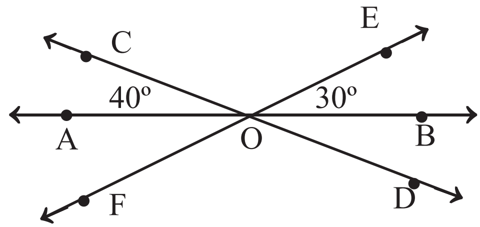
এবার রেশমি উপপাদ্যের কয়েকটি প্রয়োগ দিল। আমরা সেগুলি সমাধান করার চেষ্টা করি

প্রয়োগ — 1 চিত্র থেকে $\angle FOD$ -এর মান কত দেখি।

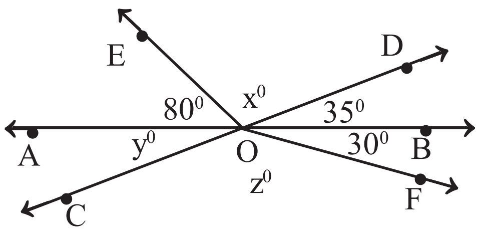


$\angle COE = 180^\circ - \angle AOC - \angle BOE$
$= 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ$
$= 110^\circ$

$\angle COE =$ বিপ্রতীপ $\angle FOD$

$\therefore \quad \angle FOD = 110^\circ$

প্রয়োগ — 2 চিত্র থেকে x,y,z-এর মান নির্ণয় করি।



$\angle EOD = \angle AOB - \angle AOE - \angle BOD$
$= 180^\circ - 80^\circ - 35^\circ$
$= 65^\circ$

$\therefore \; x^\circ = 65^\circ$

$\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$

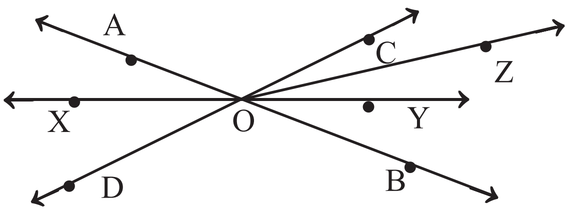
$\therefore \; y^\circ = 35^\circ$

$\angle COF = 180^\circ - \angle AOC - \angle BOF$
$= 180^\circ - 35^\circ - 30^\circ = 115^\circ$

$\therefore \; z^\circ = 115^\circ$

পেলাম $x = 65$, $y = 35$ এবং $z = 115$

প্রয়োগ — 3 দুটি সরলরেখা AB এবং CD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। OX এবং OY যথাক্রমে $\angle AOD$ ও $\angle BOC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে OX এবং OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।



প্রদত্ত : দুটি সরলরেখা AB এবং CD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। OX, $\angle AOD$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং OY, $\angle BOC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রামাণ্য : OX এবং OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : ধরি, XO এবং OY একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। XO-কে OZ পর্যন্ত বর্ধিত করলাম।

প্রমাণ : AB এবং XZ সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ $\angle AOX =$ বিপ্রতীপ $\angle BOZ$ এবং $\angle DOX =$ বিপ্রতীপ $\angle COZ$

যেহেতু, $\angle AOX = \angle DOX$, সুতরাং $\angle BOZ = \angle COZ$

$\therefore$ OZ $\angle BOC$ -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। আবার, OY, $\angle BOC$-কে সমদ্বিণ্ডত করে।

কিন্তু OY এবং OZ উভয়েই $\angle BOC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না।

যেহেতু, OY $\angle BOC$ -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সুতরাং OY এবং OZ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

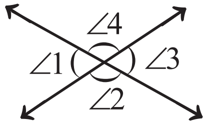
$\therefore$ OX এবং OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

কষে দেখি — 7.1

1. দুটি সরলরেখা PQ ও RS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে যে বিপ্রতীপ কোণগুলি তৈরি হয় তাদের আঁকি ও নাম লিখি।

2. ছবি দেখি ও কোণগুলির মান লেখার চেষ্টা করি:

(a)



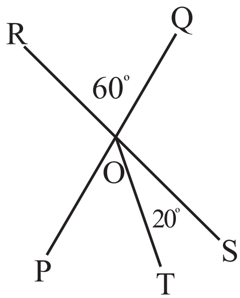
$\angle 1 = 35^{\circ}$

$\angle 2 = \square$

$\angle 3 = \square$

$\angle 4 = \square$ লিখি।

(b)



$\angle TOS = 20^{\circ}$

$\angle ROQ = 60^{\circ}$

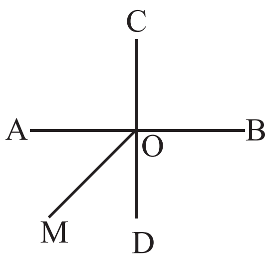
$\angle POT = \square$

$\angle ROP = \square$

$\angle QOS = \square$

3. তীর্থ PQ ও XY দুটি সরলরেখা আঁকল যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমি চাঁদার সাহায্যে বিপ্রতীপ কোণগুলি মেপে দেখি।

4. পাশের ছবি দেখি ও নীচের প্রশ্নের উত্তর খোঁজার চেষ্টা করি:



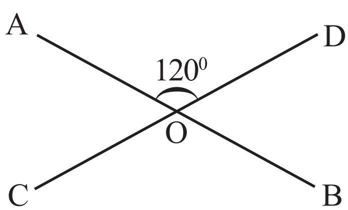
(i) দুটি কোণের নাম লিখি যারা পরস্পর পূরক কোণ।

(ii) দুটি কোণের নাম লিখি যারা পরস্পর সম্পূরক কোণ।

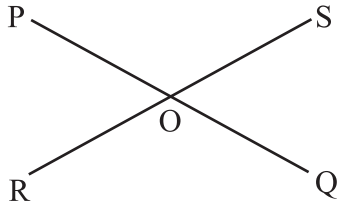
(iii) দুটি কোণের নাম লিখি যারা পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ।

5. দুটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে ছেদ করলে বিপ্রতীপকোণগুলির পরিমাপ সমান হবে — যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

6.



$\angle BOD$, $\angle BOC$ এবং $\angle AOC$ এর পরিমাপ লিখি।

7. 

$\angle POR$ ও $\angle QOS$ -এর সমষ্টি 110°; $\angle POS$, $\angle QOS$, $\angle QOR$ ও $\angle POR$ -এর পরিমাপ লিখি।

8. OP, OQ, OR এবং OS সমবিন্দু। OP এবং OR একই সরলরেখায় অবস্থিত। P ও R বিন্দু O বিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত। $\angle POQ = \angle ROS$ এবং $\angle POS = \angle QOR$ । যদি $\angle POQ = 50^\circ$ হয় তবে $\angle QOR$, $\angle ROS$ এবং $\angle POS$ এর পরিমাপ লিখি।

9. চারটি রশ্মি একটি বিন্দুতে এমনভাবে মিলিত হয় যে বিপরীত দিকের কোণগুলি সমান। প্রমাণ করি যে ওই চারটি রশ্মি দ্বারা দুটি সরলরেখা তৈরি হয়।

10. একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত—প্রমাণ করি।

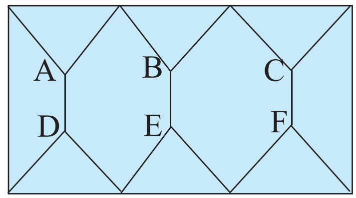
11. দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি চার সমকোণ —প্রমাণ করি।

12. PQR ত্রিভুজের $\angle PQR = \angle PRQ$; QR বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাদের মান সমান—প্রমাণ করি।

13. দুটি সরলরেখা পরস্পরকে একটি বিন্দুতে ছেদ করায় যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর দুটি লম্ব সরলরেখা — প্রমাণ করি।

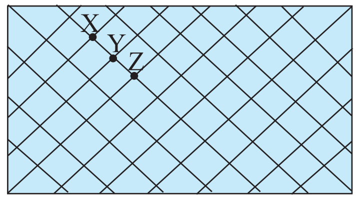
8. সমান্তরাল সরলরেখা ও ছেদকের ধর্ম

আজ মাধুরীদের বাড়ির বারান্দায় বসে আমরা যেমন খুশি আঁকছি। পল্লব মাধুরীদের বাড়ির বারান্দার গ্রিলের ডিজাইনটা আঁকছে। আয়েষা পল্লবের আঁকা ছবির মধ্যে ছেদবিন্দুগুলি গোল দাগ দিয়ে নাম দিচ্ছে। সে দিল —



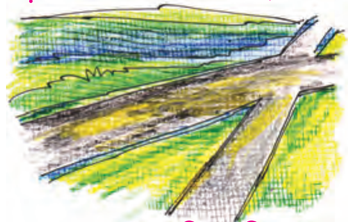
তিন্নি তাদের রান্নাঘরের বাইরে দেওয়া তারের জালির ডিজাইন আঁকল। সেখানে ছেদবিন্দুগুলি খোঁজার চেষ্টা করি।

দেখছি, পল্লবের ছবির A, B ও C ছেদবিন্দুগুলি ও তুহিনের ছবির X, Y ও Z ছেদবিন্দুগুলি আলাদা ভাবে পাচ্ছি। X, Y ও Z ছেদবিন্দুগুলি সমরেখ অর্থাৎ একটি সরলরেখাংশ দুই বা ততোধিক সরলরেখাংশকে একাধিক আলাদা আলাদা বিন্দুতে ছেদ করেছে। এই রকম সরলরেখাংশকে কী বলব?

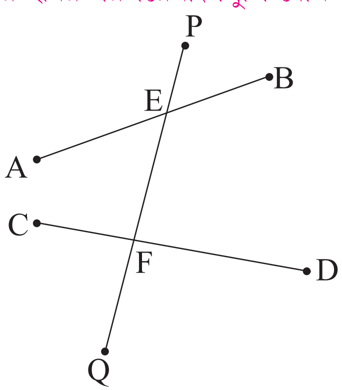


এই রকম সরলরেখাংশকে ছেদক বা ভেদক বলা হয়। অর্থাৎ যদি একটি সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে একাধিক আলাদা বিন্দুতে ছেদ করে, তখন ওই সরলরেখাকে **ছেদক বা ভেদক** বলে।

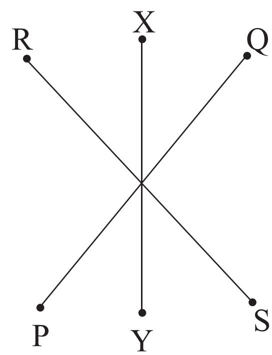
আমাদের পাড়ার রাস্তার বা রেললাইনে ভেদক দেখি।



নীচের ছবির সরলরেখাংশগুলি দেখি ও তাদের মধ্যে কোনটি ছেদক খুঁজি:

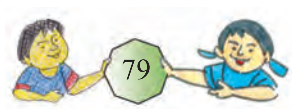


1 নং ছবি

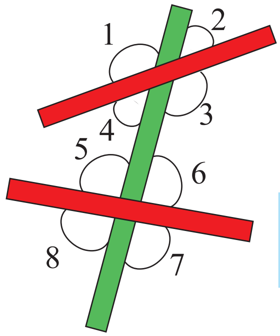


2 নং ছবি

(1) নং ছবির ছেদক ☐ [AB/PQ] কিন্তু (2) নং ছবির কোনো ছেদক নেই।



আমার বোন সহেলী অনেকগুলি সরু সরু পিচবোর্ডে পিন দিয়ে আটকে নীচের ছবির মতো ছেদক তৈরি করল—



তার ফলে অনেকগুলি কোণ তৈরি হয়েছে। সে কতকগুলি কোণের নাম দিল। আমি ছবির কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি—

$\angle 1 = \angle 3$ আবার $\angle 2 = \angle 4$; এরা $\square$ কোণ।

আবার, $\angle 5 =$ বিপ্রতীপ $\square$ এবং $\angle 6 =$ বিপ্রতীপ $\square$

ছবিতে ভেদকের অর্থাৎ সবুজ রঙের পিচবোর্ডের এবং লাল পিচবোর্ডের মাঝের বা ভিতরের কোণগুলি অর্থাৎ $\angle 4$, $\angle 3$, $\angle 6$ ও $\angle 5$ -কে কী বলা হয়?

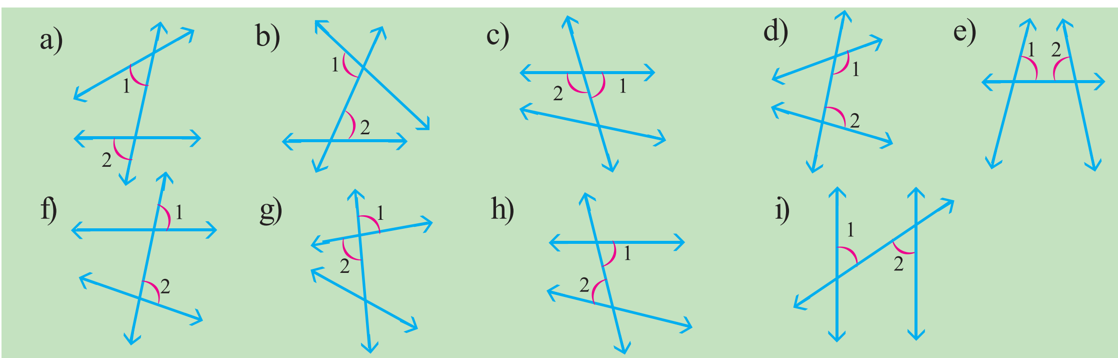
$\angle 4$, $\angle 3$, $\angle 6$ ও $\angle 5$-কোণগুলি অন্তঃস্থ কোণ এবং বাহিরের দিকের $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ ও $\angle 8$ কোণগুলি বহিঃস্থ কোণ।

অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ কোণগুলির মধ্যে ভেদকের একই দিকের কোণগুলি ও ভেদকের বিপরীত দিকের কোণগুলির কি বিশেষ কোনো সম্পর্ক বা নাম আছে?

এইভাবে পাওয়া 8 টি কোণের আলাদা আলাদা বিশেষ নাম নীচের ছকে লিখলাম —

কোণের নাম	ছবির কোণগুলি
অন্তঃস্থ কোণ	$\angle 4$, $\angle 3$, $\square$, $\square$
বহিঃস্থ কোণ	$\angle 1$, $\angle 2$, $\square$, $\square$
চার জোড়া অনুরূপ কোণ	$\angle 1$ ও $\angle 5$, $\angle 2$ ও $\angle 6$, $\angle 4$ ও $\angle 8$, $\angle 3$ ও $\angle 7$
দু-জোড়া একান্তর কোণ	$\angle 4$ ও $\angle 6$, $\angle 3$ ও $\angle 5$
ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি	$\angle 3$ ও $\angle 6$, $\angle 4$ ও $\angle 5$

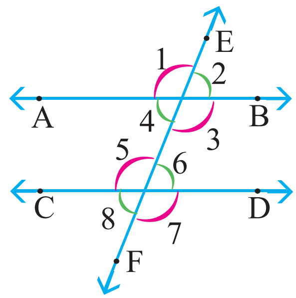
সহেলীর মতো পল্লব ও মাধুরী অনেকগুলি কোণ আঁকল ও কোণগুলি চিহ্নিত করল। আমি কোনটি কী কোণ বলার চেষ্টা করি—



(a) $\angle 1$ ও $\angle 2$ অনুরূপ কোণ

[বাকি কোণজোড়াগুলির নাম নিজে লিখি]

আজ আমরা ঠিক করেছি আমাদের কয়েকজন বন্ধু ক্লাসের ব্ল্যাকবোর্ডে কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ছেদক আঁকব। আর কিছু বন্ধু চাঁদার সাহায্যে কোণগুলি মাপবে ও তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা খুঁজবে।



মীরা স্কেলের সাহায্যে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CD আঁকল। রানা সেখানে একটি ভেদক EF টানল। এর ফলে যে কোণগুলি তৈরি হয়েছে তার মধ্যে 8 টি কোণ $\angle 1, \angle 2, ..., \angle 8$ লিখে চিহ্নিত করল।

আমি বোর্ডের ছবির অনুরূপ কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপি ও লিখি।

4 জোড়া অনুরূপ কোণগুলি হলো ($\angle 1$ ও $\angle 5$), ($\angle 2$ ও $\boxed{}$), ($\angle 4$ ও $\angle 8$) ও ($\angle 3$ ও $\boxed{}$)

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle 1 = \boxed{}$ ও $\angle 5 = \boxed{}$

[নিজে সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ছেদক আঁকি এবং অনুরূপ কোণগুলি মাপি ও লিখি]

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 5$

আবার, $\angle 2 = \boxed{}$ ও $\angle 6 = \boxed{}$ [নিজে কোণগুলি মাপি ও লিখি]

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 6$

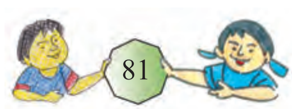
একইভাবে অন্য অনুরূপ কোণগুলি মেপে দেখছি,

মীরার আঁকা সমান্তরাল সরলরেখা দুটিকে একটি ভেদক ছেদ করায় ভেদকের একই দিকে 2 জোড়া করে মোট 4 জোড়া অনুরূপ কোণ তৈরি হয়েছে এবং প্রতিজোড়া অনুরূপ কোণগুলির পরিমাপ সমান।

প্রীতম, সোনালি, সুমন্ত ও মেহের প্রত্যেকে তাদের খাতায় যেকোনো দুটি সমান্তরাল সরলরেখা ও একটি ভেদক আঁকল এবং চাঁদার সাহায্যে অনুরূপ কোণগুলি মেপে দেখল অনুরূপ কোণগুলি সমান।

[নিজে আঁকি ও যাচাই করি]

স্বতঃসিদ্ধ : **3** দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে প্রতিজোড়া অনুরূপ কোণগুলির পরিমাপ সমান হয়।



সিরাজ বোর্ডে আঁকা ছবির একান্তর কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা দেখবে।

বোর্ডের ছবির 2 জোড়া একান্তর কোণগুলি হলো ($\angle 4$ ও $\angle 6$), ($\angle 3$ ও $\square$)

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle 4 = \square$ ও $\angle 6 = \square$

[নিজে সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ভেদক আঁকি এবং একান্তর কোণগুলি মেপে লিখি]

$\therefore \quad \angle 4 = \angle 6$

আবার, $\angle 3 = \square$ ও $\angle 5 = \square$ $\quad \therefore \quad \angle 3 \; \square \; \angle 5$ ($=$ / $\neq$ বসাই)

আমরা 4 বন্ধুরা প্রত্যেকে আমাদের খাতায় দুটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ছেদক আঁকলাম। 2 জোড়া একান্তর কোণের নাম লিখে চাঁদার সাহায্যে তাদের মাপ লিখে দেখছি একান্তর কোণগুলির পরিমাপ সমান। [নিজে আঁকি ও যাচাই করি]

পেলাম, দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে ভেদকের বিপরীতদিকে অন্তঃস্থ কোণগুলি 2 জোড়া একান্তর কোণ তৈরি করে, প্রতিজোড়া কোণের পরিমাপ $\square$ (সমান/অসমান)।

আমি বোর্ডে আঁকা ছবির অন্তঃস্থ বিপরীত কোণগুলির মাপ নেব ও তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা দেখব।

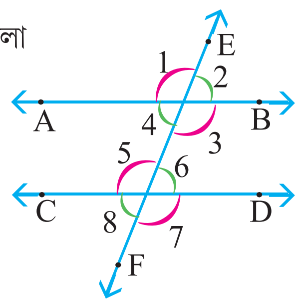
ছবির 2 জোড়া, ভেদকের একইপাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি হলো

($\angle 3$ ও $\angle 6$) এবং ($\angle 4$ ও $\square$)

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি,

$\angle 3 = \square$ ও $\angle 6 = \square$ এবং

$\angle 4 = \square$ ও $\angle 5 = \square$



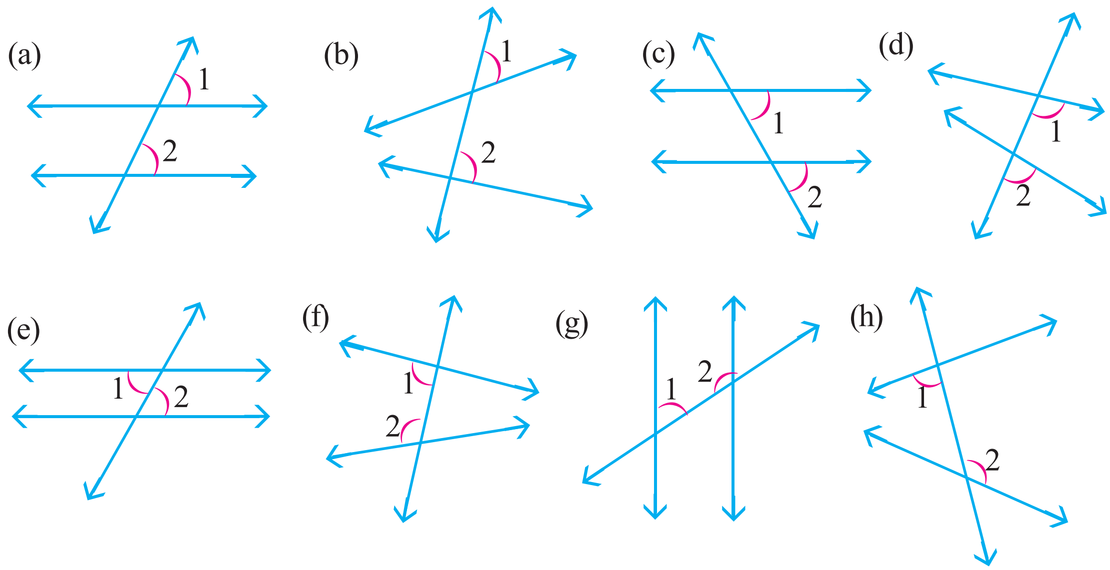
[নিজে সমান্তরাল দুটি সরলরেখা ও একটি ভেদক আঁকি ও ভেদকের একই পাশে অন্তঃস্থ কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপি]

দেখছি, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ এবং $\angle 4 + \angle 5 = \square$

আমরা খাতায় আরও চারটি একই ছবি আঁকি ও ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে যোগ করে কী পাই লিখি। [নিজে করি]

পেলাম, দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের পরিমাপের সমষ্টি $\square$ সমকোণ হয়।

নীপা অনেকগুলি জোড়া জোড়া সমান্তরাল ও অসমান্তরাল সরলরেখা আঁকল। আমি তাদের একটি করে ছেদক আঁকলাম। এরফলে অনুরূপ কোণ, একান্তর কোণ ও ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি তৈরি হলো।



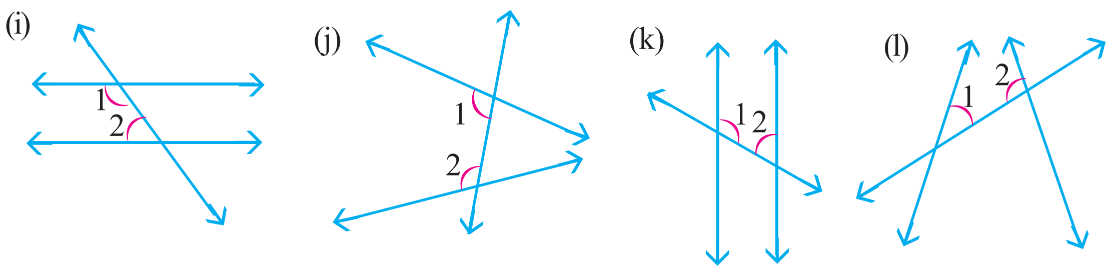
রমিতা উপরের কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে পেল,

(a) $\angle 1 = \angle 2$ (b) $\angle 1 \neq \angle 2$ (c) $\angle 1 \square \angle 2$ $(= / \neq)$

(d) $\angle 1 \square \angle 2$ $(=/\neq)$ (e) $\angle 1 \square \angle 2$ $(= / \neq)$ (f) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ ডিগ্রি

(g) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ ডিগ্রি (h) $\angle 1 + \angle 2 = \square$ ডিগ্রি

আমি আরও কয়েকটি ছবি আঁকলাম। কী পেলাম দেখি।



$\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$ $\angle 1 + \angle 2 = \square$

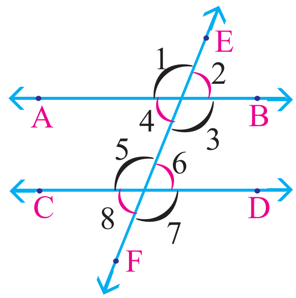
উপপাদ্য 2 দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে একান্তর কোণগুলির পরিমাপ সমান হয় এবং ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদুটির পরিমাপের সমষ্টি 180° হয়। (এই উপপাদ্যটি স্বতঃসিদ্ধ 3-এর সাহায্যে প্রমাণ করতে পারি)।

হাতে কলমে

(1) একটি ড্রয়িং বোর্ডে একটি সাদা কাগজ আটকালাম।

(2) স্কেলের সাহায্যে এই সাদা কাগজে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CD আঁকলাম।

(3) AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুটির একটি ভেদক EF টানলাম।

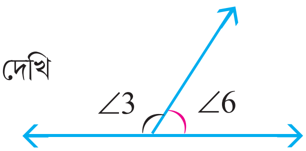


(4) যে কোণগুলি তৈরি হলো তাদের মধ্যে 8 টির নাম দিলাম ও কেটে নিলাম।

(5) এবার অনুরূপ কোণ $\angle 1$ ও $\angle 5$ নিয়ে একটির উপরে আর একটি বসিয়ে যাচাই করি। $\angle 1 = \angle 5$ হলো কিনা দেখি।

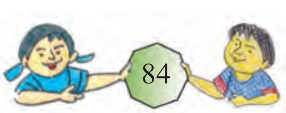
(6) এবার একান্তর কোণগুলিও কেটে নিয়ে একটির উপর আর একটি বসিয়ে $\angle 4 = \angle 6$ হলো কিনা যাচাই করি।

(7) ভেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুটি $\angle 3$ ও $\angle 6$ পাশাপাশি বসিয়ে দেখি $\angle 3 + \angle 6 = \boxed{}$ হলো কিনা।



এবার হাতে কলমে যা পেলাম নীচের ছকে লিখি।

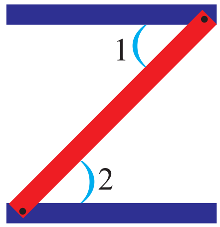
ক্রমিক নং	কোণ	কোণের ধরন	সমান/অসমান/সম্পূরক	সিদ্ধান্ত
1.	$\angle 1$ ও $\angle 5$ $\angle 4$ ও $\angle 8$ $\angle 2$ ও $\angle 6$ $\angle 3$ ও $\angle 7$	অনুরূপ কোণ	সমান	একজোড়া সমান্তরাল সরলরেখার ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলি সমান
2.	$\angle 4$ ও $\angle 6$ $\angle 3$ ও $\angle 5$			
3.	$\angle 3$ ও $\angle 6$ $\angle 4$ ও $\angle 5$		$\angle 3 + \angle 6 = \boxed{}$ $\angle 4 + \angle 5 = \boxed{}$	

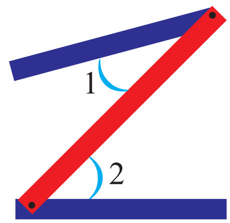


আজ আমরা অন্যরকম পিচবোর্ডের খেলা খেলব। মেহের অনেকগুলি পিচবোর্ডের নানা রঙের ছোটো বড়ো সরু একইরকম চওড়া দণ্ড তৈরি করল।

আমার ভাই বিপুল এইরকম তিনটি রঙিন দণ্ড পিন দিয়ে আটকে নানান আকারের ইংরেজি অক্ষর ‘Z’ করার চেষ্টা করল।

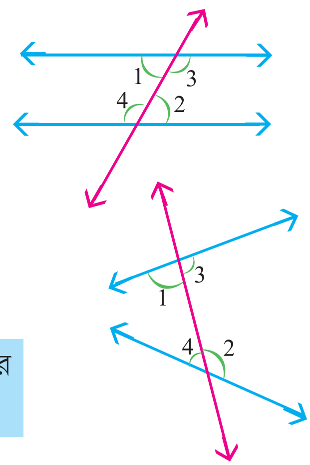
সে করল →





আমি বিপুলের তৈরি (i) ও (ii) নং পিচবোর্ডের Z-এ যে একান্তর কোণদুটি তৈরি হলো মেপে দেখলাম, (i) নং ছবিতে, $\angle 1 = \angle 2$ কিন্তু (ii) নং ছবিতে, $\angle 1 \neq \angle 2$

স্কেল বসিয়ে দেখছি (i) নং Z-এর নীল বাহুদুটি পরস্পর সমান্তরাল। কিন্তু (ii) নং Z-এর নীল বাহুদুটি পরস্পর সমান্তরাল নয়।

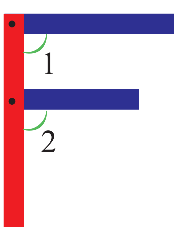


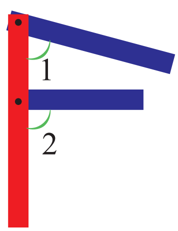
এবার আমি খাতায় দুটি সরলরেখা ও ছেদক বা ভেদক আঁকলাম। এবার একান্তর কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপলাম।

দেখছি, যখন একান্তর কোণগুলির পরিমাপ সমান তখন সরলরেখাগুলি ☐ [সমান্তরাল / সমান্তরাল নয়] [নিজে আঁকি ও যাচাই করে লিখি]

পেলাম, দুটি সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি একান্তর কোণগুলির পরিমাপ সমান হয়, তবে ওই সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

আমিও মেহেরের তৈরি ছোটো বড়ো একই রকম চওড়া তিনটি পিচবোর্ড দিয়ে ইংরেজি ‘F’ তৈরির চেষ্টা করলাম।

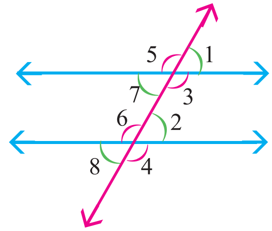




চাঁদার সাহায্যে (i) নং ও (ii) নং -এর ‘F’ -এর অনুরূপ কোণগুলি মেপে দেখছি,
(i) নং -এর $\angle 1 = \angle 2$ কিন্তু (ii) নং -এর $\angle 1 \neq \angle 2$.

