स्थूल पदार्थों के गुण
(MECHANICAL PROPERTIES OF SOLIDS)

10 CHAPTER

10.1 प्रस्तावना (Introduction)

हम जानते हैं कि प्रकृति का प्रत्येक पदार्थ अणुओं से मिलकर बना है। अंतराणविक बलों के आधार पर पदार्थ की तीनों अवस्थाओं ठोस, द्रव तथा गैस तथा उनके भौतिक गुणों की व्याख्या व्यवस्थित ढंग से की जा सकती है। पदार्थ की ठोस अवस्था में अणु मुक्त रूप से घूम नहीं सकते बल्कि अणुओं की साम्य स्थितियाँ एवं कम्पन की दिशाएँ सभी निश्चित हो जाती हैं। अत: ठोस का एक निश्चित आयतन व निश्चित रूप होता है। उचित बल लगाकर यद्यपि इनके अणुओं के बीच की दूरी में अल्प परिवर्तन किया जा सकता है लेकिन ये परिवर्तन अस्थाई होते हैं तथा ठोस के अणु बल हटा लेने पर पुन: अपनी मूल अवस्था में आने लगते हैं। इस गुण को प्रत्यास्थता कहते हैं।

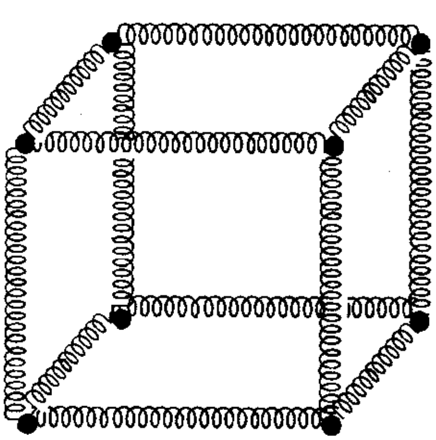
10.2 प्रत्यास्थता (Elasticity)

जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाया जाता है तब वस्तु के रूप (Shape) अथवा आकार (Size) में परिवर्तन हो जाता है अर्थात् वस्तु विकृत (deform) हो जाती है। इस बल को हटा लेने पर वस्तु पुनः अपनी प्रारम्भिक अवस्था प्राप्त कर लेती है। वस्तु का यह गुण प्रत्यास्थता कहलाता है।

उदाहरण–यदि स्टील के चम्मच को बाह्य बल लगाकर हल्का सा मोड़ा जाये तब बाह्य बल हटाने पर चम्मच पुनः अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाता है।

आण्विक मॉडल से प्रत्यास्थता की व्याख्या

प्रत्येक पदार्थ अणुओं से मिलकर बना होता है। ठोस के अणु अन्तरआण्विक बलों के कारण अपनी निश्चित स्थितियों में रहते हैं। ठोस पदार्थ के दो अणुओं के मध्य लगने वाला बल (वैद्युत बल) शून्य होता है



चित्र 10.1

तो उन अणुओं के बीच की दूरी को साम्य दूरी r_0 कहते हैं। इसका मान 2Å से 5Å के मध्य होता है। जब अणुओं के मध्य की दूरी r साम्य दूरी से अधिक होती है तब अणुओं के मध्य आकर्षण बल कार्य करता है जबकि अणुओं के मध्य की दूरी r साम्य दूरी से कम होती है तब अणुओं के मध्य प्रतिकर्षण बल कार्य करता है। इस प्रकार ठोस पदार्थ के अणु अन्तराण्विक बलों द्वारा इस प्रकार व्यवस्थित रहते हैं जैसे कि उन्हें स्प्रिंगों द्वारा जोड़ा गया है। चित्र में प्रदर्शित मॉडल में पदार्थ के अणु परस्पर काल्पनिक स्प्रिंगों द्वारा जुड़े हुए हैं। इस मॉडल के आधार पर जब पदार्थ को बाह्य विरूपक बल द्वारा खींचा या दबाया जाता है तब अणुओं के मध्य अन्तराण्विक बल इस प्रकार कार्य करते हैं कि बल हटा लेने पर पदार्थ अपनी साम्य स्थिति में वापस आ जाता है। यही पदार्थ का प्रत्यास्थता का गुण है।

महत्वपूर्ण–1. काल्पनिक स्प्रिंगों के बल नियतांक को ही **अन्तरापरमाणुक बल नियतांक** k कहते हैं जिसका मान $k = Yr_0$ होता है।
जहां Y = पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक
r_0 = अणुओं के बीच की साम्य दूरी।

2. यदि ठोस पर आरोपित बाह्य बल अधिक परिमाण का होता है तथा अणुओं के बीच की दूरी इतनी बढ़ जाती है कि उनके मध्य लगने वाला आकर्षण बल नगण्य हो जाए, तब बाह्य बल हटाने पर भी ठोस अपनी पूर्वावस्था पर वापस नहीं आ पाता है। ठोस के इस गुण को सुघट्टयता (plasticity) कहते हैं।
इस प्रकार सुघट्टयता किसी पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वह बाह्य बल द्वारा होने वाले परिवर्तन का विरोध नहीं करता है, बल्कि उसमें स्थायी परिवर्तन हो जाता है। जबकि भंगुरता पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण बाह्य बल लगाने पर वह टूट जाता है। उदाहरण के लिए, कांच के टुकड़े पर बल लगाने पर वह टुकड़ों में टूट जाता है।

प्रत्यास्थता से सम्बन्धित परिभाषाएँ (Definitions related to Elasticity)

(1) **विरूपक बल**–किसी वस्तु पर आरोपित वह बाह्य बल जिसके कारण वस्तु के आकार या आकृति या दोनों में परिवर्तन हो जाता है। विरूपक बल कहलाता है।

(2) **प्रत्यास्थता**–वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वस्तु बाह्य बल का विरोध करती है तथा बाह्य बल हटा लेने के पश्चात् अपनी प्रारम्भिक अवस्था (आकार व आकृति) फिर से ग्रहण कर लेती है। प्रत्यास्थता कहलाती है।

(3) **पूर्णतः प्रत्यास्थ वस्तु**–वह वस्तु जो बाह्य बल हटाने के पश्चात् पूर्णतः अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाती है। पूर्णतः प्रत्यास्थ वस्तु कहलाती है। प्रकृति में ऐसा कोई पदार्थ नहीं है जो पूर्णतः प्रत्यास्थ हो। एक निश्चित सीमा तक के बल के लिए क्वार्ट्ज, फॉस्फर ब्रॉंज (ताँबे की एक मिश्र धातु जिसमें 4% से 10% टिन तथा 0.05% से 1% फॉस्फोरस हो) तथा हाथी दाँत (Ivory) को लगभग पूर्णतः प्रत्यास्थ माना जा सकता है।

(4) **प्लास्टिक वस्तु**–वे वस्तुएँ जो बाह्य बल हटा लेने के पश्चात् भी विकृत अवस्था में रहती है। प्लास्टिक अथवा सुघट्टय वस्तुएँ

कहलाती है। जैसे– मोम का टुकड़ा, गीली मिट्टी, प्लास्टिसीन आदि।

(5) **प्रत्यास्थता सीमा**–विरूपक बल की वह अधिकतम सीमा जिसके आगे बल बढ़ाने पर वस्तु अपनी प्रारम्भिक अवस्था में नहीं लौटती है प्रत्यास्थता सीमा कहलाती है। भिन्न–भिन्न पदार्थों के लिए प्रत्यास्थता की सीमा भिन्न–भिन्न होती है। प्रत्यास्थता सीमा में वस्तु में प्रत्यास्थता का गुण विद्यमान रहता है।

(6) **प्रत्यास्थता श्रांति**–किसी वस्तु पर आरोपित बल बार–बार परिवर्तित करने पर वह कुछ समय के लिए प्रत्यास्थता का गुण खो देती है। इस प्रकार प्रत्यास्थता के गुण का अस्थायी ह्रास प्रत्यास्थता श्रांति कहलाता है।

इस कारण ही

(i) लम्बी अवधि तक प्रयोग में आने पर पुल असुरक्षित घोषित कर दिये जाते हैं।

(ii) लम्बे समय तक प्रयोग में आने पर स्प्रिंग तुला गलत पाठ्यांक देने लगती है।

(iii) बार–बार मोड़ने पर धात्विक तार टूट जाता है।

(7) **प्रत्यानयन बल**–जब किसी वस्तु पर बाह्य बल (विरुपक बल) आरोपित किया जाता है तो वस्तु विकृत हो जाती है परन्तु उसी समय प्रत्यास्थता गुण के कारण वस्तु में बाह्य बल के बराबर परन्तु विपरीत दिशा में आन्तरिक बल उत्पन्न हो जाते हैं जिन्हें प्रत्यानयन बल कहते हैं। जो वस्तु को प्रारंभिक अवस्था में लाने का प्रयास करते हैं।

संतुलन की अवस्था में प्रत्यानयन बल का मान बाह्य बल के ठीक बराबर परन्तु विपरीत होता है।

10.3 प्रतिबल तथा विकृति (Stress and Strain)

प्रतिबल–साम्यावस्था में वस्तु के एकांक अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रति–क्रियात्मक बल (प्रत्यानयन बल) को प्रतिबल कहते हैं।

प्रतिबल वस्तु के अनुप्रस्थ काट के एकांक क्षेत्रफल पर लग रहे बल के बराबर होता है।

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{वस्तु पर आरोपित बाह्य बल (F)}}{\text{वस्तु का क्षेत्रफल जिस पर बल कार्य करता है (A)}}$$

प्रतिबल का मात्रक न्यूटन/मीटर^2 तथा विमाएँ $[M^1L^{-1}T^{-2}]$ होती है।

प्रतिबल के प्रकार

प्रतिबल तीन प्रकार के होते हैं–

(i) अनुदैर्ध्य प्रतिबल (ii) आयतन प्रतिबल

(iii) अपरूपण (स्पर्शीय) प्रतिबल

(i) **अनुदैर्ध्य प्रतिबल**–जब प्रतिबल वस्तु की सतह के लम्ब रूप होता है तो उसे अनुदैर्ध्य प्रतिबल कहते हैं। वस्तु के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत प्रत्यानयन बल को अनुदैर्ध्य प्रतिबल कहते हैं।

यह मात्र ठोसों में पाया जाता है। जब वस्तु की लम्बाई, चौड़ाई या ऊँचाई में से कोई एक विमा अन्य दो से अधिक हो, तब उत्पन्न प्रतिबल, अनुदैर्ध्य प्रतिबल होता है। यह दो प्रकार का होता है–

(a) तनन प्रतिबल तथा (b) संपीड़न प्रतिबल

(a) **तनन प्रतिबल**–वस्तु की लम्बाई में वृद्धि होने से उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल को तनन प्रतिबल कहते हैं।

वस्तु की तनित अवस्था में एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत प्रत्यानयन बल को तनन प्रतिबल कहते हैं।

(b) **संपीड़न प्रतिबल**–वस्तु की लम्बाई में कमी होने पर उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल को संपीड़न प्रतिबल कहते हैं।

वस्तु की संपीड़न अवस्था में एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत प्रत्यानयन बल को संपीड़न प्रतिबल कहते हैं।

