

131

324(XD)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.

J28746

[Turn over

324(XD)

- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R = \{(1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3,2)\}.$$

यह सम्बन्ध R

- स्वतुल्य तथा सममित है, किन्तु संक्रामक नहीं
- स्वतुल्य तथा संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं
- सममित तथा संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य नहीं
- एक तुल्यता सम्बन्ध है।

ख) $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन

$f: R \rightarrow R$ है

- i) एकैक और आच्छादक
- ii) बहु-एक और आच्छादक
- iii) एकैक, किन्तु आच्छादक नहीं
- iv) न तो एकैक और न ही आच्छादक।

1

ग) समाकलन $\int \sin 3x dx$ का मान है

- i) $\frac{1}{3} \cos 3x + c$
- ii) $\frac{1}{3} \sin 3x + c$
- iii) $-\frac{1}{3} \cos 3x + c$
- iv) $-\cos 3x + c$.

1

घ) अवकल समीकरण

$$2x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3e^x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 9y^3 = x^4 \text{ की}$$

घात है

- i) 1
- ii) 2
- iii) 3
- iv) 4.

1

ङ) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है.

- i) 0
- ii) 1
- iii) 2
- iv) 3.

1

1. Attempt all the parts :

a) The relation R is defined in the set $\{1, 2, 3, 4\}$ as follows :

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}.$$

This relation R is

- i) reflexive and symmetric, but not transitive
- ii) reflexive and transitive, but not symmetric
- iii) symmetric and transitive, but not reflexive
- iv) an equivalence relation.

1

b) The function $f: R \rightarrow R$, defined by

$$f(x) = x^2, \text{ is}$$

- i) one-one and onto
- ii) many-one and onto
- iii) one-one, but not onto
- iv) neither one-one nor onto.

1

c) The value of the integral $\int \sin 3x dx$ is

i) $\frac{1}{3} \cos 3x + c$

ii) $\frac{1}{3} \sin 3x + c$

iii) $-\frac{1}{3} \cos 3x + c$

iv) $-\cos 3x + c$. 1

d) The degree of the differential equation

$$2x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3e^x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 9y^3 = x^4 \text{ is}$$

i) 1 ii) 2

iii) 3 iv) 4. 1

e) The value of

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j}) \text{ is}$$

i) 0 ii) 1

iii) 2 iv) 3. 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f: X \rightarrow Y$ और $g: Y \rightarrow Z$ एकैक हैं, तो $gof: X \rightarrow Z$ भी एकैक है। 1

ख) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

1

ग) दिखाइए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर सतत है। 1

घ) एक थैले में 5 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छया थैले से निकाली जाती है। निकाली गयी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

ङ) x तथा y ज्ञात कीजिए यदि

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad 1$$

2. Attempt all the parts :

a) Prove that if $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ are one-one, then $gof: X \rightarrow Z$ is also one-one. 1

b) Find the principal value of $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. 1

c) Show that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. 1

- d) There are 5 red and 3 black balls in a bag. A ball is taken out of the bag at random. Find the probability that the ball taken out is black. 1

- e) Determine x and y if

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad 1$$

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि $f(x) = 8x^3$ और $g(x) = x^{1/3}$, तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। 2

- ख) सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनायें हैं, E तो और F' भी स्वतंत्र होंगी। 2

- ग) स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करके वक्रों के कुल $y = ae^{3x} + be^{-2x}$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

- घ) x , y और z -अक्षों की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 2

3. Attempt all the parts :

- a) If $f(x) = 8x^3$ and $g(x) = x^{1/3}$, find gof and fog . 2

- b) Prove that if E and F are two independent events, then E and F' are also independent. 2

- c) Find the differential equation representing the family of curves $y = ae^{3x} + be^{-2x}$ by eliminating the arbitrary constants a and b . 2

- d) Find the direction-cosines of x , y and z -axes. 2

निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि $a * b = a + 2b$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $*: R \times R \rightarrow R$ क्रम विनिमेय नहीं है। 2

- ख) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

- ग) यदि $y = \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}. \quad 2$$

- घ) दर्शाइए कि बिन्दु $A(a, b + c)$, $B(b, c + a)$ तथा $C(c, a + b)$ संरेख हैं। 2