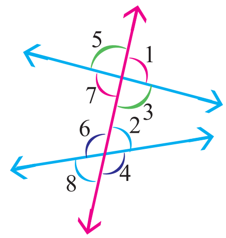
সুশোভন স্কেল বসিয়ে (i) নং ও (ii) নং -এর ‘F’ -এর নীল বাহুগুলি সমান্তরাল আছে কিনা দেখছে।

দেখছি (i) নং -এর ‘F’-এর নীল বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। কিন্তু (ii) নং ‘F’-এর নীল বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল নয়।



আমি খাতায় দুটি সরলরেখা ও একটি ভেদক আঁকলাম। অনুরূপ কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপলাম।

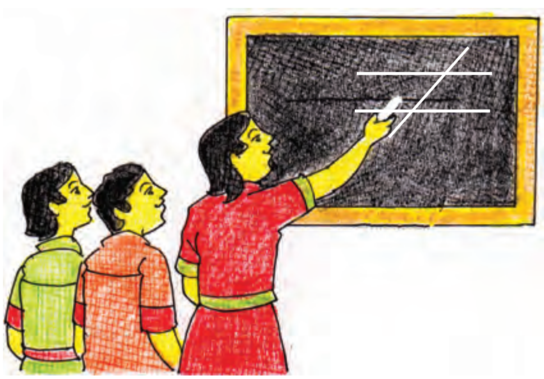
দেখলাম, যখন অনুরূপ কোণগুলির পরিমাপ সমান তখন সরলরেখা দুটি $\boxed{}$ [সমান্তরাল / অসমান্তরাল] [নিজে আঁকি ও যাচাই করে লিখি]

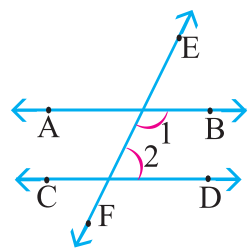


স্বতঃসিদ্ধ : 4 দুটি সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি একজোড়া অনুরূপ কোণের পরিমাপ সমান হয় তবে ওই সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

প্রিয়া ব্ল্যাকবোর্ডে কতকগুলি একজোড়া করে সরলরেখা ও তাদের একটি করে ছেদক আঁকল। এর ফলে অনেকগুলি অন্তঃস্থ কোণ তৈরি হয়েছে।

আমি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি ছেদকের একইপাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক কিনা অর্থাৎ ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণগুলির পরিমাপের সমষ্টি 2 সমকোণ কিনা।

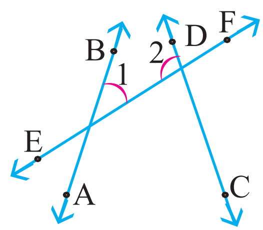




মেপে দেখছি $\angle 1 + \angle 2 = \boxed{}$

স্কেলে মেপে দেখছি, প্রথম ছবির AB ও CD পরস্পর $\boxed{}$ [সমান্তরাল / সমান্তরাল নয়]।

দ্বিতীয় ছবির AB ও CD পরস্পর $\boxed{}$ [সমান্তরাল / সমান্তরাল নয়]।

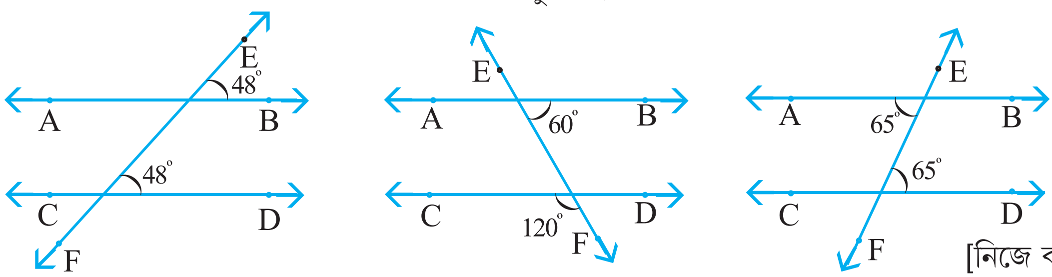


মেপে দেখছি $\angle 1 + \angle 2 = \boxed{}$

পেলাম, দুটি সরলরেখা একটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদুটির সমষ্টি 2 সমকোণ হলে সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

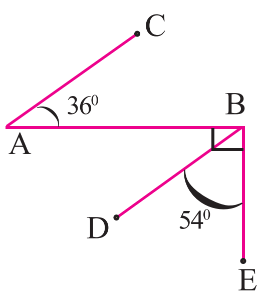
উপপাদ্য 3 দুটি সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি (i) একজোড়া একান্তর কোণের পরিমাপ সমান হয় (ii) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদুটির পরিমাপের সমষ্টি 2 সমকোণের সমান হয় তাহলে এদের যেকোনো একটির [(i) বা (ii)] জন্য সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হয়।
(এই উপপাদ্যটি স্বতঃসিদ্ধ 4-এর সাহায্যে প্রমাণ করতে পারি)।

কোণের পরিমাপ দেখে AB ও CD সমান্তরাল কিনা যুক্তিসহ লিখি।



[নিজে করি]

প্রয়োগ : 1 চিত্রে BE সরলরেখাংশ AB সরলরেখাংশের উপর লম্ব। দেখাই যে, AC ও BD পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাংশ।



প্রমাণ : $\angle ABE = 90^\circ, \angle DBE = 54^\circ$

$\therefore \quad \angle ABD = \angle ABE - \angle DBE$

$= 90^\circ - 54^\circ$

$= 36^\circ$

আবার, $\angle CAB = 36^\circ$

$\therefore \angle ABD = \angle CAB$; কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

$\therefore$ AC ও BD পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাংশ।

প্রয়োগ : 2 চিত্রে PQ || BC; x°, y° ও z° -এর মান লিখি।

প্রমাণ : PQ || BC এবং AB এদের একটি ছেদক।

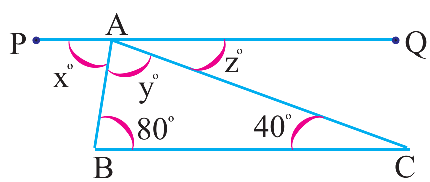
$\therefore \angle PAB =$ একান্তর $\angle ABC$.

যেহেতু $\angle ABC = 80^\circ$, $\therefore \angle PAB = 80^\circ$;সুতরাং, $x^\circ = 80^\circ$

আবার PQ || BC এবং AC এদের অপর একটি ছেদক।

$\therefore \quad \angle QAC =$ একান্তর $\angle ACB$.

যেহেতু $\angle ACB = 40^\circ$, সুতরাং, $\angle QAC = 40^\circ$. $\therefore$ $z^\circ = 40^\circ$



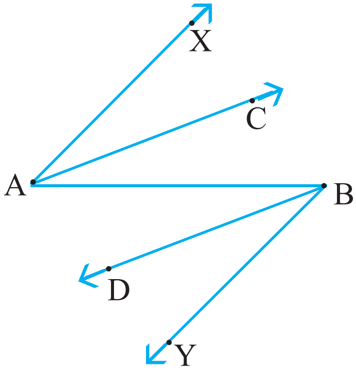
$\angle PAB + \angle BAC + \angle QAC = 180^\circ$

বা, $80^\circ + \angle BAC + 40^\circ = 180^\circ$

বা, $\angle BAC = 180^\circ - 120^\circ \therefore \angle BAC = 60^\circ \quad \therefore y^\circ = 60^\circ$

সুতরাং, $x^\circ = 80^\circ$, $y^\circ = 60^\circ$ এবং $z^\circ = 40^\circ$

প্রয়োগ : 3 AB সরলরেখাংশের A ও B বিন্দুতে AB সরলরেখাংশের বিপরীত পাশে $\angle BAX$ ও $\angle ABY$ দুটি সমান কোণ। প্রমাণ করি যে, $\angle BAX$ এবং $\angle ABY$ -এর সমদ্বিখণ্ডকদুটি পরস্পর সমান্তরাল।



প্রদত্ত : AB সরলরেখাংশের A ও B বিন্দুতে AB সরলরেখাংশের বিপরীত পাশে $\angle BAX$ ও $\angle ABY$ দুটি সমান কোণ।

অর্থাৎ $\angle BAX = \angle ABY$

AC ও BD যথাক্রমে $\angle BAX$ ও $\angle ABY$ -এর সমদ্বিখণ্ডক।

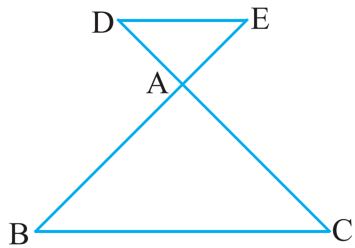
প্রামাণ্য : $AC \parallel BD$

প্রমাণ : $\angle BAX = \angle ABY$;

সুতরাং $\frac{1}{2}\angle ABX = \frac{1}{2}\angle ABY$;

$\therefore \angle BAC = \angle ABD$; কিন্তু এরা একান্তর কোণ $\therefore$ $AC \parallel BD$

প্রয়োগ : 4 ABC ত্রিভুজের BA ও CA বাহুকে যথাক্রমে E এবং D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যাতে DE ও BC পরস্পর সমান্তরাল হয়। প্রমাণ করি যে, ΔABC ও ΔADE সদৃশকোণী।



প্রদত্ত : ΔABC -এর BA এবং CA বাহুকে যথাক্রমে E ও D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হয়েছে যাতে $DE \parallel BC$ হয়।

প্রামাণ্য : ΔABC ও ΔADE সদৃশকোণী।

প্রমাণ : ΔADE ও ΔABC -তে

$\angle AED$ = একান্তর $\angle ABC$ ($\because DE \parallel BC$; EB ছেদক)

$\angle ADE$ = একান্তর $\angle ACB$ ($\because DE \parallel BC$; DC ছেদক)

$\angle DAE$ = বিপ্রতীপ $\angle BAC$

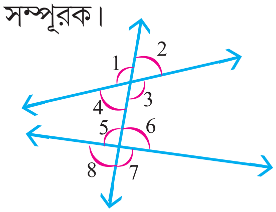
$\therefore \Delta ABC$ ও ΔADE সদৃশকোণী।

> একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপের সঙ্গে সমান হলে ত্রিভুজদ্বয়কে সদৃশকোণী বলা হয়।

কষে দেখি — 8

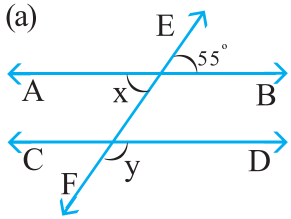
1. চন্দ্রা লাইন টানা খাতার পাতা নিল। দুটি লাইনের মাঝে একটি ছেদক টানল। এর ফলে 4 জোড়া অনুরূপ কোণ, 2 জোড়া একান্তর কোণ ও 2 জোড়া একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ তৈরি হলো। তাদের খুঁজে নাম দিই ও লিখি। চাঁদার সাহায্যে মেপে যাচাই করি যে (i) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান, (ii) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান ও (iii) একই পাশের অন্তঃস্থ কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

2. পাশের ছবির কোণগুলি দেখি ও কোনগুলি অনুরূপ কোণ, কোনগুলি একান্তর কোণ ও কোনগুলি একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ লিখি।



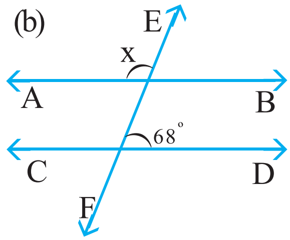
3. A B||CD হলে নীচের কোণগুলির মান লিখি—

(a)



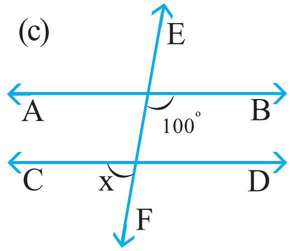
$x = \square$, $y = \square$

(b)



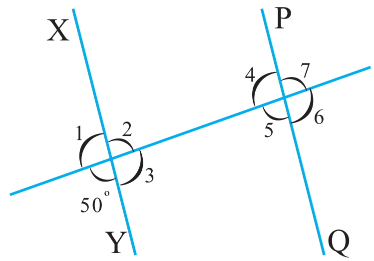
$x = \square$

(c)



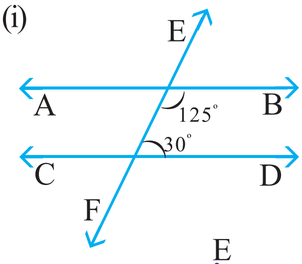
$x = \square$

4. পাশের ছবির XY|| PQ হলে 7 টি কোণের মান লিখি।

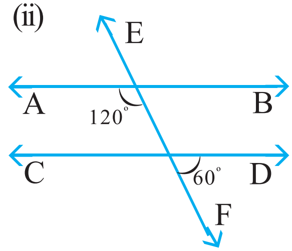


5. নীচের AB ও CD সরলরেখা দুটি সমান্তরাল কিনা কোণের মান দেখে যুক্তি দিয়ে লিখি—

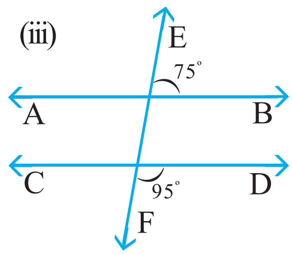
(i)



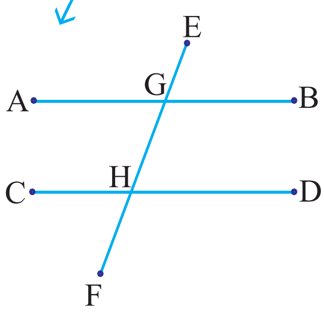
(ii)



(iii)

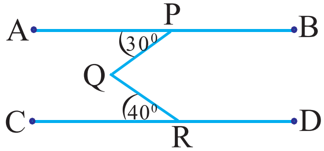


6.

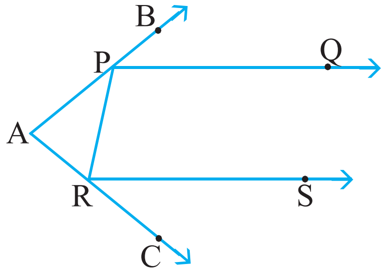


চিত্রে AB||CD এবং $\angle EGB = 50^\circ$; $\angle AGE$, $\angle AGH$, $\angle BGH$, $\angle GHC$, $\angle GHD$, $\angle CHF$ এবং $\angle DHF$ -এর পরিমাপ লিখি।

7.



চিত্রে AB||CD; $\angle PQR$ -এর পরিমাপ লিখি।

8. 

চিত্রে $PQ||RS$, $\angle BPQ = 40^\circ$, $\angle BPR = 155^\circ$ এবং $\angle CRS = 70^\circ$; ΔAPR-এর কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

9. AB এবং CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখার ভিতর O যেকোনো একটি বিন্দু। OP ও OQ যথাক্রমে AB CD সরলরেখার উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে P, O, Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

10. দুটি কোণের প্রতিজোড়া বাহু পরস্পর সমান্তরাল। প্রমাণ করি যে, কোণদুটি সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক।

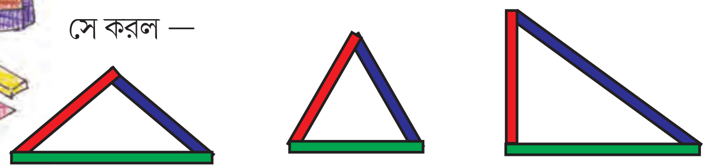
11. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ $\angle BAD$ -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ করি যে AC কর্ণ $\angle BCD$ -কেও সমদ্বিখণ্ডিত করে।

12. প্রমাণ করি যে, সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে, প্রতিটি কোণই সমকোণ।

9. ত্রিভুজের দুটি বাহু ও তাদের বিপরীত কোণের সম্পর্ক

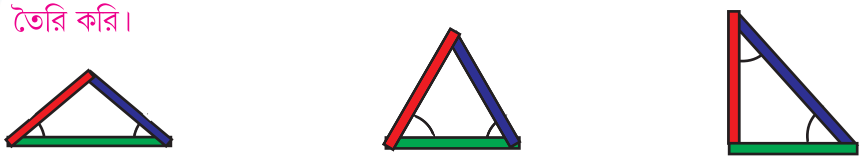
সাবিনা অনেকগুলি সরু সরু রঙিন একই রকম চওড়া পিচবোর্ড তৈরি করেছে। সে তিনটি পিচবোর্ডের শেষ প্রান্তগুলি পিন দিয়ে আটকে একটি সীমাবদ্ধ চিত্র তৈরির চেষ্টা করছে।

সে করল —



☐ ত্রিভুজ ☐ ত্রিভুজ ☐ ত্রিভুজ

আমি সাবিনার তৈরি পিচবোর্ডগুলি দিয়ে নানান আকারের ছোটো বড়ো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ তৈরি করি।



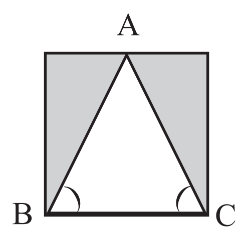
আমার বোন চাঁদার সাহায্যে এই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি মাপল।

দেখছি, প্রতিটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান দৈর্ঘ্যের বাহুর বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ ☐ [সমান/অসমান] [নিজে চাঁদার সাহায্যে মেপে লিখি]

তৃষা সাদা কাগজে উপরের মতো বিভিন্ন মাপের সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকল ও কেটে নিল। এবার এই ত্রিভুজের সমান মাপের বাহুদুটির একটি বাহুর সাথে অন্যবাহু মিলিয়ে কি পেল দেখি।

দেখছি, সমান মাপের বাহুর বিপরীত কোণদুটির একটি অপরটির সঙ্গে সম্পূর্ণভাবে মিলে যাচ্ছে। (নিজে করি)

হাতেকলমে



(1) একটি কাঠের বোর্ডে মোটা সাদা কাগজ আটকালাম।

(2) ওই সাদা মোটা কাগজে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকলাম ও নাম দিলাম ABC যার $AB = AC$

(3) ট্রেসিং পেপার $\triangle$ ABC-এর উপর বসিয়ে এঁকে নিলাম।

(4) ট্রেসিং পেপারের ত্রিভুজ ABC কেটে নিলাম।

(5) ভাঁজ করে B বিন্দুর সাথে C বিন্দু মিলিয়ে দেখছি $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণদুটি পরস্পরের সাথে সম্পূর্ণরূপে মিলে গেছে।

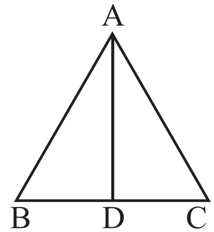
এইভাবে পেলাম $\angle ABC = \angle ACB$ বা ত্রিভুজের সমান দৈর্ঘ্যের বাহুর বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ পরস্পর সমান।

হাতেকলমে পেলাম, একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান দৈর্ঘ্যের হলে তাদের বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ সমান হবে।

এবার আমরা ত্রিভুজের সর্বসমতার শর্তগুলি আরেকবার স্মরণ মনে মনে ভাবি —

স্বতঃসিদ্ধ : **5** দুটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ অপর ত্রিভুজটির দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হয় (SAS)।

উপপাদ্য **4** এবার আমরা যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করার চেষ্টা করি— কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে তাদের বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ সমান হবে।



প্রদত্ত (দেওয়া আছে) : ABC একটি ত্রিভুজ যার $AB = AC$

প্রামাণ্য (কী প্রমাণ করব) : $\triangle$ ABC-এর সমান দৈর্ঘ্যের বাহু AB ও AC-এর বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ সমান অর্থাৎ $\angle ABC = \angle ACB$

অঙ্কন : $\triangle$ ABC-এর $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ -এর মধ্যে, $AB = AC$ (প্রদত্ত)

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

AD ত্রিভুজ দুটির সাধারণ বাহু।

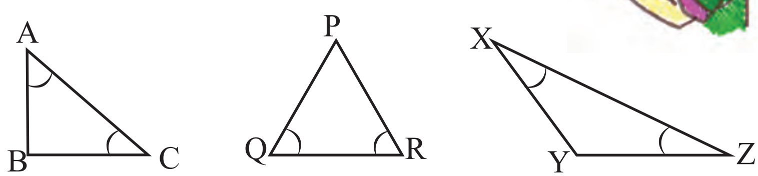
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [ত্রিভুজের বাহু-কোণ-বাহু বা S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে — স্বতঃসিদ্ধ 5]

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$ [সর্বসম ত্রিভুজদের অনুরূপ কোণ]

সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB$ (প্রমাণিত)

তপন MAT একটি ত্রিভুজ আঁকল যার MA=MT; আমি যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করি যে $\triangle$MAT-এর $\angle MAT = \angle MTA$ **[নিজে করি]**

এবার আমরা এমন ত্রিভুজ আঁকব যার দুটি কোণের পরিমাপ সমান। এদের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্কেল দিয়ে মেপে দেখি।

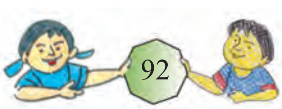


স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি, $\triangle$ ABC -এর AB = ☐, BC = ☐ ও CA = ☐

$\triangle$ PQR -এর PQ = ☐, QR = ☐ ও RS = ☐

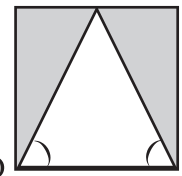
$\triangle$ XYZ -এর XY = ☐, YZ = ☐ ও ZX = ☐

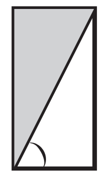
দেখছি, প্রতিটি ত্রিভুজের সমান পরিমাপের কোণের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ☐ [সমান / অসমান]



উপপাদ্য **5** যুক্তি দিয়ে স্বতঃসিদ্ধ 5 -এর সাহায্যে প্রমাণ করতে পারি — (i) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণের পরিমাপ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য অপর ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ ও অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে [AAS]। (ii) দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য অপরটির তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে [SSS]। (iii) দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য অপরটির অতিভুজ ও অনুরূপ বাহুটির দৈর্ঘ্য সমান হলে সমকোণী ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে [RHS]।

হাতেকলমে





(1) প্রমাণ সাইজের একটি বোর্ডে একটি সাদা মোটা কাগজ আটকালাম।

(2) এই সাদা কাগজে $\triangle$ PQR আঁকলাম যার $\angle PQR = \angle PRQ$

(3) একটি ট্রেসিং পেপার $\triangle$ PQR-এর উপর বসিয়ে আর একটি $\triangle$PQR আঁকলাম

(4) ট্রেসিং পেপারে আঁকা $\triangle$ PQR কেটে নিলাম

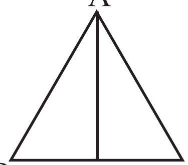
(5) কেটে নেওয়া $\triangle$ PQR শীর্ষবিন্দু P দিয়ে এমনভাবে দু-ভাঁজ করলাম যাতে $\angle PQR$, $\angle PRQ$ -এর সাথে সম্পূর্ণরূপে মিলে যায়।

দেখছি, $\triangle$ PQR -এর PQ বাহু PR বাহুর সাথেও সম্পূর্ণ মিলে গেছে।

$\therefore$ হাতেকলমে দেখছি, PQ = PR

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের মান সমান হলে তাদের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়।

উপপাদ্য **6** যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ সমান হলে তাদের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হবে।



প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle ACB$

প্রামাণ্য : $\triangle$ABC -এর সমান পরিমাপের দুটি কোণ $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ -এর বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান অর্থাৎ AB = AC

অঙ্কন : $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক AD অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : $\triangle$ABD ও $\triangle$ACD -এর মধ্যে,

$\angle BAD = \angle CAD$ [কারণ AD, $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক]

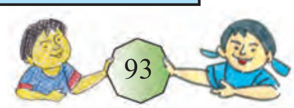
AD ত্রিভুজ দুটির সাধারণ বাহু

$\angle ABD = \angle ACD$ (প্রদত্ত)

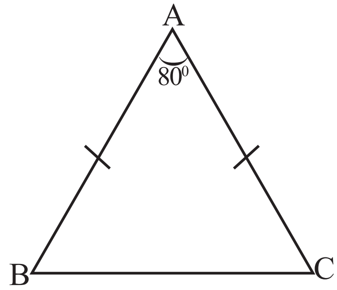
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [ত্রিভুজের কোণ-কোণ-বাহু (A-A-S) সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AB = AC$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] প্রমাণিত।

সীমা একটি ত্রিভুজ CAT আঁকল যার $\angle CAT = \angle CTA$; আমি যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করি যে $\triangle$ CAT-এর CA = CT



প্রয়োগ : 1 চিত্রে $AB = AC$ এবং $\angle BAC = 80^\circ$; $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর পরিমাপ কত লিখি।



প্রমাণ : $\angle BAC = 80^\circ$ এবং $AB = AC$

সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB$

$\triangle ABC$ তে $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

বা $\angle ABC + \angle ABC + 80^\circ = 180^\circ$ $(\because \angle ACB = \angle ABC)$

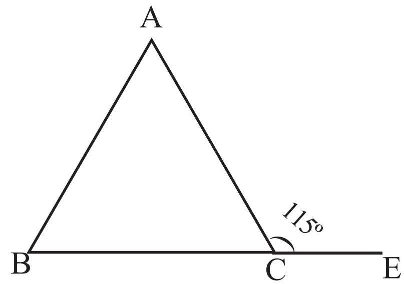
বা $2\angle ABC = 180^\circ - 80^\circ$

বা $2\angle ABC = 100^\circ$ $\therefore \angle ABC = 50^\circ$

$\angle ABC = \angle ACB$ $\therefore \angle ACB = 50^\circ$

প্রয়োগ - 2 চিত্রে $AB = AC$ এবং $\angle ACE = 115^\circ$, $\triangle ABC$ -এর কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

প্রমাণ : $\angle ACB + \angle ACE = 180^\circ$



$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACE$

$= 180^\circ - 115^\circ$

$= 65^\circ$

$\angle ABC = \angle ACB \therefore \angle ABC = 65^\circ$

বা $65^\circ + 65^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

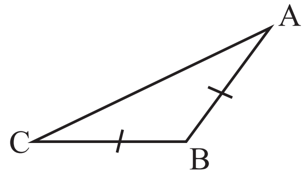
বা $\angle BAC = 180^\circ - 130^\circ$ $\therefore \angle BAC = 50^\circ$

সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB = 65^\circ$ এবং $\angle BAC = 50^\circ$

প্রয়োগ - 3 একটি স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ স্থূলকোণের পরিমাপের $\frac{1}{3}$ অংশ; ত্রিভুজটির প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ লিখি।

প্রমাণ: $\triangle ABC$ এর $AB = CB$; $\therefore \angle BAC = \angle ACB$

ধরি, $\angle ACB = x^\circ$



সুতরাং $\angle BAC = x^\circ$ এবং $\angle ABC = 3x^\circ$

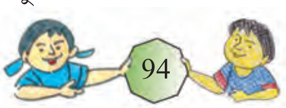
$\triangle ABC$ তে $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

বা $3x^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$

বা $5x^\circ = 180^\circ$ $\therefore$ $x^\circ = 36^\circ$

$\therefore$ $3x^\circ = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

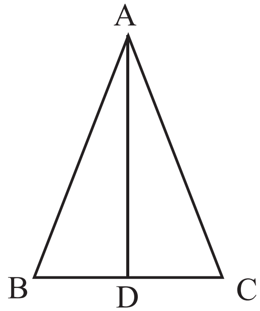
সুতরাং $\angle ABC = 108^\circ$, $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$



প্রয়োগ : 4 প্রমাণ করি, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রদত্ত : $\triangle ABC$ -এর $AB = AC$ এবং $\angle BAC$-এর সমদ্বিখন্ডক AD ভূমি BC -কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রামাণ্য : $BD = CD$ এবং $\angle ADB = \angle ADC = 90^o$



প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর $AB = AC$;

$\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ -এর মধ্যে $AB = AC$ (প্রদত্ত)

$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক)

AD সাধারণ বাহু

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতার শর্তানুসারে]

সুতরাং $BD = CD$ (অনুরূপ অংশ)

$\angle ADB = \angle ADC$ (অনুরূপ অংশ)

$\angle ADB + \angle ADC = 180^o$

বা, $\angle ADB + \angle ADB = 180^o$ ($\because \angle ADB = \angle ADC$)

বা, $2\angle ADB = 180^o$

$\therefore \angle ADB = 90^o$

সুতরাং $\angle ADC = 90^o$

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রয়োগ : 5 ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC = 90^o$ এবং D, BC অতিভুজের উপর এমন একটি বিন্দু যে $BD = AD$; প্রমাণ করি যে D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

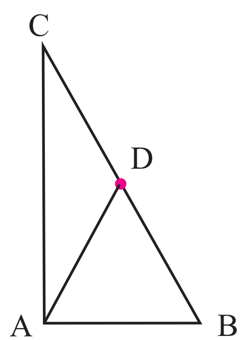
প্রদত্ত : $\triangle ABC$ -এর $\angle BAC = 90^o$ এবং D, BC বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু যে $AD = BD$

প্রামাণ্য : D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। অর্থাৎ $DB = CD$

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর $AD = BD$ $\therefore \angle DAB = \angle ABD$

$\triangle ABC$ -এর $\angle BAC = 90^o$; সুতরাং $\angle DAC = \angle BAC - \angle DAB = 90^o - \angle DAB$

$\triangle ABC$ -এর $\angle BAC = 90^o$; সুতরাং $\angle ABC + \angle ACB = 90^o$



অর্থাৎ, $\angle ABD + \angle ACD = 90^o$

বা $\angle ACD = 90^o - \angle ABD$

$\therefore \angle ACD = 90^o - \angle DAB$ ($\because \angle ABD = \angle DAB$)

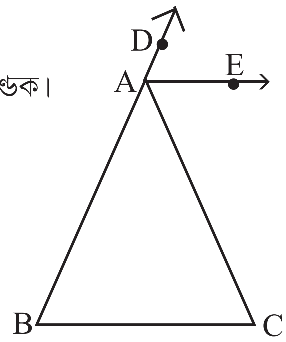
আবার, $\angle DAC = 90^o - \angle DAB$

$\therefore \angle ACD = \angle DAC$; সুতরাং, $AD = CD$

আবার, $AD = BD$ $\therefore$ $BD = CD$

সুতরাং, D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রয়োগ : 6 প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়ে ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শীর্ষকোণের বহিঃসমদ্বিখন্ডক।



প্রদত্ত: $\triangle ABC$ -এর $AB = AC$ এবং $AE \parallel BC$

প্রামাণ্য: $\angle DAE = \angle CAE$ অর্থাৎ AE, শীর্ষকোণ $\angle BAC$ -এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।

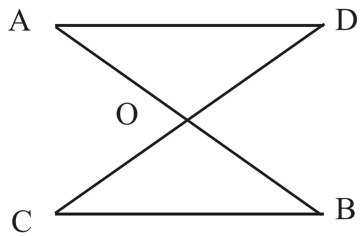
প্রমাণ: $\triangle ABC$ -এর $AB = AC$ সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB$

$AE \parallel BC$ এবং AC ছেদক। সুতরাং $\angle CAE$ = একান্তর $\angle ACB$

$AE \parallel BC$ এবং BD ছেদক। সুতরাং $\angle DAE$ = অনুরূপ $\angle ABC$

যেহেতু $\angle ABC = \angle ACB$, সুতরাং $\angle DAE = \angle CAE$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 7 দুটি সরলরেখাংশ AB এবং CD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ করতে হবে $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.