(ii) **आयतन प्रतिबल (जलीय प्रतिबल)**– जब अधिक दाब के किसी द्रव के अंदर एक ठोस गोला रखा जाता है तो वह सभी ओर से समान रूप से संपीड़ित हो जाता है। द्रव द्वारा लगाया गया बल पिण्ड के पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर अभिलम्बवत् दिशा में कार्य करता है, ऐसी स्थिति में पिण्ड को जलीय संपीड़न की स्थिति में कहा जाता है। इससे ज्यामितीय आकृति में बिना परिवर्तन के ही आयतन में कमी आ जाती है। पिंड के अन्दर आंतरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है जो द्रव द्वारा लगाए गए बलों के बराबर तथा विरोधी होते हैं इस स्थिति में पिण्ड के एकांक क्षेत्रफल पर आंतरिक प्रत्यानयन बल को जलीय प्रतिबल या आयतन प्रतिबल कहते हैं।

यह ठोस, द्रव तथा गैस तीनों ही अवस्थाओं में पाया जाता है। इस अवस्था में आयतन में परिवर्तन होता है परन्तु उसके रूप या आकृति में नहीं। यदि बल समान रूप से नहीं लगाया जाए तो आकृत्ति में भी परिवर्तन हो जायेगा।

(iii) **अपरुपण या स्पर्शीय प्रतिबल**–जब किसी वस्तु पर बाह्यबल (विरुपक बल) आधार को स्थिर रखते हुए उसकी सतह के समान्तर लगाया जाता है तो समान्तर फलकों के बीच सापेक्ष विस्थापन हो जाता है। प्रत्यारोपित स्पर्शी बलों के कारण एकांक क्षेत्रफल पर उत्पन्न प्रत्यानयन बल को अपरुपण या स्पर्शीय प्रतिबल कहते हैं।

इसके कारण किसी वस्तु की आकृत्ति में परिवर्तन या ऐंठन उत्पन्न होता है तथा आयतन स्थिर रहता है।

दाब तथा प्रतिबल में अन्तर

क्र.सं.	दाब	प्रतिबल
1.	यह सदैव क्षेत्रफल के लम्बवत् होता है।	प्रतिबल लम्बवत् या स्पर्शरेखीय हो सकता है।
2.	यह सदैव सम्पीड़क प्रकृति का होता है।	यह सम्पीड़क या तनन प्रकृति का हो सकता है।

विकृति–बाह्य बलों के कारण किसी वस्तु की प्रति एकांक विमा में परिवर्तन को विकृति कहते हैं अर्थात्

$$\text{विकृति} = \frac{\text{वस्तु की एक विमा में परिवर्तन}}{\text{वस्तु की प्रारम्भिक विमा}}$$

विकृति एक शुद्ध निष्पत्ति है। इसका कोई मात्रक नहीं होता है। यह एक विमाहीन राशि है।

विकृति तीन प्रकार की होती है–

(i) अनुदैर्ध्य विकृति (ii) आयतन विकृति (iii) अपरूपण विकृति

(i) अनुदैर्ध्य विकृति–बाह्य बल के प्रभाव में किसी वस्तु की एकांक लम्बाई में उत्पन्न परिवर्तन को अनुदैर्ध्य विकृति कहते हैं।

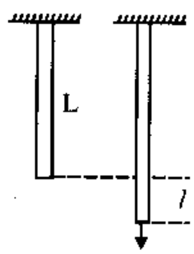
$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\text{वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{वस्तु की प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

$$= \frac{l}{L}$$

विरूपक बल की लम्बवत् दिशा में उत्पन्न रैखिक विकृति, पार्श्व विकृति कहलाती है।

उदाहरण के लिए, तार को उसकी लम्बाई के अनुदिश खींचने पर उसकी लम्बाई तो बढ़ती है परन्तु उसका व्यास घटता है। लगाए गए बल की दिशा के लम्बवत् एकांक लम्बाई में होने वाले परिवर्तन को पार्श्विक विकृति (lateral strain) कहते हैं अर्थात्

$$\text{पार्श्विक विकृति} = \frac{\text{बल की दिशा के लम्बवत् लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{बल की दिशा के लम्बवत् प्रारंभिक लम्बाई}}$$



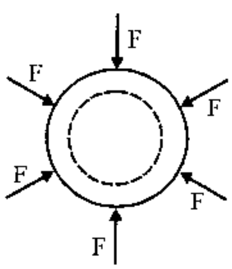
चित्र 10.2

(ii) आयतन विकृति–बाह्य बल के प्रभाव में किसी वस्तु के एकांक आयतन में उत्पन्न परिवर्तन को आयतन विकृति कहते हैं।

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{वस्तु के आयतन में परिवर्तन}}{\text{वस्तु का प्रारम्भिक आयतन}} = \frac{-\Delta V}{V}$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह आयतन में कमी को व्यक्त करता है।

ठोस तथा द्रवों में आयतन विकृति बहुत कम होती है परन्तु गैसों में बहुत अधिक होती है।

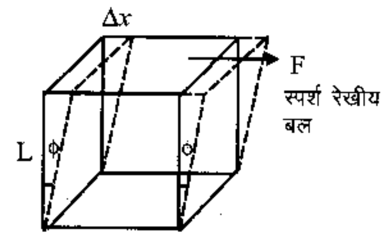


चित्र 10.3

(iii) अपरूपण विकृति–यदि किसी वस्तु की सतह के समान्तर बल लगाया जाए। जिसके कारण वस्तु की आकृति (रुप) में परिवर्तन हो। (आयतन या लम्बाई में परिवर्तन न हो) तो इस विकृति को अपरूपण विकृति कहते हैं। इसे समान्तर फलकों के सापेक्ष विस्थापन Δx तथा प्रारंभिक लम्बाई L के अनुपात से परिभाषित करते हैं।

$$\text{अपरूपण विकृति} \qquad \phi = \frac{\Delta x}{L} \cong \tan\phi$$

$$\text{या अपरूपण विकृति} = \frac{\text{दो विपरीत पृष्ठों का आपेक्षिक विस्थापन}}{\text{पृष्ठों के बीच की दूरी}}$$



चित्र 10.4

10.4 हुक का नियम (Hooke's Law)

इस नियमानुसार प्रत्यास्थता की सीमा में प्रतिबल उत्पन्न विकृति के समानुपाती होता है अर्थात्

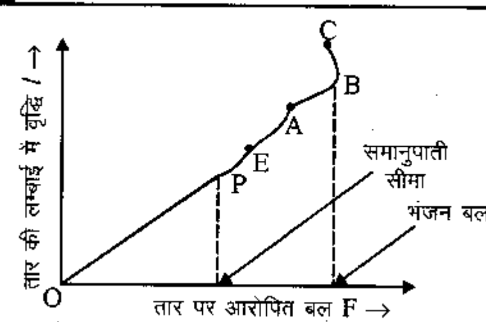
$$\text{प्रतिबल} \propto \text{विकृति}$$

$$\text{प्रतिबल} = \text{नियतांक (E)} \times \text{विकृति}$$

$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{नियतांक (E)}$$

नियतांक E को प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

10.5 प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-Strain Curve)

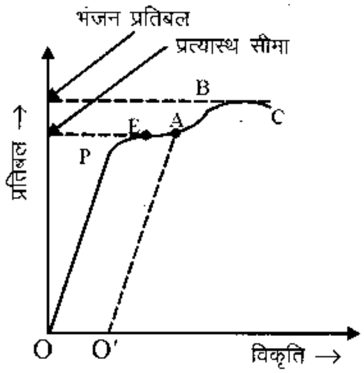


OPE → प्रत्यास्थ क्षेत्र

EABC → प्लास्टिक क्षेत्र

(a)

किसी तार पर आरोपित बल के अन्तर्गत तार के व्यवहार का अध्ययन करने के लिए एकसमान अनुप्रस्थकाट के धातु के एक तार को किसी दृढ़ आधार से लटकाकर उसके मुक्त सिरे पर आरोपित बल (भार) को धीरे–धीरे बढ़ाते जाते हैं तब तार की लम्बाई भी बढ़ती जाती है। तार पर आरोपित बल तथा उसकी लम्बाई में हुई संगत वृद्धि के मध्य ग्राफ बनाने के लिए, बल को X-अक्ष पर तथा वृद्धि को Y-अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं चित्र (a) परन्तु सामान्यतया तार के व्यवहार का अध्ययन तार में उत्पन्न विकृति तथा प्रतिबल के मध्य खींचे गये ग्राफ द्वारा ही करते हैं। इस स्थिति में विकृति को X-अक्ष पर तथा संगत प्रतिबल को Y-अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं (चित्र (b)।



OP → समानुपाती सीमा
OPE → प्रत्यास्थ क्षेत्र
EABC → प्लास्टिक क्षेत्र

(b)

दोनों ग्राफों में अक्षों पर प्रदर्शित चर परस्पर बदले हुए हैं। तार की लम्बाई में वृद्धि l को तार की प्रारंभिक लम्बाई L से भाग देकर विकृति तथा तार पर आरोपित बल को तार के अनुप्रस्थ काटक्षेत्र से भाग देकर प्रतिबल का मान प्राप्त किया जा सकता है। इन दोनों वक्रों की प्रवृत्तियां समान हैं। विकृति–प्रतिबल वक्र से स्पष्ट है कि–

(i) विकृति के अल्प मान (<0.01) के लिए वक्र का प्रारंभिक भाग OP एक सरल रेखा है। अतः प्रतिबल तथा विकृति का अनुपात नियत है। इस भाग में हुक के नियम का पालन होता है। बिन्दु P पर प्रतिबल के मान को समानुपाती सीमा कहते हैं।

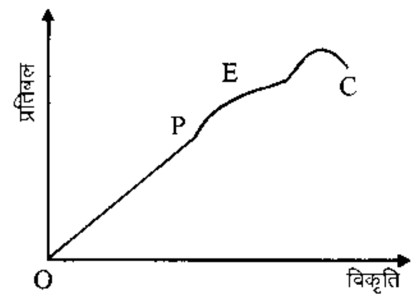
(ii) विकृति में कुछ वृद्धि होने पर अर्थात् भाग PE के वक्र होने के कारण प्रतिबल, विकृति के समानुपाती नहीं है तथा इनका अनुपात क्रमशः घटता जाता है। परन्तु बल को हटा लेने पर तार अपनी प्रारंभिक लम्बाई को प्राप्त कर लेता है। तार का यह व्यवहार बिन्दु E तक रहता है। बिन्दु E पर प्रतिबल के मान को प्रत्यास्थता सीमा (Elastic limit) तथा बिन्दु E को पराभव बिन्दु (Yield point) कहते हैं तथा संगत प्रतिबल को द्रव्य का पराभव सामर्थ्य (S_y) कहते हैं। प्रत्यास्थता सीमा, समानुपाती सीमा के समीप ही होती है। वक्र का भाग OPE तार के पदार्थ का प्रत्यास्थ व्यवहार प्रदर्शित करता है। इस भाग को प्रत्यास्थ क्षेत्र कहते हैं। इस स्थिति में तार पर लटके भार को हटा लेने पर वक्र EPO के अनुदिश पुनः अनुरेखित हो जाता है।

(iii) प्रत्यास्थता सीमा E के बाहर तार को खींचने पर भाग EA में विकृति बहुत तेजी से बढ़ती है। बिन्दु A पर बल को हटा लेने पर तार अपनी प्रारंभिक लम्बाई में नहीं लौटता है, बल्कि उसकी लम्बाई में कुछ स्थायी विकृति उत्पन्न हो जाती है। इस स्थिति में तार पर लटके भार को हटा लेने पर वक्र AEPO के अनुदिश पुनः अनुरेखित नहीं होता है बल्कि बिन्दुवत् रेखा AO' के अनुदिश अनुरेखित होता है। शून्य प्रतिबल के संगत बिन्दु O' तार में उत्पन्न स्थायी विकृति OO' को व्यक्त करता है। तब यह कहा जाता है कि द्रव्य में स्थायी विरुपण हो गया है। ऐसे विरुपण को प्लास्टिक विरुपण कहते है।