4. Attempt all the parts :

- a) Prove that the binary operation
 $\ast : R \times R \rightarrow R$ defined by
 $a \ast b = a + 2b$ is not commutative. 2
- b) Find the projection of the vector
 $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on the vector
 $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. 2
- c) If $y = \sin^{-1} x$, prove that
 $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$. 2
- d) Show that the points $A(a, b + c)$,
 $B(b, c + a)$ and $C(c, a + b)$ are
 collinear. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तो सिद्ध कीजिए कि
 $f(x) = x^2 + 4$ द्वारा परिभाषित फलन
 $f : R^+ \rightarrow (4, \infty)$ व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम $f^{-1} : (4, \infty) \rightarrow R^+$ निम्नवत् है :
 $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$. 5

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad 5$$

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2. \quad 5$$

घ) अवकल समीकरण

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0 \text{ को हल कीजिए।} \quad 5$$

ङ) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

च) क्रमशः 3, 4, 5 परिमाण के तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार हैं कि इनमें से प्रत्येक शेष दो सदिशों के योगफल के लम्बवत् है, तो $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए। 5

5. Attempt any five parts of the following :

- a) If R^+ is the set of non-negative real numbers, prove that the function $f : R^+ \rightarrow (4, \infty)$ defined by $f(x) = x^2 + 4$ is invertible and the inverse of f , $f^{-1} : (4, \infty) \rightarrow R^+$, is as follows :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}. \quad 5$$

b) Prove that

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad 5$$

c) Prove that

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2. \quad 5$$

d) Solve the differential equation
 $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$ 5

e) Find the equation of the normal to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at the point $(1, 1)$. 5

f) Three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ of magnitudes 3, 4, 5 respectively are such that each of them is perpendicular to the sum of the rest two. Find the magnitude of $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध

$$\text{कीजिए कि } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix},$$

जहाँ $n \in N$

5

ख) फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ के लिए अन्तराल $[1, 4]$ में माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 5

ग) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं $A(3, 4, 1)$ और $B(5, 1, 6)$ को मिलाने वाली रेखा xy -समतल को काटती है। 5

घ) अवकल समीकरण
 $ydx - (x + 2y^2)dy = 0$ को हल कीजिए। 5

ङ) छः सिक्के उछाले जाते हैं। केवल 2 के चित (heads) आने की प्रायिकता क्या है ? 5

च) सिद्ध कीजिए कि एक दिये गये वृत्त के अन्तर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। 5

6. Attempt any five parts of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, prove that

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \text{ where}$$

$n \in N.$

5

- b) Verify mean value theorem for the function $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ in the interval $[1, 4]$. 5
- c) Find the coordinates of the point where the line joining the points $A(3, 4, 1)$ and $B(5, 1, 6)$ cuts xy -plane. 5
- d) Solve the differential equation $ydx - (x + 2y^2)dy = 0$. 5
- e) 6 coins are tossed. What is the probability that only two of them show heads? 5
- f) Prove that among all the rectangles inscribed in a circle the area of square is maximum. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात

कीजिए।

8

ख) आव्यूह विधि से निम्नलिखित रेखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

$$2x - 3y + 5z = 11,$$

$$3x + 2y - 4z = -5,$$

$$x + y - 2z = -3.$$

8

7. Attempt any one part of the following :

a) Find the inverse of the

matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

8

b) Solve by matrix method the following system of linear equations :

$$2x - 3y + 5z = 11,$$

$$3x + 2y - 4z = -5,$$

$$x + y - 2z = -3.$$

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$

8

ख) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$ एवं x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8

Attempt any one part of the following :

a) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab} \quad 8$$

b) Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 32$, the line $y = x$ and the x-axis. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित व्यवरोधों

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

के अन्तर्गत $Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) रेखाओं

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

9. Attempt any one part of the following :

a) Find the minimum value of $Z = 200x + 500y$ subject to the following constraints :

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0. \quad 8$$

b) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

and

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).$$

8

324(XD)-1,25,000