প্রদত্ত : AB এবং CD দুটি সরলরেখাংশ পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

অর্থাৎ, $AO = BO$ এবং $CO = DO$

প্রামাণ্য : $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

প্রমাণ : $\triangle AOD$ এবং $\triangle BOC$ -এর মধ্যে

$AO = BO$

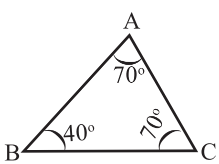
$\angle AOD$ = বিপ্রতীপ $\angle BOC$

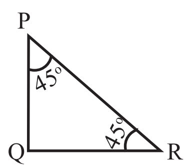
$DO = CO$

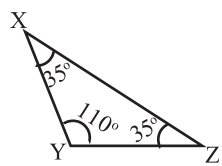
$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$. (বাহু-কোণ-বাহু বা S-A-S অনুযায়ী)

কষে দেখি— 9

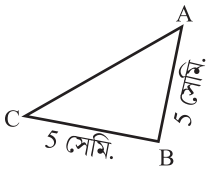
1. নীচের সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলি দেখি ও না মেপে প্রতিটি ত্রিভুজের কোন দুটি বাহু সমান হবে লিখি:

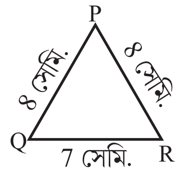






2. নীচের সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলি দেখি ও না মেপে প্রতিটি ত্রিভুজের কোন কোণগুলি সমান হবে লিখি:





3. AB এবং CD সরলরেখাংশ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ করি যে AC ও BD সরলরেখাংশ দুটি পরস্পর সমান্তরাল। ACBD চতুর্ভুজটি কী ধরনের চতুর্ভুজ তা লিখি।

4. AB এবং CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর E ও F দুটি বিন্দু। EF সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু O ; O বিন্দু দিয়ে যেকোনো সরলরেখাংশ টানা হলো যা AB ও CD সরলরেখাকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, PQ সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

5. প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাদের পরিমাপ সমান।

6. প্রমাণ করি যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্য সমান।

7. ABCD ট্রাপিজিয়ামের $AD \parallel BC$ এবং $\angle ABC = \angle BCD$; প্রমাণ করি যে, ABCD একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম।

8. ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB অতিভুজ। $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $AC + CD = AB$

9. ABC এবং DBC দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যাদের $AB = AC$ ও $DB = DC$ এবং তারা BC বাহুর বিপরীত পাশে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, AD, BC বাহুকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. দুটি সরলরেখাংশ PQ এবং RS পরস্পরকে X বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যাতে $XP = XR$ এবং $\angle PSX = \angle RQX$ হয়। প্রমাণ করি যে, $\triangle PXS \cong \triangle RQX$.

10. ত্রৈরাশিক

1 এখন আমাদের চাষের জমিতে 18 জন লোক চাষ করছেন। আগামী কাল থেকে আমাদের জমিতে 30 জন লোক চাষ করবেন। 18 জন লোক যদি 12 বিঘা জমি চাষ করেন তাহলে 30 জন লোক কত বিঘা জমি চাষ করতে পারবেন হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

লোকসংখ্যা (জন)	জমির পরিমাণ (বিঘা)
18	12
30	?

সম্পর্কটি হলো— লোকসংখ্যা বাড়লে চাষের জমির পরিমাণ বাড়বে এবং লোকসংখ্যা কমলে চাষের জমির পরিমাণ কমবে। সুতরাং লোকসংখ্যা ও জমির পরিমাণ সরল সমানুপাতী।

$\therefore$ 18:30::12:?

নির্ণেয় জমির পরিমাণ (?) = $\dfrac{\overset{4}{\cancel{12}} \times \overset{5}{\cancel{30}}}{\cancel{18}\ _{2}}$ বিঘা = 20 বিঘা

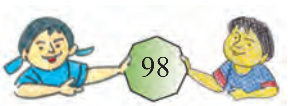
দ্বিতীয় রাশির অজানা মান = দ্বিতীয় রাশির জানা মান × $\dfrac{\text{প্রথম রাশির একটি মান}}{\text{প্রথম রাশির অপর মান}}$

দুটি সম্পর্কযুক্ত চলরাশির চারটি মানের মধ্যে তিনটির মান জানা থাকলে চতুর্থটির মান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

2 আমার বন্ধু রাজিয়াদের বাড়িতে একটি অনুষ্ঠান হচ্ছে। তাই 7 দিন ধরে খাওয়াদাওয়ার ব্যবস্থা করা হয়েছে। 15 জনের 7 দিনের খাবারের ব্যবস্থা করা হয়েছে, কিন্তু 21 জন এসেছে। হিসাব করে দেখি ওই খাবারে 21 জনের মোট কত দিন চলবে।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

বন্ধুর সংখ্যা (জন)	সময় (দিন)
15	7
21	?



সম্পর্কটি হলো— বন্ধুর সংখ্যা বাড়লে নির্দিষ্ট পরিমাণ খাবারে কমদিন চলবে। সুতরাং লোকসংখ্যা ও দিনসংখ্যা ব্যস্ত সমানুপাতী।

তাই, 15:21 :: ?:7

বা, $\frac{15}{21} = \frac{?}{7}$ $\quad\quad \therefore$ সময় (?) = $\frac{\overset{5}{\cancel{15}} \times \cancel{7}}{\underset{3}{\cancel{21}}}$ দিন = 5 দিন

$\therefore$ ওই খাবারে 21 জনের মোট 5 দিন চলবে।

3 আমাদের পাড়ার ব্যানার্জি বুক স্টল থেকে আমি 1 ডজন খাতা 90 টাকায় কিনেছি। একইরকম 8 টি খাতার দাম কত হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

খাতার সংখ্যা (টি)	খাতার দাম (টাকা)
1 ডজন = 12	90
8	?

সম্পর্কটি হলো— খাতার সংখ্যা বাড়লে দাম $\square$ খাতার সংখ্যা কমলে দাম $\square$ (বাড়বে / কমবে)।
সুতরাং খাতার সংখ্যা ও খাতার দাম $\square$ (সরল / ব্যস্ত) সমানুপাতী।

$\therefore$ 12:8::90:?

বা, খাতার দাম (?) = $\square \times \frac{\square}{\square}$ টাকা $\quad\quad \therefore$ 8 টি খাতার দাম = $\square$ টাকা।

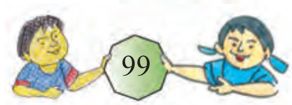
পেলাম, $\square$ রাশির $\square$ মান = $\square$ রাশির $\square$ মান $\times \frac{\square \text{ রাশির } \square \text{ মান}}{\square \text{ রাশির } \square \text{ মান}}$

4 7 টি লাঙল তৈরি করতে 1771 টাকা খরচ হলে 12 টি লাঙল তৈরি করতে কত টাকা খরচ হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

বেশি সংখ্যক লাঙল তৈরি করতে $\square$ (বেশি / কম) টাকা লাগবে।
লাঙলের সংখ্যা ও খরচের পরিমাণ $\square$ (সরল / ব্যস্ত) সমানুপাতী। (নিজে করি)

5 যে পরিমাণ শস্যে 24 জন লোকের 20 দিন চলে, সেই পরিমাণ শস্যে 40 জন লোকের কতদিন চলবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

একই পরিমাণ শস্যে বেশি সংখ্যক লোকের $\square$ (বেশি / কম) দিন চলবে।
তাই, লোকসংখ্যা ও দিনসংখ্যা $\square$ (সরল / ব্যস্ত) সমানুপাতী। (নিজে করি)



কষে দেখি — 10.1

1. আজ আমার বাবা 390 টাকায় 15 কিগ্রা. চাল কিনে এনেছেন। যদি 17 কিগ্রা. একইরকম চাল কিনতেন তবে বাবা কতটাকা খরচ করতেন ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
2. ভেঙ্কটমামা 20 মিটার ছিট কাপড়ে একই মাপের 4 টি জামা তৈরি করবেন। একইরকম 12 টি জামা তৈরি করতে হলে ভেঙ্কটমামাকে কত মিটার ছিট কাপড় কিনে দিতে হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
3. বকুলতলা গ্রামে একটি পুকুর কাটতে 30 জন লোকের 15 দিন সময় লেগেছে। যদি 25 জন লোক ওই পুকুর কাটত তবে কতদিনে কাজ শেষ করতে পারত ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
4. কাকিমা ঘণ্টায় 40 কিমি. বেগে গাড়ি চালিয়ে 5 ঘণ্টায় মামার বাড়ি পৌঁছে গেলেন। তিনি যদি ঘণ্টায় 50 কিমি. বেগে গাড়ি চালাতেন তবে মামার বাড়ি পৌঁছোতে কত সময় লাগত ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
5. মঙ্গলপুর গ্রামের একটি আশ্রয় শিবিরে 4000 জন লোকের 9 দিনের খাবার মজুত ছিল। 3 দিন পরে 1000 জন লোক অন্য জায়গায় চলে গেলেন। যারা রয়ে গেলেন অবশিষ্ট খাবারে তাদের আর কতদিন চলবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
6. নসিবপুর গ্রামের একটি খামারের 42 জন সদস্য 24 দিনে খামারের সমস্ত জমি চাষ করতে পারেন। কিন্তু চাষের মরসুমে 6 জন সদস্য হঠাৎ অসুস্থ হয়ে পরেন। খামারের সমস্ত জমি চাষ করতে অবশিষ্ট জনের কতদিন সময় লাগবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।
7. একটি কারখানায় 1000টি যন্ত্রাংশ তৈরি করতে 16 টি মেসিনের 27 দিন সময় লাগে। যদি ওই কারখানায় আরও 2 টি মেসিন বসানো হয় তাহলে একই সংখ্যক যন্ত্রাংশ তৈরি করতে কতদিন সময় লাগবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে দেখি।
8. নীচের পারস্পরিক সম্পর্কগুলি দেখি, গণিতের গল্প তৈরি করি ও ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে উত্তর খুঁজি।

(a)

পেনের সংখ্যা (টি)	মোট পেনের দাম (টাকা)
25	112.5
12	?

(b)

গতিবেগ (কিমি./ঘণ্টা)	দূরত্ব (কিমি.)
9	112.5
12	?

(c)

পাম্প সংখ্যা (টি)	সেচের জমির পরিমাণ(বিঘা)
6	31.2
13	?

(d)

প্রতি ছাত্রের দৈনিক বরাদ্দ দানাশস্য (গ্রাম)	ছাত্রসংখ্যা (জন)
306	425
?	458

6 বাপনদের বাড়ির ও পাঁচিলের দেয়াল গাঁথতে হবে। তাই রাজমিস্ত্রি দেয়াল গাঁথার কাজ করছে। যদি 5 জন রাজমিস্ত্রি 4 দিনে 128 বর্গমিটার দেয়াল গাঁথতে পারেন, তবে 10 জন রাজমিস্ত্রি 320 বর্গমিটার দেয়াল গাঁথতে কত দিন সময় নেবেন ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

প্রথম ধাপ		দ্বিতীয় ধাপ	
রাজমিস্ত্রি (জন)	সময় (দিন)	দেয়াল গাঁথার পরিমাণ (বর্গমিটার)	সময় (দিন)
5	4	128	প্রথম ধাপের
10	?	320	?

এখানে তিনটি বিষয় আছে, (i) রাজমিস্ত্রির সংখ্যা, (ii) সময়, (iii) কাজের পরিমাণ।

প্রথমে দুটি ধাপে সম্পর্ক খুঁজি

প্রথম ধাপ— একই কাজ করতে রাজমিস্ত্রির সংখ্যা বাড়লে সময় $\square$ (বেশি / কম) লাগবে। এবং রাজমিস্ত্রির সংখ্যা কমলে সময় $\square$ (বেশি / কম) লাগবে। রাজমিস্ত্রির সংখ্যা এবং সময় $\square$ (ব্যস্ত / সরল) সমানুপাতী।

$\therefore$?:4::5:10

নির্ণেয় সময় = $\overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{5}}{\underset{2}{\cancel{10}}}$ দিন = 2 দিন।

দ্বিতীয় ধাপ— রাজমিস্ত্রির সংখ্যা একই থাকলে বেশি পরিমাণ কাজ করার জন্য $\square$ (বেশি / কম) সময় লাগবে এবং কাজের পরিমাণ কম হলে $\square$ (বেশি / কম) সময় লাগবে। রাজমিস্ত্রির সংখ্যা ও কাজের পরিমাণ $\square$ (সরল / ব্যস্ত) সমানুপাতী।

সুতরাং, ?:2::320:128

নির্ণেয় সময় = $\cancel{2} \times \frac{\overset{5}{\cancel{320}}}{\underset{64}{\cancel{128}}}$ দিন = 5 দিন।

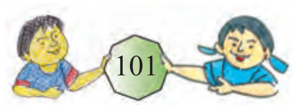
তাই দুটি ধাপ একসাথে করলে পাই,

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = $\cancel{4} \times \frac{5}{\cancel{10}} \times \frac{\cancel{320}}{\underset{32}{\cancel{128}}}$ দিন। = 5 দিন।

পেলাম, $\frac{\text{দ্বিতীয় সময় (?)}}{\text{প্রথম সময় (4)}} = \frac{\text{প্রথম রাজমিস্ত্রির সংখ্যা}}{\text{দ্বিতীয় রাজমিস্ত্রির সংখ্যা}} \times \frac{\text{দ্বিতীয় কাজের পরিমাণ}}{\text{প্রথম কাজের পরিমাণ}}$

(কাজের পরিমাণ একই হলে রাজমিস্ত্রির সংখ্যা সময়ের সাথে ব্যস্ত সমানুপাতী)

(রাজমিস্ত্রির সংখ্যা একই থাকলে কাজের পরিমাণ সময়ের সাথে সরল সমানুপাতী)



ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে তিন বা ততোধিক রাশি থাকলে সমস্যা সমাধানের সময়

$$\text{জ্ঞাতব্য বিষয়ের নির্ণেয় মান} = \text{জ্ঞাতব্য বিষয়ের জানা মান} \times \frac{\text{প্রথম বিষয়ের একটি মান}}{\text{প্রথম বিষয়ের অপর মান}} \times \frac{\text{দ্বিতীয় বিষয়ের একটি মান}}{\text{দ্বিতীয় বিষয়ের অপর মান}} \times\text{------ ইত্যাদি}$$

7 রসিদপুরের মহেশ গোয়ালা তার 8টি গোরুকে 15দিন ধরে 4 কাহন খড় খাওয়ালেন। এই হিসাবে বর্ষার দিনে 10টি গোরুকে 72 দিন খাওয়াতে কত কাহন খড় মজুত রাখতে হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

গোরুর সংখ্যা(টি)	সময় (দিন)	খড়ের পরিমাণ (কাহন)
8	15	4
10	72	?

বিষয়গুলির মধ্যে সম্পর্ক খুঁজি

প্রথম ধাপ— একই সময়ে গোরুর সংখ্যা বাড়লে খড়ের পরিমাণ ☐ (বাড়বে / কমবে) এবং গোরুর সংখ্যা কমলে খড়ের পরিমাণ ☐ (বাড়বে / কমবে)।

∴ গোরুর সংখ্যার সাথে খড়ের পরিমাণ সরল সম্পর্কে আছে।

দ্বিতীয় ধাপ— গোরুর সংখ্যা একই থাকলে সময় বাড়লে খড়ের পরিমাণ ☐ (বাড়বে / কমবে) এবং সময় কমলে খড়ের পরিমাণ ☐ (বাড়বে / কমবে)।

∴ সময়ের সাথে খড়ের পরিমাণ ☐ (ব্যস্ত / সরল) সম্পর্কে আছে।

নির্ণেয় খড়ের পরিমাণ = $\cancel{4} \times \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{8}_{2}} \times \frac{\cancel{72}^{24}}{\cancel{15}_{3}}$ কাহন = 24 কাহন।

পেলাম, $\text{দ্বিতীয় খড়ের পরিমাণ} = \text{প্রথম খড়ের পরিমাণ} \times \frac{\text{দ্বিতীয় সময়}}{\text{প্রথম সময়}} \times \frac{\text{দ্বিতীয় গোরুর সংখ্যা}}{\text{প্রথম গোরুর সংখ্যা}}$

(গোরুর সংখ্যা একই থাকলে সময় খড়ের পরিমাণের সাথে সরল সমানুপাতী)

(সময় একই থাকলে গোরুর সংখ্যা ও খড়ের পরিমাণ সরল সমানুপাতী)

কষে দেখি— 10.2

1. গ্রামের রাস্তা বাঁধানোর কাজ শুরু হবে। ঠিক হয়েছে 14 জন লোক দৈনিক 4 ঘণ্টা কাজ করে 15 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি করতে পারবেন। কিন্তু 24 জন লোক দৈনিক 7 ঘণ্টা করে কাজ শুরু করলে কতদিনে কাজটি করবেন ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

2. সুভাষকাকার হাতে লেখা একটি 105 পৃষ্ঠার বইয়ের প্রতি পৃষ্ঠায় গড়ে 25টি করে লাইন আছে এবং প্রতি লাইনে গড়ে 8টি করে শব্দ আছে। এই বইটি যদি এমনভাবে ছাপাই যাতে প্রতি পৃষ্ঠায় 30টি করে লাইন থাকবে এবং প্রতি লাইনে গড়ে 10টি করে শব্দ থাকবে, তবে সেই ছাপা বইটি কত পৃষ্ঠার বই হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

3. একটি কৃষি খামারের 540 বিঘা জমি 14দিনে চাষ করতে হবে। প্রথম 4দিনে সমক্ষমতা সম্পন্ন 5টি ট্রাক্টর 120 বিঘা জমি চাষ করল। সময়মতো চাষের কাজ শেষ করতে হলে আর কটি ট্রাক্টর লাগবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

4. 30 জন লোক 15 দিনে একটি গ্রামের রাস্তার $\frac{3}{7}$ অংশ সারান। যদি আরও 10 জন লোক কাজটি করতে আসেন তাহলে রাস্তাটির বাকি অংশ সারাতে কতদিন লাগবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

5. 5 অশ্বক্ষমতাসম্পন্ন একটি পাম্প 36000 লিটার জল 8 ঘণ্টায় উপরে তুলতে পারে। 7 অশ্বক্ষমতা সম্পন্ন পাম্পের 63000 লিটার জল তুলতে কত সময় লাগবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

6. একটি কারখানায় 5 অশ্বক্ষমতা ও 3 অশ্বক্ষমতার দুটি মোটর আছে। 5 অশ্বক্ষমতার মোটরটি 8 ঘণ্টা চালালে 20 একক বিদ্যুৎ খরচ হয়। 3 অশ্বক্ষমতার মোটরটি 10 ঘণ্টা চাললে কত একক বিদ্যুৎ খরচ হবে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

7. গোপালনগরের একটি তাঁত কারখানায় 14 জন তাঁতি 12 দিনে 210টি শাড়ি বুনতে পারেন। পুজোর সময়ে 10 দিনের মধ্যে 300টি শাড়ি যোগান দেওয়ার অর্ডার এলো। সময়মতো সেই শাড়ি যোগান দিতে হলে আরও কতজন তাঁতি নিয়োগ করতে হবে ব্যাপকতর ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

8. একটি সংস্থা জাহাজ থেকে 10 দিনে জাহাজের মাল নামানোর বরাত পেয়েছে। সংস্থাটি তার জন্য 280 জন লোক নিয়োগ করেছে। 3 দিন পরে দেখা গেল কাজটির $\frac{1}{4}$ অংশ সম্পূর্ণ হয়েছে। আর কতজন লোক নিয়োগ করলে কাজটি সময়মতো শেষ হবে তা ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

9. একটি যন্ত্রচালিত তাঁতের ক্ষমতা একটি হস্তচালিত তাঁতের ক্ষমতার $2\frac{1}{4}$ গুণ। 12টি হস্তচালিত তাঁত 1080 মিটার দৈর্ঘ্যের কাপড় 18 দিনে তৈরি করে। 2700 মিটার দৈর্ঘ্যের কাপড় 15 দিনে তৈরি করতে কতগুলি যন্ত্রচালিত তাঁত লাগবে তা ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

10. 25 জন কৃষক একটি সমবায় সমিতির 2400 বিঘা জমি 36 দিনে চাষ করেন। সমিতি একটি ট্রাক্টর কেনায় দেখা যায় অর্ধেক জমি 30 দিনে চাষ করা যায়। একটি ট্রাক্টরের ক্ষমতা কতজন কৃষকের চাষ করার ক্ষমতার সমান তা ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

11. একটি জাহাজের কলকাতা থেকে কোচিন যেতে 25 দিন সময় লাগে। জাহাজটি 36 জন নাবিকসহ এবং প্রত্যেক নাবিকের জন্য প্রতিদিন 850 গ্রাম খাবারের ব্যবস্থা করে যাত্রা শুরু করল। কিন্তু 13 দিন পরে ওই জাহাজটি অপর একটি ডুবন্ত জাহাজ থেকে 15 জন নাবিককে উদ্ধার করল এবং জাহাজটির গতিবেগ বাড়িয়ে দিয়ে 10 দিনে কোচিন পৌঁছোল। এখন প্রত্যেক নাবিক প্রতিদিন কতটা পরিমাণ খাবার খেলে ওই মজুত খাবারে তারা কোচিন নিরাপদে পৌঁছোতে পারবে এবং সমস্ত খাবার ওই সময়ে শেষ হয়ে যাবে। ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

12. একটি গ্রামে 36 জন লোক প্রতিদিন 6 ঘণ্টা কাজ করে 8 দিনে 120 মিটার রাস্তা তৈরি করতে পারেন। আরও 6 জন লোক কাজটির সাথে যুক্ত হলো এবং দৈনিক কাজের পরিমাণ আরও 2 ঘণ্টা করে বাড়ানো হলো। এখন 9 দিনে কত দৈর্ঘ্যের রাস্তা তৈরি করা যাবে তা ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

13. 250 জন লোক 50 মিটার দীর্ঘ, 35 মিটার প্রশস্ত এবং 5.2 মিটার গভীর একটি পুকুর প্রতিদিন 10 ঘণ্টা কাজ করে 18 দিনে কাটতে পারেন। 65 মিটার দীর্ঘ, 40 মিটার প্রশস্ত এবং 5.6 মিটার গভীর অপর একটি পুকুর 300 জন লোক প্রতিদিন 8 ঘন্টা কাজ করে কতদিনে কাটতে পারবেন তা ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি।

14. নীচের পারস্পরিক সম্পর্কগুলি দেখে গণিতের গল্প তৈরি করি ও ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে উত্তর খুঁজি।

(a)

ক্ষমতা (অশ্বশক্তি)	সময় (ঘণ্টা)	বিদ্যুৎ খরচ (ইউনিট)
5	8	20
3	10	?

(b)

ক্ষেতমজুরের সংখ্যা (জন)	সময় (দিন)	জমির পরিমাণ (বিঘা)
5	15	18
10	10	?

11. শতকরা

আজ খাদিনান গ্রামের মেলায় যাব। দাদার সাথে আমি ও বোন যাব।

দাদার কাছে 75 টাকা, আমার কাছে 50 টাকা এবং বোনের কাছে 35 টাকা আছে।

1.1 আমার থেকে দাদার শতকরা কত টাকা বেশি আছে হিসাব করি।

আমার থেকে দাদার বেশি আছে 75 টাকা – 50 টাকা = 25 টাকা।

দাদার শতকরা বেশি আছে $\frac{25}{\cancel{50}} \times \overset{2}{\cancel{100}} = 50$

আমার থেকে দাদার 50% বেশি আছে।

অন্যভাবে ,

50 টাকায় বেশি আছে 25 টাকা।

1 টাকায় বেশি আছে $\frac{25}{50}$ টাকা।

100 টাকায় বেশি আছে $\frac{25}{50} \times 100$ টাকা = 50 টাকা ।

1.2 দাদার থেকে আমার শতকরা কত কম আছে হিসাব করি।

দাদার 75 টাকার তুলনায় আমার কম আছে 25 টাকা।

1 টাকার তুলনায় আমার কম আছে $\frac{\square}{\square}$ টাকা।

100 টাকার তুলনায় আমার কম আছে $\frac{25}{75} \times 100$ টাকা = $33\frac{1}{3}$ টাকা

দাদার থেকে আমার $33\frac{1}{3}$ % কম আছে।

আমাদের তিনজনের কাছে মোট টাকা আছে = ($\square$ + $\square$ + $\square$) টাকা = $\square$ টাকা

দাদা হিসাব করে দেখল, মেলায় যাওয়ার পথে মোট টাকার 10% খরচ হলো।

1.3 হিসাব করে দেখি, মেলায় যাওয়ার পথে আমাদের কত টাকা খরচ হলো।

$10\% = \frac{10}{100}$ অংশ = $\frac{1}{10}$ অংশ।

$\therefore$ মোট টাকার $\frac{1}{10}$ অংশ মেলায় যাওয়ার পথে খরচ হলো।

তাই 160 টাকার 10% = $(160 \times \frac{10}{100})$ টাকা = $\square$ টাকা

$\therefore$ মেলায় যাওয়ার পথে 16 টাকা খরচ হলো।

মেলায় আমার বন্ধু সুমিতের সাথে দেখা হলো। আমরা 4 জনে নাগরদোলায় চড়লাম। তাই আমাদের 40 টাকা খরচ হলো।

1.4 হিসাব করে দেখি নাগরদোলায় চড়ার জন্য আমাদের মোট টাকার শতকরা কত খরচ হলো।

160 টাকায় খরচ হলো $\square$ টাকা

1 টাকায় খরচ হলো $\frac{\square}{\square}$ টাকা

$\square$ টাকায় খরচ হলো $\frac{40}{160} \times 100$ টাকা =25 টাকা

$\therefore$ মোট টাকার 25% নাগরদোলায় চড়ার জন্য খরচ হলো।

আমরা ঠিক করেছি আমাদের মোট টাকার 35% মেলায় খাওয়া-দাওয়ার জন্য খরচ করব।

1.5 হিসাব করে দেখি মেলায় কত টাকা খরচ করব।

160 টাকার 35% = $(\square \times \frac{\square}{\square})$ টাকা = $\square$ টাকা

$\therefore$ মেলায় খাওয়া-দাওয়ার জন্য $\square$ টাকা খরচ করব।

আমি 24 টাকার কাঁচের চুড়ি কিনলাম।

1.6 হিসাব করে দেখি চুড়ি কেনার জন্য মোট টাকার শতকরা কত খরচ করলাম।

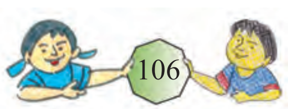
160 টাকায় কাঁচের চুড়ি কেনার জন্য খরচ করলাম $\square$ টাকা

1 টাকায় কাঁচের চুড়ি কেনার জন্য খরচ হলো $\frac{\square}{\square}$ টাকা

100 টাকায় কাঁচের চুড়ি কেনার জন্য খরচ হলো $\square$ টাকা। (নিজে করি)

$\therefore$ কাঁচের চুড়ি কেনার জন্য মোট টাকার $\square$ % খরচ করলাম।

1.7 আমার দাদা 20 টাকা দামের 1টি মাটির ফুলদানি কিনল। মাটির ফুলদানি কিনতে দাদা মোট টাকার শতকরা কত খরচ করল হিসাব করে দেখি। (নিজে করি)



পশ্চিমপাড়ার মাঠে আমাদের ফুটবল খেলা হয়। সেখানে একটি লম্বা বাঁশের 30% মাটির নীচে পোঁতা আছে।

2.1 বাঁশটির কত অংশ মাটির নীচে পোঁতা আছে হিসাব করে দেখি।

বাঁশটির 30% মাটির নীচে আছে।

$\therefore$ মাটির নীচে আছে বাঁশটির 30% $= \frac{30}{100}$ অংশ $= \frac{3}{10}$ অংশ

2.2 নাসরিন বাঁশটির $\frac{1}{20}$ অংশ সাদা রং করল। নাসরিন বাঁশটির শতকরা কত সাদা রং করল দেখি।

নাসরিন সাদা রং করল বাঁশটির $= \frac{1}{20}$ অংশ $= \frac{1}{20} \times \frac{100}{100}$ অংশ $= \frac{5}{100}$ অংশ

$\therefore$ নাসরিন বাঁশটির শতকরা 5 বা 5% সাদা রং করল।

2.3 আমি বাঁশটির মোট দৈর্ঘ্যের 15% লাল রং ও $\frac{1}{5}$ অংশ সবুজ রং করলাম।

$\therefore$ আমি বাঁশটির মোট দৈর্ঘ্যের $\frac{\square}{\square}$ অংশ লাল রং ও $\square$% সবুজ রং করলাম। **[নিজে করি]**

2.4 বাঁশটি যদি 2 মিটার লম্বা হয় ও 38 সেমি. হলুদ রং করি তবে বাঁশটির মোট দৈর্ঘ্যের শতকরা কত হলুদ রং করলাম হিসাব করে লিখি। (নিজে করি)

3 হাওড়া স্টেশন থেকে ট্রেন বর্ধমান যাবে। কর্ড লাইনে হাওড়া থেকে বর্ধমানের দূরত্ব 85 কিমি.। কিন্তু মেইন লাইনে সেই দূরত্ব 5% বেশি। মেইন লাইনে হাওড়া থেকে বর্ধমানের দূরত্ব সমানুপাতের সাহায্যে হিসাব করি।

মেইন লাইনে সেই দূরত্ব 5% বেশি।

অর্থাৎ, কর্ড লাইনে দূরত্ব 100 কিমি. হলে মেইন লাইনে দূরত্ব 5 কিমি. বেশি হবে।

অর্থাৎ মেইন লাইনে দূরত্ব হবে (100 + 5)কিমি. = 105 কিমি.।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

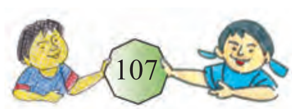
কর্ড লাইনে দূরত্ব (কিমি.)	মেইন লাইনে দূরত্ব (কিমি.)
100	100 + 5 = 105
85	?