(iv) तार पर आरोपित बल को और आगे धीरे–धीरे बढ़ाने पर भी तार की लम्बाई में वृद्धि बहुत तेजी से होती है। (भाग AB)। बिन्दु B पर प्रतिबल का मान अधिकतम होता है। बिन्दु B पर पहुंचने के बाद विकृति बढ़ती रहती है जबकि तार पर से बल हटा लिया जाये। BC भाग में तार का पदार्थ एक श्यान तरल की तरह बहने लगता है। बिन्दु B पर तार पतला होना प्रारंभ कर देता है तथा इसका अनुप्रस्थकाट एकसमान नहीं रहता है। अब यदि तार पर लगे बल (लटके भार) को कम भी कर दिया जाये तो भी तार पतला होता रहता है तथा एक बिन्दु C तक पहुंचते–पहुंचते टूट जाता है। बिन्दु C को विभंजन बिन्दु (Fracture point) कहते हैं। भाग EABC तार के पदार्थ का प्लास्टिक व्यवहार प्रदर्शित करता है, इसे प्लास्टिक क्षेत्र कहते हैं। ग्राफ पर बिन्दु B द्रव्य की चरम तनन सामर्थ्य (S_u) है।

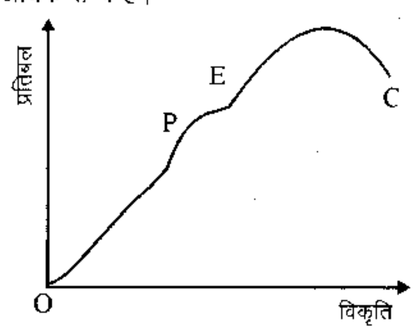
विभिन्न पदार्थों के लिए प्रतिबल–विकृति वक्र

(i) **भंगुर (Brittle) पदार्थ**–इन पदार्थों के लिए बिन्दु E व C के मध्य प्लास्टिक क्षेत्र बहुत छोटा होता है। ये प्रत्यास्थता की सीमा पार करते ही टूट जाते हैं। उदाहरण: कांच, उच्च कार्बन स्टील आदि।



(c)

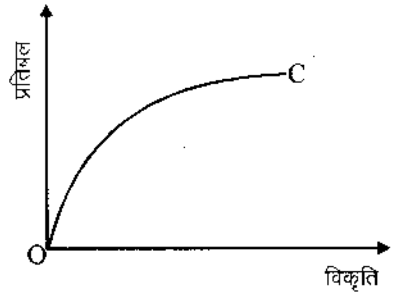
(ii) **तन्य (Ductile) पदार्थ**–इन पदार्थों की प्लास्टिक परास अधिक होती है। ये आसानी से किसी भी आकार में परिवर्तित किये जा सकते हैं व इनके पतले तार भी खींचे जा सकते हैं। उदाहरण, सीसा, तांबा, चांदी, प्लेटिनम, क्वार्ट्ज आदि इनमें से प्लेटिनम सबसे अधिक तन्य है।



(d)

(iii) **प्रत्यास्थ बहुलक पदार्थ (Elastomers)**–इन पदार्थों के लिए प्रत्यास्थता की सीमा में प्रतिबल–विकृति वक्र सरल रेखा नहीं होता। आरोपित प्रतिबल की तुलना में विकृति अधिक होती हैं। इन पदार्थों की प्लास्टिक परास शून्य होती है व भंजन बिन्दु प्रत्यास्थता सीमा के समीप होता है। ऐसे पदार्थ प्रत्यास्थालक (elastomers) कहलाते हैं।

उदाहरण–रबर

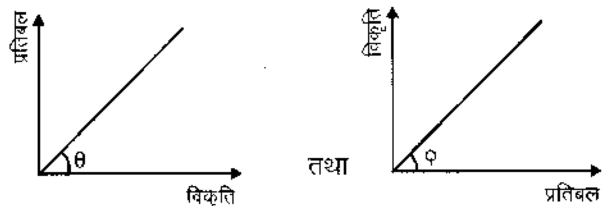


चित्र 10.5 (e)

10.6 प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity)

प्रत्यास्थता सीमा के अन्तर्गत प्रतिबल तथा विकृति के अनुपात को पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

* प्रत्यास्थता सीमा में प्रतिबल–विकृति आरेख एक सीधी रेखा प्राप्त होता है जिसका ढाल प्रत्यास्थता गुणांक को व्यक्त करता है।



ढाल $\tan\theta$ = प्रत्यास्थता गुणांक E   ढाल $\tan\phi = \frac{1}{\text{प्रत्यास्थता गुणांक E}}$

चित्र 10.6

प्रत्यास्थता गुणांक E का मात्रक $\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^2}$

तथा विमाएँ $[M^1 L^{-1} T^{-2}]$ होती है।

प्रत्यास्थता गुणांक की निर्भरता

1. इसका मान पिण्ड के पदार्थ की प्रकृति तथा उसे विकृत करने की विधा पर निर्भर करता है।
2. इसका मान पिण्ड के ताप पर निर्भर करता है।
3. इसका मान पिण्ड की विमाओं (जैसे लम्बाई, आयतन) पर निर्भर करता है।
4. इसका मान प्रतिबल तथा विकृति पर निर्भर नहीं करता है।

प्रत्यास्थता गुणांक के प्रकार

1. यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Y)
2. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (K)
3. अपरूपण या दृढ़ता गुणांक (η)

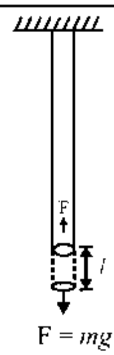
10.6.1 यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Y) (Young's Modulus of Elasticity)

प्रत्यास्थता सीमा में अनुदैर्ध्य प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

$$= \frac{F/A}{l/L}$$



चित्र 10.7

$$Y = \frac{FL}{Al} \quad ...(1)$$

यदि तार बेलनाकार है, तब

$$A = \pi r^2, F = Mg$$

$$Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l} \quad ...(2)$$

यदि $\pi r^2 = 1$ तथा $l = L$ हो तो

$$Y = Mg$$

अर्थात् यंग का प्रत्यास्थता गुणांक उस बल के बराबर होता है जिसके लगाने पर एकांक अनुप्रस्थ काट क्षेत्र वाले तार की लम्बाई दुगुनी हो जाए। (जबकि हुक नियम लागू हो।)

व्यवहार में, उपर्युक्त परिभाषा संभव नहीं है, क्योंकि तार की लम्बाई में 1% वृद्धि होने पर ही प्रायः प्रत्यास्थता सीमा का उल्लंघन हो जाता है।

यंग प्रत्यास्थता गुणांक का मान केवल ठोसों के लिए ही प्राप्त किया जा सकता है **क्योंकि द्रव तथा गैस की अपनी कोई लम्बाई नहीं होती है।** साधारणतः यह समझा जाता है कि रबर, स्टील से अधिक प्रत्यास्थ है परन्तु वैज्ञानिक दृष्टि से सत्य इसके विपरीत है अर्थात् स्टील, रबर से अधिक प्रत्यास्थ है। स्टील के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक का मान रबर के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक से अधिक होता है।

विभिन्न पदार्थों की प्रत्यास्थताओं की तुलना करने के लिए पदार्थों की ठोस गोलियाँ बनाकर उन्हें समान ऊँचाई से पत्थर के धरातल पर छोड़ा जाता है। जिस पदार्थ की गोली धरातल से टकराने के पश्चात् अधिक ऊँचाई तक उठ जाती है वह पदार्थ उतना ही अधिक प्रत्यास्थ होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) तार की लम्बाई में वृद्धि $l = \frac{FL}{\pi r^2 Y}$

यदि एक ही पदार्थ के विभिन्न तारों पर समान विरूपक बल लगाया जाए तो $l \propto \frac{L}{r^2}$ [∵ F व Y नियत है]

अर्थात् अनुपात $\frac{L}{r^2}$ अधिक होने पर तार में लम्बाई वृद्धि अधिक होगी।

(2) **स्वयं के भार के कारण तार की लम्बाई में वृद्धि**–तार का भार Mg उसके गुरुत्व केन्द्र पर क्रियाशील होगा अतः तार की वह लम्बाई जिसमें वृद्धि होगी, L/2 है।

अतः लम्बाई में वृद्धि

$$l = \frac{FL}{AY} = \frac{Mg(L/2)}{AY}$$

$$= \frac{MgL}{2AY} = \frac{L^2 dg}{2Y}$$

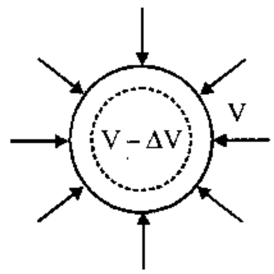
[∴ द्रव्यमान (M) = आयतन (AL) × घनत्व (d)]

10.6.2 आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (K) (Bulk Modulus of Elasticity)

प्रत्यास्थता सीमा में आयतन प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को पदार्थ का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $K = \frac{\text{आयतन प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$

$$K = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{-\Delta V}{V}} = \frac{-FV}{A\Delta V} \quad ...(1)$$



चित्र 10.8

ऋणात्मक चिन्ह आयतन में कमी को व्यक्त करता है।

संपीड्यता (β)–आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के व्युत्क्रम को संपीड्यता गुणांक या संकुचन मापांक कहते हैं।

संपीड्यता $\beta = \frac{1}{K}$

गैसों की समआयतनिक प्रक्रिया में संपीड्यता शून्य तथा समदाबी प्रक्रिया में संपीड्यता अनन्त होती है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

आदर्श गैस का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक–

1. **समतापी आयतन प्रत्यास्थता गुणांक**– समतापी प्रक्रम के अवस्था समीकरण से

$$PV = K \text{ (नियतांक)}$$

अवकलन करने पर

$$\Delta P.V + P\Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P.V = -P\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = -P\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$$

∴ समतापी आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$K_{\text{समतापी}} = \frac{\Delta P}{-\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = P \quad ...(1)$$

2. **रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक**– रुद्धोष्म प्रक्रम के अवस्था समीकरण से

$$PV^{\gamma} = K \text{ (नियतांक)}$$

अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \Delta P.V^{\gamma} + \gamma V^{\gamma-1}\Delta VP = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P.V^{\gamma} = -\gamma V^{\gamma-1}\Delta VP$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = \frac{-\gamma V^{\gamma-1} P.\Delta V}{V^{\gamma}}$$

$$\Delta P = \frac{-\gamma P.\Delta V}{V^{\gamma}.V^{-\gamma+1}} = \frac{-\gamma P.\Delta V}{V^{\gamma-\gamma+1}}$$

$$= \frac{-\gamma P.\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = \frac{-\gamma P\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta P.V}{\Delta V} = -\gamma P$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{-\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = \gamma P \quad ...(2)$$

$$K_{\text{रुद्धोष्म}} = \frac{\Delta P}{-\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = \gamma P \quad ...(3)$$

