عام زبان میں کہیں گے کہ نالن سلیم سے 15 رن زیادہ بنا تا ہے۔)

(a) ایک کاپی کی قیمت ₹ p ہے۔ اور ایک کتاب کی قیمت ₹ $3p$ ہے۔

(b) ٹونی نے q ماربل میز پر رکھے اس کے تھیلے میں $8q$ ماربل ہیں۔

(c) ہماری کلاس میں n طلبا ہیں۔ جبکہ اسکول میں 204 طلبا ہیں۔

(d) جگنو z سال کا ہے۔ اس کے چچا کی عمر 42 سال ہے اور اس کی چچی $(4z - 3)$ سال کی ہیں۔

3- (a) دیا گیا ہے، منو کی عمر x سال ہے کیا آپ بتا سکتے ہیں $(x - 2)$ کیا ظاہر کر رہا ہے؟

(**اشارہ**: منو کے چھوٹے بھائی کے بارے میں سوچیے)

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ $(x + 4)$ کیا ظاہر کر رہا ہے اور $(3x + 7)$ کیا ظاہر کر رہا ہے؟

(b) دیا گیا ہے کی سارا کی عمر آج y سال ہوگئی اس کی مستقبل اور ماضی کی عمر کے بارے میں سوچیے۔

مندرجہ ذیل باتیں کیا ظاہر کر رہی ہیں؟ $y + 7$، $y - 3$، $y + 4\frac{1}{2}$، $y - 2\frac{1}{2}$

(c) دیا گیا ہے، کلاس میں فٹ بال پسند کرنے والے طلبا کی تعداد n ہے۔ $2n$ کیا ظاہر کر رہا ہے؟ اور $\frac{n}{2}$ کیا ظاہر کرسکتا ہے؟ (**اشارہ**: فٹ بال کے علاوہ دوسرے کھیلوں کے بارے میں سوچیے)

11.9 مساوات کیا ہے؟ (What is an Equation?)

شکل 1 میں دیا گیا حرف L کا ماچس کی تیلیوں سے بنا پیٹرن کیجیے۔ اپنی آسانی کے لیے ہم شکل 1 کو پھر سے بنا لیتے ہیں۔

(a) (b) (c)

L کی مختلف تعداد کو بنانے میں تیلیوں کی مطلوبہ تعداد کو معلوم کرنے کے لیے ایک جدول بھی تیار کیا گیا تھا۔ ہم اس جدول کو یہاں دوبارہ بنا رہے ہیں۔

جدول 1

بننے والے L کی تعداد	1	2	3	4	5	6	7	8	----
تیلیوں کی مطلوبہ تعداد	2	4	6	8	10	12	14	16	----

ہم جانتے ہیں کہ تیلیوں کی مطلوبہ تعداد کو اصول $2n$ کے ذریعے ظاہر کیا گیا تھا۔

اگر n بننے والے L کی تعداد ہے۔

اپوّ ہمیشہ الگ طرح سے سوچتا ہے اس نے پوچھا، ہم جانتے ہیں کہ L کی دی ہوئی تعداد کو بنانے والی تیلیوں کی مطلوبہ تعداد ہم کیسے معلوم کریں۔ اگر ہم اس کو دوسری طرح سے کہیں تو کیا ہے؟ اگر تیلیوں کی تعداد دی جائے تو ان سے بننے والے L کی تعداد کیسے معلوم کی جاسکتی ہے؟

ہم اپنے آپ سے ایک سوال پوچھتے ہیں؟

اگر تیلیوں کی تعداد 10 ہے تو کتنے L بنیں گے؟

اس کا مطلب ہے کہ ہم کو L کی تعداد (یعنی n) معلوم کرنا ہے جبکہ دیا گیا ہے کہ تیلیوں کی تعداد دی گئی ہے یعنی $2n = 10$ (1)

یہاں ایک شرط دے دی گئی ہے جس کو متغیر n کو پورا کرتا ہے۔ یہ شرط، مساوات کی ایک مثال ہے۔

ہمارے سوال کا جواب جدول 1 کو دیکھ کر دیا جا سکتا ہے۔ n کی مختلف قدر کے لیے مندرجہ ذیل جدول دیکھیے۔

اگر $n = 1$ ہے تو تیلیوں کی تعداد 2 ہے۔ صاف ظاہر ہے کہ شرط پوری نہیں ہو رہی ہے کیونکہ 10، 2 نہیں ہے۔

n	$2n$	شرط پوری ہوئی؟ ہاں / نہیں
2	4	نہیں
3	6	نہیں
4	8	نہیں
5	10	ہاں
6	12	نہیں
7	14	نہیں