হাওড়া থেকে বর্ধমান কর্ড লাইনের দূরত্ব বাড়লে বা কমলে মেইন লাইনে দূরত্ব যথাক্রমে $\square$ বা $\square$।

কর্ড লাইনে দূরত্ব ও মেইন লাইনে দূরত্ব $\square$ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

সুতরাং 100 : 85 : : 105 : ?

$\therefore$ মেইন লাইনে নির্ণেয় দূরত্ব $= \frac{\cancel{85}^{17} \times \cancel{105}^{21}}{\cancel{100}_{\cancel{20}_{4}}}$ কিমি. = 89.25 কিমি.।



অন্যভাবে ঐকিক নিয়মে কষে দেখি—

কর্ড লাইনে দূরত্ব 100 কিমি. হলে মেইন লাইনে দূরত্ব হবে 105 কিমি.

কর্ড লাইনে দূরত্ব 1 কিমি. হলে মেইন লাইনে দূরত্ব হবে $\frac{105}{100}$ কিমি.

কর্ড লাইনে দূরত্ব 85 কিমি. হলে মেইন লাইনে দূরত্ব হবে $\square \times \frac{\square}{\square}$ কিমি. = $\square$ কিমি.

4 ফরিদপুরের নিয়ামতচাচা তার জমিতে অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করেছেন। এর ফলে ধানের ফলন 30% বৃদ্ধি পেয়েছে কিন্তু তার জন্য চাষের খরচ 35% বেড়ে গেছে। আগে যে জমিতে 450 টাকা খরচ করে 1220 টাকার ফলন পেতেন, এখন সেই জমিতে নিয়ামতচাচার আয় আগের তুলনায় কত বেশি হবে হিসাব করে লিখি।

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহারের ফলে চাষের খরচ কত বৃদ্ধি পেয়েছে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহারের আগে খরচ (টাকা)	অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় বর্তমান খরচ (টাকা)
100	135
450	?

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় আগের খরচ ও বর্তমান খরচ পরস্পর $\square$ (সরল / ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় বর্তমান খরচ = $135 \times \frac{450}{100}$ টাকা

= $\square$ টাকা

অন্যভাবে ঐকিক নিয়মে কষে দেখি—

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করার আগে,

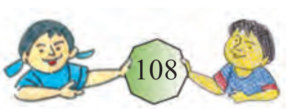
100 টাকা খরচ হলে বর্তমান খরচ 135 টাকা

1 টাকা খরচ হলে বর্তমান খরচ $\frac{\square}{\square}$ টাকা

450 টাকা খরচ হলে বর্তমান খরচ $\frac{135\times\cancel{450}^{9}}{\cancel{100}_{2}}$ টাকা = $\square$ টাকা

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহারের ফলে ধানের ফলন কতটা হয়েছে ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করে লিখি।

ধানের ফলন 30% বৃদ্ধি পেয়েছে অর্থাৎ আগে ধানের ফলন 100 টাকার হলে এখন ফলন হয়েছে (100 + 30) টাকার = 130 টাকার।



গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহারের আগে ধানের ফলন (টাকা)	অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় বর্তমান ফলন (টাকা)
100	130
1220	?

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করার আগে ধানের ফলনের সাথে বর্তমান ধানের ফলন $\boxed{}$ (সরল / ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

যেহেতু আগের ধানের ফলনের পরিমাণ বেড়েছে (অর্থাৎ 100 টাকা থেকে 1220 টাকা হয়েছে)

তাই বর্তমানে ধানের ফলনের পরিমাণও $\boxed{}$ (বাড়বে / কমবে)।

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় বর্তমানে ফলন হবে = $\boxed{} \times \frac{1220}{100}$ টাকার = 1586 টাকার।

অন্যভাবে ঐকিক নিয়মে কষে দেখি—

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করার আগে,

100 টাকার ফলন হলে বর্তমান ফলন হয় 130 টাকার

1 টাকার ফলন হলে বর্তমান ফলন হয় $\frac{130}{100}$ টাকার

1220 টাকার ফলন হলে বর্তমান ফলন হয় = $\frac{130 \times 1220}{100}$ টাকার

= $\boxed{}$ টাকার।

অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করার আগে নিয়ামতচাচার আয় হতো 1220 টাকা – 450 টাকা

= $\boxed{}$ টাকার।

এখন আয় হয় = ($\boxed{}$ – $\boxed{}$) টাকা।

আয় বেশি হয় = ($\boxed{}$ – $\boxed{}$) টাকা।

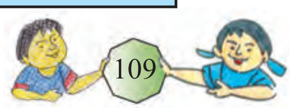
5 পহলমপুরের উমাদেবী তার জমিতে অধিক ফলনশীল বীজধান ব্যবহার করেছেন। এরফলে ধানের ফলন 20% বেড়েছে। কিন্তু তার জন্য ধানচাষের খরচ25% বেড়ে গেছে। আগে তিনি 600 টাকা খরচ করে1560 টাকার ফলন পেতেন। বর্তমানে অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করে আগের তুলনায় কত বেশি আয় করবেন হিসাব করে লিখি। (নিজে করি)

6 আজ আমি আমার বাড়ি থেকে স্টেশনে তাড়াতাড়ি পৌঁছোব। যদি বাড়ি থেকে স্টেশনে যাওয়ার সময় 20% কমাতে চাই তবে আমার গাড়ির গতিবেগ কত বাড়াতে হবে হিসাব করি।

ধরি, আমার বাড়ি থেকে স্টেশনে 100 একক/সেকেন্ড গতিবেগে গেলে 100 সেকেন্ড সময় লাগে।

∴ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

সময় (সেকেন্ড)	গতিবেগ (একক/সেকেন্ড)
100	100
100 – 20 = 80	?



একই দূরত্ব কম সময়ে পৌঁছোতে হলে গতিবেগ [ ] (বাড়াতে / কমাতে) হবে।

নির্দিষ্ট দূরত্বে যাওয়ার জন্য সময়ের সাথে গতিবেগ [ ] (সরল / ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাব করি [ ] 80 সেকেন্ডে পৌঁছোতে গাড়ির গতিবেগ হবে [ ] একক/সেকেন্ড।

ঐকিক নিয়মে কষে দেখি—

100 সেকেন্ডে পৌঁছোতে গাড়ির গতিবেগ হবে 100 একক/সেকেন্ড

1 সেকেন্ডে পৌঁছোতে গাড়ির গতিবেগ হবে 100 × 100 একক/সেকেন্ড

80 সেকেন্ডে পৌঁছাতে গাড়ির গতিবেগ হবে $\frac{\overset{25}{\cancel{100}} \times \overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{4}{\cancel{80}}}$ একক/সেকেন্ড

= 125 একক/সেকেন্ড

∴ বাড়ি থেকে স্টেশনে যাওয়ার সময় 20% কমাতে গাড়ির গতিবেগ বাড়বে (125 একক/সেকেন্ড– 100 একক/সেকেন্ড) = 25 একক/সেকেন্ড

অর্থাৎ গতিবেগ 25% বাড়াতে হবে।

একই দূরত্ব যাওয়ার সময় 10% কমাতে চাইলে আমার গাড়ির গতিবেগ কত বাড়াতে হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজেকরি]**

7 পেঁয়াজের দাম 20% বৃদ্ধি পেয়েছে। রমেনবাবু ঠিক করেছেন যে তার পরিবারে পেঁয়াজের মাসিক খরচ অপরিবর্তিত রাখবেন। তাই তিনি প্রতি মাসে পেঁয়াজের ব্যবহার শতকরা কত কমাবেন হিসাব করে লিখি।

ধরি রমেনবাবু আগে প্রতি মাসে 100 টাকায় 100 একক পেঁয়াজ ব্যবহার করতেন।

এখন পেঁয়াজের দাম 20% বৃদ্ধি পেয়েছে অর্থাৎ বর্তমানে 120 টাকায় পাওয়া যায় 100 একক পেঁয়াজ।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

পেঁয়াজের খরচ (টাকা)	পেঁয়াজের পরিমাণ (একক)
120	100
100	?

অন্যভাবে ঐকিক নিয়মে কষে দেখি—

বর্তমানে 120 টাকায় পাওয়া যায় 100 একক পেঁয়াজ

বর্তমানে 1 টাকায় পাওয়া যায় $\frac{100}{120}$ একক পেঁয়াজ

বর্তমানে 100 টাকায় পাওয়া যায় $\frac{\overset{25}{\cancel{100}} \times \overset{10}{\cancel{100}}}{\cancel{120}\ \underset{3}{\cancel{12}}}$ একক পেঁয়াজ

$= 83\frac{1}{3}$ একক পেঁয়াজ

প্রতি মাসে রমেনবাবু পেঁয়াজের ব্যবহার কমাবেন = 100 একক – $83\frac{1}{3}$ একক = $(100 - 83\frac{1}{3})$ একক

$= 16\frac{2}{3}$ একক

রমেনবাবু পেঁয়াজের ব্যবহার কমাবেন $16\frac{2}{3}$ %

যদি রমেনবাবু মাসিক পেঁয়াজের ব্যবহারও 20% কমান তাহলে তার মাসিক পেঁয়াজের খরচ শতকরা কত কমবে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

পেঁয়াজের পরিমাণ (একক)	পেঁয়াজের দাম (টাকা)
100	120
20% কমলে খরচ (100 – 20) = 80	?

(নিজেকরি)

কষে দেখি — 11

1. আমার কাছে 50 টাকা আছে। 50 টাকার 12% আমি স্কুলে পেন কিনতে খরচ করলাম। আমি কত টাকার পেন কিনলাম হিসাব করি।
2. বিদেশ থেকে একটি মেশিন এখানে আনতে 120% কর দিতে হয়। যদি মেশিনটির দাম বিদেশে 3,00,000 টাকা হয় তবে কর দেওয়ার পরে এখানে দাম কত হবে হিসাব করে লিখি।
3. হিসাব করে মান লিখি :

   (i) 80 টাকার 15% (ii) 215 টাকার 12% (iii) 37.8 মিটারের 110% (iv) 480 গ্রামের 200%
4. (i) 2.25 টাকা, 5 টাকার শতকরা কত লিখি।

   (ii) 85 গ্রাম, 17 কিলোগ্রামের শতকরা কত লিখি।

   (iii) 2 কিগ্রা. 250 গ্রাম, 0.72 কুইন্টালের শতকরা কত লিখি।
5. নীচের ছক পূরণ করি :

শতকরা	ভগ্নাংশ	দশমিক ভগ্নাংশ
15	$\frac{3}{20}$	0.15
$22\frac{1}{3}$		
	$2\frac{1}{3}$	
	$\frac{1}{5}$	
		0.12
		3.125
125		

6. জলে হাইড্রোজেন ও অক্সিজেন 2 : 1 অনুপাতে আছে। জলের মোট পরিমাণে হাইড্রোজেন ও অক্সিজেন শতকরা কত আছে লিখি।
7. হৃদয়পুরের একটি কারখানায় আগে দৈনিক 1,500 টি বোতল তৈরি হতো। এখন তৈরি হয় দৈনিক 1695টি বোতল। ওই কাঁচের কারখানায় উৎপাদন শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে হিসাব করে লিখি।

8. সাধারণত বায়ুতে নাইট্রোজেন, অক্সিজেন ও কার্বনডাই-অক্সাইড গ্যাসের পরিমাণ যথাক্রমে 75.6%, 23.04% ও 1.36%; 25 লিটার বায়ুতে কোন গ্যাস কতটুকু আছে হিসাব করে লিখি।

9. তৃষা মিলনদাদার বইয়ের দোকান থেকে একটি বই কিনল। মিলনদাদা বইয়ের উপর লেখা দামের উপর পর্যায়ক্রমে (পরপর) 10% ও 5% ছাড় দিলেন। বইটির উপর লেখা দাম 200 টাকা হলে তৃষা মিলনদাদাকে কত টাকা দিল হিসাব করে লিখি।

10. একটি বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10% বাড়ালাম। ওই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বাড়ল ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে হিসাবে করে লিখি।

11. সময়মতো বিদ্যুতের বিল জমা দিলে 15% ছাড় পাওয়া যায়। সময়মতো বিল দিয়ে আমার কাকিমা 54 টাকা ছাড় পেলেন। বিদ্যুৎ বিলের পরিমাণ কত ছিল হিসাব করে লিখি।

12. চিনির মূল্য 20% বেড়ে গেছে। তাই চিনির মাসিক খরচ অপরিবর্তিত রাখতে চিনির মাসিক ব্যবহারের পরিমাণ শতকরা কত কম করতে হবে, হিসাব করে লিখি।

13. জল জমে বরফ হলে আয়তন 10% বৃদ্ধি পায়। এই বরফ গলে জল হলে আয়তন শতকরা কত হ্রাস পাবে হিসাব করে লিখি।

14. উৎপলবাবু অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় ধানের ফলন 55% বৃদ্ধি পেয়েছে। কিন্তু তার জন্য চাষের খরচ 40% বেড়েছে। আগে উৎপলবাবু তার জমিতে 1200 টাকা খরচ করে 3000 টাকার ফলন পেতেন। এখন জমিতে অধিক ফলনশীল ধানবীজ ব্যবহার করায় তার আয় কত পরিমাণ বাড়বে না কমবে, হিসাব করে লিখি।

15. একটি বিধানসভা কেন্দ্রের ভোটারদের 80% ভোট দিয়েছেন এবং বিজয়ী প্রার্থী প্রদত্ত ভোটের 65% ভোট পেয়ে নির্বাচিত হয়েছেন। তিনি মোট ভোটের শতকরা কত ভোট পেয়েছেন, হিসাব করে লিখি।

16. এই বছরে নন্দলাল উচ্চমাধ্যমিক বিদ্যালয়ের পরিক্ষার্থীদের 85% বাংলায়, 70% অঙ্কে এবং 65% উভয় বিষয়ে A+ পেয়েছে পরীক্ষার্থীর সংখ্যা যদি 120 জন হয়। তবে হিসাব করে দেখি কতজন পরীক্ষার্থী

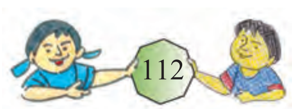
(i) উভয় বিষয়ে A+ পেয়েছে
(ii) শুধু বাংলায় A+ পেয়েছে
(iii) শুধু অঙ্কে A+ পেয়েছে
(iv) উভয় বিষয়ে A+ পায়নি।

17. আমিনা বিবির বেতন প্রথমে 20% বৃদ্ধি পেয়ে পরে 20% হ্রাস পেল। আমিনা বিবির বেতন শতকরা কত পরিবর্তন হলো হিসাব করে লিখি।

18. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 15% বৃদ্ধি করা হলো এবং প্রস্থ 15% হ্রাস করা হলো। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পেল হিসাব করি।

19. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 15মি., 10মি. এবং 5মি.। যদি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার প্রত্যেকটি 10% বৃদ্ধি করা হয় তবে চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে, হিসাব করে লিখি।

20. বর্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় 20% শিক্ষার্থী 100 মিটার দৌড়ে, 15% শিক্ষার্থী 200 মিটার দৌড়ে এবং 10% শিক্ষার্থী লংজাম্প প্রতিযোগিতায় নাম দেয়। 5% শিক্ষার্থী তিনটিতেই নাম দেয়। বিদ্যালয়ে শিক্ষার্থীর সংখ্যা 780 জন হলে কতজন শিক্ষার্থী ওই প্রতিযোগিতার কেনোটিতেই নাম দেয়নি, হিসাব করে লিখি। (কোনো প্রতিযোগী একসাথে দুটিতে নাম দেয়নি)।



12. মিশ্রণ

আমাদের পাড়ার মোড়ে নীলমণিকাকার চায়ের দোকান। আমি ও ভাই ছুটির দিনে পড়াশোনা করার পর কাকাবাবুর চায়ের দোকানে মাঝে মাঝে যাই ও কাকাবাবুকে নানাভাবে সাহায্য করি। আজ রবিবার কাকাবাবুর সঙ্গে দোকানে গেলাম। দেখছি কাকাবাবু 1 নং কৌটোয় কিছুটা দার্জিলিং চায়ের সাথে কিছুটা আসাম চা ঢালছেন।

কিন্তু এমনভাবে মেশাচ্ছেন কেন?

অনেকে এই মিশ্র চা কিনতে চান। তাই 1 নং কৌটোয় দার্জিলিং ও আসাম চা মিশিয়ে রাখি।

তাহলে 2 নং কৌটোয় কী রকম চা আছে?

এখানেও দার্জিলিং ও আসাম চা অন্য অনুপাতে মিশিয়ে রেখেছি।

1 নং চায়ের কৌটোয় আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 5 : 2

2 নং চায়ের কৌটোয় আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 2 : 1

এই বিভিন্ন গুণমানের চা বিভিন্ন পরিমাণে মিশিয়ে কি নতুন ধরনের চা পেলাম? এইভাবে মেশানোকে কী বলা হয়?

বিভিন্ন গুণমানের চা বিভিন্ন পরিমাণে মিশিয়ে মিশ্র চা পেলাম। মেশানোর এই প্রক্রিয়াকে 'মিশ্রণ' বলা হয়।

বুঝেছি, 1 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে আসাম চায়ের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square + \square} = \frac{5}{7}$

1 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square}$

2 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে আসাম চায়ের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square + \square} = \frac{2}{3}$

2 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square}$

1 1 নং কৌটোর 21 কিগ্রা. মিশ্র চায়ে কত পরিমাণ আসাম চা ও কত পরিমাণ দার্জিলিং চা আছে হিসাব করি।

1 নং কৌটোর 21 কিগ্রা. চায়ে আসাম চা আছে = $\overset{3}{\cancel{21}}$ কিগ্রা. $\times \frac{5}{\cancel{7}}$

= 15 কিগ্রা.

এবং দার্জিলিং চা আছে = 21 কিগ্রা. $\times \frac{2}{7}$

= $\square$ কিগ্রা.

2 2 নং কৌটোর 21 কিগ্রা. চায়ে কত পরিমাণ আসাম চা ও কত পরিমাণ দার্জিলিং চা আছে হিসাব করে লিখি।

2 নং কৌটোর 21 কিগ্রা. চায়ে আসাম চা আছে = $\square \times \frac{2}{3}$ কিগ্রা.

= $\square$ কিগ্রা.

এবং দার্জিলিং চা আছে = $\square \times \frac{1}{3}$ কিগ্রা.

= $\square$ কিগ্রা.

3 3 নং কৌটোয় আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 3:2 হলে এরকম 25 কিগ্রা. মিশ্র চায়ে কত কিগ্রা. আসাম চা ও কত কিগ্রা. দার্জিলিং চা আছে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

4 3 নং কৌটোর 25 কিগ্রা. মিশ্র চায়ে যদি আরও 7 কিগ্রা. আসাম চা মেশানো হয় তবে 3 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত কত হবে হিসাব করে লিখি।

3 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে আসাম চা আছে = 15 কিগ্রা.

এবং দার্জিলিং চা আছে = 10 কিগ্রা.

7 কিগ্রা. আসাম চা মেশালে মোট আসাম চায়ের পরিমাণ = 15 কিগ্রা. + 7 কিগ্রা.

= $\square$ কিগ্রা.।

এখন 3 নং কৌটোর মিশ্র চায়ের পরিমাণে আসাম চায়ের পরিমাণ : দার্জিলিং চায়ের পরিমাণ

= 22:10 = 11:5

5 যদি 3 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে 7 কিগ্রা. আসাম চা না মিশিয়ে 2 কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশাতাম তখন নতুন মিশ্র চায়ে আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত কত হতো হিসাব করে লিখি।

[নিজে করি]

6 1 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে কত কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশালে মিশ্র চায়ে আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 5:3 হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি x কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশাব।

$\therefore$ x কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশানোয় মোট দার্জিলিং চায়ের পরিমাণ = $(6 + x)$ কিগ্রা.

এখন নতুন মিশ্র চায়ে আসাম চায়ের পরিমাণ : দার্জিলিং চায়ের পরিমাণ = $15 : (6 + x)$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{15}{6 + x} = \frac{5}{3}$

বা, $5(6 + x) = 3 \times 15$

বা, $30 + 5x = 45$

বা, $5x = 45 - 30$

বা, $5x = 15$

বা, $x = \frac{15}{5}$ $\therefore x = 3$

$\therefore$ 1 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে আরও 3 কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশালে নতুন মিশ্রণে আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 5 : 3 হবে।

7 2 নং কৌটোর মিশ্র চায়ে কত কিগ্রা. দার্জিলিং চা মেশালে নতুন মিশ্র চায়ে আসাম চা ও দার্জিলিং চায়ের পরিমাণের অনুপাত 7 : 4 হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

8 আমি বাড়িতে দু-প্রকার শরবত তৈরি করেছি। এই দু-প্রকার শরবতে সিরাপ ও জলের পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 2:7 এবং 1:5; প্রথম প্রকার শরবতের 27 লিটারের সাথে দ্বিতীয় প্রকার শরবতের 18 লিটার মেশালে নতুন মিশ্রণে সিরাপ ও জলের পরিমাণের অনুপাত কত হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথম প্রকার শরবতে সিরাপের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{2}{2 + 7} = \frac{\square}{\square}$

এবং জলের পরিমাণের অনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square}$

$\therefore$ প্রথম প্রকার 27 লিটার শরবতে সিরাপের পরিমাণ = $\frac{2}{\cancel{9}} \times \cancel{27}^{3}$ লিটার

= 6 লিটার

এবং জলের পরিমাণ = $\frac{7}{9} \times 27$ লিটার

= 21 লিটার

একইভাবে দ্বিতীয় প্রকার শরবতে সিরাপের পরিমাণের অনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square}$

এবং জলের পরিমাণের আনুপাতিক ভাগহার = $\frac{\square}{\square}$

$\therefore$ দ্বিতীয় প্রকার 18 লিটার শরবতে সিরাপের পরিমাণ = $\square$ লিটার

এবং জলের পরিমাণ = $\square$ লিটার

$\therefore$ নতুন মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ = 6 লিটার + 3 লিটার = $\square$ লিটার

এবং জলের পরিমাণ = 21 লিটার + 15 লিটার = $\square$ লিটার

$\therefore$ নতুন মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ : জলের পরিমাণ = 9 : 36 = 1 : 4

9 উপরের দু-প্রকার শরবত কী অনুপাতে মেশালে সিরাপ ও জলের পরিমাণের অনুপাত 5:21 হবে হিসাব করে লেখার চেষ্টা করি।

ধরি x লিটার প্রথম প্রকার শরবতের সাথে y লিটার দ্বিতীয় প্রকার শরবত মেশান হলো।

$\therefore$ প্রথম প্রকার x লিটার শরবতে সিরাপ আছে = $\frac{2}{9} \times$ x লিটার

= $\frac{2x}{9}$ লিটার

এবং জল আছে = $\frac{\square}{\square} \times \square$ লিটার

= $\frac{7x}{9}$ লিটার

দ্বিতীয় প্রকার y লিটার শরবতে সিরাপ আছে = $\frac{1}{6} \times$ y লিটার

= $\frac{y}{6}$ লিটার

এবং জল আছে = $\frac{5}{6} \times$ y লিটার

= $\frac{5y}{6}$ লিটার

$\therefore$ নতুন মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ = $\frac{2x}{9}$ লিটার + $\frac{y}{6}$ লিটার

= $(\frac{2x}{9} + \frac{y}{6})$ লিটার

এবং জলের পরিমাণ = $\frac{7x}{9}$ লিটার + $\frac{5y}{6}$ লিটার

= $(\frac{7x}{9} + \frac{5y}{6})$ লিটার

শর্তানুসারে, $\dfrac{\dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{6}}{\dfrac{7x}{9}+\dfrac{5y}{6}}=\dfrac{5}{21}$

বা $21\left(\dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{6}\right)=5\left(\dfrac{5y}{6}+\dfrac{7x}{9}\right)$

বা $21\left(\dfrac{4x+3y}{18}\right)=5\left(\dfrac{14x+15y}{18}\right)$

বা, $21(4x+3y)=5(14x+15y)$

বা, $84x+63y=70x+75y$

বা, $84x-70x=75y-63y$

বা, $14x=12y$

বা, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{12}{14}=\dfrac{6}{7}$ $\therefore$ $x:y=6:7$

$\therefore$ 6 : 7 অনুপাতে দু-প্রকার শরবত মেশালে নতুন মিশ্রণে সিরাপ ও জলের পরিমাণের অনুপাত 5 :21 হবে।

10 আমার ভাই একটি জগে 3 : 1 অনুপাতে সিরাপ ও জল মিশিয়ে এক প্রকার শরবত তৈরি করেছে। এই শরবতের কত অংশ তুলে নিয়ে সমপরিমাণ জল ঢাললে জল ও সিরাপের পরিমাণের অনুপাত 2 : 1 হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, জগে x একক শরবত আছে। এর y একক শরবত তুলে নিয়ে সমপরিমাণ জল মেশালাম।

x একক শরবতে সিরাপ আছে $=\dfrac{3}{4}\times x$ একক

$=\dfrac{3x}{4}$ একক

এবং জল আছে $=\dfrac{\square}{\square}$ একক

আবার, y একক শরবতে সিরাপ আছে $=\dfrac{3}{4}\times y$ একক

$=\dfrac{3y}{4}$ একক

এবং জল আছে $=\dfrac{y}{4}$ একক

x একক শরবত থেকে y একক শরবত তুলে নিলে,

অবশিষ্ট শরবতে সিরাপ থাকবে $=\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{3y}{4}\right)$ একক

এবং জল থাকবে $=\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{4}\right)$ একক

আবার, y একক জল মেশালাম। $\therefore$ এখন জলের পরিমাণ হলো $=\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{4}+y\right)$ একক

শর্তানুসারে, $\dfrac{\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+y}{\frac{3x}{4}-\frac{3y}{4}} = \dfrac{2}{1}$

বা, $\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+y = \frac{6x}{4}-\frac{6y}{4}$

বা, $\frac{x}{4}-\frac{6x}{4} = \frac{y}{4}-y-\frac{6y}{4}$

বা, $\frac{x-6x}{4} = \frac{y-4y-6y}{4}$

বা, $-\frac{5x}{4} = -\frac{9y}{4}$

বা, $5x = 9y$

বা, $y = \frac{5x}{9}$

$\therefore$ মোট শরবতের $\frac{5}{9}$ অংশ তুলে নিয়ে সমপরিমাণ জল ঢাললে জল ও সিরাপের পরিমাণের অনুপাত 2 : 1 হবে।

11 এই 3 : 1 অনুপাতে সিরাপ ও জল মেশানো শরবত থেকে কত অংশ তুলে নিয়ে তার পরিবর্তে সমপরিমাণ জল ঢাললে সিরাপ ও জলের পরিমাণ সমান হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজেকরি]**