3. ठोसों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक सबसे अधिक होते हैं अत: ठोस पदार्थ सबसे कम संपीड्य होते हैं जबकि गैसें सबसे अधिक संपीड्य होती हैं अर्थात् गैसों की संपीड्यता सबसे अधिक होती है जो ताप व दाब के साथ बदलती है।
4. समतापी प्रक्रिया में संपीड्यता का मान गैस के मूल दाब (P) का व्युत्क्रम होता है।

अत: $\beta = \frac{1}{P}$

5. रुद्धोष्म प्रक्रिया में संपीड्यता का मान

$$\beta = \frac{1}{\gamma P}$$

जहाँ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ एक नियतांक है जिसका मान गैस की प्रकृति पर निर्भर करता है।

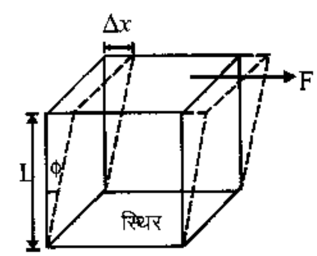
6. गैसों में केवल आयतन प्रत्यास्थता होती है क्योंकि दाब में परिवर्तन करने पर उसके आयतन में परिवर्तन हो जाता है।
7. गैसों की समआयतनिक प्रक्रिया ($\Delta V = 0$) में संपीड्यता शून्य होगी।
8. गैसों की समदाबी प्रक्रिया में संपीड्यता का मान अनन्त होगा।
9. रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक व समतापी आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का अनुपात

$$\frac{K_{\text{रुद्धोष्म}}}{K_{\text{समतापी}}} = \frac{\gamma P}{P} = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

10.6.3 अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक (η) (Modulus of Rigidity)

प्रत्यास्थता सीमा में अपरूपण प्रतिबल तथा अपरूपण विकृति के अनुपात को पदार्थ का अपरूपण या दृढ़ता गुणांक कहते हैं।

अपरूपण गुणांक (η)= $\frac{\text{अपरूपण प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$



चित्र 10.9

$$\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\phi} = \frac{F}{A\phi}$$

$$\because \quad \phi \simeq \tan\phi = \frac{\Delta x}{L}$$

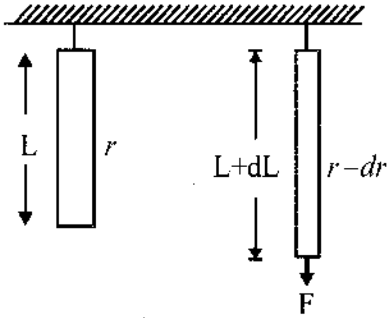
∵ φ बहुत छोटा है।

$$\therefore \quad \eta = \frac{FL}{A\Delta x} \quad ...(1)$$

अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक सामान्यत: यंग प्रत्यास्थता गुणांक से कम होता है। अधिकतर द्रवों के लिए $\eta = \frac{Y}{3}$ होता है।

10.7 पॉयसन अनुपात (Poisson ratio)

जब एक लम्बी छड़ लम्बाई के अनुदिश बल लगाकर खींची जाती है, तो उसकी लम्बाई बढ़ती है तथा त्रिज्या घट जाती है।



चित्र 10.10

पार्श्विक विकृति–त्रिज्या में परिवर्तन तथा प्रारम्भिक त्रिज्या के अनुपात को पार्श्विक विकृति कहते हैं।

अनुदैर्ध्य विकृति–लम्बाई में परिवर्तन तथा प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को अनुदैर्ध्य विकृति कहते हैं। पार्श्विक विकृति व अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात पॉयसन अनुपात (σ) कहलाता है

अर्थात् $$\sigma = \frac{\text{पार्श्विक विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

$$= \frac{-dr/r}{dL/L}$$

ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि तार खींचने पर उसकी त्रिज्या घट जाती है। पॉयसन अनुपात मात्रकहीन व विमाहीन राशि है।

सिद्धान्ततः पॉयसा अनुपात σ का मान −1 से +0.5 के मध्य होता है। सामान्यतः σ का मान 0.2 से 0.4 के मध्य होता है।

(स्टील के लिये $\sigma = 0.19$, तांबे के लिये $\sigma = 0.32$ तथा पीतल के लिये $\sigma = 0.26$)

10.8 प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा (Elastic Potential Energy)

जब किसी तार की लम्बाई में वृद्धि की जाती है तब किया गया कार्य प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। यह कार्य तार के परमाणुओं के मध्य कार्य करने वाले आकर्षण बलों के विरुद्ध करना पड़ता है।

माना किसी तार की प्रारम्भिक लम्बाई L है तथा इसका अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A है। जब तार पर लम्बाई की दिशा में बल F लगाकर इसे खींचा जाता है, तो इसकी लम्बाई में वृद्धि l हो जाती है।

l लम्बाई में वृद्धि होने पर बल = F

$\therefore$ तार पर औसत बल $= \dfrac{0+F}{2} = \dfrac{F}{2}$

तार को खींचने में किया गया कार्य = औसत बल × विस्थापन

$$= \frac{F}{2} \times l$$

यह कार्य तार की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊजा के रूप में संचित हो जाता है।

तार की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा $U = \dfrac{1}{2}Fl$ (1)

समीकरण (1) को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\text{स्थितिज ऊर्जा } U = \frac{1}{2}\frac{F}{A}\cdot\frac{l}{L}(AL)$$

$\because$ AL = अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल × लम्बाई = तार का आयतन (V)

$$U = \frac{1}{2} \times \text{ प्रतिबल } \times \text{ विकृति} \times \text{ तार का आयतन}$$

$\therefore$ तार के प्रति एकांक आयतन में संचित ऊर्जा

$$u = \frac{U}{\text{आयतन}} = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \times \text{ प्रतिबल } \times \text{ विकृति}$$

$\because$ यंग प्रत्यास्थता गुणांक $\quad Y = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

$\therefore$ $$\text{विकृति} = \frac{\text{प्रतिबल}}{Y}$$

यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$u = \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \frac{\text{प्रतिबल}}{Y}$$

$\therefore$ $$u = \frac{(\text{प्रतिबल})^2}{2Y}$$

$\because$ प्रतिबल = Y × विकृति

यह मान समीकरण (2) में रखने पर

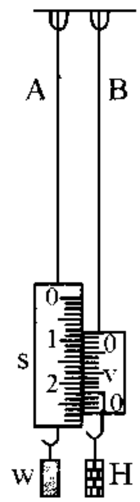
$$u = \frac{1}{2} \times Y \times (\text{विकृति})^2 \qquad ...(4)$$

$$u = \frac{1}{2} \times \text{ यंग प्रत्यास्थता गुणांक} \times \text{विकृति}^2$$

10.9 सर्ल विधि से प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करना (Determination of Young's modulus of elasticity by Searl's method)

(अ) वर्नियर स्केल उपकरण–जिस धातु का यंग प्रत्यास्थता–गुणांक ज्ञात करना हो, उसके समान लम्बाई (लगभग 2 मीटर) व व्यास (लगभग 1 मिमी) के दो तार A व B एक ही दृढ़ आधार से पास–पास लटका दिये जाते है। (चित्र)। तार A के निचले सिरे पर मिलीमीटर के चिन्हों का मुख्य पैमाना S लगा रहता है तथा इससे एक भार W लटका रहता है जिससे कि तार खिंचा रहता है। तार B पर जो कि प्रायोगिक तार है, एक वर्नियर पैमाना V लगा रहता है तथा इससे एक हैंगर H लटका रहता है। जब हैंगर पर बाँट

रखते हैं तो तार B की लम्बाई बढ़ती है। इससे वर्नियर पैमाना V_1 मुख्य पैमाने S के सहारे नीचे खिसकता है। वर्नियर के मुख्य पैमाने पर खिसकने से पहले तथा बाद में पढ़ी गई मापों का अन्तर, तार B की लम्बाई में वृद्धि के बराबर होगा।

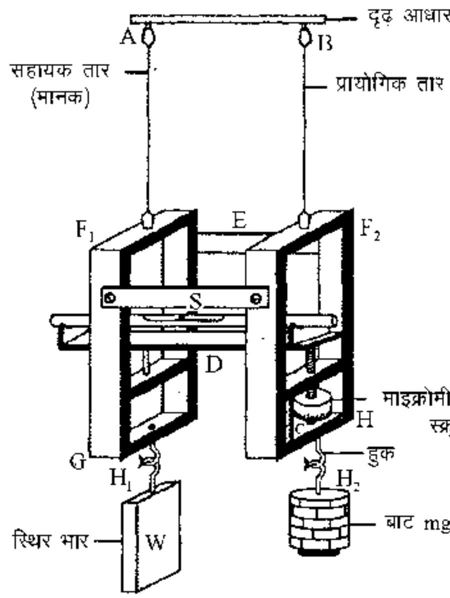


चित्र 10.11

(ब) सर्ल का उपकरण (Searle's Apparatus)–इस उपकरण में एक ही धातु के समान अनुप्रस्थ काट तथा समान लम्बाई के दो तार A व B एक ही दृढ़ आधार से पास–पास लटकाये जाते हैं। (चित्र)। तारों के निचले सिरों से धातु के दो आयताकार फ्रेम F_1 व F_2 लटकाते हैं। दोनों फ्रेम दो छड़ों द्वारा जिनके सामने की छड़ E है, इस प्रकार ढीले कसे रहते हैं कि F_2, फ्रेम F_1 के सापेक्ष ऊपर–नीचे विस्थापित हो सके। दोनों फ्रेमों के नीचे भार लटकाने के लिये हुक लगे होते हैं। S एक स्प्रिट लैविल है जो धातु की पत्ती D पर टिका होता है। यह पत्ती एक आलम्ब पर घूम सकती है, तथा इसका दूसरा सिरा एक सूक्ष्ममापी पेंच (micrometer screw) की नोंक M पर टिका होता है। फ्रेम F_1 के हुक से एक निश्चित भार लटका रहता है जिससे कि तार खिंचा रहता है। फ्रेम F_2 के हुक से एक हैंगर H लटका रहता है।

प्रारम्भ में सूक्ष्ममापी पेंच को घुमाकर स्प्रिट लैविल के वायु के बुलबुले को ठीक मध्य में कर लेते हैं तथा मुख्य व गोल पैमाने के पाठ्यांक ले लेते हैं। जब प्रायोगिक तार B के हैंगर H पर बाँट रखते हैं तो स्प्रिट लैविल का उस ओर का सिरा कुछ नीचा हो जाता है तथा वायु का बुलबुला दूसरी ओर चला जाता है। अब पेंच M के सिरे को ऊपर की ओर घुमाकर बुलबुले को फिर बीच में कर लेते है। और दोनों पैमानों के पाठ्यांक पढ़ लेते हैं। बाँट रखने से पहले तथा बाद में लिये गये पाठ्यांकों का अन्तर, तार B की लम्बाई में वृद्धि के बराबर होगा।

प्रायोगिक तार B के साथ इसी आधार पर इसी धातु का दूसरा तार A लगाने से दो लाभ हैं–(1) यदि आधार में कोई झुकाव पैदा होता है तो वह दोनों तारों को व दोनों पैमानों को बराबर झुकायेगा। इससे माप में त्रुटि नहीं होगी। (2) ताप में कोई परिवर्तन होने पर दोनों तारों की लम्बाइयों में समान परिवर्तन होगा। अतः माप में त्रुटि नहीं होगी।