ہم کو پتہ چلا کہ صرف $n = 5$ کے لیے ہی شرط پوری ہو رہی ہے یعنی مساوات $2n = 10$ کو مطمئن (Satisfy) کر رہی ہے۔

5 کے علاوہ n کی کوئی اور قدر مساوات کو مطمئن بھی کر رہی ہے۔

آیئے ایک اور مساوات کو دیکھتے ہیں۔

بالو، راجو سے تین سال چھوٹا ہے۔ راجو کی عمر x سال مان لیجیے تو بالو کی عمر $(x - 3)$ سال ہوگی۔ مان لیجیے بالو کی عمر 11 سال ہے تو دیکھیے ہم اپنے طریقے سے راجو کی عمر کیسے نکال سکتے ہیں۔

ہمارے پاس بالو کی عمر ہے۔ $x - 3 = 11$ (2)

یہ متغیر x میں ایک مساوات ہے۔ ہم x کی مختلف قدروں کے لیے $(x - 3)$ کی قدر کی ایک جدول تیار کریں گے۔

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	–	–	–	–	–	–	–	9	10	11	12	13	–	–

خالی چھوڑی گئی جگہوں کو پر کیجیے۔ جدول سے ہم کو معلوم ہوا کہ صرف $x = 14$ کے لیے ہی شرط $x - 3 = 11$ پوری ہو رہی ہے۔ دوسری قدر کے لیے مثلاً $x = 16$ یا $x = 12$ کے لیے یہ شرط پوری نہیں ہورہی ہے۔ اس لیے راجو کی عمر 14 سال ہے۔

مختصراً، ایک مساوات کسی متغیر پر لگی ایک شرط ہے جو کہ متغیر کی صرف ایک قدر کو مطمئین کرتی ہے۔
مثلاً مساوات 3، $2n = 10$ کو متغیر n کی قدر 5 ہی مطمئین کرتی ہے اسی طرح مساوات $x - 3 = 11$ کو متغیر کی قدر 14 ہی مطمئین کرتی ہے۔

نوٹ کیجئے کہ مساوات کی دونوں جانب (Sides) کے درمیان ایک برابر کا نشان (=) ہے۔ مساوات یہ کہتی ہیں کہ بائیں جانب (L.H.S) کی قدر دائیں جانب (.R.H.S) کی قدر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر LHS، RHS کے برابر نہیں ہے تو ہم کو ایک مساوات حاصل نہیں ہوگی۔

مثال کے طور پر: اگر کہا جائے کہ $2n$ بڑا ہے 10 سے یعنی $2n > 10$ تو یہ ایک مساوات نہیں ہے۔ اسی طرح $2n$ چھوٹا ہے 10 سے یعنی $2n < 10$ بھی مساوات نہیں ہے اسی طرح $(x - 3) > 11$ یا $(x - 3) < 11$ بھی مساوات نہیں ہے۔

اب ذرا $8 - 3 = 5$ کو دیکھیے۔

یہاں LHS اور RHS کے درمیان ایک برابر کا نشان ہے یہ صرف اعداد کی مساوات ہے۔ اس میں کوئی متغیر نہیں ہے ہم صرف متغیر والی مساوات دیکھیں گے۔

آیئے ایک مشق کرتے ہیں۔

مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات متغیر کے ساتھ ہیں جن مساوات میں متغیر ہے ان میں متغیر کو پہچانیے۔

(a)	$x + 20 = 70$	(ہاں، x)
(b)	$8 \times 3 = 24$	(نہیں، یہ مساوات صرف اعداد کی ہے، اس مساوات میں کوئی متغیر نہیں ہے)
(c)	$2p > 30$	(نہیں)
(d)	$n - 4 = 100$	(ہاں، n)
(e)	$20b = 80$	(ہاں، b)
(f)	$\frac{y}{8} < 50$	(نہیں)

درج ذیل مساوات کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں (مساوات کے متغیر بھی بتائے گئے ہیں)۔
جہاں ضرورت ہو وہاں خالی جگہ کو بھریئے:

خالی جگہوں کو بھریئے :