কষে দেখি — 12

1. 36 লিটার ডেটল-জল তৈরি করলাম যাতে জল ও ডেটলের পরিমাণের অনুপাত 5:1; ওই ডেটল জলে আর কতটুকু ডেটল মেশালে জল ও ডেটলের পরিমাণের অনুপাত 3:1 হবে হিসাব করে লিখি।
2. এক ধরনের পিতলে তামা ও দস্তার পরিমাণের অনুপাত 5:2; এই ধরনের 28 কিগ্রা. পিতলে 4 কিগ্রা.তামা মেশালে তামা ও দস্তার পরিমাণের অনুপাত কী হবে হিসাব করে দেখি।
3. বিজনবাবু ফিনাইল ও জল 2:23 অনুপাতে মিশিয়ে 60 লিটার ফিনাইল গোলা জল তৈরি করেছেন। এই ফিনাইল গোলা জলে আর কত লিটার ফিনাইল মেশালে ফিনাইল ও জলের পরিমাণের অনুপাত 9:46 হবে হিসাব করে লিখি।
4. আমিনাবিবি 7:1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মিশিয়ে এক গাঁথুনির মশলা তৈরি করেছেন। কিন্তু গাঁথুনির কাজ শেষ হয়ে গেলে দেখা গেল এখনও 72 কিগ্রা. মশলা রয়ে গেছে। ওই মশলায় আরও কিছুটা সিমেন্ট মিশিয়ে বালি ও সিমেন্টের পরিমাণের অনুপাত 6:1 করে মশলা তৈরি করলেন। তিনি কত কিগ্রা. সিমেন্ট মিশিয়ে ছিলেন হিসাব করে লিখি।
5. একধরনের জার্মান সিলভারে তামা, দস্তা ও নিকেলের পরিমাণের অনুপাত 4:3:2; এই ধরনের 54 কিগ্রা. জার্মান সিলভারে আর কত কিগ্রা. দস্তা মেশালে সেই পরিমাণের অনুপাত 6:5:3 হবে হিসাব করে লিখি।
6. দুই প্রকার গুঁড়ো-সাবানে সোডা ও সাবান গুঁড়োর পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 2:3 এবং 4:5 ; যদি প্রথম প্রকারের 10 কিগ্রা.-এর সঙ্গে দ্বিতীয় প্রকারের 18 কিগ্রা. মেশানো হয়, তবে নতুন গুঁড়ো সাবানে কত অংশ সাবান গুঁড়ো থাকবে হিসাব করে লিখি।

7. দুটি সমান আয়তনের পাত্রে যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশে ফলের রস ছিল। আমি পাত্র দুটির অবশিষ্টাংশ জলপূর্ণ করে অন্য একটি পাত্রে সমগ্র জল-মিশ্রিত ফলের রস ঢাললাম। নতুন পাত্রে ফলের রস ও জলের পরিমাণের অনুপাত কত হবে হিসাব করে লিখি।

8. রেশমি খাতুন তিনটি সমান মাপের গ্লাস শরবত পূর্ণ করেছে। এই তিনটি গ্লাসের শরবতে জল ও সিরাপের পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 3:1, 5:3 ও 9:7; আমি এই তিনটি গ্লাসের শরবত একটি বড়ো পাত্রে ঢেলে দিলাম। হিসাব করে দেখি এই নতুন পাত্রে জল ও সিরাপের পরিমাণের অনুপাত কী হলো।

9. দু-প্রকার পিতলে তামা ও দস্তার পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 8:3 এবং 15:7; এই দু-প্রকার পিতল 5:2 অনুপাতে মেশালে যে নতুন প্রকারের পিতল পাওয়া যাবে, তাতে তামা ও দস্তার পরিমাণের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

10. দু-প্রকার স্টেনলেস স্টিলে ক্রোমিয়াম ও স্টিলের পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 2:11 এবং 5:21; এই দু-প্রকার স্টেনলেস স্টিল কী অনুপাতে মেশালে নতুন স্টেনলেস স্টিলে ক্রোমিয়াম ও স্টিলের অনুপাত 7:32 হবে হিসাব করে লিখি।

11. একপাত্র শরবতে 5:2 অনুপাতে সিরাপ ও জল মেশানো আছে। এই শরবতের কতটুকু অংশ তুলে নিয়ে তাঁর পরিবর্তে সমপরিমাণ জল ঢাললে সিরাপ ও জলের পরিমাণ সমান সমান হবে হিসাব করে লিখি।

12. নীচের ছক দেখি, গণিতের গল্প তৈরি করি ও উত্তর খুঁজি :

ক্রমিক নং	দুটি মিশ্রণের প্রত্যেকটিতে উপাদান দুটির পরিমাণের অনুপাত	নতুন মিশ্রণে মিশ্রণ দুটির পরিমাণের অনুপাত	নতুন মিশ্রণে উপাদান দুটির পরিমাণের অনুপাত
1	5 : 4 এবং 3 : 2	মিশ্রণদুটি সমান পরিমাণ নিয়ে	
2	4 : 5 এবং 5 : 1		5 : 4
3	3 : 4 এবং 9 : 5	1 : 2 অনুপাতে	
4	2 : 3 এবং 5 : 4		1 : 1
5	4 : 3 এবং 5 : 2		9 : 5

13. 700 লিটার একটি মিশ্রণে তিন ধরনের তরলের প্রথম ও দ্বিতীয় ধরনের পরিমাণের অনুপাত 2:3 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় ধরনের পরিমাণের অনুপাত 4:5; ওই মিশ্রণে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকার তরল কত পরিমাণে মেশালে নতুন মিশ্রণে তিন প্রকার তরলের পরিমাণের অনুপাত 6:5:3 হবে তা হিসাব করে লিখি।

14. এক প্রকার সিরাপে জল এবং অবশিষ্টাংশের পরিমাণের অনুপাত 89:11; এইরূপ 22 লিটার সিরাপে আর কত লিটার জল মেশালে জল ও অবশিষ্টাংশের পরিমাণের অনুপাত 90:10 হবে তা হিসাব করে লিখি।

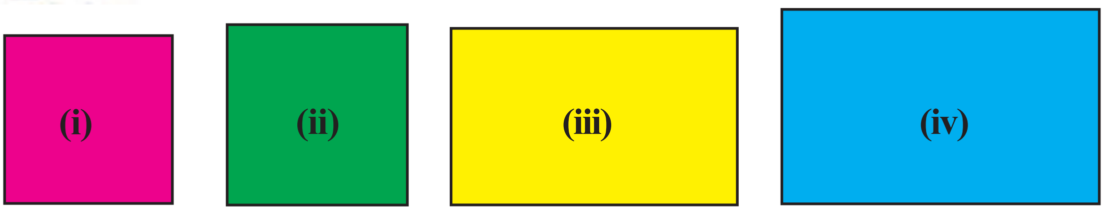
15. তিনটি বোতলের আয়তনের পরিমাণের অনুপাত 5:3:2 এবং বোতল তিনটি ফিনাইল ও জলের মিশ্রণে পূর্ণ আছে। বোতল তিনটিতে ফিনাইল ও জলের পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে 2:3, 1:2 এবং 1:3; প্রথম বোতলের $\frac{1}{3}$ অংশ, দ্বিতীয় বোতলের $\frac{1}{2}$ অংশ এবং তৃতীয় বোতলের $\frac{2}{3}$ অংশ মিশ্রণ একত্রে মেশানো হলো। নতুন মিশ্রণে ফিনাইল ও জলের পরিমাণের অনুপাত কত হিসাব করি।

13. বীজগাণিতিক সংখ্যামালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ

আজ আমরা স্কুলে নানান আকারের রঙিন ছোটো বড়ো পিচবোর্ডের আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্র তৈরি করেছি।

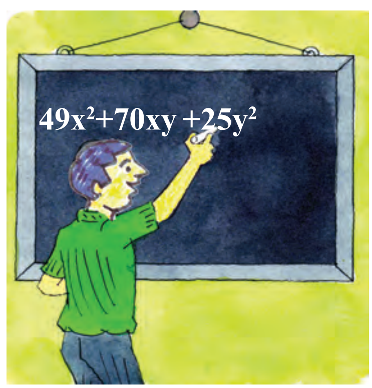
পাপিয়া ও তথাগত সেই আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রগুলি বড়ো মোটা চার্ট পেপারে আটকে দিল এবং সেগুলির নীচে বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় তাদের ক্ষেত্রফল লিখল।

আমরা ঠিক করেছি প্রত্যেকে বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে আয়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্রের বাহু কী হতে পারে লিখব।



ক্ষেত্রফল (বর্গএককে)	ক্ষেত্রফল (বর্গএককে)	ক্ষেত্রফল (বর্গএককে)	ক্ষেত্রফল (বর্গএককে)
↓	↓	↓	↓
$49x^2+70xy+25y^2$	$81a^2-72ab+16b^2$	$64m^2-121n^2$	$x^2+7x+12$

1 আমি স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে ($49x^2+70xy+25y^2$) -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

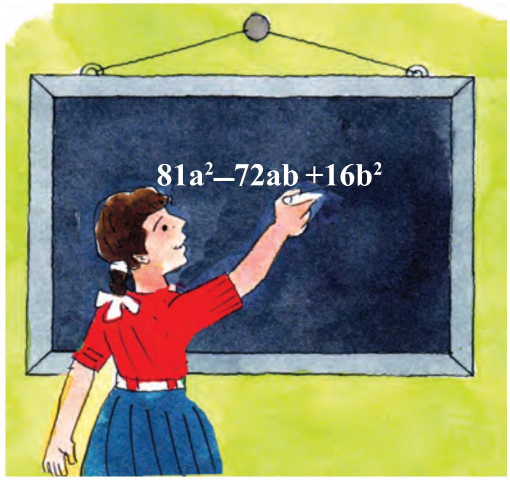


$$49x^2+70xy+25y^2 = \square^2 + 2\times\square\times\square+\square^2$$

$$= (\square+\square)^2$$

পেলাম, $49x^2+70xy+25y^2 = (9x+5y)\times(9x+5y)$

(i) নং বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য (এককে) $\square$।



2 আমি $(81a^2 - 72ab + 16b^2)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে দেখছি—
(ii) নং বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য (এককে) $\square$ । [নিজে করি]

3 রেহানা$(64m^2 - 121n^2)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করল।
সে পেল, $64m^2 - 121n^2$
$= (8m+11n) \times \square$

(iii) নং আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য (এককে)
$\square$ এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য (এককে) $(8m - 11n)$

4 সিরাজ $(125a^3+8b^3)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করল।

$$125a^3+8b^3 = \square^3 + \square^3$$
$$= (5a+2b)\{\square - \square \times \square + 4b^2\}$$
$$= (5a+2b)(25a^2 - 10ab + 4b^2)$$

5 উৎপল $(27x^3 - 34y^3)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করল।

$$27x^3 - 343y^3 = \square^3 - \square^3$$
$$= (3x - 7y)(\square)$$

আমি $(x^2+7x+12)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। কিন্তু কীভাবে $(x^2+7x+12)$ কে দুটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালার গুণের আকারে লিখব?

প্রথমে আমার জানা অভেদগুলি লিখি যেগুলি উৎপাদকে বিশ্লেষণে সাহায্য করে।

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ---------------- (I)
$(a-b)^2 = \square$ ---------------- (II)
$a^2 - b^2 = \square \times (a-b)$ ---------------- (III)
$a^3 + b^3 = (a+b) \times \square$ ---------------- (IV)
$a^3 - b^3 = (a-b) \times \square$ ---------------- (V)
$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ ---------------- (VI)

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= (x+a)x + (x+a)b \text{ [বিচ্ছেদ নিয়ম]}\\ &= x^2 + ax + xb + ab \text{ [বিচ্ছেদ নিয়ম]}\\ &= x^2 + ax + bx + ab \text{ [বিনিময় নিয়ম]}\\ &= x^2 + (a+b)x + ab \text{ [বিচ্ছেদ নিয়ম]}\end{aligned}}$$

6 VI নং অভেদের সাহায্যে ($x^2 + 7x + 12$) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

VI নং অভেদের সমান চিহ্নের (=) ডান পাশের সাথে $x^2 + 7x + 12$ তুলনা করে পাই—

$(a + b) = 7$ এবং $a \times b = 12$

যেহেতু $a \times b = 12 = 1 \times 12$

$= 2 \times 6$

$= 4 \times 3$

$\therefore$ $\boxed{a = 1, b = 12}$ বা $\boxed{a = 2, b = 6}$ বা $\boxed{a = 4, b = 3}$

কিন্তু $\boxed{a + b = 7}$ হতে হবে। $\therefore$ $\boxed{a = 4 \text{ ও } b = 3}$

VI নং অভেদের সমান চিহ্নের (=) বাম পাশ থেকে পাই,

$$\boxed{x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)}$$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই —

$$\begin{aligned}x^2 + 7x + 12 &= x^2 + (4 + 3)x + 4 \times 3\\ &= x^2 + 4x + 3x + 4 \times 3\\ &= x(x + 4) + 3(x + 4)\\ &= (x + 4)(x + 3)\end{aligned}$$

7 আমি VI নং অভেদের সাহায্যে ($x^2 + 7x - 18$) এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + 7x - 18$

এখানে, $a + b = 7$ এবং $a \times b = -18$

$-18 = 1\times(-18) = (-1)\times(18) = (-2)\times 9 = 2\times(-9) = (-3)\times 6 = 3 \times (-6)$ এবং $\boxed{7 = 9 + (-2)}$

$\therefore$ এখানে, $a = 9$ ও $b = \boxed{}$

$\therefore$ VI নং অভেদ থেকে পাই —

$$\begin{aligned}x^2 + 7x - 18 &= (x + 9)\{x + (-2)\}\\ &= (x + 9)(x - 2)\end{aligned}$$

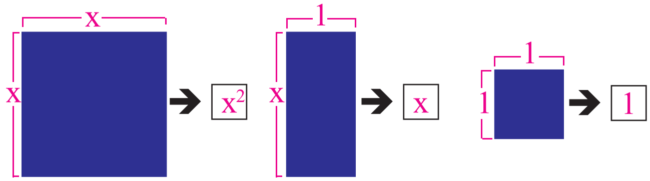
উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই,

$$\begin{aligned}x^2 + 7x - 18 &= x^2 + (9-2)x - 18\\ &= x^2 + 9x - 2x - 18\\ &= x(x + 9) - 2(x + 9)\\ &= (x + 9)(x - 2)\end{aligned}$$

হাতে কলমে

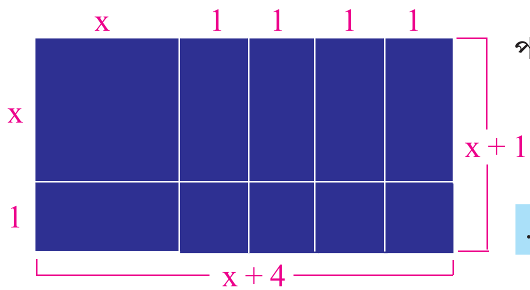
হাতে কলমে $\boxed{x^2+5x+4}$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(1) প্রথমে নীচের ছবির মতো নীল রঙের বড়ো বর্গক্ষেত্রাকার, আয়তক্ষেত্রাকার ও ছোটো ছোটো বর্গক্ষেত্রাকার টুকরো তৈরি করলাম।



(2) $\boxed{x^2+5x+4}$ বোঝার জন্য নিলাম —

(2) নীচের ছবির মতো আয়তক্ষেত্রাকারে সাজিয়ে পাই —



পাশের ছবির আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $(x+4)$ একক।

অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $(x+1)$একক।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(x+4)(x+1)$ বর্গএকক।

$\therefore$ পেলাম, $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$

একইভাবে হাতে কলমে $\boxed{x^2+7x+12}$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। [নিজে করি]

দেখছি, $x^2+7x+12$ ও $x^2+7x-18$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ (VI) এর বাম দিকের মধ্যপদের সহগের অর্থাৎ [(a+b)-এর] বিশ্লেষণের উপর নির্ভর করে। এই পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণকে কী বলা হয়?

মধ্যসহগ বিশ্লেষণ পদ্ধতি বলা হয়।

8 $(a^2 - 11a + 30)$ ও $(m^2 - 4m - 12)$-এর উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$a^2 - 11a + 30$

$30 = 1 \times \square = 2 \times \square = 3 \times \square = 5 \times \square$

$30 = \square \times 6$, $\boxed{11 = \boxed{5} + \square}$

$a^2 - 11a + 30$

$= a^2 - (5+6)a + 30$

$= a^2 - 5a - 6a + 30$

$= a(a-5) - 6(a-5)$

$= (a-5)(a-6)$

$m^2 - 4m - 12$

$12 = 1 \times \square$

$= 2 \times \square$

$= 3 \times \square$

$4 = \square - \square$

$m^2 - 4m - 12$

$= m^2 - (6-2)m - 12$

$= m^2 - 6m + 2m - 12$

$= m(m-6) + 2(m-6)$

$= (m-6)(m+2)$

∴ পেলাম, $x^2 + px + q$ এই দ্বিঘাত (বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চলের সর্বাধিক ঘাত 2) বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের জন্য দুটি সংখ্যা a ও b খুঁজব যেখানে

$a+b = p$ এবং $a \times b = \square$ হবে।

∴ সেক্ষেত্রে বীজগাণিতিক সংখ্যামালাটি হবে

$x^2 + (a+b)x + ab$

$= x^2 + ax + bx + ab$

$= x(x+a) + b(x+a)$

$= (x+a)(x+b)$

9 $(x^2 - x - 20)$ ও $(b^2 - 10b + 16)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 - x - 20$

$20 = \square \times \square$

এবং $1 = \square - \square$

$x^2 - x - 20$

$= x^2 - (5-4)x - 20$

$= x^2 - 5x + 4x - 20$

$= x(x-5) + 4(x-5)$

$= (x-5)(x+4)$

$b^2 - 10b + 16$

$\square = \square \times \square$

এবং $10 = \square + \square$

$b^2 - 10b + 16$

$= b^2 - (\square + \square)b + 16$

$= b^2 - 8b - 2b + 16$

$= b(b-8) - 2(b-8)$

$= (b-8)(b-2)$

নিজে করি — 13.1

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 + x - 6$ (iii) $x^2 - x - 6$ (iv) $y^2 + 23y + 102$ (v) $a^2 + a - 132$ (vi) $p^2 + 3p - 18$

10 মধ্যপদের সহগ বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে $(x + y)^2 - (x+y) - 6$ ও $a^8 - a^4 - 2$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$(x + y)^2 - (x+y) - 6$

$= a^2 - a - 6$ [ধরি, $x + y = a$]

$= a^2 - (3-2)a - 6$

$= a^2 - 3a + 2a - 6$

$= a(a-3) + 2(a-3)$

$= (a-3)(a+2)$

$= (x+y-3)(x+y+2)$ [$a = x+y$ বসিয়ে পাই]

$a^8 - a^4 - 2$

$= (a^4)^2 - a^4 - 2$

$= x^2 - x - 2$ [ধরি, $a^4 = x$]

$= x^2 - (2-1)x - 2$

$= x^2 - 2x + x - 2$

$= x(x-2) + 1(x-2)$

$= (x-2)(x+1)$

$= (a^4-2)(a^4+1)$ [$x = a^4$ বসিয়ে পাই]

11 $(x^2 + 20xy - 96y^2)$ ও $(1 - 5x - 36x^2)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$(x^2 + 20xy - 96y^2)$ -এর প্রতিটি পদেই চল আছে। প্রথমে শেষ পদকে চল বর্জিত করি।

$x^2 + 20xy - 96y^2$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + \square - \square\right) \times y^2$ [যেখানে $y^2 \neq 0$]

$= \left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 20\left(\frac{x}{y}\right) - 96\right\} \times y^2$

$= (a^2+20a-96)y^2$ [ধরি $\frac{x}{y} = a$]

$= (a^2+24a-4a-96)y^2$ [$96 = \square \times \square$ এবং $20 = \square - \square$]

$= \{a(a+24) - 4(a+24)\}y^2$

$= (a+24)(a-4)y^2$

$= \left(\frac{x}{y}+24\right)\left(\frac{x}{y}-4\right)y^2$ [$a = \frac{x}{y}$ বসিয়ে পাই]

$= \left(\frac{x+24y}{y}\right)\left(\frac{x-4y}{y}\right)y^2$

$= \frac{(x+24y)(x-4y)}{\cancel{y^2}} \times \cancel{y^2}$

$= (x+24y)(x-4y)$

অন্যভাবে পাই,

$x^2+20xy - 96y^2$

$= x^2+(24y-4y)x - 24y \times 4y$

$= x^2+24xy - 4xy - 24y \times 4y$

$= x(x+24y) - 4y(x+24y)$

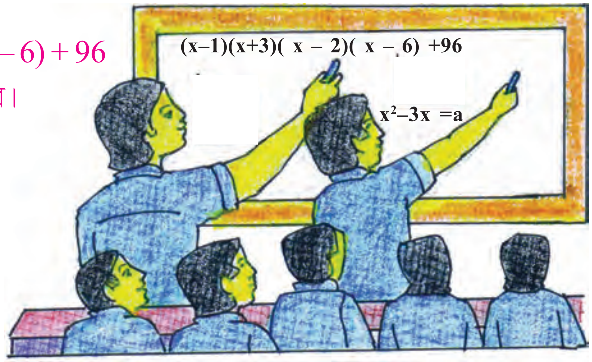
$= \square \times \square$

12 $(1 - 5x - 36x^2)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$1 - 5x - 36x^2$ $= 1 - (\square - \square)x - \square \times \square \times x^2$

$= 1 - 9x + 4x - 9 \times 4 \times x^2 = 1(1-9x) + 4x(1-9x) = (1-9x)(1+4x)$

13 এখন আমরা দু-জনে $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+96$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার চেষ্টা করব।



কিন্তু কোন অভেদের সাহায্য নেব ও কীভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করব?

$x-1, x+3, x-2$ ও $x-6$ -এ চারটি সংখ্যামালার কোন দু-জোড়া সংখ্যামালার গুণফলের x যুক্ত পদের সহগের যোগফল সমান হবে খুঁজি।

$-1-2=\boxed{}$ এবং $+3-6=-3$

তাই, $(x-1)(x-2)$ —এর গুণফলে x -এর সহগ -3 এবং $(x+3)(x-6)$ —এর গুণফলেও x -এর সহগ (-3)

তাই, $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+96$

$=(x-1)(x-2)(x+3)(x-6)+96$

$=(x^2-x-2x+2)(x^2+3x-6x-18)+96$

$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-18)+96$

$=(a+2)(a-18)+96$ [ধরি, $x^2-3x=a$]

$=a^2+2a-18a-36+96$

$=a^2-16a+60$

$=a^2-(10+6)a+60$

$=a^2-10a-6a+60$

$=a(\boxed{})-6(\boxed{})$

$=(a-10)(a-6)$

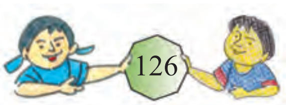
$=(x^2-3x-10)(x^2-3x-6)$ [$a=x^2-3x$ বসিয়ে পাই]

$=(x^2-5x+2x-10)(x^2-3x-6)$

$=\{x(\boxed{})+2(\boxed{})\}(x^2-3x-6)$

$=(x-5)(x+2)(x^2-3x-6)$

14 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। [নিজে করি]



15 $x^2 + x - (a+1)(a+2)$ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

x -কে চল ও a -কে ধ্রুবক ধরে x^2+px+q -এর সাথে তুলনা করে

$q = -(a+1)(a+2)$ এবং $p = 1 = (a+2) - (a+1)$ লিখি।

$x^2 + x - (a+1)(a+2)$

$= x^2 + \{(a+2) - (a+1)\}x - (a+1)(a+2)$

$= x^2 + (a+2)x - (a+1)x - (a+1)(a+2)$

$= x\,\{x+(a+2)\} - (a+1)\,\{x+(a+2)\}$

$= \{x+(a+2)\}\,\{x-(a+1)\}$

$= (x + a + 2)(x - a - 1)$

16 $x^2 + 3x - (p+5)(p+2)$ -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। [নিজে করি]

কষে দেখি — 13.1

1. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি $x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$ অভেদের সাথে তুলনা করে p ও q এর মান খুঁজে লিখি ও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

বীজগাণিতিক সংখ্যামালা	p ও q এর মান	উৎপাদকে বিশ্লেষণ
$x^2 - 8x + 15$	$p = -5, q = -3$	$(x-5)(x-3)$
$x^2 - 40x - 129$		
$m^2 + 19m + 60$		
$x^2 - x - 6$		
$(a+b)^2 - 4(a+b) - 12$		
$(x-y)^2 - x + y - 2$		

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি

(i) $(a+b)^2 - 5(a+b) - 6$

(ii) $(x^2-2x)^2 + 5(x^2-2x) - 36$

(iii) $(p^2-3q^2)^2 - 16(p^2-3q^2) - 63$

(iv) $a^4 + 4a^2 - 5$

(v) $x^2y^2 + 23xy - 420$

(vi) $x^4 - 7x^2 + 12$

(vii) $a^2 + ab - 12b^2$

(viii) $p^2 + 31pq + 108q^2$

(ix) $a^6 + 3a^3b^3 - 40b^6$

(x) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6) + 24$

(xi) $(x+1)(x+9)(x+5)^2 + 63$

(xii) $x(x+3)(x+6)(x+9) + 56$

(xiii) $x^2 - 2ax + (a+b)(a-b)$

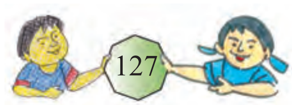
(xiv) $x^2 - bx - (a+3b)(a+2b)$

(xv) $(a+b)^2 - 5a - 5b + 6$

(xvi) $x^2 + 4abx - (a^2-b^2)^2$

(xvii) $x^2 - (a + \frac{1}{a})x + 1$

(xviii) $x^6y^6 - 9x^3y^3 + 8$



$3x^2 + 14x + 8$

$6x^2 - x + 15$

সাহানা সবুজ আয়তক্ষেত্রাকার বোর্ডের নীচে ক্ষেত্রফল (বর্গএককে) লিখেছে $3x^2 + 14x + 8$

17 আমি $3x^2 + 14x + 8$ -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি ও এই সবুজ আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য (এককে) কী কী হতে পারে লিখি।

আমরা $x^2 + px + q$ বীজগাণিতিক সংখ্যামালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি। কিন্তু $mx^2 + px + q$ -এই আকারের দ্বিঘাত সংখ্যামালার উৎপাদক কীভাবে পাব দেখি :

প্রথমে $mx^2 + px + q$ -কে $x^2 + px + q$ আকারে সাজাই।

$$mx^2 + px + q = \frac{m^2x^2 + pmx + qm}{m}$$
$$= \frac{1}{m}(y^2 + py + qm) \quad [\text{ধরি, } mx = y\,]$$

এবার এমন দুটি সংখ্যা a ও b খুঁজব যাতে $a \times b = qm$ এবং $a + b = p$ হয়।

18 $\mathbf{3x^2 + 14x + 8}$

$$= \frac{9x^2 + 42x + 24}{3}$$
$$= \frac{(3x)^2 + 14 \times 3x + 24}{3}$$
$$= \frac{y^2 + 14y + 24}{3} \quad [\text{ধরি } 3x = y]$$
$$= \frac{y^2 + 12y + 2y + 24}{3}$$
$$= \frac{y(y+12) + 2(y+12)}{3}$$
$$= \frac{(y+12)(y+2)}{3}$$
$$= \frac{(3x+12)(3x+2)}{3} \quad [y = 3x \text{ বসিয়ে পাই }]$$
$$= \frac{\cancel{3}(x+4)(3x+2)}{\cancel{3}}$$
$$=(x+4)(3x+2)$$

অন্যভাবে লিখি,

$\mathbf{3x^2 + 14x + 8}$

a ও b দুটি সংখ্যা খুঁজি যাতে $a + b = 14$ ও $a \times b = 3 \times 8 = 24 = \boxed{} \times \boxed{}$ এবং $14 = \boxed{12} + \boxed{}$ হয়।

$\mathbf{3x^2 + 14x + 8}$

$= 3x^2 + (12+2)x + 8$

$= 3x^2 + 12x + 2x + 8$

$= 3x(x + 4) + 2(x + 4)$

$= (x + 4)(3x + 2)$

দেখছি, হলুদ রঙের আয়তক্ষেত্রাকার বোর্ডের ক্ষেত্রফল (বর্গএককে) $\boxed{6x^2 - x - 15}$

19 $6x^2 - x - 15$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি ও হলুদ রঙের আয়তক্ষেত্রাকার বোর্ডের বাহুর দৈর্ঘ্য (এককে) কী কী হতে পারে লিখি।

$6x^2 - x - 15$

a ও b দুটি সংখ্যা খুঁজি যেখানে $a \times b = 6 \times 15 = 90$ এবং $a - b = 1$

$\therefore 90 = \square \times \square$ এবং $1 = \square - \square$

$6x^2 - x - 15$

$= 6x^2 - (10 - 9)x - 15$

$= 6x^2 - 10x + 9x - 15$

$= \square(3x - 5) + 3(3x - 5)$

$= (3x - 5)\square$

20 আমি $\boxed{x^2 + 13x - 48}$ ও $\boxed{6y^2 - y - 15}$ -এই দুটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালাকে দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করি ও $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a+b)}$ এই অভেদের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার চেষ্টা করি।

$x^2 + 13x - 48$

$= x^2 + 2.x.\frac{13}{2} + (\frac{13}{2})^2 - (\frac{13}{2})^2 - 48$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} - 48$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - (\frac{169}{4} + 48)$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{169 + 192}{4}$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - \frac{361}{4}$

$= (x + \frac{13}{2})^2 - (\frac{19}{2})^2$

$= (x + \frac{13}{2} + \frac{19}{2})(x + \frac{13}{2} - \frac{19}{2})$

$= (x + \frac{13 + 19}{2})(x + \frac{13 - 19}{2})$

$= (x + 16)(x - 3)$

মধ্যপদের সহগ বিশ্লেষণ করে (**$x^2 + 13x - 48$**) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$x^2 + 13x - 48$