चित्र 10.12 : सर्ल उपकरण

प्रयोग विधि–

1. सर्वप्रथम दोनों तारों के हुकों पर कोई स्थायी भार लटकाकर तारों की ऐंठन दूर करते हैं।

2. स्क्रूगेज की सहायता से प्रायोगिक तार B का व्यास विभिन्न स्थानों पर दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं में नापते हैं। माध्य व्यास का आधा करने पर तार की त्रिज्या r ज्ञात हो जाती है।

3. प्रायोगिक तार B की प्रारम्भिक लम्बाई L नाप लेते हैं। अब सर्ल के उपकरण में सूक्ष्ममापी पेंच को घुमाकर स्प्रिट लैविल में वायु के बुलबुले को ठीक मध्य में कर लेते हैं तथा मुख्य व गोल (वर्नियर) पैमानों के पाठ्यांक ले लेते हैं।

4. अब हैंगर H पर आधा–आधा किलोग्राम के बाँट एक–एक करके चढ़ाते जाते है और प्रत्येक बार कुछ ठहरकर मुख्य पैमाने तथा वर्नियर पैमाने की माप पढ़कर कुल माप ज्ञात करते जाते हैं। (सर्ल के उपकरण में सूक्ष्ममापी के पेंच के सिरे को ऊपर की ओर घुमाकर वायु के बुलबुले को प्रत्येक बार बीच में ले आते हैं और दोनों पैमानों के पाठ्यांक ले लेते हैं।)

5. इसके उपरान्त इन बाँटों को एक–एक करके उतारते जाते हैं तथा मुख्य व वर्नियर पैमाने पर पढ़ते जाते हैं। (सर्ल के उपकरण में प्रत्येक बार पेंच नीचे चलाकर वायु का बुलबुला बीच में लाकर प्रेक्षण लेते हैं।)

6. भार चढ़ाते समय के तथा उतारते समय के एक ही भार के प्रेक्षणों का माध्य मान निकालते हैं और फिर किसी उपयुक्त भार के लिए तार की लम्बाई में उत्पन्न माध्य वृद्धि ज्ञात कर लेते हैं।

L लम्बाई एवं r त्रिज्या के तार पर M किग्रा का द्रव्यमान लटकाने पर उसकी लम्बाई में वृद्धि l है तब

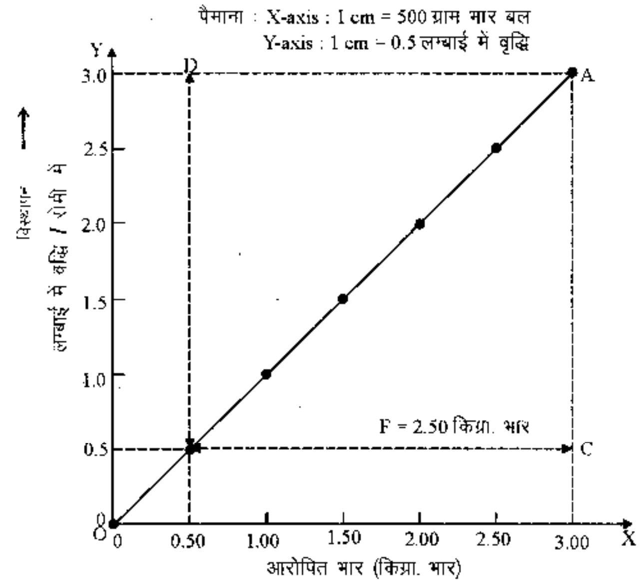
$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L}$$

∴ तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{Mg/\pi r^2}{l/L} = \frac{MgL}{\pi r^2 l} \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

उपरोक्त सूत्र की सहायता से तार के पदार्थ का यंग प्रत्यस्थता गुणांक ज्ञात किया जाता है।

तार के लिये, भार (M) और लम्बाई में वृद्धि (l) में एक ग्राफ खींचते हैं। इसके लिये X-अक्ष पर भार (M) तथा Y-अक्ष पर लम्बाई में वृद्धि (l) लेते हैं। यह ग्राफ एक सरल रेखा प्राप्त होता है।



चित्र 10.13 : आरोपित भार एवं लम्बाई की वृद्धि के मध्य ग्राफ

ग्राफ से परिकलन–M के किसी मान के संगत ग्राफ से लम्बाई की वृद्धि l ज्ञात कर उपरोक्त सूत्र से Y के मान की गणना करते हैं।

प्रत्यास्थता के व्यावहारिक उदाहरण (Practical Examples based on Elasticity)

(i) क्रेनों की धात्विक रस्सियाँ–क्रेन का उपयोग भारी वस्तुओं को उठाकर एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में किया जाता है। क्रेन में एक मोटी धात्विक रस्सी का उपयोग किया जाता है। धात्विक रस्सी से उठाये जाने वाले भार का निर्धारण आवश्यक होता है। अधिकतम भार इतना ही होना चाहिए कि वह डोरी के पदार्थ की प्रत्यास्थता की सीमा में हो।

माना कि रस्सी स्टील की बनी है तथा क्रेन अधिकतम 10^5 किग्रा. भार उठा सकती है। स्टील की प्रत्यास्थता की सीमा 3×10^8 न्यूटन/मी.^{2} होती है। अतः रस्सी में उत्पन्न प्रतिबल उसकी प्रत्यास्थता सीमा से अधिक नहीं होना चाहिए।

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{भार (Mg)}}{\text{क्षेत्रफल (A)}} \leq \text{प्रत्यास्थता सीमा}$$

$$\text{रस्सी का क्षेत्रफल } A \geq \frac{Mg}{\text{प्रत्यास्थता सीमा}}$$

$$A_{min} = \frac{10^5 \times 9.8}{3 \times 10^8}$$

$$\approx 3.3 \times 10^{-3} \text{ मी.}^2$$

यदि रस्सी के वृत्ताकार काट क्षेत्र की त्रिज्या r है तो

$$\pi r^2_{min} = 3.3 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad r_{min} = \sqrt{\frac{3.3}{3.14} \times 10^{-3}} \approx 0.032 \text{ मी.}$$

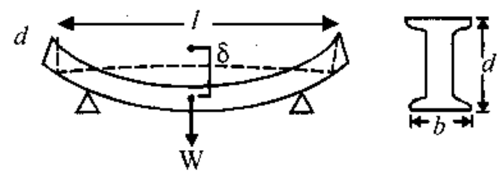
$$= 3.2 \text{ सेमी.}$$

अतः 10^5 किग्रा. भार को उठाने के लिए क्रेन की स्टील की रस्सी की त्रिज्या लगभग 3 सेमी. होनी चाहिए।

सुरक्षा गुणक के अधिक मान (लगभग 10) के लिए रस्सी को अपेक्षाकृत बहुत अधिक मोटा (त्रिज्या 10 सेमी.) रखा जाता है। लचक, प्रबलता तथा निर्माण की सुविधा को ध्यान में रखते हुए रस्सी को अनेक पतली तारों को आपस में लपेटकर बनाया जाता है।

(ii) धात्विक छड़ में अवनमन–जब एक क्षैतिज छड़ जो दोनों सिरों पर दृढ़ आधारों पर स्थिर हो तथा मध्य में W भार से भारित हो तो छड़ में अवनमन (depression) होता है। अवनमन का मान छड़ के पदार्थ, उसकी लम्बाई, मोटाई तथा गहराई पर निर्भर करता है। अवनमन कोण δ का मान निम्न होता है–

$$\delta = \frac{Wl^3}{4bd^3Y} \quad ...(1)$$



चित्र 10.14

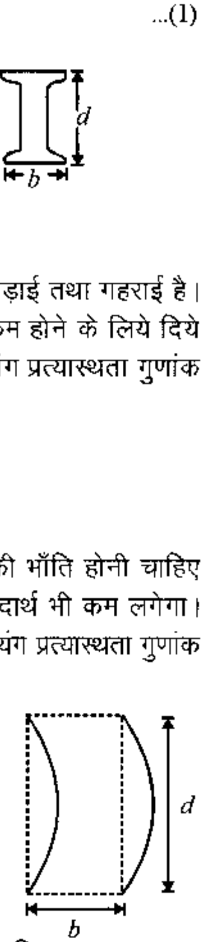
यहाँ l, b तथा d क्रमशः गर्डर की लम्बाई, चौड़ाई तथा गहराई है। समी. (1) से स्पष्ट है कि अवनमन कम से कम होने के लिये दिये गये भार तथा लम्बाई के लिए चौड़ाई (b), यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Y) तथा गहराई (d) अधिक होने चाहिए।

समी. (1) से अवनमन

$$\delta \propto \frac{1}{d^3}$$

अतः गर्डर की आकृति अंग्रेजी के अक्षर I की भाँति होनी चाहिए जिससे अवनमन कम होने के साथ–साथ पदार्थ भी कम लगेगा। गर्डर का पदार्थ स्टील का होना चाहिए ताकि यंग प्रत्यास्थता गुणांक अधिक होने से अवनमन कम होगा।

महत्त्वपूर्ण–किसी गर्डर के कम झुकाव के लिए चौड़ाई (b) की अपेक्षा, गहराई (d) बढ़ानी चाहिए। परन्तु गहराई बहुत अधिक बढ़ाने पर गर्डर चित्रानुसार झुक सकता है। इसे बकलिंग (buckling) कहते हैं।



चित्र 10.15

इस बकलिंग को कम करने के लिए गर्डर को I आकृति देते हैं।

(iii) पर्वत की अधिकतम ऊँचाई का अनुमान लगाना–किसी पर्वत की

ऊँचाई का अनुमान लगाने में पृथ्वी का प्रत्यास्थता का गुण सहायक होता है। माना कि पर्वत की ऊँचाई h तथा पर्वत की चट्टानों का घनत्व ρ है तब पर्वत के तल पर दाब

$$P = h\rho g = \text{प्रतिबल}$$

चट्टान की प्रत्यास्थता की सीमा 3×10^8 न्यूटन/मी.^{2} होती है। इस स्थिति में प्रतिबल, प्रत्यास्थता की सीमा से कम होना चाहिए अन्यथा चट्टानें भीतर धंसना शुरू कर देंगी।

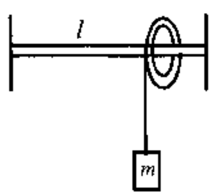
अतः $\quad h\rho g = 3 \times 10^8$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{3\times10^8}{\rho g} = \frac{3\times10^8}{3\times10^3\times10}$$

$$\left[\because \rho = 3\times10^3 \ \frac{\text{किग्रा.}}{\text{मी.}^3}\right]$$

यह ऊँचाई विश्व में अधिकतम ऊँचाई वाले पर्वत माउण्ट एवरेस्ट की ऊँचाई से अधिक है।

(iv) **छोटी शाफ्ट का उपयोग**–शाफ्ट एक ऐसी बेलनाकार छड़ है जो अन्य मशीनों को घूर्णन गति प्रदान करने में प्रयुक्त होती है। यदि शाफ्ट का एक सिरा दृढ़ता से कसकर दूसरे सिरे पर मरोड़ी देने वाला बल लगायें तब छड़ में अपरूपण विकृति उत्पन्न हो जायेगी। किसी मरोड़ी कोण या ऐंठन कोण θ के लिए लगाये जाने वाले बल आघूर्ण τ का मान निम्न होता है–