$x + 10 = 30$	(متغیر x)	(3)
$p - 3 = 7$	(متغیر p)	(4)
$3n = 21$	(متغیر __)	(5)
$\frac{t}{5} = 4$	(متغیر __)	(6)
$2l + 3 = 7$	(متغیر __)	(7)
$2m - 3 = 5$	(متغیر __)	(8)

11.10 مساوات کا حل (Solution of an Equation)

پچھلے سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ مساوات

$$2n = 10 \quad (1)$$

کو $n = 5$ مطمئین کرتا ہے۔ n کی کوئی اور قدر مساوات کو مطمئین نہیں کرتی ہے، مساوات میں متغیر کی وہ قیمت جو مساوات کو مطمئین کرے مساوات کا حل کہلاتی ہے۔ اس طرح $n = 5$، مساوات $2n = 10$ کا حل ہے۔

یاد رکھیے کہ $n = 6$ مساوات $2n = 10$ کا حل نہیں ہے کیونکہ $n = 6$ کے لیے مساوات $2n = 2\times6 = 12$ ہے اور دس نہیں۔

اسی طرح $n = 4$ بھی حل نہیں ہے۔ بتائیے کیوں نہیں؟۔

ایک اور مساوات لیتے ہیں: $x - 3 = 11$ (2)

اس مساوات کو $x = 14$ مطمئین کر رہی ہے، کیونکہ $x = 14$ کے لیے

مساوات کی $\text{LHS} = 14 - 3 = 11 = \text{RHS}$

اور $x = 16$ اس کو مطمئین نہیں کر رہی ہے کیونکہ $x = 16$ کے لیے مساوات کی ہے $16 - 3 = 13$ جو کہ R.H.S برابر نہیں ہے۔

اس طرح $x = 14$ مساوات $x - 3 = 11$ کا حل ہے اور $x = 16$ اس مساوات کا حل نہیں ہے اسی طرح $x = 12$ بھی اس مساوات کا حل نہیں ہے۔ کیوں نہیں وضاحت کیجیے۔

مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے اور اپنے جواب میں ہاں یا نہیں کی بھی وضاحت کیجیے۔

مساوات	متغیر کی قدر	حل(ہاں یا نہیں)
1۔ $x + 10 = 30$	$x = 10$	نہیں
2۔ $x + 10 = 30$	$x = 30$	نہیں
3۔ $x + 10 = 30$	$x = 20$	ہاں
4۔ $p - 3 = 7$	$p = 5$	نہیں
5۔ $p - 3 = 7$	$p = 15$	–
6۔ $p - 3 = 7$	$p = 10$	–
7۔ $3n = 21$	$n = 9$	–
8۔ $3n = 21$	$n = 7$	–
9۔ $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	–
10۔ $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	–
11۔ $2l + 3 = 7$	$l = 5$	–
12۔ $2l + 3 = 7$	$l = 1$	–
13۔ $2l + 3 = 7$	$l = 2$	–

الجبرا کی ابتدا(Beginning of Algebra)

یہ کہا جا تا ہے کہ الجبرا کی ابتدا ریاضی کی ایک شاخ کے طور پر 1550 ق۔م یعنی اب سے 3500 سال پہلے شروع ہوئی جب مصر کے لوگوں نے نا معلوم اعداد کو علامات سے ظاہر کرنا شروع کیا۔

300 ق۔م کے آس پاس نا معلوم اعداد کو حروف کے ذریعے ظاہر کرنا اور ان سے عبارتیں بنانے کا طریقہ ہندوستان میں عام تھا۔

عظیم ہندوستانی ریاضی داں آریہ بھٹ (پیدائش 476 عیسوی) برھم گپت (پیدائش 598 عیسوی) مھاویر (پیدائش 850 عیسوی) کے آس پاس اور بھاسکر دوئم (پیدائش 1114 عیسوی) وغیرہ نے الجبرا کے مطالعہ میں اہم رول ادا کیا۔ انہوں نے نا معلوم کو مختلف نام دیے جیسے بیج (Beeja) ورن (Varna) وغیرہ۔ اور انھوں نے معلوم مقدار کو ظاہر کرنے کے لیے مختلف رنگوں کا پہلا حرف جیسے، کالا (Black)، نیلا (Blue) وغیرہ۔ ان عظیم ہندوستانی ریاضی دانوں نے الجبرا اپنا ہندوستانی نام بیجا گنت (Beejaganit) دیا تھا۔