$= x^2 + 16x - 3x - 48$

$= x(x+16) - 3(x+16)$

$= (\square)(\square)$

$6y^2 - y - 15$

$$= 6(y^2 - \frac{y}{6} - \frac{15}{6})$$

$$= 6\{y^2 + 2.y.\frac{1}{12} + (\frac{1}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2 - \frac{15}{6}\}$$

$$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{1}{144} - \frac{15}{6}\}$$

$$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{1+360}{144}\}$$

$$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - \frac{361}{144}\}$$

$$= 6\{(y - \frac{1}{12})^2 - (\frac{19}{12})^2\}$$

$$= 6(y - \frac{1}{12} + \frac{19}{12})(y - \frac{1}{12} - \frac{19}{12})$$

$$= 6(y + \frac{19}{12} - \frac{1}{12})(y - \frac{1+19}{12})$$

$$= 6(y + \frac{3}{2})(y - \frac{5}{3})$$

$$= \overset{3}{\cancel{6}}(\frac{2y+3}{\cancel{2}}) \times (\frac{3y-5}{\cancel{3}})$$

$$= (2y+3)(3y-5)$$

মধ্যপদের সহগ বিশ্লেষণ করে (**$6y^2 - y - 15$**) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$6y^2 - y - 15$

$$= 6y^2 - 10y + 9y - 15$$

$$= 2y(3y-5) + 3(3y-5)$$

$$= (3y-5)(2y+3)$$

21 আমি $x^2 + ax - (6a^2 - 5ab + b^2)$ ও $2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$ বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + ax - (6a^2 - 5ab + b^2)$

$= x^2 + ax - (2a-b)(3a-b)$ [নিজে করি]

$= x^2 + \{(3a-b) - (2a-b)\}x - (2a-b)(3a-b)$

$= x^2 + (3a-b)x - (2a-b)x - (2a-b)(3a-b)$

$= x\{x+3a-b\} - (2a-b)\{x+3a-b\}$

$= (x+3a-b)(x-2a+b)$

$2(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2\{(a - \frac{1}{a})^2 + 2.\cancel{a}.\frac{1}{\cancel{a}}\} - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2\{(a - \frac{1}{a})^2 + 2\} - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2(a - \frac{1}{a})^2 + 4 - (a - \frac{1}{a}) - 7$

$= 2(a - \frac{1}{a})^2 - (a - \frac{1}{a}) - 3$

$= 2x^2 - x - 3$ [ধরি, $(a - \frac{1}{a}) = x$]

$= (2x-3)(x+1)$ [মধ্যপদের সহগ বিশ্লেষণ করে নিজে করি]

$= \{2(a - \frac{1}{a}) - 3\}\{a - \frac{1}{a} + 1\}$

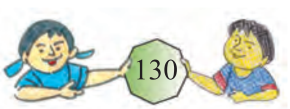
$= (2a - \frac{2}{a} - 3)(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (2a - 4 + 1 - \frac{2}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (2a - 4 + \frac{a}{a} - \frac{2}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= \{2(a-2) + \frac{1}{a}(a-2)\}(a - \frac{1}{a} + 1)$

$= (a-2)(2 + \frac{1}{a})(a - \frac{1}{a} + 1)$



নিজে করি — 13.2

1) $(a^2 - a - 72)$ ও $(2x^2 - x - 1)$ বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

কষে দেখি — 13.2

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি—

(i) $2a^2 + 5a + 2$ **(ii)** $3x^2 + 14x + 8$ **(iii)** $2m^2 + 7m + 6$

(iv) $6x^2 - x - 15$ **(v)** $9r^2 + r - 8$ **(vi)** $6m^2 - 11mn - 10n^2$

(vii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ **(viii)** $12 + x - 6x^2$ **(ix)** $6 + 5a - 6a^2$ **(x)** $6x^2 - 13x + 6$

(xi) $99a^2 - 202ab + 99b^2$ **(xii)** $2a^6 - 13a^3 - 24$ **(xiii)** $8a^4 + 2a^2 - 45$

(xiv) $6(x - y)^2 - x + y - 15$ **(xv)** $3(a+b)^2 - 2a - 2b - 8$ **(xvi)** $6(a+b)^2 + 5(a^2 - b^2) - 6(a - b)^2$

2. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি—

(i) $x^2 - 2x - 3$ **(ii)** $x^2 + 5x + 6$ **(iii)** $3x^2 - 7x - 6$ **(iv)** $3a^2 - 2a - 5$

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি—

(i) $ax^2 + (a^2+1)x + a$ **(ii)** $x^2 + 2ax + (a+b)(a - b)$

(iii) $ax^2 - (a^2+1)x + a$ **(iv)** $ax^2 + (a^2 - 1)x - a$

(v) $ax^2 - (a^2 - 2)x - 2a$ **(vi)** $a^2 + 1 - \frac{6}{a^2}$

14. বীজগাণিতিক সংখ্যামালার গ.সা.গু. ও ল.সা.গু.

আমাদের কাছে অনেকগুলি রঙিন বিভিন্ন মাপের ফিতে আছে। 32 মিটার দৈর্ঘ্যের সবুজ ফিতে, 104 মিটার দৈর্ঘ্যের হলুদ ফিতে এবং 56 মিটার দৈর্ঘ্যের নীল ফিতে আছে।

আজ আমরা ঠিক করেছি এই বিভিন্ন রঙের ফিতেগুলির প্রত্যেকটির কতকগুলি সমান দৈর্ঘ্যের সবচেয়ে বড়ো টুকরো কাটব যাতে কোনো অন্য দৈর্ঘ্যের ফিতে পড়ে না থাকে।

1 হিসাব করে দেখি সবচেয়ে বড়ো কত দৈর্ঘ্যের টুকরো কাটব।

প্রথমে 32, 104 ও 56 -এর গ.সা.গু .করি।

$32 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 2$

$104 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \times 13$

$56 = \boxed{2 \times 2 \times 2} \times 7$

∴ 32, 104 ও 56 -এর গ.সা.গু. $2{\times}2{\times}2 = 8$

∴ সবচেয়ে বড়ো 8 মিটার দৈর্ঘ্যের প্রতি রঙের টুকরো কাটতে পারব। অর্থাৎ তিনটি সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সবচেয়ে বড়ো সাধারণ উৎপাদক নিলাম। সংখ্যা তিনটির গ.সা.গু. $\boxed{}$

2 যদি সবুজ রঙের ফিতের দৈর্ঘ্য $2a^2b$ মিটার, হলুদ রঙের ফিতের দৈর্ঘ্য $4ab^2$ মিটার এবং নীল রঙের ফিতের দৈর্ঘ্য $6a^2b^2$ মিটার হয় তাহলে,

হিসাব করে দেখি তখন সবচেয়ে বড়ো মাপের সমান দৈর্ঘ্যের সবুজ, হলুদ ও নীল রঙের টুকরো কী পাব যাতে কোনো অন্য দৈর্ঘ্যের ফিতে পড়ে না থাকে।

$2a^2b$, $4ab^2$ ও $6a^2b^2$ -এর গ.সা.গু. কীভাবে পাব?

প্রথমে $2a^2b$, $4ab^2$ ও $6a^2b^2$-কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি—

$2a^2b = \boxed{2} \times \boxed{a} \times a \times \boxed{b}$

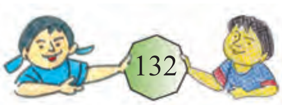
$4ab^2 = 2 \times \boxed{2} \times \boxed{a} \times \boxed{b} \times b$

$6a^2b^2 = 3 \times \boxed{2} \times \boxed{a} \times a \times \boxed{b} \times b$

অন্যভাবে, 2, 4 ও 6-এর গ.সা.গু = $\boxed{}$ প্রদত্ত সংখ্যামালাগুলির অর্থাৎ $2a^2b$, $4ab^2$ ও $6a^2b^2$-এর মধ্যে a-এর সর্বনিম্ন ঘাত a এবং b-এর সর্বনিম্ন ঘাত b ;a এবং b-তিনটি সংখ্যামালাতেই আছে।
∴ নির্ণেয় গ.সা.গু. = $2a^1b^1 = 2ab$

∴ $2a^2b$, $4ab^2$ ও $6a^2b^2$ -এর সবচেয়ে বড়ো সাধারণ গুনণীয়ক $\boxed{2ab}$

∴ $2a^2b$, $4ab^2$ ও $6a^2b^2$ এর গরিষ্ঠ সাধারণ গুনণীয়ক বা গ.সা.গু. 2ab



3 $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ ও $8x^2yz^4$ -এর গ.সা.গু. নির্ণয় করি।

প্রথমে $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ ও $8x^2yz^4$-এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি—

$$\begin{aligned}
6x^2yz^3 &= 3\times 2\times x\times x\times y\times z\times z\times z\\
10x^3y^3z^3 &= 5\times 2\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z\\
8x^2yz^4 &= 2\times 2\times 2\times x\times x\times y\times z\times z\times z\times z
\end{aligned}$$

$\therefore$ $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ ও $8x^2yz^4$ -এর গ.সা.গু. = $\square$

অন্যভাবে, 6, 10 ও 8-এর গ.সা.গু. = $\square$

$6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ ও $8x^2yz^4$-এর মধ্যে x-এর সর্বনিম্ন ঘাত $\square$, y-এর সর্বনিম্ন ঘাত $\square$ এবং z-এর সর্বনিম্ন ঘাত $\square$; x, y ও z তিনটি সংখ্যামালাতেই আছে।

$\therefore$ $6x^2yz^3$, $10x^3y^3z^3$ ও $8x^2yz^4$ -এর গ.সা.গু. $\square$

নিজে করি— 14.1 1) ax^2, a^2x^3 ও a^4x -এর গ.সা.গু. খুঁজি।

4 $(4m^2 - 25n^2)$ ও $(2m^2n - 5mn^2)$ -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির গ.সা.গু.কীভাবে পাব দেখি।

প্রথম সংখ্যামালা, $4m^2 - 25n^2 = (2m)^2 - (5n)^2$
$= (2m + 5n)(2m - 5n)$

দ্বিতীয় সংখ্যামালা, $2m^2n - 5mn^2 = mm(2m - 5n)$

প্রথম সংখ্যামালা ও দ্বিতীয় সংখ্যামালার গরিষ্ঠ সাধারণ গুনণীয়ক $(2m - 5n)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ.সা.গু. = $2m - 5n$

5 $(x^3 + 2x^2)$ ও $(x^3 + 11x^2 + 18x)$ -এর গ.সা.গু. খুঁজি।

প্রথম সংখ্যামালা, $x^3 + 2x^2 = \square(x + 2)$

দ্বিতীয় সংখ্যামালা, $x^3 + 11x^2 + 18x = \square(x^2 + 11x + 18)$
$= \square(x^2 + 9x + 2x + 18) = \square(x + 9)\square$

প্রথম সংখ্যামালা ও দ্বিতীয় সংখ্যামালার গরিষ্ঠ সাধারণ গুনণীয়ক $x(x + 2)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ.সা.গু. = $\square$

নিজে করি— 14.2 1) $x(x^2 - 9)$, $x^2 - x - 12$ বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির গ.সা.গু. নির্ণয় করি।

আজ আমরা ঠিক করেছি পর্দায় লাল, নীল ও সবুজ রঙের ফিতে দিয়ে নকশা তৈরি করব। ফারহা ও ঋতম ঠিক করেছে পর্দার দৈর্ঘ্য বরাবর সমান্তরালে প্রথমে লাল রঙের, তার নীচে নীল রঙের এবং একদম শেষে নীচে সবুজ রঙের ফিতে লাগবে। লাল, নীল ও সবুজ রঙের ফিতেগুলির টুকরোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 ডেসিমি., 8 ডেসিমি. ও 1 মিটার।

হিসাব করে দেখি রঙিন ফিতের টুকরোগুলি পর্দায় সম্পূর্ণভাবে লাগানোর জন্য কমপক্ষে কত ডেসিমিটার লম্বা পর্দা দরকার।

1 মিটার = 10 ডেসিমি.

6 আমি প্রথমে 6, 8 ও 10 -এর ল.সা.গু. খুঁজি—

$6 = 3 \times 2$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$10 = 5 \times 2$

6, 8 ও 10 -এর সাধারণ উৎপাদক 2 এবং বাকি মৌলিক উৎপাদকগুলি 2, 2, 3 ও 5

∴ 6, 8 ও 10 -এর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল.সা.গু. $= 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 = 120$

∴ কমপক্ষে 120 ডেসিমি. = 12 মিটার লম্বা পর্দায় প্রতিটি রঙিন ফিতে সম্পূর্ণভাবে লাগানো যাবে।

7 কিন্তু যদি লাল রঙের $4xy^2z$ ডেসিমি., নীল রঙের $6yz^2x$ ডেসিমি. ও সবুজ রঙের $10zx^2y$ ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের টুকরোগুলি পর পর আটকাতাম তবে পর্দার দৈর্ঘ্য কমপক্ষে কত হলে রঙিন ফিতের টুকরোগুলি পর পর সম্পূর্ণভাবে লাগাতে পারতাম হিসাব করি।

$4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ -এর ল.সা.গু. কীভাবে নির্ণয় করব চেষ্টা করি।

প্রথমে $4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$4xy^2z = 2 \times 2 \times x \times y \times y \times z$

$6yz^2x = 3 \times 2 \times x \times y \times z \times z$

$10zx^2y = 5 \times 2 \times x \times x \times y \times z$

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ -এর সাধারণ উৎপাদক $2xyz$, এবং বাকি মৌলিক উৎপাদকগুলি হলো 2, 3, 5, x, y, z

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ -এর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল.সা.গু. $2xyz \times 2 \times 3 \times 5 \times x \times y \times z = 60x^2y^2z^2$

অন্যভাবে, 4, 6 ও 10 এর ল.সা.গু. = $\boxed{}$

$4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ এর মধ্যে x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 2, y-এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 ও z-এর সর্বোচ্চ ঘাত 2

∴ $4xy^2z$, $6yz^2x$ ও $10zx^2y$ এর ল.সা.গু. $= 60x^2y^2z^2$

8 $3ab$, $9a^2c$ ও $12a^2c^2$ এর ল.সা.গু. খুঁজি।

প্রথম সংখ্যামালা, $3ab = 3 \times a \times b$

দ্বিতীয় সংখ্যামালা, $9a^2c = 3 \times 3 \times a \times a \times c$

তৃতীয় সংখ্যামালা, $12a^2c^2 = 3 \times 2 \times 2 \times a \times a \times c \times c$

3, 9 ও 12 এর ল.সা.গু. = $\boxed{}$

$3ab$, $9a^2c$ ও $12a^2c^2$ এর মধ্যে a-এর সর্বোচ্চ ঘাত $\boxed{}$, b-এর সর্বোচ্চ ঘাত 1 এবং c-এর সর্বোচ্চ ঘাত $\boxed{}$

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. = $36a^2bc^2$

নিজে করি— 14.3 1) $4a^2b^4c$, $12a^3bc^5$ ও $18a^2b^3c^2$ -এর ল.সা.গু. নির্ণয় করি।

9 $(a^2 - 2a)$ ও $(a^2 - 3a + 2)$ -এর ল.সা.গু. কী হবে দেখি।

প্রথম সংখ্যামালা, $a^2 - 2a = \boxed{}(a - 2)$

দ্বিতীয় সংখ্যামালা, $a^2 - 3a + 2 = a^2 - 2a - a + 2$

$= a(a - 2) - 1(a - 2)$

$= (a - 2)(a - 1)$

$\therefore$ প্রথম ও দ্বিতীয় সংখ্যামালাদের সাধারণ উৎপাদক $(a - 2)$ ও বাকি মৌলিক উৎপাদকগুলি a ও $(a - 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. = $a(a - 2)(a - 1)$

নিজে করি— 14.4 1) $2(x - 4)$ ও $(x^2 - 3x + 2)$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় করি।

10 $(x^3 - 8)$, $(x^2 + 3x - 10)$ ও $(x^3 + 2x^2 + 8x)$ এর গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. খুঁজি।

প্রথম সংখ্যামালা, $x^3 - 8 = x^3 - (2)^3$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

দ্বিতীয় সংখ্যামালা, $x^2 + 3x - 10 = x^2 + 5x - 2x - 10$

$= x(x + 5) - 2(x + 5) \quad = (x + 5)\boxed{}$

তৃতীয় সংখ্যামালা, $x^3 + 2x^2 - 8x = \boxed{}(x^2 + 2x - 8)$

$= x\{x^2 + 4x - 2x - 8\}$

$= x\{x(x + 4) - 2(x + 4)\} \quad = x(x + 4) \times \boxed{}$

$\therefore$ নির্ণেয় গ.সা.গু. = $x - 2$

নির্ণেয় ল.সা.গু. = $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 5)(x + 4)$

নিজে করি— 14.5 1) $(y^3 - 8)$, $(y^3 - 4y^2 + 4y)$ ও $(y^2 + y - 6)$ এর গ.সা.গু ও ল.সা.গু. নির্ণয় করি।

কষে দেখি—14

1. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির গ.সা.গু. নির্ণয় করি—

(i) $4a^2b^2, 20ab^2$ (ii) $5p^2q^2, 10p^2q^2, 25p^4q^3$ (iii) $7y^3z^6, 21y^2, 14z^2$ (iv) $3a^2b^2c, 12a^2b^4c^2, 9a^5b^4$

2. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির ল.সা.গু. নির্ণয় করি—

(i) $2x^2y^3, 10x^3y$ (ii) $7p^2q^3, 35p^3q, 42pq^4$

(iii) $5a^5b, 15ab^2c, 25a^2b^2c^2$ (iv) $11a^2bc^2, 33a^2b^2c, 55a^2bc^2$

3. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির গ.সা.গু. নির্ণয় করি—

(i) $5x(x+y), x^3-xy^2$ (ii) x^3-3x^2y, x^2-9y^2 (iii) $2ax(a-x)^2, 4a^2x(a-x)^3$

(iv) $x^2-1, x^2-2x+1, x^3+x^2-2x$ (v) a^2-1, a^3-1, a^2+a-2 (vi) $x^2+3x+2, x^2+4x+3, x^2+5x+6$

(vii) $x^2+xy, xz+yz, x^2+2xy+y^2$ (viii) $8(x^2-4), 12(x^3+8), 36(x^2-3x-10)$

(ix) $a^2-b^2-c^2+2bc, b^2-c^2-a^2+2ac, c^2-a^2-b^2+2ab$ (x) $x^3-16x, 2x^3+9x^2+4x, 2x^3+x^2-28x$

(xi) $4x^2-1, 8x^3-1, 4x^2-4x+1$ (xii) $x^3-3x^2-10x, x^3+6x^2+8x, x^4-5x^3-14x^2$

(xiii) $6x^2-13xa+6a^2, 6x^2+11xa-10a^2, 6x^2+2xa-4a^2$

4. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির ল.সা.গু. নির্ণয় করি—

(i) $p^2-q^2, (p+q)^2$ (ii) $(x^2y^2-x^2), (xy^2-2xy+x)$ (iii) $(p+q)(p+r), (q+r)(r+p), (r+p)(p+q)$

(iv) $ab^4-8ab, a^2b^4+8a^2b, ab^4-4ab^2$ (v) $x^4+x^2y^2+y^4, x^3y+y^4, (x^2-xy)^3$

(vi) $p^2+2p, 2p^4+3p^3-2p^2, 2p^3-3p^2-14p$ (vii) $x^2-y^2+z^2-2xz, x^2-y^2-z^2+2yz, xy+zx+y^2-z^2$

(viii) $x^2-xy-2y^2, 2x^2-5xy+2y^2, 2x^2+xy-y^2$ (ix) $3x^2-15x+18, 2x^2+2x-24, 4x^2+36x+80$

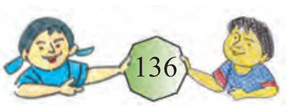
(x) $(a^2+2a)^2, 2a^3+3a^2-2a, 2a^4-3a^3-14a^2$ (xi) $3a^2-5ab-12b^2, a^5-27a^2b^3, 9a^2+24ab+16b^2$

5. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করি—

(i) $x^3-8, x^2+3x-10, x^3+2x^2-8x$ (ii) $3y^2-15y+18, 2y^2+2y-24, 4y^2+36y+80$

(iii) $a^3-4a^2+4a, a^2+a-6, a^3-8$ (iv) $a^2+b^2-c^2+2ab, c^2+a^2-b^2+2ca, b^2+c^2-a^2+2bc$

(v) $x^3-4x, 4(x^2-5x+6), (x^2-4x+4)$



15. বীজগাণিতিক সংখ্যামালার সরলীকরণ

সুমিতার কাছে 20 মিটার লম্বা লাল ফিতে আছে। আমি ও শান্তনু অনেকগুলি কার্ড তৈরি করেছি। আমরা ঠিক করেছি এই কার্ডগুলির চারধার লাল ফিতে দিয়ে মুড়ে দেব।

1 আমি সুমিতার 20 মিটার লম্বা ফিতে থেকে 5 মিটার নিয়েছি। আর শান্তনু নিয়েছে 4 মিটার।

হিসাব করে দেখি আমরা দুজনে মোট কত অংশ ফিতে নিলাম।

আমি নিলাম মোট দৈর্ঘ্যের $\frac{5}{20}$ অংশ $= \frac{1}{4}$ অংশ

শান্তনু নিল মোট দৈর্ঘ্যের $\frac{8}{20}$ অংশ $= \frac{2}{5}$ অংশ

দুজনে মোট নিলাম $\frac{1}{4}$ অংশ $+ \frac{2}{5}$ অংশ

$= (\frac{1}{4}+\frac{2}{5})$ অংশ $= (\frac{5+8}{20})$ অংশ

$= \frac{13}{20}$ অংশ

এখনও বাকি আছে $(1-\frac{13}{20})$ অংশ $= (\frac{20-13}{20})$ অংশ

$= \frac{7}{20}$ অংশ

2 যদি সুমিতার কাছে $4x^2$ মিটার লম্বা লাল ফিতে থাকত ও সেখান থেকে আমি $2xb$ মিটার লম্বা লাল ফিতে নিয়ে নিতাম এবং শান্তনু ax মিটার লম্বা লাল ফিতে নিত তাহলে,

হিসাব করে দেখি আমি ও শান্তনু মোট কত অংশ লাল ফিতে নিয়েছি।

আমি লাল ফিতে নিয়েছি $\frac{2xb}{4x^2}$ অংশ $= \frac{b}{2x}$ অংশ

দেখছি $\frac{2xb}{4x^2}$ ও $\frac{b}{2x}$ — একই, এদের কী বলব?

$\frac{2xb}{4x^2}$ —এর লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ হলো $\frac{b}{2x}$

শান্তনু লাল ফিতে নিয়েছে $\frac{ax}{4x^2}$ অংশ $= \frac{a}{4x}$ অংশ

দেখছি $\frac{ax}{4x^2}$ ও $\frac{a}{4x}$ — একই, এদের কী বলব?

বুঝেছি $\frac{a}{4x}$ হলো $\frac{ax}{4x^2}$ — এর $\boxed{}$ আকারে প্রকাশ।

আমরা দুজনে মোট লাল ফিতে নিয়েছি, $\frac{b}{2x}$ অংশ $+ \frac{a}{4x}$ অংশ

$= (\frac{b}{2x}+\frac{a}{4x})$ অংশ $= (\frac{2b+a}{4x})$ অংশ

কতটা অংশ লাল ফিতে পড়ে রইল হিসাব করি,

$$\left(1 - \frac{2b+a}{4x}\right) \text{ অংশ} = \left(\frac{4x}{4x} - \frac{2b+a}{4x}\right) \text{ অংশ}$$

$$= \frac{4x-(2b+a)}{4x} \text{ অংশ}$$

$$= \frac{4x-2b-a}{4x} \text{ অংশ}$$

3 $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz}$ — কী হয় দেখি।

প্রথমে ভগ্নাংশ দুটিকে সাধারণ হরে পরিণত করি।

yz ও xz — এর ল.সা.গু. $= xyz$, $xyz \div yz = x$ এবং $xyz \div xz = y$

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} = \frac{x \times x}{xyz} + \frac{y \times y}{xyz} = \frac{x^2+y^2}{xyz}$$

4 $\frac{x^2}{a} + \frac{a^2}{x}$ —এর সরল করি।

$$\frac{x^2}{a} + \frac{a^2}{x} = \frac{x^3+a^3}{ax}$$

5 এবার $\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x^2-16}$ —এর সরল করি।

প্রথমে ভগ্নাংশ দুটিকে সাধারণ হর বিশিষ্ট করি।

$$\frac{x}{x-4} - \frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{(x+4)(x-4)}$$

[$(x-4)$ ও $(x+4)(x-4)$ —এর ল.সা.গু. $= (x+4)(x-4)$]

$$= \frac{x(x+4)-1}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2+4x-1}{x^2-16}$$

6 $\frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)}$ বীজগাণিতিক সংখ্যামালার সরল করি।

প্রথমে $(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$ ও $(a-b)(b-c)$ এর ল.সা.গু. কী হবে দেখি।

$(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$ ও $(a-b)(b-c)$ এর ল.সা.গু. $= (a-b)(b-c)(c-a)$

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$[(a-b)(b-c)(c-a) \div (b-c)(c-a) = (a-b)$

$\boxed{} \div \boxed{} = (b-c)$

$\boxed{} \div \boxed{} = (c-a)]$

$$= \frac{\cancel{a}-\cancel{b}+\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{c}-\cancel{a}}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

নিজে করি—15.1

1) সরল করি :

(i) $\frac{2x}{3ab} - \frac{3b}{6ac}$ (ii) $\frac{4xy}{3mn} - \frac{2yz}{6n}$

(iii) $\frac{a}{a^2+ab} - \frac{b}{(a+b)^2}$ (iv) $\frac{x}{x^2+xy} - \frac{x}{x-y}$

7 আমি লাল ফিতের মোট দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{4}$ অংশ নিয়েছি, আমার ভাই আমার থেকে আমার ফিতের $\frac{2}{7}$ অংশ ফিতে নিয়ে নিল।

$\therefore$ ভাই নিল লাল ফিতের মোট দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{4} \times \frac{2}{7}$ অংশ $= \frac{2}{28}$ অংশ

8 ধরি ফিতের দৈর্ঘ্য $8a^2x^2$ মি.। আমি $2ax$ মি.ফিতে নিয়েছি।

আমি নিলাম $\frac{\cancel{2ax}^{1}}{\cancel{8a^2x^2}_{4ax}}$ অংশ $= \frac{1}{4ax}$ অংশ

$\therefore \frac{2ax}{8a^2x^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করে পাই $\boxed{}$।

9 ভাই আমার থেকে $\frac{5a}{3x^2b}$ অংশ ফিতে নিয়েছে।

ভাই আমার ফিতের মোট দৈর্ঘ্যের কত অংশ নিয়েছে দেখি।

ভাই নিয়েছে আমার ফিতের $\frac{1}{4ax} \times \frac{5a}{3x^2b}$ অংশ $= \frac{5a \times 1}{4ax \times 3x^2b}$ অংশ $= \frac{5a}{12x^3ab}$ অংশ ।

[$\therefore$ দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের গুণ $= \frac{\text{লবগুলির গুণফল}}{\text{হরগুলির গুণফল}}$]

10 $\frac{1-x^2}{1+b} \times \frac{1-b^2}{x+x^2}$ — বীজগাণিতিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করি।

$$\frac{1-x^2}{1+b} \times \frac{1-b^2}{x^2+x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1+b} \times \frac{(1+b)(1-b)}{x(1+x)} = \frac{(1-x)(1-b)(1+x)(1+b)}{x(1+x)(1+b)}$$

$$= \frac{(1-x)(1-b)}{x}$$

[লব ও হরে $(1+x)(1+b)$ সাধারণ উৎপাদক। তাই লব ও হরে $(1+x)(1+b)$ ভাগ করে লঘিষ্ঠ রূপটি গুণফল পাব এবং এটাই ভগ্নাংশগুলির গুণফল।]

11 $\frac{(a+1)}{a+2}\times\frac{a^2-a-2}{a^2+a}$ কে লঘিষ্ঠ আকার প্রকাশ করি।

$\frac{a+1}{a+2}\times\frac{a^2-a-2}{a^2+a}=\frac{a+1}{a+2}\times\frac{\boxed{}\times\boxed{}}{\boxed{}\,(a+1)}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ [—নিজে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করি]

নিজে করি—15.2

1) $\frac{a\,(a+b)}{a-b}\times\frac{a-b}{b\,(a+b)}\times\frac{a}{b}$ কে লঘিষ্ঠ আকার প্রকাশ করি।

12 আমাদের লাল ফিতে পড়ে ছিল $\frac{7}{20}$ অংশ। এই বাকি ফিতে আমি $\frac{3}{5}$ অংশে সমান ভাগে ভাগ করলাম।

প্রত্যেক ভাগে থাকল $\frac{7}{20}$ অংশ ÷ $\frac{3}{5}$ অংশ = $\left(\frac{7}{\cancel{20}_4}\times\frac{\cancel{5}}{3}\right)$ অংশ = $\frac{7}{12}$ অংশ

অর্থাৎ প্রথম ভগ্নাংশ ÷ দ্বিতীয় ভগ্নাংশ

= প্রথম ভগ্নাংশ × $\frac{1}{\text{দ্বিতীয় ভগ্নাংশ}}$ [বা দ্বিতীয় ভগ্নাংশের অন্যোন্যক]

13 যদি $\frac{5xb}{2a^3}$ অংশ লাল ফিতে পড়ে থাকত এবং আমি এই পড়ে থাকা লাল ফিতেকে $\frac{7x^2}{3ab}$ অংশে সমান ভাগে ভাগ করতাম তাহলে,

প্রতি ভাগে আছে = $\frac{5xb}{2a^3}\div\frac{7x^2}{3ab}$ অংশ = $\frac{5xb}{2a^3}\times\frac{3ab}{7x^2}$ অংশ