चित्र 10.16

$$\tau = \frac{\eta\pi r^4\theta}{2l}$$

यहाँ r = शॉफ्ट की त्रिज्या, l = लम्बाई तथा η = शॉफ्ट के पदार्थ का अपरूपण गुणांक है। ठोस शॉफ्ट में एकांक ऐंठन उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बलयुग्म आघूर्ण

$$\tau_{solid} = \frac{\eta\pi r^4}{2l} \quad ...(i)$$

तथा खोखली शाफ्ट में एकांक ऐंठन उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बलयुग्म आघूर्ण

$$\tau_{hollow} = \frac{\eta\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2l} \quad ...(ii)$$

समी. (i) व (ii) से

$$\frac{\tau_{hollow}}{\tau_{solid}} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r^4}$$

$$= \frac{(r_2^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)}{r^4} \quad ...(iii)$$

$\because$ दोनों शाफ्टों के आयतन समान है

$$\therefore \quad \pi r^2 l = \pi(r_2^2 - r_1^2)l$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = r_2^2 - r_1^2$$

यह मान समी. (iii) में रखने पर

$$\frac{\tau_{hollow}}{\tau_{solid}} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r^2} > 1$$

$$\therefore \quad t_{hollow} > \tau_{solid}$$

अर्थात् समान पदार्थ व द्रव्यमान की ठोस व खोखली शाफ्टों में, खोखली शाफ्ट को ऐंठने में ठोस शाफ्ट को ऐंठने की अपेक्षा अधिक कार्य करना होगा अतः खोखली शाफ्ट अधिक मजबूत होती है।

(v) **साइकिल तथा रिक्शा के फ्रेम खोखले बनाये जाते हैं**–यदि किसी बेलनाकार छड़ पर W भार भारित हो तो छड़ में अवनमन निम्न होता है–

$$\delta = \frac{Wl^3}{12Y\pi R^4}$$

यहाँ R छड़ के काट क्षेत्र की त्रिज्या है।

समान द्रव्यमान की खोखली बेलनाकार छड़ ठोस छड़ की तुलना में अधिक मजबूत होती है क्योंकि खोखली छड़ की त्रिज्या अधिक होती है। इसी कारण साइकिल व रिक्शा के फ्रेम खोखले बनाये जाते हैं।

प्रत्यास्थता से सम्बन्धित कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. विमाओं में निश्चित परिवर्तन के लिए जिस पिण्ड को अधिक विरूपक बल की आवश्यकता होगी वह अधिक प्रत्यास्थ होगा।
उदा.–हाथी दाँत व स्टील की गेंद, रबर की अपेक्षा अधिक प्रत्यास्थ होती है।

2. यदि भिन्न पिण्डों पर समान विरूपक बल लगाएें तो जो पिण्ड कम विरूपित होगा अधिक प्रत्यास्थ होगा।
उदा.–(i) समान भार के लिए लोहे की डोरी में, रबर की डोरी की अपेक्षा कम वृद्धि होती है अतः लोहा अधिक प्रत्यास्थ है।
(ii) समान दाब आरोपित करने पर वायु की अपेक्षा जल कम सम्पीडित होता है अतः जल अधिक प्रत्यास्थ है।
(iii) भिन्न–भिन्न पदार्थों की चार समान गेंदें यदि समान ऊँचाई से गिरायी जायें तो भूमि से संघट्ट के पश्चात् वे अलग–अलग ऊँचाई तक जाएँगी।
उनकी ऊँचाईयों का क्रम $h_{ivory} > h_{steel} > h_{rubber} > h_{clay}$ क्योंकि $Y_{ivory} > Y_{steel} > Y_{rubber} > Y_{clay}$.

3. प्रत्यास्थता गुणांक का मान प्रतिबल व विकृति के परिमाण पर निर्भर नहीं करता है। यह वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

पदार्थ का नाम	यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Y) 10^{10} N/m^2	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक(K) 10^{10} N/m^2	दृढ़ता गुणांक (η) 10^{10} N/m^2
एल्युमिनियम	6.9	7.0	2.6
पीतल	9.0	6.7	3.4
ताँबा	11.0	13.0	4.5
लोहा	19.0	14.0	4.6
स्टील	20.0	16.0	8.4
टंगस्टन	36.0	20.0	15.0
हीरा	83.0	55.0	34.0
जल	-	0.22	-
ग्लिसरीन	-	0.45	-
वायु	-	1.01	-

4. प्रत्यास्थता गुणांकों के विमीय सूत्र व मात्रक प्रतिबल के समान होते हैं क्योंकि विकृति विमाहीन राशि है।

$\therefore$ विमीय सूत्र $ML^{-1}T^{-2}$ व मात्रक $\frac{\text{डाईन}}{\text{सेमी.}^2}$ या $\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी.}^2}$ हैं।

5. प्रत्यास्थता गुणांक का मान अधिक होने का अर्थ है कि पदार्थ अधिक प्रत्यास्थ है। परन्तु किसी नियत प्रतिबल के लिए $Y \propto (1/l)$, $K \propto (1/\Delta V)$ व $\eta \propto (1/\phi)$ अतः दिये गये प्रतिबल के लिए आकार या आकृति में कम परिवर्तन होने का अर्थ है कि प्रत्यास्थता अधिक है।

6. प्रत्यास्थता गुणांक Y व η मात्र ठोसों व द्रवों में पाये जाते हैं क्योंकि गैसें किसी एक निश्चित दिशा में विरूपित नहीं की जा सकती है और ना ही अपरूपण दर्शाती हैं। जबकि K पदार्थ की प्रत्येक अवस्था (ठोस, द्रव तथा गैस) में पाया जाता है।

7. गैसें अधिक सम्पीड़ित होती हैं और कम प्रत्यास्थ जबकि ठोस कम सम्पीड़ित होते हैं और अधिक प्रत्यास्थ। इस कारण गैसों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कम होता है जबकि द्रवों व ठोसों का अधिक $K_{solid} > K_{liquid} > K_{gas}$

8. किसी दृढ़ पिण्ड के लिए $l, \Delta V$ या $\phi = 0$ अतः Y, K या η के मान ∞ होंगे अर्थात् दृढ़ पिण्ड की प्रत्यास्थता अनन्त होती है। हीरा व कार्बोरण्डम लगभग दृढ़ पिण्ड हैं।

9. निलम्बन पुलों में भार के कारण रस्सियाँ खिंचती हैं अतः यंग प्रत्यास्थता गुणांक संबंधित होता है।

10. स्वचालित वाहनों के टायरों में वायु सम्पीड़ित होती है अतः आयतन प्रत्यास्थता गुणांक सम्बन्धित होता है।

11. स्वचालित शाफ्ट से शक्ति संचरित करते समय शाफ्ट घूमती है, तो उसमें अपरूपण विकृति आ जाती है। अतः दृढ़ता गुणांक संबंधित होता है।

12. रबर की हील की आकृति प्रतिबल के कारण बदल जाती है अतः दृढ़ता गुणांक संबंधित होता है।

13. खिंचे हुए तार की स्थितिज ऊर्जा–

$$U = \frac{1}{2} \times \text{ बाह्य बल } \times \text{ तार की लम्बाई में वृद्धि}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ प्रतिबल } \times \text{ विकृति } \times \text{ तार का आयतन}$$

14. प्रायः वस्तुओं का ताप बढ़ाने पर प्रत्यास्थता घटती है तथा ठण्डा करने पर प्रत्यास्थता बढ़ती है।

15. ऊर्जा घनत्व $= \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} = \frac{1}{2} Y \left(\frac{l}{L}\right)^2$

उदा.1. एक तार में 2×10^{-4} रेखीय विकृति उत्पन्न करने से 2.4×10^7 न्यूटन/मी.^{2} का प्रतिबल उत्पन्न होता है। तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करो।

हल– रेखीय विकृति $= 2 \times 10^{-4}$

प्रतिबल $= 2.4 \times 10^7$ न्यूटन/मी.^{2}

$\therefore$ यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{रेखीय विकृति}}$

$$Y = \frac{2.4 \times 10^7}{2 \times 10^{-4}}$$

$$Y = 1.2 \times 10^{11} \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

उदा.2. एक संरचनात्मक इस्पात की छड़ की त्रिज्या 10 mm तथा लंबाई 1m है। 100 kN का एक बल F इसकी लम्बाई की दिशा में तनित करता है। छड़ में (a) प्रतिबल, (b) विस्तार, तथा (c) विकृति की गणना कीजिए। संरचनात्मक इस्पात का यंग गुणांक 2.0×10^{11} N m^{-2} है।

हल– दिया है– छड़ की त्रिज्या $r = 10$ मिमी. $= 10 \times 10^{-3}$ मी.

लम्बाई L = 1 मी.

आरोपित बल F = 100 किलो न्यूटन $= 100 \times 10^3$ न्यूटन,

$Y = 2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}

छड़ का अनुप्रस्थ काट

$A = \pi r^2 = 3.14 \times (10 \times 10^{-3})^2$ मी.^{2}

(i) **प्रतिबल** $= \frac{F}{A} = \frac{100 \times 10^3}{3.14 \times 100 \times 10^{-6}} = 3.18 \times 10^8$ न्यूटन/मी.^{2}

(ii) **विस्तार (या लम्बाई की वृद्धि)**

$$l = \frac{FL}{AY} = \frac{100 \times 10^3 \times 1}{3.14 \times 100 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{11}}$$

$$= \frac{50}{3.14} \times 10^{-4}$$

या $l = 15.92 \times 10^{-4}$ मी. $= 1.592 \times 10^{-3}$ मी. $= 1.592$ मिमी.

(iii) विकृति : $\frac{l}{L} = \frac{1.592 \times 10^{-3}}{1} = 1.592 \times 10^{-3}$ (मात्रकहीन)

तथा % विकृति $= \frac{l}{L} \times 100\% = 1.592 \times 10^{-1}\% = 0.159\%$

$\simeq 0.16\%$

उदा.3. 6.0 m लम्बे तथा 1.2 cm^2 अनुप्रस्थ काट वाले ताँबे के तार को 4.8×10^3 N बल द्वारा खींचा जाता है। यदि ताँबे के लिये यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 1.2 \times 10^{11}$ N

m^{-2} हो तो निम्नलिखित की गणना कीजिये।
(i) प्रतिबल (ii) विकृति (iii) तार की लम्बाई में वृद्धि

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.1)

हल : (i) दिया गया है–

$F = 4.8 \times 10^3$ N तथा $A = 1.2\ cm^2 = 1.2 \times 10^{-4}\ m^2$

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{4.8 \times 10^3}{1.2 \times 10^{-4}} = 4.0 \times 10^7\ N\ m^{-2}$$

(ii) तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

$$\therefore \text{विकृति} = \frac{\text{प्रतिबल}}{Y}$$

$$= \frac{4.0 \times 10^7}{1.2 \times 10^{11}} = 3.3 \times 10^{-4}\ \text{(मात्रकहीन)}$$

(iii) $$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L}$$

लम्बाई में वृद्धि (l) = अनुदैर्ध्य विकृति × प्रारम्भिक लम्बाई

$= 3.3 \times 10^{-4} \times 6.0$ m

$= 19.8 \times 10^{-4}$ m

$= 1.98$ mm

उदा.4. तांबे का एक 2.2 m लंबा तार तथा इस्पात का एक 1.6m लंबा तार, जिनमें दोनों के व्यास 3.0 mm हैं, सिरे से जुड़े हुए हैं। जब इसे एक भार से तनित किया गया तो कुल विस्तार 0.7 mm हुआ। लगाए गए भार का मान प्राप्त कीजिए।

हल– दिया है–प्रत्येक तार की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5$ मिमी.