لفظ الجبرا(Aljebra) **Aljebar W'al almugabalah**، نامی کتاب کے عنوان سے مشتق ہے۔ یہ کتاب لگ بھگ 825 عیسوی میں بغداد کے ایک عرب ریاضی داں محمد ابن الخوارزمی نے لکھی تھی۔

مشق 11.5

1۔ بتایئے کہ درج ذیل میں کون سی مساوات ہیں اور کون سی نہیں۔ اپنے جواب کی وجہ بھی بتایئے اور یہ بھی بتایئے کہ کون سی مساوات صرف اعداد سے بنی ہیں اور کون سی متغیر سے۔ متغیر والی مساوات کے متغیر بھی بتایئے۔

(a) $17 = x + 7$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 = 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$

(o) $7 - x = 5$

2۔ جدول میں خالی چھوڑے گئے تیسرے خانے کو مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	مساوات	متغیر کی قدر	مساوات مطمئن ہیں ہاں / نہیں
(a)	$10y = 80$	$y = 10$	
(b)	$10y = 80$	$y = 8$	
(c)	$10y = 80$	$y = 5$	
(d)	$4l = 20$	$l = 20$	
(e)	$4l = 20$	$l = 80$	
(f)	$4l = 20$	$l = 5$	
(g)	$b + 5 = 9$	$b = 5$	
(h)	$b + 5 = 9$	$b = 9$	
(i)	$b + 5 = 9$	$b = 4$	
(j)	$h - 8 = 5$	$h = 13$	
(k)	$h - 8 = 5$	$h = 8$	
(l)	$h - 8 = 5$	$h = 0$	
(m)	$p + 3 = 1$	$p = 3$	
(n)	$p + 3 = 1$	$p = 1$	
(o)	$p + 3 = 1$	$p = 0$	
(p)	$p + 3 = 1$	$p = -1$	
(q)	$p + 3 = 1$	$p = -2$	

3۔ ہر مساوات کے سامنے دیے گئے بریکٹ میں دی گئی قدروں میں سے درست حل چنیے۔ اور یہ ثابت کیجیے کہ باقی قدریں مساوات کو مطمئن نہیں کرتی ہیں۔

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c)	$p - 5 = 5$	(0, 10, 5 – 5)
(d)	$\frac{q}{2} = 7$	(7, 2, 10, 14)
(e)	$r - 4 = 0$	(4, – 4, 8, 0)
(f)	$x + 4 = 2$	(– 2, 0, 2, 4)

4۔ (a) جدول کو مکمل کیجیے اور جدول کو دیکھنے کے بعد مساوات $m + 10 = 16$ کا حل معلوم کیجیے۔

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	___	___	___
$m + 10$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

(b) جدول کو مکمل کیجیے اور جدول کو دیکھنے کے بعد مساوات $5t = 35$ کا حل معلوم کیجیے۔

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	___	___	___	___	___
$5t$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

(c) جدول کو مکمل کیجیے اور جدول کا استعمال کر کے مساوات $z/3 = 4$ کا حل معلوم کیجیے۔

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	___	___	___	___
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

(d) جدول کو مکمل کیجیے اور مساوات $m - 7 = 3$ کا حل معلوم کیجیے۔

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	___	___
$m - 7$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

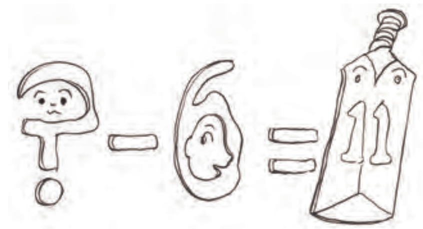
5۔ مندرجہ ذیل پہیلیاں حل کیجیے۔ آپ اپنے آپ بھی ایسی پہیلیاں بنا سکتے ہیں۔

میں کون ہوں؟ (Who I am?)

(i) ایک مربع کے چاروں طرف گھومو۔
ہر کونے کو گنو۔
تین بار اور زیادہ نہیں۔
گنا گیا عدد مجھ میں جمع کر دو۔
اور حاصل کرلو چونتیس (34)

(ii) ہفتہ کے ہر دن مجھ میں 1 جمع کرو اگر اب کوئی غلطی نہیں کرتے تو آپ کو 23 حاصل ہوگا۔

(iii) میں ہوں ایک خاص عدد۔
نکال لو مجھ میں سے چھ۔
کرکٹ کی ایک پوری ٹیم۔
لیکن پھر بھی کر سکتے ہو فکس۔