= $\frac{15xab^2}{14a^3x^2}$ অংশ = $\frac{15b^2}{14a^2x}$ অংশ

14 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-4}$ কে লঘিষ্ঠ আকার প্রকাশ করি।

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-4}=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}\times\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-6}$$

$$=\frac{x^2+2x-x-2}{x^2-4x+2x-8}\times\frac{x^2-4x+x-4}{x^2-3x+2x-6}$$

$$=\frac{x\,(x+2)-1\,(x+2)}{x\,(x-4)+2\,(x-4)}\times\frac{x\,(x-4)+1\,(x-4)}{x\,(x-3)+2\,(x-3)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)}{(x-4)\,(x+2)}\times\frac{(x-4)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)\,(x-4)\,(x+1)}{(x-4)\,(x+2)\,(x-3)\,(x+2)}$$

[লব ও হরে $\boxed{}\times\boxed{}$ সাধারণ উৎপাদক। তাই লব ও হরে $(x+2)\,(x-4)$ দিয়ে ভাগ করে লঘিষ্ঠ রূপ পাব।]

$$=\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)\,\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}\,\cancel{(x+2)}\,(x-3)\,(x+2)}$$

$$=\frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-3)\,(x+2)}$$

15 $\dfrac{p^2-q^2}{x-y} \div \dfrac{p+q}{x^2-y^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকার প্রকাশ করি এবং লব ও হরের সাধারণ উৎপাদক লিখি।

[নিজে করি]

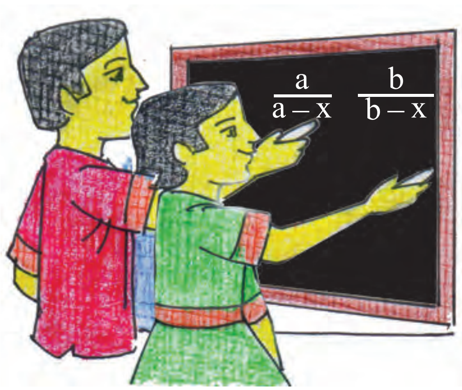
$$\frac{p^2-q^2}{x-y} \div \frac{p+q}{x^2-y^2} = \frac{p^2-q^2}{x-y} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(p+q)(p-q)}{(x-y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{p+q} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

লব ও হরের সাধারণ উৎপাদক $\boxed{}$

নিজে করি—15.3

নীচের বীজগাণিতিক ভগ্নাংশগুলি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করি।

(i) $\dfrac{a^2 \times c^2}{c^2 \times d^2} \div \dfrac{bc}{ad}$ (ii) $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-xy}$ (iii) $\dfrac{p^2-q^2}{x+y} \div \dfrac{p-q}{x^2-y^2}$



আমি বোর্ডে কিছু বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ লিখব। সিরাজ সেগুলি সরলীকরণের চেষ্টা করবে।

আমি লিখলাম — $\dfrac{\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}$

সিরাজ করল — $\dfrac{\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}$

$$= \frac{3 + \frac{a}{a-x} - 1 + \frac{b}{b-x} \quad 1 + \frac{c}{c-x} - 1}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}$$

$$= \frac{3 + \frac{\cancel{a}-\cancel{a}+x}{a-x} + \frac{\cancel{b}-\cancel{b}+x}{b-x} + \frac{\cancel{c}-\cancel{c}+x}{c-x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}$$

$$= \frac{3+\frac{x}{a-x}+\frac{x}{b-x}+\frac{x}{c-x}}{\frac{1}{x}\left(3+\frac{x}{a-x}+\frac{x}{b-x}+\frac{x}{c-x}\right)} = \frac{x\left(3+\frac{x}{a-x}+\frac{x}{b-x}+\frac{x}{c-x}\right)}{\left(3+\frac{x}{a-x}+\frac{x}{b-x}+\frac{x}{c-x}\right)} = x$$

কষে দেখি —15

1. নীচের সম্পর্কগুলি দেখি ও কোনটি সত্য ও কোনটি মিথ্যা লিখি।

(i) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ (ii) $\frac{a}{x+y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ (iii) $\frac{x-y}{a-b} = \frac{y-x}{b-a}$ (iv) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$

2. নীচের বীজগাণিতিক ভগ্নাংশগুলি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করি।

(i) $\frac{63a^3b^4}{77b^5}$ (ii) $\frac{18a^4b^5c^2}{21a^7b^2}$ (iii) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ (iv) $\frac{a+1}{a-2} \times \frac{a^2-a-2}{a^2+a}$

(v) $\frac{p^3+q^3}{p^2-q^2} \div \frac{p+q}{p-q}$ (vi) $\frac{x^2-x-6}{x^2+4x-5} \times \frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+3}$ (vii) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab} \div \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$

3. নীচের বীজগাণিতিক ভগ্নাংশগুলি সরলতম আকারে প্রকাশ করি।

(i) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$ (ii) $\frac{a-b-c}{a} + \frac{a+b+c}{a}$ (iii) $\frac{x^2+a^2}{ab} + \frac{x-a}{ax} - \frac{x^3}{b}$

(iv) $\frac{2a^2b}{3b^2c} \times \frac{c^4}{3a^3} \div \frac{4bc^3}{9a^2}$ (v) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$

(vi) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x^3}{x^4+1}$ (vii) $\frac{b^2-5b}{3b-4a} \times \frac{9b^2-16a^2}{b^2-25} \div \frac{3b^2+4ab}{ab+5a}$

(viii) $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

(ix) $\frac{b+c-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$

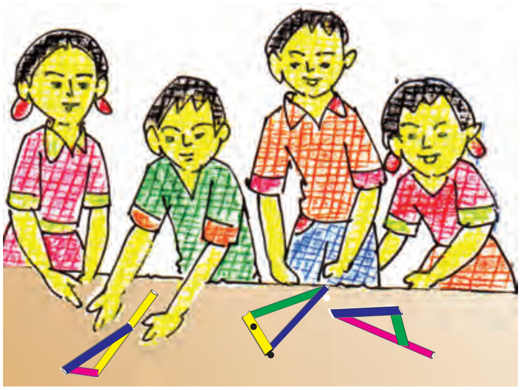
(x) $\dfrac{\frac{a^2}{x-a} + \frac{b^2}{x-b} + \frac{c^2}{x-c} + a + b + c}{\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c}}$

(xi) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \times \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

(xii) $\frac{b+c}{bc}(b+c-a) + \frac{c+a}{ca}(c+a-b) + \frac{a+b}{ab}(a+b-c)$

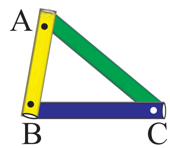
(xiii) $\frac{y^2+yz+z^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{z^2+zx+x^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{x^2+xy+y^2}{(z-x)(z-y)}$

16. ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর মধ্যে সম্পর্কের যাচাই



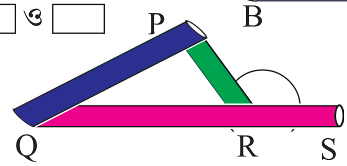
আজ আমি, তানিয়া, কুন্তল ও তুলিকা ঠিক করেছি নানান রঙের স্ট্র পিন দিয়ে আটকে নানান ধরনের ত্রিভুজের মতো তৈরি করার চেষ্টা করব।

আমি তিনটি স্ট্র দিয়ে তৈরি করলাম —



এই ABC চিত্রটি ত্রিভুজ আকারের দেখতে। এর তিনটি বাহু ______, ______ ও ______ এবং তিনটি কোণ ______, ______ ও ______

কিন্তু তুলিকা তিনটি স্ট্র পিন দিয়ে জুড়ে তৈরি করল —



দেখছি, PQR চিত্র ত্রিভুজ আকারের দেখতে। এর বাইরের একটি কোণ PRS তৈরি হয়েছে। এই কোণকে কী বলব?

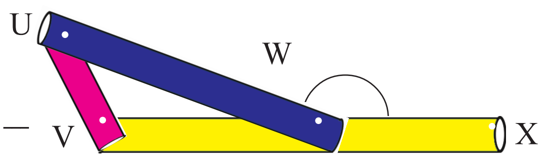
$\triangle$PQR -এর $\angle$ PQR, $\angle$ QPR ও $\angle$ PRQ কে অন্তঃস্থ কোণ এবং $\angle$ PRS কে বহিঃস্থ কোণ বলা হয়।

দেখছি, $\angle$PRQ, বহিঃস্থ $\angle$PRS -এর সন্নিহিত কোণ।

কিন্তু $\angle$RPQ ও $\angle$PQR কোণ দুটিকে কী বলব?

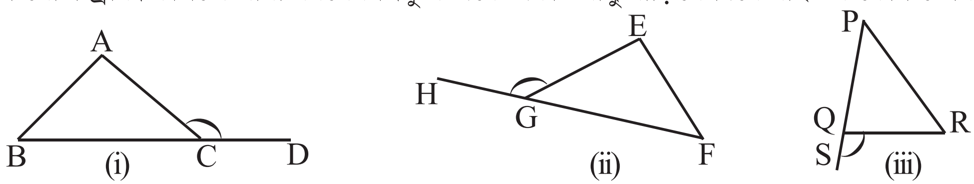
$\triangle$PQR -এর $\angle$ RPQ ও $\angle$ PQR কোণ দুটিকে $\angle$ PRS -এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ বলা হয়।

আমিও তুলিকার মত একটি ত্রিভুজ তৈরি করলাম —



$\triangle$UVW -এর বহিঃস্থ কোণ ______ ($\angle$UWX/$\angle$UWV). $\triangle$UVW এর বহিঃস্থ $\angle$UWX এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটি $\angle$UVW ও ______

কুন্তল মোটা ড্রয়িং কাগজে নানা ধরনের ত্রিভুজ এঁকে একটি বাহু বাড়িয়ে দিয়ে বহিঃস্থ কোণ তৈরি করল।



তানিয়া চাঁদার সাহায্যে প্রতিটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ ও অন্তঃস্থ বিপরীত কোণগুলি মেপে লিখল—

(i) নং চিত্রে ত্রিভুজটির বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD = \square$ ডিগ্রি। অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ $\angle ABC = \square$ ডিগ্রি ও $\angle BAC = \square$ ডিগ্রি ।

আমি এই ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ ও অন্তঃস্থ বিপরীত কোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক খুঁজব।

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle ABC + \angle BAC = \square$ ডিগ্রি $= \angle ACD$ (প্রায়)

ত্রিভুজ	বহিঃস্থ কোণ	অন্তঃস্থ বিপরীত কোণগুলি	সম্পর্ক
$\triangle EFG$	$\square = \square$ ডিগ্রি	$\square = \square$ ডিগ্রি $\square = \square$ ডিগ্রি	$\angle GEF + \angle EFG = \square$ (প্রায়)
$\triangle PQR$	$\angle RQS = \square$ ডিগ্রি	$\square = \square$ ডিগ্রি $\square = \square$ ডিগ্রি	$\square + \square = \angle RQS$ (প্রায়)

আমার ভাই প্রতিটি ত্রিভুজের তিনটি অন্তঃস্থ কোণই চাঁদার সাহায্যে মেপে লিখল। $\triangle ABC$ এর অন্তঃস্থ কোণ তিনটি $\square$, $\square$ ও $\square$; $\angle ABC = \square$ ডিগ্রি, $\angle BCA = \square$ ডিগ্রি এবং $\angle CAB = \square$ ডিগ্রি।

দেখছি, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \square$ ডিগ্রি

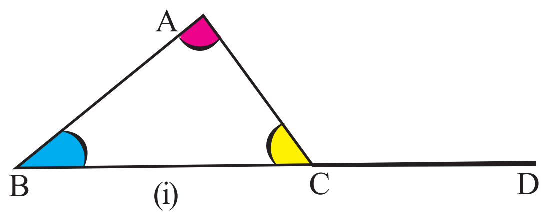
চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, (ii) ও (iii) নং চিত্রে প্রতিটি ত্রিভুজের কোণ তিনটির পরিমাপের সমষ্টি $\square$ ডিগ্রি।

হাতেকলমে **[নিজে করি)]**

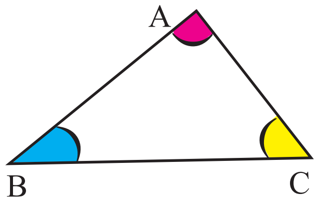
(i) প্রথমে মোটা ড্রয়িং পেপারে একই রকমের দুটি ত্রিভুজ ABC এঁকে ত্রিভুজাকারক্ষেত্র দুটি কেটে নিলাম।

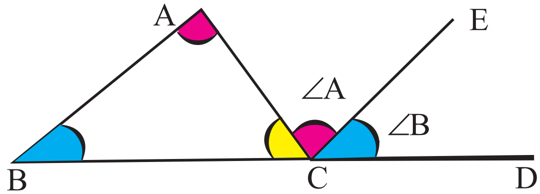
(ii) এই ত্রিভুজাকারক্ষেত্র দুটির প্রতিটির কোণ তিনটিতে ছবির মতো রং দিলাম।

(iii) এইরকম একটি ত্রিভুজাকারক্ষেত্র একটি পিচবোর্ডে আটকে দিলাম এবং BC বাহুকে D পর্যন্ত বাড়িয়ে দিলাম।



(iv) অন্য ত্রিভুজের $\angle A$ ও $\angle B$ কেটে নিলাম ও নীচের ছবির মতো প্রথম ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণে বসিয়ে কী পেলাম দেখি —

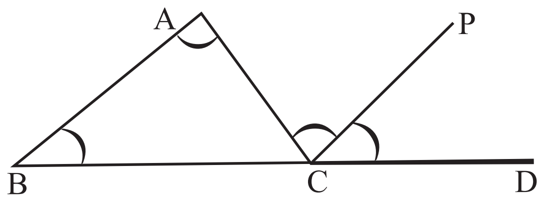




দেখছি, বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD = \angle A + \angle B = \angle BAC + \boxed{}$ ।

উপপাদ্য 7 গাণিতিক যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করা চেষ্টা করি যে—

ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় সেটির পরিমাপ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির পরিমাপের যোগফলের সমান।



প্রদত্ত (দেওয়া আছে) : ABC একটি যেকোনো ত্রিভুজ নিলাম এবং এর BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। এরফলে বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD$ এবং অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটি $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ উৎপন্ন হলো।

প্রামাণ্য : প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

অঙ্কন : $\triangle ABC$ -এর C বিন্দু দিয়ে AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ CP অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : AB।। CP এবং BD ছেদক

$\therefore$ $\angle PCD =$ অনুরূপ $\angle ABC$ — — — — — — (i)

আবার AB।। CP এবং AC ছেদক

$\therefore$ $\angle ACP =$ একান্তর $\angle BAC$ — — — — — — (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $\angle PCD + \angle ACP = \angle ABC + \angle BAC$

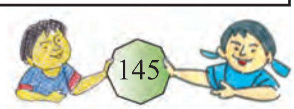
$\therefore$ $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

পেলাম, $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$

$\triangle ABC$ -এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় যে বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়েছে তার পরিমাপ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদুটি $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ -এর পরিমাপের সমষ্টির সমান। প্রমাণিত।

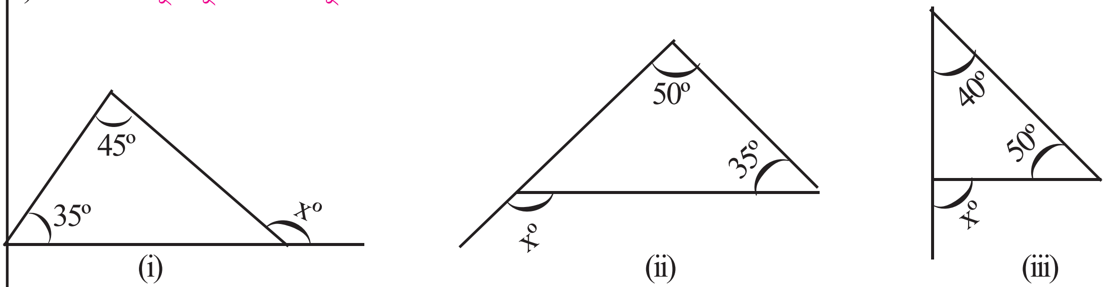
উপপাদ্যের অঙ্কনে কোথায় কোথায় স্বীকার্যগুলি কাজে লাগছে আমরা খেয়াল করব। এই উপপাদ্যে কোথায় কোন স্বীকার্য কাজে লেগেছে তা লিখি

তানিয়া PUT একটি ত্রিভুজ আঁকল এবং এর UT বাহুকে R বিন্দু পর্যন্ত বাড়িয়ে দিল। এরফলে একটি বহিঃস্থ কোণ $\boxed{}$ ও দুটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ $\boxed{}$ ও $\boxed{}$ উৎপন্ন হয়েছে। আমি যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে নিজে প্রমাণ করি যে, $\angle PTR = \angle PUT + \angle UPT$

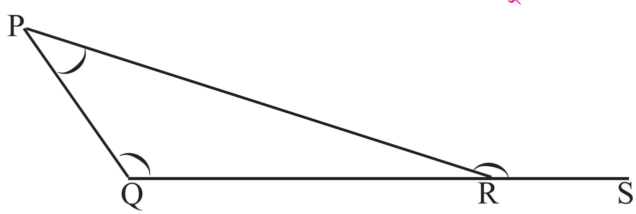


নিজে করি—16.1

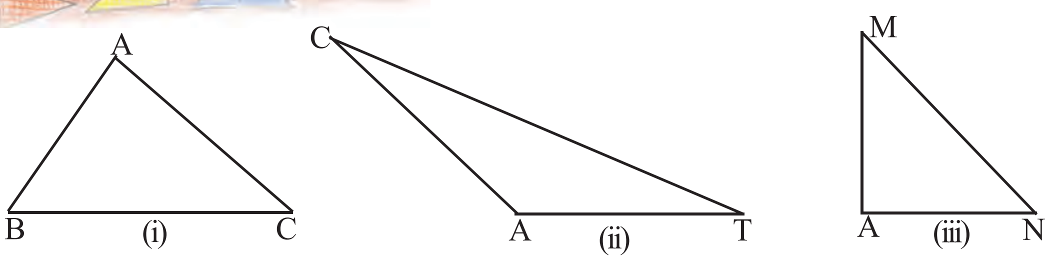
1) নীচের ত্রিভুজগুলির কোণগুলি দেখি ও প্রতিটির বহিঃস্থ কোণ x -এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি—



2) নীচের ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ ∠PRS ও এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সম্পর্ক লিখি—



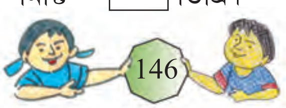
পল্লবী ও কুন্তল অনেকগুলি নানান আকারের ত্রিভুজ আঁকল।



চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি, △ABC -এর ∠BAC = ☐ ডিগ্রি, ∠ABC = ☐ ডিগ্রি এবং ∠ACB = ☐ ডিগ্রি। আবার ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = ☐ ডিগ্রি।

কুন্তল চাঁদা দিয়ে মেপে দেখল △ACT -এর ∠CAT = ☐ ডিগ্রি, ∠ACT = ☐ ডিগ্রি এবং ∠CTA = ☐ ডিগ্রি। আবার ∠ACT + ∠CAT + ∠CTA = ☐ ডিগ্রি।

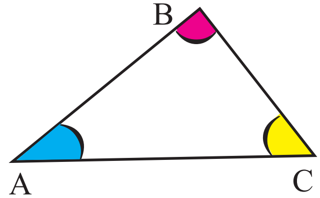
পল্লবী △AMN -এর তিনটি কোণ চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখল, △AMN -এর তিনটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি = ☐ ডিগ্রি।



ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর মধ্যে সম্পর্কের যাচাই

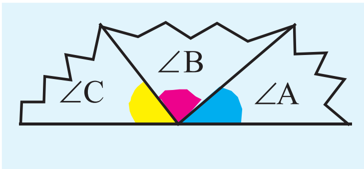
অধ্যায় : 16

হাতেকলমে



1) আমি মোটা আর্ট পেপারে ABC একটি ত্রিভুজ আঁকলাম।

2) এবার ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের প্রতিটি কোণ পাশের ছবির মতো রং করলাম।

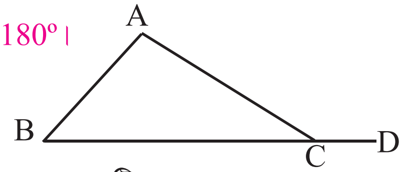


3) এই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের প্রতিটি কোণ কেটে নিয়ে পাশের ছবির মতো শীর্ষবিন্দুগুলি মিলিয়ে কী পেলাম দেখি—

হাতেকলমে দেখছি ত্রিভুজটির তিনটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি $\boxed{}$ ডিগ্রি।

উপপাদ্য 8 যুক্তি দিয়ে ধাপে ধাপে প্রমাণ করি যে—

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180°।



প্রদত্ত : $\triangle ABC$ একটি যেকোনো ত্রিভুজ।

প্রামাণ্য : প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$ এর তিনটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি 2 সমকোণের সমান।
অর্থাৎ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

অঙ্কন : $\triangle ABC$ -এর BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বাড়ালাম।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$ [$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণের পরিমাপ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদুটির পরিমাপের সমষ্টির সমান]

বা, $\angle ACD + \angle ACB = \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB$ [উভয় পাশে $\angle ACB$ যোগ করে পাই]

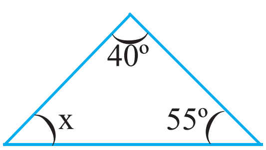
এখানে, $\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$ [$\because$ BD সরলরেখাংশের উপর C বিন্দুতে CA সরলরেখাংশ দণ্ডায়মান]

$\therefore$ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

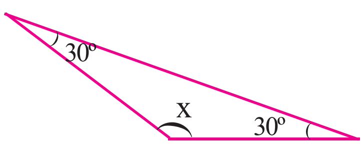
$\therefore$ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ বা, দুই সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি—16.2

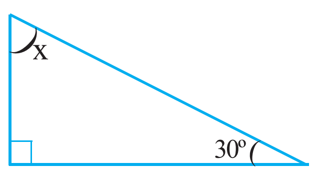
1) আমি নীচের ত্রিভুজগুলি দেখি ও অজানা কোণগুলির পরিমাপ কী হবে লেখার চেষ্টা করি।



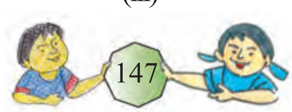
(i)



(ii)

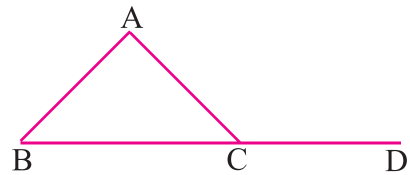


(iii)



প্রয়োগ: **1** চিত্রে, $\angle ACD = 114^\circ$ এবং $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$

$\triangle ABC$ -এর কোণগুলির মান কত হিসাব করি।



প্রমাণ : $\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$

বা, $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$

বা, $\angle ACB = 180^\circ - 114^\circ$

$\therefore$ $\angle ACB = 66^\circ$

$\triangle ABC$ -এর বহিঃকোণ $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

দেওয়া আছে $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$ বা, $\angle BAC = 2\angle ABC$

সুতরাং, $\angle ABC + 2\angle ABC = 114^\circ$

বা, $3\angle ABC = 114^\circ$

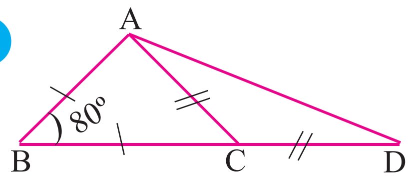
বা, $\angle ABC = \frac{114^\circ}{3}$

$\therefore$ $\angle ABC = 38^\circ$

$\therefore \angle BAC = 2 \times 38^\circ = 76^\circ, \angle ACB = 66^\circ$

সুতরাং $\angle ACB = 66^\circ, \angle ABC = 38^\circ, \angle BAC = 76^\circ$

প্রয়োগ: **2**



চিত্রে, $AB = BC, AC = CD$ এবং $\angle ABC = 80^\circ$

$\angle ADC$ এর পরিমাপ কত লিখি।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এর $AB = BC$; সুতরাং, $\angle ACB = \angle BAC$

বা, $\triangle ABC$ তে $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

বা, $\angle ACB + 80^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

বা, $2\angle ACB = 180^\circ - 80^\circ$

বা, $\angle ACB = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

$\triangle ADC$ -এর $AC = CD$ সুতরাং, $\angle ADC = \angle CAD$

$\triangle ADC$ এর বহিঃকোণ $\angle ACB = \angle ADC + \angle CAD$

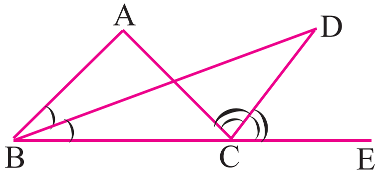
বা, $50^\circ = \angle CAD + \angle CAD$

বা, $2\angle CAD = 50^\circ$

বা, $\angle CAD = 25^\circ$

$\therefore$ $\angle ADC = 25^\circ$

প্রয়োগ: 3



ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং $\angle ACB$ এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ $\angle ACE$ এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

প্রদত্ত : $\triangle ABC$ এর $\angle ABC$ এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং $\angle ACB$ এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বা $\angle ACE$ এর সমদ্বিখণ্ডক D বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রামাণ্য : $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

প্রমাণ : $\triangle BDC$ তে বহিঃকোণ $\angle DCE = \angle DBC + \angle BDC$

বা, $2\angle DCE = 2\angle DBC + 2\angle BDC$

বা, $\angle ACE = \angle ABC + 2\angle BDC$ $\quad [\because \angle DCE = \frac{1}{2}\angle ACE$ এবং $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC]$

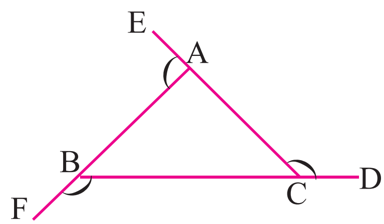
$\triangle ABC$ এর বহিঃকোণ $\angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$

বা, $\angle ABC + \angle BAC = \angle ABC + 2\angle BDC$

বা, $\angle BAC = 2\angle BDC$

$\therefore$ $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

প্রয়োগ: 4 প্রমাণ করি ত্রিভুজের বাহুগুলিকে একইক্রমে বর্ধিত করে যে তিনটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি চার সমকোণ।



প্রদত্ত : $\triangle ABC$ এর BC, CA এবং AB বাহুকে একইক্রমে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দু পর্যন্ত বাড়ালে তিনটি বহিঃকোণ $\angle ACD$, $\angle BAE$ ও $\angle CBF$ উৎপন্ন হলো।

প্রামাণ্য : $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 4$ সমকোণ

প্রমাণ : $\angle ACB + \angle ACD = 2$ সমকোণ

$\angle BAC + \angle BAE = 2$ সমকোণ

$\angle ABC + \angle CBF = 2$ সমকোণ

সুতরাং, $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ সমকোণ

$\triangle ABC$ এর $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 2$ সমকোণ

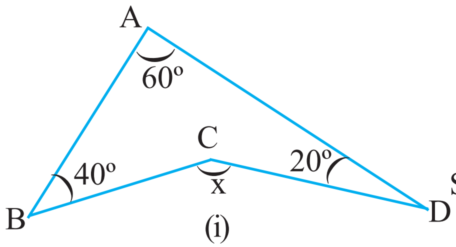
সুতরাং, 2 সমকোণ $+ \angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ সমকোণ

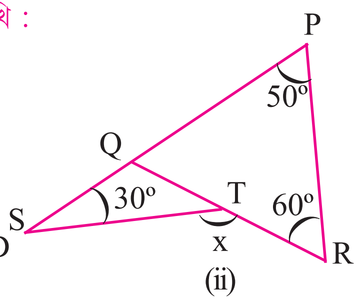
বা, $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 6$ সমকোণ $-$ 2 সমকোণ

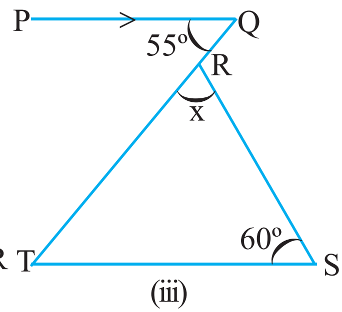
$\therefore$ $\angle ACD + \angle BAE + \angle CBF = 4$ সমকোণ

কষে দেখি — 16.1

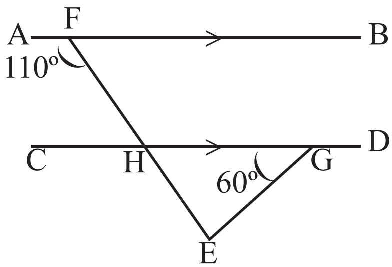
1. নীচের প্রতিক্ষেত্রে (x) এর মান লিখি :





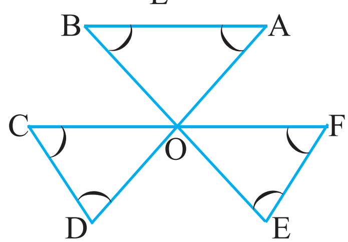


2.



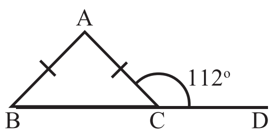
পাশের চিত্রে $\triangle$EHG এর কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

3.



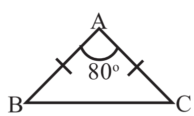
পাশের চিত্রে $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ এর পরিমাপ লিখি।

4.



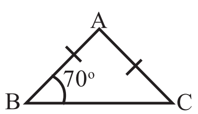
AB = AC হলে $\angle ABC$, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর পরিমাপ লিখি।

5.