$= 1.5 \times 10^{-3}$ मी.

$L_{Cu} = 2.2$ मी., $L_{St} = 1.6$ मी.

तथा $l_{Cu} + l_{St} = 0.7$ मिमी ...(1)

∵ समान अनुप्रस्थ काट के तारों पर समान भार आरोपित करने पर उत्पन्न प्रतिबल भी समान होगा अतः

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} = Y_{Cu} \times \frac{l_{Cu}}{L_{Cu}} = Y_{St} \times \frac{l_{st}}{L_{st}}\ \text{से}$$

$$\frac{l_{Cu}}{l_{St}} = \frac{Y_{St} \times L_{Cu}}{Y_{Cu} \times L_{St}} = \frac{2 \times 10^{11} \times 2.2}{1.1 \times 10^{11} \times 1.6} = 2.5 \quad ...(2)$$

जहां $Y_{St} = 2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}
$Y_{Cu} = 1.1 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2} } सारणी से लिए हैं।

$\Rightarrow \quad l_{Cu} = 2.5\, l_{St}$ ...(3)

समी. (3) से समी. (1) में मान रखने पर

$3.5\, l_{St} = 0.7$

$$l_{St} = \frac{0.7}{3.5} = 0.2\ \text{मिमी.} = 2 \times 10^{-4}\ \text{मी.}$$

अतः आरोपित भार

$$W = F = \frac{A\, Y_{St}\, l_{St}}{L_{St}} = \frac{\pi r^2 Y_{St} l_{St}}{L_{St}}$$

$$= \frac{3.14 \times (1.5 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{-4}}{1.6}$$

या $$W = \frac{314 \times 2.25}{4} = 176.62\ \text{न्यूटन}$$

या $W = 1.766 \times 10^2$ न्यूटन $\approx 1.8 \times 10^2$ न्यूटन

उदा.5. 1मिमी. व्यास वाला तथा 10 मीटर लम्बे धातु के तार के निचले सिरे पर 5 किग्रा. का एक भार लटकाने पर लम्बाई में 3.2 मिमी. की वृद्धि होती है। तार के पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुणांक का परिकलन कीजिये।

हल–प्रश्नानुसार

$M = 5$kg

$L = 10$ मीटर

$l = 3.2$ मिमी. $= 3.2 \times 10^{-3}$ मी.

व्यास $d = 1$ मिमी. $= 10^{-3}$ मी.

त्रिज्या $r = 0.5 \times 10^{-3}$ मी.

$$Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$$

$$= \frac{5 \times 9.8 \times 10}{3.14 \times 0.25 \times 10^{-6} \times 3.2 \times 10^{-3}}$$

$= 19.6 \times 10^{10}$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.6. किसी पदार्थ के तार की त्रिज्या 0.5 मिमी., तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 2×10^{11} न्यूटन/मी.^{2} तथा तार की विकृति यदि 10^{-3} से अधिक नहीं हो सकती तो तार पर अधिकतम कितना भार लटकाया जा सकता है?

हल– त्रिज्या $r = 0.5$ मिमी. $= 0.5 \times 10^{-3}$ मीटर

क्षेत्रफल $A = \pi r^2 = 3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2$

विकृति $= 10^{-3}$

∴ प्रत्यास्थता गुणांक

$Y = 2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}

$$\because \quad Y = \frac{\text{प्रतिबल}(F/A)}{\text{विकृति}}$$

$F = Y \times A \times$ विकृति

$F = 2 \times 10^{11} \times 3.14 \times (0.25 \times 10^{-6}) \times 10^{-3}$

$= 2 \times 3.14 \times 0.25 \times 10^2$

$= 157$ न्यूटन

उदा.7. स्टील के तार का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1 सेमी.^{2} है। उसकी लम्बाई को दुगुना करने के लिये कितने बल की आवश्यकता होगी? (स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 23×10^{11} डाइन/सेमी.^{2})

हल–

$A = 1$ सेमी.^{2}

$Y = 23 \times 10^{11}$ डाइन/सेमी.^{2}

∵ लम्बाई को दुगुना करना है अर्थात् लम्बाई में वृद्धि $= L$

$$\therefore \quad \text{विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L} = 1$$

$$\because \quad \text{प्रतिबल}\left(\frac{F}{A}\right) = Y \times \text{विकृति}$$

$$\frac{F}{1} = 23 \times 10^{11} \times 1$$

$$F = 23 \times 10^{11} \text{ डाइन}$$

उदा. 8. एक धातु के दो तारों से समान भार लटकाये गये हैं। इनमें से एक तार की लम्बाई 2 मीटर, व्यास 1 मिमी. तथा दूसरे तार की लम्बाई 1 मीटर तथा व्यास 0.5 मिमी. है। इन तारों की लम्बाइयों में हुई वृद्धियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$

तार एक ही धातु के हैं इसलिए

$$\therefore \quad \frac{MgL_1}{\pi r_1^2 l_1} = \frac{MgL_2}{\pi r_2^2 l_2}$$

$$\therefore \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{L_1 r_2^2}{L_2 r_1^2}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{1} \times \frac{(0.5/2)^2}{(1/2)^2}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = 2 \times 0.25 = \frac{0.5}{1} = 1:2$$

उदा.9. किसी सर्कस में एक मानवीय पिरैमिड में एक संतुलित ग्रुप का सारा भार एक व्यक्ति, जो अपनी पीठ के बल लेटा हुआ है, के पैरों पर आधारित है (जैसा चित्र में दिखाया गया है)। इस कार्य का निष्पादन करने वाले सभी व्यक्तियों, मेजों, प्लांकों आदि का कुल द्रव्यमान 280 kg है। पिरैमिड की तली पर अपनी पीठ के बल लेटे हुए व्यक्ति का द्रव्यमान 60 kg है। इस व्यक्ति की प्रत्येक उर्वस्थि (फीमर) की लम्बाई 50 cm तथा प्रभावी त्रिज्या 2.0 cm है। निकालिए कि अतिरिक्त भार के कारण प्रत्येक उर्वस्थि कितनी मात्रा से संपीडित हो जाती है?

चित्र 10.17

हल– दिया है, सभी व्यक्तियों, मेजों एवं प्लांकों का कुल द्रव्यमान = 280 किग्रा.

आधार पर स्थित व्यक्ति का द्रव्यमान = 60 किग्रा.

अतः आधार के व्यक्ति पर आरोपित कुल बल

$$F = mg = (280 - 60)g = 220g \text{ न्यूटन}$$

उर्वस्थि (फीमर हड्डी) की लम्बाई

$$L = 50 \text{ सेमी.} = 50 \times 10^{-2} \text{ मी.}$$

तथा त्रिज्या $r = 2$ सेमी. $= 2 \times 10^{-2}$ मी.

तथा हड्डी का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = 9.4 \times 10^9 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

$\because$ व्यक्ति के दो फीमर हड्डी होती है अतः प्रत्येक फीमर पर बल

$$F' = \frac{220g}{2} \text{ न्यूटन}$$

अतः फीमर का संकुचन $l = \frac{F'L}{AY} = \frac{F'L}{\pi r^2 Y}$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{110 \times g \times 50 \times 10^{-2}}{3.14 \times 4 \times 10^{-4} \times 9.4 \times 10^9}$$

$$= \frac{110 \times 9.8 \times 50 \times 10^{-7}}{3.14 \times 4 \times 9.4} = 4.56 \times 10^{-5} \text{ मी.}$$

या $l = 4.56 \times 10^{-3}$ सेमी.

$$\text{प्रतिशत संपीडन} = \frac{l}{L} \times 100\% = \frac{4.56 \times 10^{-3}}{50} \times 100$$

$$= 9.12 \times 10^{-3}\% = 0.0091\%$$

उदा.10. 1 मी. लम्बाई व 3 वर्ग सेमी. परिच्छेद वाली ताँबे की छड़ और L लम्बाई 1 वर्ग सेमी. परिच्छेद वाली स्टील की छड़ एक साथ एक सिरे पर कसी हुई है। संयुक्त छड़ पर समान व विपरीत दिशा में 3 किग्रा. भार का कर्षण लगा हुआ है–

(i) दोनों छड़ों में समान दीर्घीकरण के लिए स्टील छड़ की लम्बाई ज्ञात करो।

(ii) दोनों छड़ों में प्रतिबल क्या है?

(iii) दोनों छड़ों में विकृति क्या है?

[$Y_{\text{कॉपर}} = 1 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}, $Y_{\text{स्टील}} = 2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}]

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.5)

हल– तनाव F के प्रभाव में एक छड़ की लम्बाई में वृद्धि

$$l = \frac{FL}{AY}$$

प्रश्नानुसार

$$\frac{F_{\text{कॉपर}} \times L_{\text{कॉपर}}}{A_{\text{कॉपर}} \times Y_{\text{कॉपर}}} = \frac{F_{\text{स्टील}} \times L_{\text{स्टील}}}{A_{\text{स्टील}} \times Y_{\text{स्टील}}}$$

$$\frac{F_C \times L_C}{A_C \times Y_C} = \frac{F_S \times L_S}{A_S \times Y_S}$$

यहाँ $F_C = F_S$, $L_C = 1$ मी. $A_S = 1 \times 10^{-4}$ वर्ग मी.

$Y_S = 2 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}

$Y_C = 1 \times 10^{11}$ न्यूटन/मी.^{2}

$A_C = 3 \times 10^{-4}$ वर्ग मी.

$$L_S = \frac{1 \times 1 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{11}}{3 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^{11}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$= 0.67 \text{ मीटर}$$

$$\text{स्टील छड़ में प्रतिबल} = \frac{F}{A_S} = \frac{3 \times 9.8}{1 \times 10^{-4}}$$

$= 2.94 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

ताँबे की छड़ में प्रतिबल

$$= \frac{F}{A_C} = \frac{3 \times 9.8}{3 \times 10^{-4}}$$

$= 9.8 \times 10^4$ न्यूटन/मी.^{2}

स्टील छड़ में विकृति $= \frac{\text{प्रतिबल}}{Y_S} = \frac{2.94 \times 10^5}{2 \times 10^{11}}$

$= 1.47 \times 10^{-6}$

ताँबे की छड़ में विकृति $= \frac{\text{प्रतिबल}}{Y_C} = \frac{9.8 \times 10^4}{10^{11}}$

$= 9.8 \times 10^{-7}$

उदा.11. एक स्टील तार की वह अधिकतम लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसे उर्ध्वाधर लटकाने पर वह अपने ही भार के कारण टूट न सके। स्टील का विभंजन प्रतिबल 7.8×10^8 N m^{-2} और स्टील का घनत्व $= 7.8 \times 10^3$ kg m^{-3}, $g = 9.8$ m s^{-2} **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.4)**

हल : माना कि लटकाए गये तार की अधिकतम लम्बाई l व अनुप्रस्थ काट A तब

तार का भार $= l \times A \times 7.8 \times 10^3 \times 9.8$

($\because$ भार=द्रव्यमान $\times g$ = आयतन $\times$ घनत्व $\times g$)

$\therefore$ तार पर प्रतिबल $= \frac{l \times A \times 7.8 \times 10^3 \times 9.8}{A}$