(iv) بتاؤ تو میں کون ہوں۔
میں دیتا ہوں ایک اشارہ۔
مجھے پاؤ گے واپس تم۔
اگر نکالو گے مجھے تم بائیس میں سے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ہم نے ماچس کی تیلیوں کا استعمال کر کے حروف اور دوسری اشکال بنانے کے پیٹرن دیکھے۔ ہم نے یہ بھی سیکھا کہ دی گئی شکل کو دہرانے میں اور ان کو بنا نے میں تیلیوں کی مطلوبہ تعداد معلوم کرنے میں جو تعلق ہو تا ہے اس کو کیسے لکھا جاسکتا ہے۔ دی گئی شکل کتنی بار دہرائی جا ئے گی یہ گنتی بدل سکتی ہے یہ قدر 1، 2، 3، ...میں سے کوئی بھی عدد ہوسکتی ہے۔ یہ ایک متغیر ہے جس کو کسی حرف جیسے n سے ظاہر کیا جا تا ہے۔

2۔ ایک متغیر کی مختلف قدریں ہوسکتی ہیں۔ یہ قدر طے شدہ نہیں ہے۔ ایک مربع کے ضلع کی لمبائی کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ یہ ایک متغیر ہے۔ لیکن ایک مثلث کے زاویوں کا ایک طے شدہ عدد یعنی 3 ہے یہ متغیر نہیں ہے۔

3۔ ہم متغیر کو کسی بھی حرف n، l، m، p، y، z وغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

4۔ ایک متغیر کی وجہ سے کسی بھی عملی حالت کے تعلق کو ظاہر کیا جا سکتا ہے جیسے دو بھائیوں کی عمر میں تعلق ایک بھائی کی عمر اگر x سال دی گئی ہے تو دوسرے بھائی کی عمر جو کہ اس سے 3 سال چھوٹا ہے $x - 3$ سال ہوگی۔

5۔ متغیر بھی اعداد ہی ہیں۔ حالانکہ ان کی قدریں طے شدہ نہیں ہیں۔ ہم جس طرح اعداد پر حسابی عملیات جمع، تفریق، ضرب، تقسیم کرتے ہیں بالکل اسی طرح ہم ان کو ان متغیر پر بھی کرتے ہیں۔ مختلف عملیات کا استعمال کر کے ہم متغیر کی مختلف عبارتیں بنا سکتے ہیں جیسے $x-3$، $x+3$، $2n$، $5m$، $\frac{p}{3}$، $2y+3$، $3l-5$ وغیرہ۔

6۔ متغیر کی مدد سے ہم بہت سے حساب اور جیومیٹری کے اصولوں کو عام طریقے سے لکھ سکتے ہیں مثلاً، یہ اصول کہ دو اعداد کا حاصل جمع ایک ہی رہتا ہے چاہے ان کی ترتیب بدل دی جائے تو ہم اس کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں کہ $a+b=b+a$ یہاں متغیر a اور b کوئی بھی عدد ظاہر کر سکتے ہیں۔ 1, 32, 1000 – 7, – 20 وغیرہ۔

7۔ مساوات ایک متغیر کے لیے ایک شرط ہوتی ہے۔ اس کو یہ کہہ کر ظاہر کیا جاتا ہے کہ متغیر کے ساتھ لکھی گئی ایک ایسی عبارت جو کہ ایک متعین عدد کے برابر ہو، مساوات کہلاتی ہے جیسے $x-3=10$

8۔ ہر مساوات کے دو حصے ہوتے ہیں۔ بائیں جانب (LHS) اور دائیں جانب (RHS) ان دونوں کے درمیان برابر کا نشان لگاتے ہیں۔

9۔ مساوات میں متغیر کی کسی ایک خاص قدر کے لیے ہی LHS اور RHS برابر ہوتی ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ متغیر کی یہ خاص قدر مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔ اس قدر کو مساوات کا حل کہتے ہیں۔

10۔ مساوات کو حل کرنے کا ایک طریقہ، ''طریقہ، آزمائش'' ہے، اس طریقہ میں ہم متغیر کو مختلف قدریں دیتے ہیں۔ اور جانچ کرتے ہیں کہ کیا یہ مساوات کو مطمئن کر رہی ہیں؟ یہ مختلف قدریں ہم اس وقت تک دیتے رہتے ہیں جب تک ہم کو وہ صحیح قدر نہ مل جائے جو مساوات کو مطمئن کرلے۔