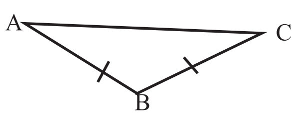
AB = AC হলে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর পরিমাপ লিখি।

6.

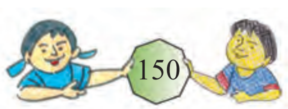


AB = AC হলে $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর পরিমাপ লিখি।

7.



AB = BC এবং $\angle BAC + \angle ACB = 50^\circ$; $\triangle$ ABC-এর কোণগুলির পরিমাপ লিখি।



8. $\triangle ABC$ এর অন্তঃস্থ একটি বিন্দু O; প্রমাণ করি যে $\angle BOC > \angle BAC$

9. প্রমাণ করি যে $\triangle ABC$-এর BC বাহুকে উভয়দিকে বাড়ালে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি 2 সমকোণের বেশি।

10. $\triangle ABC$ এর কৌনিক বিন্দু A ও C দিয়ে যথাক্রমে BC ও BA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ D বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\angle ABC = \angle ADC$

11. $\triangle ABC$ এর $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

12. $\triangle ABC$ এর $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$

13. $\triangle ABC$ -এর $\angle ACB$ -এর বহিঃ সমদ্বিখণ্ডক A বিন্দুদিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $\angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$

14. প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষকোণ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণ ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেক।

15. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির একটি কোণ শীর্ষকোণের দ্বিগুণ। ত্রিভুজটির কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

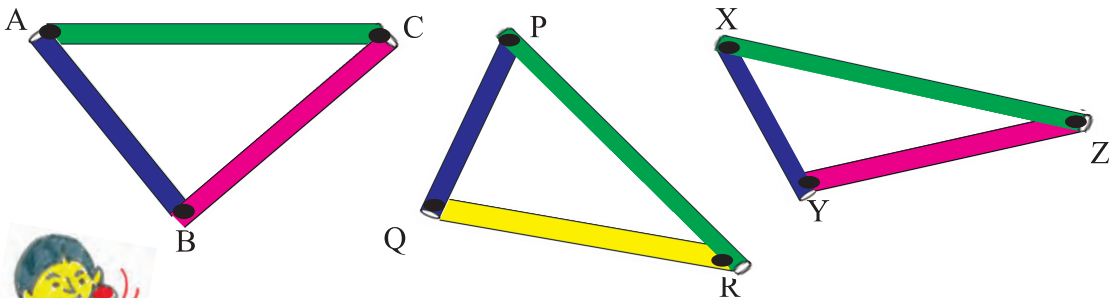
16. $\triangle ABC$ -এর $\angle BAC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = 30^\circ$; প্রমাণ করি যে, $AB = \frac{1}{2} BC$.

17. $\triangle XYZ$ -এর $\angle XYZ = 90^\circ$ এবং $XY = \frac{1}{2}XZ$; প্রমাণ করি যে, $\angle YXZ = 60^\circ$

18. প্রমাণ করি যে, সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের পরিমাপ 60°

19. ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা পরস্পর BC বাহুর বাইরে E বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\angle AEC = 1$ সমকোণ।

দীপ্তার্ক ও পূজা নানান রঙের ও নানান আকারের ত্রিভুজ তৈরি করেছে যাদের যেকোনো দুটি বাহু অসমান। তারা করল—



আমি প্রতিটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যগুলি মাপি এবং কোনটি ছোটো ও কোনটি বড়ো তুলনা করি।

মেপে দেখছি , Δ ABC এর, AC বাহুর দৈর্ঘ্য > AB বাহুর দৈর্ঘ্য

Δ PQR এর, PR বাহুর দৈর্ঘ্য > QR বাহুর দৈর্ঘ্য

Δ XYZ এর, XZ বাহুর দৈর্ঘ্য > $\square$ বাহুর দৈর্ঘ্য [নিজে বসাই]

আমি চাঁদার সাহায্যে প্রতিটি ত্রিভুজের কোণগুলি মাপি ও তুলনা করি।

মেপে দেখছি , Δ ABC এর $\angle ABC$ $\square$ $\angle ACB$ [>/< বসাই]

Δ PQR এর $\angle PQR$ $\square$ $\angle QPR$ [>/< বসাই]

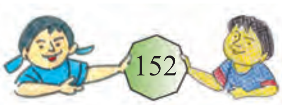
Δ XYZ এর $\angle XYZ$ > $\square$ $\angle YXZ$ / $\angle YZX$ বসাই]

কিন্তু দেখছি, Δ ABC এর, AC বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ABC$ এবং AB বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ACB$

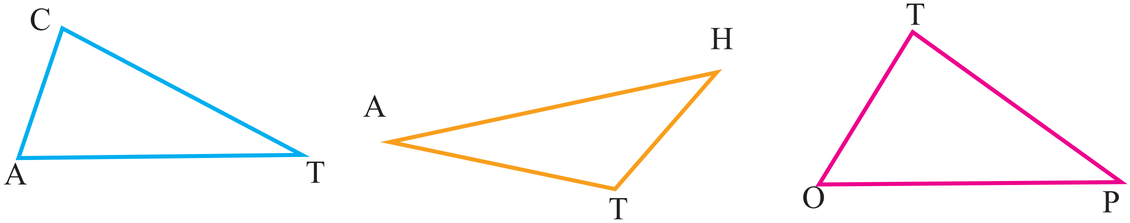
আবার, Δ PQR এর, PR বাহুর বিপরীত কোণ $\square$ এবং QR বাহুর বিপরীত কোণ $\square$

ও Δ XYZ এর, XZ বাহুর বিপরীত কোণ $\square$ এবং $\square$ বাহুর বিপরীত কোণ $\square$

চাঁদার সাহায্যে মেপে পেলাম প্রতিটি ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ অপেক্ষা $\square$ [বৃহত্তর/ক্ষুদ্রতর]।

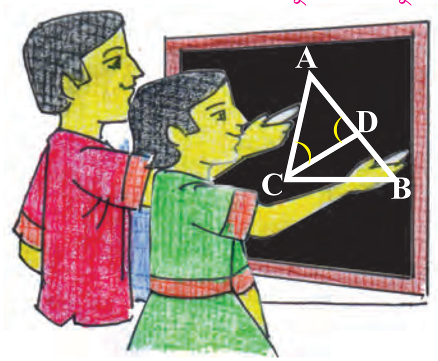


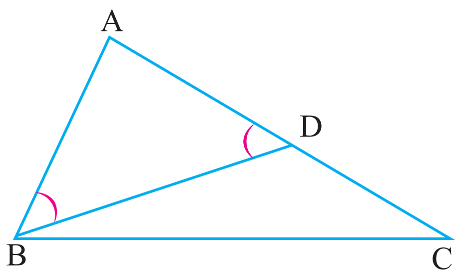
পল্লবী ও সিরাজ অনেকগুলি ত্রিভুজ আঁকল যাদের যেকোনো দুটি বাহু পরস্পর অসমান।



আমি স্কেল ও চাঁদা দিয়ে ত্রিভুজগুলির বাহু ও কোণগুলি মেপে তুলনা করে দেখছি— বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ অপেক্ষা ☐ (বৃহত্তর/ক্ষুদ্রতর)। **[নিজে করি]**

উপপাদ্য — 9 প্রমাণ করি যে — একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর অসমান হলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।





প্রদত্ত : Δ ABC একটি যেকোনো ত্রিভুজ যার AC বাহুর দৈর্ঘ্য AB বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
অর্থাৎ $AC > AB$

প্রামাণ্য : AC বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ AB বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ অপেক্ষা বৃহত্তর
অর্থাৎ $\angle ABC > \angle ACB$

অঙ্কন : AC বাহু থেকে AB বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে AD অংশ কেটে নিলাম। B ও D বিন্দু দুটি যোগ করলাম।

প্রমাণ : Δ ABD - এর $AB = AD$ (অঙ্কন অনুসারে)

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ (ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে তাদের বিপরীত কোণগুলির পরিমাপ সমান হবে)

ΔDCB এর বহিঃস্থ $\angle ADB = \angle DCB + \angle DBC$ (ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণের পরিমাপ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের পরিমাপের সমষ্টির সমান)

অর্থাৎ, $\angle ADB > \angle DCB$ বা $\angle ACB$

কিন্তু, $\angle ADB = \angle ABD$ সুতরাং, $\angle ABD > \angle ACB$

$\angle ABD$, $\angle ABC$ এর অংশ।

সুতরাং $\angle ABC > \angle ABD$

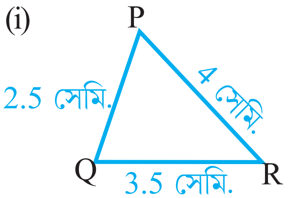
আবার, $\angle ABD > \angle ACB$ $\therefore \angle ABC > \angle ACB$ **(প্রমাণিত)**

নিষাদ Δ PQR একটি ত্রিভুজ আঁকল যার PQ বাহুর দৈর্ঘ্য >QR বাহুর দৈর্ঘ্য। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $\angle PRQ > \angle QPR$ ।**[নিজে করি]**

নিজে করি—16.3

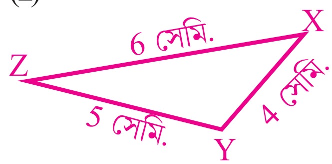
1) নীচের ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের মাপ দেখি ও কোণগুলি তুলনা করি,

(i)



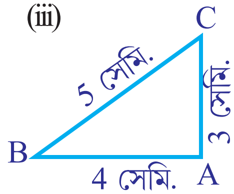
$\angle P > \square$ $(\angle R / \angle Q)$

(ii)



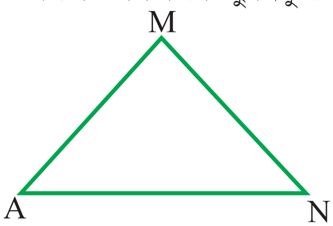
$\angle X > \square$ $(\angle Y / \angle Z)$

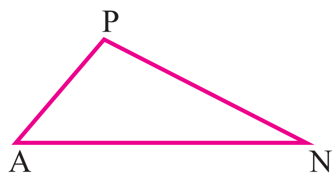
(iii)

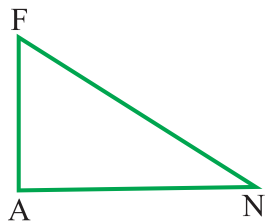


$\angle C > \square$ $(\angle A / \angle B)$

পল্লবী ও সিরাজ কিছু ত্রিভুজ আঁকল যাদের দুটি কোণ অসমান।







আমি চাঁদার সাহায্যে কোণগুলি মাপি ও প্রতিটি ত্রিভুজের কোণগুলি তুলনা করি।

মেপে দেখছি, ΔMAN এ $\angle AMN > \square$

ΔPAN এ $\angle PAN > \square$ $[\angle PNA / \angle APN]$

ΔFAN এ $\angle FNA < \square$ $[\angle FAN / \angle AFN]$

আমি উপরের প্রতিটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যগুলি স্কেল দিয়ে মাপি ও তুলনা করি।

মেপে দেখছি, ΔMAN এ MN $\square$ AN [> / < বসাই]

ΔPAN এ PN > $\square$ [PA / AN বসাই]

ΔFAN এ AN < $\square$ [FA / FN বসাই]

কিন্তু দেখছি , ΔMAN এর $\angle AMN$ এর বিপরীত বাহু $\square$

এবং $\angle MAN$ এর বিপরীত বাহু $\square$

ΔPAN এর $\angle PAN$ এর বিপরীত বাহু $\square$

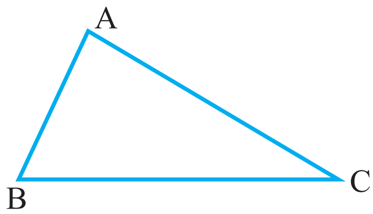
এবং $\angle PNA$ এর বিপরীত বাহু $\square$

ΔFAN এর $\angle FNA$ এর বিপরীত বাহু $\square$

এবং $\angle FAN$ এর বিপরীত বাহু $\square$

চাঁদা ও স্কেল দিয়ে মেপে পেলাম, প্রতিটি ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা $\square$ (বৃহত্তর / ক্ষুদ্রতর)।

উপপাদ্য-10 প্রমাণ করি যে — একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ পরস্পর অসমান হলে বৃহত্তর কোণটির বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর কোণটির বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।



প্রদত্ত: Δ ABC একটি যেকোনো ত্রিভুজ যার $\angle ABC$ এর পরিমাপ $\angle ACB$ এর পরিমাপ অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ $\angle ABC > \angle ACB$

প্রামাণ্য : $\angle ABC$ এর বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্যর পরিমাপ $\angle ACB$ এর বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্যর পরিমাপ অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ $AC > AB$

প্রমাণ : AC বাহুর দৈর্ঘ্য যদি AB বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর না হয় তবে হয়

(i) $AC = AB$ অথবা (ii) $AC < AB$ হবে।

(i) $AC = AB$ হলে,

$\angle ABC = \angle ACB$ হবে। [ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে তাদের বিপরীত কোণের পরিমাপও সমান হয়]

আবার, (ii) $AC < AB$ হলে ,

$\angle ABC < \angle ACB$ হবে। [ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যর পরিমাপ অসমান হলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাপ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়]

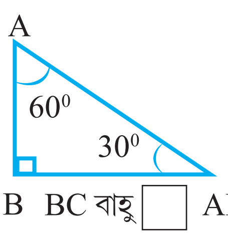
$\therefore$ (i) ও (ii) উভয় শর্তই হতে পারে না। কারণ দেওয়া আছে, $\angle ABC > \angle ACB$

$\therefore$ $AC > AB$ [প্রমাণিত]

একটি ত্রিভুজ XYZ আঁকলাম যার $\angle XYZ > \angle XZY$, যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি $XZ > XY$

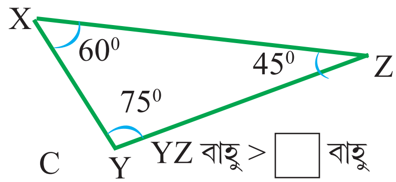
[নিজে করি]

নিজে করি— 16.4 নীচের ত্রিভুজগুলির কোণগুলির পরিমাপ দেখি ও বাহুগুলির কোনটি ছোটো ও কোনটি বড়ো তুলনা করে লিখি—



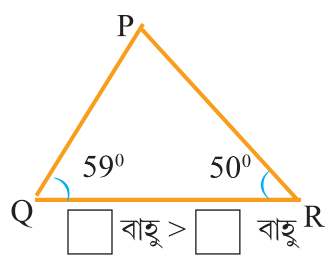
BC বাহু $\square$ AB বাহু

[> / < বসাই]



YZ বাহু > $\square$ বাহু

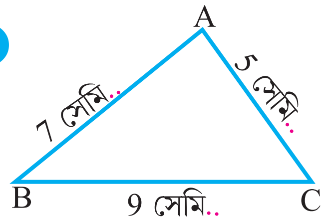
[XZ /XY বসাই]



$\square$ বাহু > $\square$ বাহু

[দুটি বাহু বসাই]

প্রয়োগ : 5



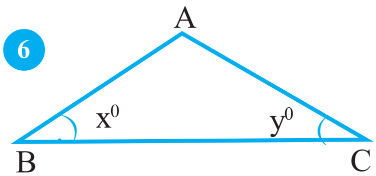
ত্রিভুজের কোণগুলি মানের অধঃক্রমে সাজাই।

প্রমাণ : ΔABC তে, $BC > AB$ $\therefore$ $\angle BAC > \angle ACB$

আবার , ΔABC তে, $AB > AC$ $\therefore$ $\angle ACB > \angle ABC$

সুতরাং : $\angle BAC > \angle ACB > \angle ABC$

প্রয়োগ: 6



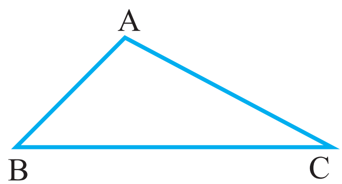
চিত্রে : $AC > AB$ হলে নীচের কোণটি সঠিক লিখি

(i) $x = 2y$ (ii) $x = y$ (iii) $x = \frac{3}{5}y$

প্রমাণ : ΔABC তে, $AC > AB$ $\therefore$ $\angle ABC > \angle ACB$

সুতরাং $x > y$ $\therefore$ (i) $x = 2y$ সঠিক

প্রয়োগ : 7

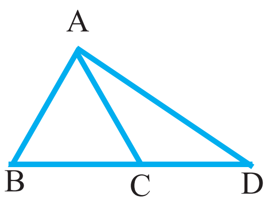


চিত্রে : $\angle BAC > \angle ABC$ হলে AC এবং BC বাহুর সম্পর্ক লিখি।

প্রমাণ : ΔABC - তে, $\angle BAC > \angle ABC$

$\therefore$ $BC > AC$

প্রয়োগ : 8



ABC সমবাহু ত্রিভুজে বর্ধিত BC বাহুর উপর D যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, $\angle BAD > \angle ADB$

প্রদত্ত : ABC সমবাহু ত্রিভুজে বর্ধিত BC বাহুর উপর D যেকোন একটি বিন্দু। A,D বিন্দুদ্বয় যুক্ত করা হলো।

প্রামাণ্য : $\angle BAD > \angle ADB$

প্রমাণ : ABC সমবাহু ত্রিভুজ। $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^0$

ΔACD তে, বহিঃস্থ $\angle ACB > \angle ADC$ $\therefore$ $\angle ADC < 60^0$

আবার, ΔABD তে, $\angle BAD > 60^0$ সুতরাং $\angle BAD > \angle ADC$

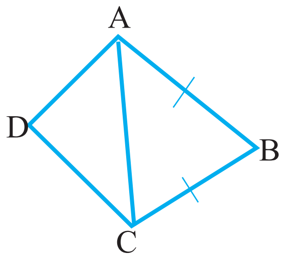
$\therefore$ $\angle BAD > \angle ADB$

বিকল্প প্রমাণ : ABC সমবাহু ত্রিভুজ। $BC = AB$

$BD = BC + CD$ $\therefore$ $BD > AB$ ($\because$ $BC = AB$)

ΔABD তে, $BD > AB$ $\therefore$ $\angle BAD > \angle ADB$

প্রয়োগ : **9** ABCD চতুর্ভুজে $BC = BA$ এবং $CD > AD$; প্রমাণ করি যে, $\angle BAD > \angle BCD$



প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজে $BC = BA$ এবং $CD > AD$

প্রামাণ্য : $\angle BAD > \angle BCD$

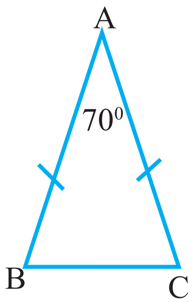
অঙ্কন : A ও C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : ΔABC তে, $AB = BC$; $\therefore \angle BAC = \angle ACB$

ΔACD—তে, $CD > AD$; $\therefore \angle DAC > \angle DCA$

সুতরাং $\angle DAC + \angle BAC > \angle DCA + \angle ACB$ অর্থাৎ $\angle BAD > \angle BCD$

প্রয়োগ : **10** চিত্রে $AB = AC$, $\angle BAC = 70^0$; প্রমাণ করি যে, অসমান বাহুটি ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু।



প্রমাণ : ΔABC - তে, $AB = AC$; $\therefore \angle ABC = \angle ACB$

আবার, $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^0$

বা, $\angle ABC + \angle ACB + 70^0 = 180^0$

বা, $2\angle ABC = 180^0 - 70^0$

বা, $2\angle ABC = 110^0$

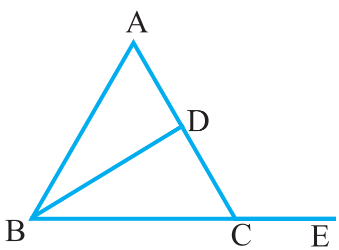
$\therefore \angle ABC = 55^0$ সুতরাং, $\angle ACB = 55^0$

ΔABC - তে, $\angle BAC > \angle ABC$ $\therefore BC > AC$

আবার, $AB = AC$ $\therefore BC > AB$

সুতরাং ΔABC-এর অসমান বাহু BC বৃহত্তম বাহু।

প্রয়োগ : **11** ABC সমবাহু ত্রিভুজের AC বাহুর উপর D একটি বিন্দু এবং বর্ধিত BC বাহুর উপর E অপর একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, $BE > BD$



প্রদত্ত : ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AC বাহুর উপর D একটি বিন্দু এবং বর্ধিত BC বাহুর উপর E একটি বিন্দু ।

প্রামাণ্য : $BE > BD$

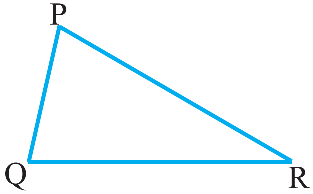
প্রমাণ : ABD ত্রিভুজে, বহিঃকোণ $\angle BDC > \angle BAC$

আবার, $\angle BAC = \angle ACB$ $\therefore \angle BDC > \angle ACB$ অর্থাৎ

$\angle BDC > \angle DCB$ সুতরাং $BC > BD$ ।

আবার, $BE = BC + CE$ $\therefore BE > BC$ সুতরাং, $BE > BD$.

কষে দেখি — 16.2

1. 

চিত্রে $\angle QPR > \angle PQR$
PR এবং QR বাহুর সম্পর্ক লিখি।

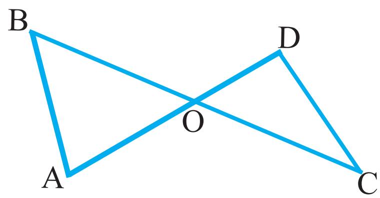
2. ΔABC তে, $AC > AB$. AC বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যে $\angle ADB = \angle ABD$;
প্রমাণ করি যে, $\angle ABC > \angle ACB$।

3. ABC ত্রিভুজে $AB > AC$; $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $BD > CD$।

4. ABC ত্রিভুজে AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং $AC > AB$; প্রমাণ করি যে,
(i) $\angle CAD > \angle BAD$ (ii) $DC > BD$ ।

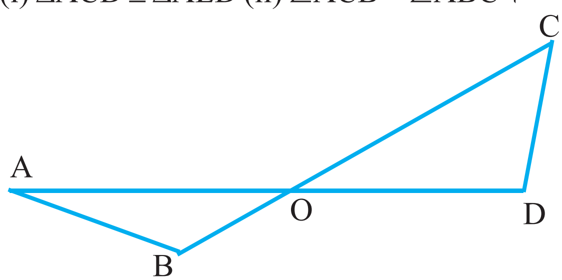
5. একটি চতুর্ভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহু দুটি বিপরীত। প্রমাণ করি যে, বৃহত্তম বাহুর সন্নিহিত একটি কোণ তার বিপরীত কোণের চেয়ে ছোটো।

6. চিত্রে, $AB < OB$ এবং $CD > OD$; প্রমাণ করি যে,
$\angle BAO > \angle OCD$ ।



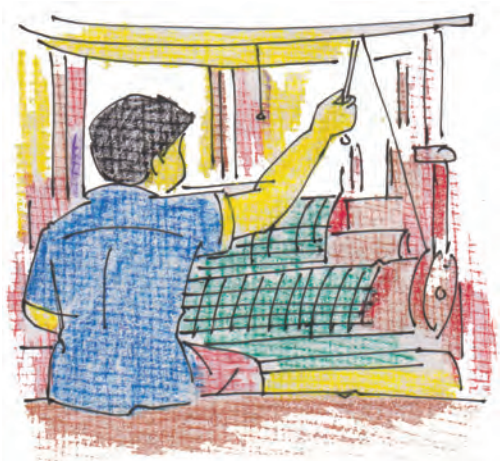
7. ΔPQR -এর $PQ > PR$; PQ বাহু থেকে PR বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে PS সরলরেখাংশ কেটে নিলাম। R এবং S বিন্দু দুটি যুক্ত করলাম। প্রমাণ করি যে,
(i) $\angle PSR = \frac{1}{2}(\angle PQR + \angle PRQ)$ (ii) $\angle QRS = \frac{1}{2}(\angle PRQ - \angle PQR)$ ।

8. ABC ত্রিভুজে, $AB > AC$; $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। AB বাহু থেকে AC -এর দৈর্ঘ্যের সমান করে AE সরলরেখাংশ কেটে নিলাম। D,E যুক্ত করলাম। প্রমাণ করি যে,
(i) $\Delta ACD \cong \Delta AED$ (ii) $\angle ACB > \angle ABC$ ।

9. 

চিত্রে, $AB = CD$, $\angle OCD > \angle COD$ এবং
$\angle OAB < \angle AOB$
প্রমাণ করি যে, $OB < OD$

10. প্রমাণ করি যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তম বাহু।
11. প্রমাণ করি যে, স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তম।
12. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডদ্বয় I বিন্দুতে মিলিত হয়। যদি $AB > AC$ হয়, প্রমাণ করি যে, $IB > IC$।



17. সময় ও কার্য

শান্তিপুরের মনসুরদের তাঁত কারখানায় 18 টি তাঁত আছে। কিন্তু গত সপ্তাহে 3 টি তাঁত বন্ধ ছিল। তাই গত সপ্তাহে 165টি ধুতি-শাড়ি বোনা হয়েছে। এ সপ্তাহে সবগুলি তাঁত চালু আছে।

1 সমানুপাতিক পদ্ধতিতে হিসাব করে দেখি এ সপ্তাহে মনসুরদের তাঁত কারখানায় কতগুলি ধুতি ও শাড়ি বোনা হবে।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো—

সময় (দিন)	তাঁতের সংখ্যা (টি)	ধুতি-শাড়ির সংখ্যা (টি)
7	18-3=15	165
7	18	?

সময় নির্দিষ্ট থাকলে তাঁতের সংখ্যা বাড়লে বা কমলে ধুতি-শাড়ির সংখ্যা ☐ বা ☐ (বাড়বে/কমবে)।

∴ তাঁতের সংখ্যার সাথে ধুতি-শাড়ির সংখ্যা সরল সম্পর্কে আছে।

∴ সরল সমানুপাতটি

15:18 :: 165 : ? (নির্ণেয় ধুতি-শাড়ির সংখ্যা)

∴ নির্ণেয় ধুতি-শাড়ির সংখ্যা = $\dfrac{\overset{11}{\cancel{165}} \times 18}{\cancel{15}}$ টি = 198 টি

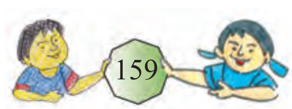
তাই এ সপ্তাহে সবগুলি তাঁত চালু থাকায় 198 টি ধুতি-শাড়ি তৈরি হবে।

আমি অন্যভাবে ঐকিক নিয়মে হিসাব করি—

15 টি তাঁত তৈরি করে 165 টি ধুতি ও শাড়ি

1 টি তাঁত তৈরি করে $\dfrac{165}{15}$ টি ধুতি ও শাড়ি

18 টি তাঁত তৈরি করে $\dfrac{\overset{11}{\cancel{165}} \times 18}{\cancel{15}}$ টি =198 টি ধুতি ও শাড়ি



2 যদি সবগুলি তাঁত চালু থাকে তবে 594 টি ধুতি-শাড়ি তৈরি করতে কত দিন সময় লাগবে হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো—

তাঁতের সংখ্যা (টি)	ধুতি-শাড়ির সংখ্যা (টি)	সময় (দিন)
18	198	1সপ্তাহ =7 দিন
18	594	?

তাঁতের সংখ্যা নির্দিষ্ট থাকলে ধুতি-শাড়ির সংখ্যা বাড়লে বা কমলে প্রয়োজনীয় সময় $\boxed{}$ বা $\boxed{}$ (বাড়বে/কমবে)

∴ সরল সমানুপাতটি হলো,

198:594:: 7: ? (নির্ণেয় সময়)

∴ নির্ণেয় সময় = $\frac{\overset{3}{\cancel{594}} \times 18}{\cancel{198}}$ দিন = 21 দিন

ঐকিক নিয়মে পাই, 198 টি ধুতি-শাড়ি বোনে 7 দিনে

1 টি ধুতি-শাড়ি বোনে $\frac{7}{198}$ দিনে

594 টি ধুতি-শাড়ি বোনে $\frac{7}{\cancel{198}} \times \overset{3}{\cancel{594}}$ দিনে = 21 দিনে

3 সবগুলি তাঁত অর্থাৎ 18টি তাঁত চালু থাকলে 21 দিনে 594 টি ধুতি-শাড়ি বোনা যায়। কিন্তু 594 টি ধুতি-শাড়ি 14 দিনে বুনতে চাইলে কতগুলি তাঁত বেশি চালাতে হবে হিসাব করে লিখি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো—

ধুতি-শাড়ির সংখ্যা (টি)	সময় (দিন)	তাঁতের সংখ্যা (টি)
594	21	18
594	14	?

ধুতি-শাড়ির সংখ্যা নির্দিষ্ট থাকলে সময় বাড়লে তাঁতের সংখ্যা $\boxed{}$ (বাড়বে/কমবে) এবং সময় কমলে তাঁতের সংখ্যা $\boxed{}$ (বাড়বে/কমবে)

∴ সময়ের সাথে তাঁতের সংখ্যা ব্যস্ত সম্পর্কে আছে।

∴ ব্যস্ত সমানুপাতটি হলো,

21:14 :: ? (নির্ণেয় তাঁতের সংখ্যা) :18 ∴ 14:21 :: 18:? (নির্ণেয় তাঁতের সংখ্যা)

∴ নির্ণেয় তাঁতের সংখ্যা = $\frac{\overset{3}{\cancel{21}} \times \overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{14}\ \cancel{2}}$ টি = 27 টি

∴ 21 দিনে 594 টি ধুতি-শাড়ি বুনতে 27 টি তাঁত চালাতে হবে অর্থাৎ (27 – 18) টি = 9 টি বেশি তাঁত চালু করতে হবে।