तार टूटने के लिये यह प्रतिबल विभंजन प्रतिबल के बराबर या अधिक होना चाहिए। अतः

$7.8 \times 10^8 = l \times 7.8 \times 10^3 \times 9.8$

$l = 1.019 \times 10^4$ m $= 10.19$ km

उदा.12. 1.5×10^{-3} मी^{3}. आयतन के तरल पर 5×10^6 न्यूटन/मी.^{2} का दाब परिवर्तित करने पर उसमें 3×10^{-7} मी.^{3} की कमी हो जाती है। तरल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करो।

हल— दाब परिवर्तन= प्रतिबल $= 5 \times 10^6$ न्यूटन/मी.^{2}

आयतन विकृति$= \frac{\Delta V}{V} = \frac{3 \times 10^{-7}}{1.5 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^{-4}$

$\therefore$ आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$K = \frac{\text{आयतन प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

$$K = \frac{5 \times 10^6}{2 \times 10^{-4}}$$

$= 2.5 \times 10^{10}$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.13. एक लीटर ग्लिसरीन पर जब दाब 9.9×10^5 न्यूटन/मी.^{2} लगाया जाता है तब इसके आयतन में 0.20 सेमी.^{3} की कमी आती है। ग्लिसरीन का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक क्या होगा? **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.3)**

हल— प्रतिबल $= \frac{F}{A} = 9.9 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

आयतन विकृति $= -\frac{\Delta V}{V} = \frac{0.20 \times 10^{-6}}{10^{-3}}$ (मात्रकहीन)

$\therefore$ आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$K = \frac{\text{आयतन प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

$$= \frac{9.9 \times 10^5}{0.20 \times 10^{-3}}$$

$= 4.95 \times 10^9$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.14. हिन्द महासागर की औसत गहराई लगभग 3000m है। महासागर की तली में पानी के भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ की गणना कीजिए, दिया है कि पानी का आयतन गुणांक 2.2×10^9 Nm^{-2} है। $g = 10$ m s^{-2} लीजिए।

हल— दिया है, गहराई $h = 3000$ मी.

जल के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$K = 2.2 \times 10^9$ न्यूटन/मी.^{2}

तथा $g = 10$ मी./से.^{2}

जल का घनत्व $d = 1 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

संपीडन विकृति $\frac{\Delta V}{V} = \frac{P}{K} = \frac{hdg}{K}$

$$= \frac{3000 \times 10^3 \times 10}{2.2 \times 10^9} = \frac{3}{2.2} \times 10^{-2}$$

या $\frac{\Delta V}{V} = 1.36 \times 10^{-2}$ (मात्रकहीन)

$\therefore$ प्रतिशत संपीडन विकृति $= \frac{\Delta V}{V} \times 100\%$

$= 1.36\%$

उदा.15. रबर की एक ठोस गेंद को 200 मीटर गहरी झील की ऊपरी सतह से उसके तल तक ले जायें तो गेंद के आयतन में 0.1 प्रतिशत की कमी होती है। जल का घनत्व 1.0×10^3 किग्रा /मी.^{3} हो तो रबर के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की गणना करो।

हल— आयतन विकृति $= \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.1}{100} = 10^{-3}$

दाब में परिवर्तन $= hdg$

$= 200 \times 10^3 \times 10$

$= 2 \times 10^6$ न्यूटन/मी.^{2}

$\therefore$ आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$K = \frac{\text{दाब में परिवर्तन}}{\text{आयतन विकृति}}$$

$$K = \frac{2 \times 10^6}{10^{-3}} = 2 \times 10^9 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

उदा.16. उस स्पर्शीय बल की गणना कीजिए जो 16 cm^2 पृष्ठ पर आरोपित करने पर पिण्ड में 2° का अपरूपण विकृति उत्पन्न कर सके।
(दृढ़ता गुणांक = 9.0×10^{10} N m^{-2})

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.2)

हल : $\because$ दृढ़ता गुणांक $(\eta) = \dfrac{\text{स्पर्शीय प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$

$\therefore$ स्पर्शीय प्रतिबल = η × अपरूपण विकृति

अपरूपण विकृति = $2^\circ = \dfrac{2\pi}{180}$ रेडियन

दिया गया है: $\eta = 9.0 \times 10^{10}$ N m^{-2}

तथा क्षेत्रफल = 16 cm^2 = 16×10^{-4} m^2

$$\therefore \text{ स्पर्शीय प्रतिबल} = 9 \times 10^{10} \times \frac{2\pi}{180} = \pi \times 10^9 \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2}$$

$$\text{स्पर्शीय प्रतिबल} = \frac{\text{स्पर्शीय बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$$

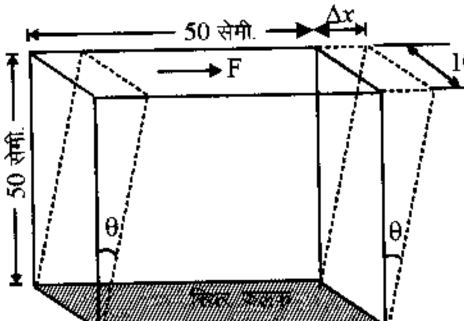
$\therefore$ स्पर्शीय बल = स्पर्शीय प्रतिबल × क्षेत्रफल

$= \pi \times 10^9 \times 16 \times 10^{-4}$

$= 16\,\pi \times 10^5 = 50.24 \times 10^5$ न्यूटन

उदा.17. सीसे के 50cm भुजा के एक वर्गाकार स्लैब, जिसकी मोटाई 10 cm है, की पतली फलक पर 9.0×10^4N का एक अपरूपक बल लगा है। दूसरा पतला फलक फर्श से रिबेट किया हुआ है। ऊपरी फलक कितनी विस्थापित हो जाएगी?

हल– प्रश्नानुसार, दिए गए सीसे के स्लैब को निम्नानुसार व्यक्त कर सकते हैं।



चित्र 10.18

फलक का क्षेत्रफल $A = 50 \times 10$ सेमी.^{2}

$= 500$ सेमी.^{2}

या $A = 500 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

आरोपित अपरूपी बल $F = 9 \times 10^4$ न्यूटन

सीसे का अपरूपण गुणांक

$\eta = 5.6 \times 10^9$ न्यूटन/मी.^{2}

$\because$ विकृति $\phi = \dfrac{\Delta x}{L} = \dfrac{F}{A\eta}$

अतः विस्थापन $\Delta x = \dfrac{FL}{A\eta}$

$$= \frac{9 \times 10^4 \times 50 \times 10^{-2}}{500 \times 10^{-4} \times 5.6 \times 10^9}$$

या $\Delta x = 0.16 \times 10^{-3}$ मी. $= 1.6 \times 10^{-4}$ मी. $= 0.16$ मिमी.

उदा.18. पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 10^{11} न्यूटन/मी.^{2} मानते हुए गणना कीजिए कि 1 वर्ग सेमी. परिच्छेद क्षेत्रफल तथा 0.1 मी. लम्बाई वाली छड में कितनी ऊर्जा की वृद्धि हो जायेगी जब इसको 10 किग्रा. भार के बल से लम्बाई की दिशा में दबाया जाता है।

हल– प्रश्नानुसार

बाह्य बल F = 10 किग्रा. भार

= 98 न्यूटन

A = 1 वर्ग सेमी.

= 10^{-4} वर्ग मी.

L = 0.1 मी.

Y = 10^{11} न्यूटन/मी.^{2}

$$\therefore \quad Y = \frac{MgL}{Al} = \frac{FL}{Al}$$

$$10^{11} = \frac{98 \times 0.1}{10^{-4} \times l}$$

$$\therefore \quad \text{लम्बाई में परिवर्तन } l = \frac{98 \times 10^{-1}}{10^{-4} \times 10^{11}} = 9.8 \times 10^{-7} \text{ मी.}$$

किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2} Fl$$

$$= \frac{1}{2} \times 98 \times 9.8 \times 10^{-7} \text{ जूल}$$

$= 4.8 \times 10^{-5}$ जूल (लगभग)

उदा.19. 1.0 cm^2 अनुप्रस्थ काट तथा 0.2 m लम्बाई वाली पीतल की छड़ में ऊर्जा की वृद्धि की गणना कीजिए जब इसको 5 kg भार के बल से लम्बाई की दिशा में दबाया जाता है। (पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक = 1.0×10^{11} N m^{-2} तथा $g = 9.8$ m s^{-2})

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 10.6)

हल : छड़ को दबाने में किया गया कार्य उसकी ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होगा। अतः छड़ को दबाने में किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2} F \times l$$

जहाँ F छड़ पर लगाया गया बल है तथा l छड़ की लम्बाई में परिवर्तन है।

$\because$ यंग प्रत्यास्थता गुणांक = $\dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

$$Y = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al}$$

जहाँ A छड़ का अनुप्रस्थ काट तथा L प्रारम्भिक लम्बाई है।

$$\therefore l = \frac{FL}{AY}$$

$$W = \frac{1}{2}F \times \frac{FL}{AY} = \frac{F^2L}{2AY}$$

दिया गया है: $F = 5\,kg$ भार $= 5 \times 9.8\,N$, $L = 0.2\,m$

$A = 1.0\,cm^2 = 1.0 \times 10^{-4}\,m^2$ तथा $Y = 1.0 \times 10^{11}\,N\,m^{-2}$

$$\therefore W = \frac{(5 \times 9.8)^2 \times 0.2}{2 \times 1.0 \times 10^{-4} \times 1.0 \times 10^{11}}$$

$W = 2.4 \times 10^{-5}$ जूल

यह छड़ की ऊर्जा में वृद्धि है।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. वह बल जिसके लगने से वस्तु अपना आकार या रूप बदल लेती है, क्या कहलाता है?

उत्तर- विरूपक बल

प्र.2. वह गुण जिससे बाह्य बल हटा लिये जाने पर वस्तु अपने प्रारम्भिक स्वरूप को प्राप्त कर लेती है क्या कहलाता है?

उत्तर- प्रत्यास्थता

प्र.3. प्रतिबल का मात्रक क्या होता है?

उत्तर- न्यूटन प्रति वर्गमीटर (Nm^{-2})

प्र.4. विकृति की विमा लिखिए।

उत्तर- विकृति = $[M^0L^0T^0]$, विमाहीन राशि

प्र.5. ताँबा, इस्पात, काँच तथा रबर के प्रत्यास्थता गुणाकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

उत्तर- रबर, काँच, ताँबा, इस्पात

प्र.6. प्रत्यास्थता सीमा में प्रतिबल एवं विकृति का अनुपात क्या कहलाता है?

उत्तर- प्रत्यास्थता गुणांक

प्र.7. प्रत्यास्थता गुंणाक का मात्रक क्या होता है?

उत्तर- न्यूटन प्रति वर्ग मीटर (Nm^{-2})

प्र.8. अनुप्रस्थ विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात क्या कहलाता है?

उत्तर- पॉयसन अनुपात = $\frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$

प्र.9 क्या प्रतिबल सदिश राशि है?

उत्तर- नहीं, प्रतिबल सदिश राशि नहीं है।

प्र.10. किसी ठोस को दबाने पर व किसी तार को खींचने पर परमाणुओं की स्थितिज ऊर्जा बढ़ेगी अथवा घटेगी ?

उत्तर- हाँ, स्थितिज ऊर्जा दोनों स्थितियों में बढ़ेगी।

प्र.11. जब हम किसी तार को खींचते हैं तो हमें कार्य क्यों करना पड़ता है?

उत्तर- आन्तरिक प्रतिक्रिया बलों के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है जो प्रत्यास्थता ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है।

प्र.12. दृढ़ता गुणांक का विमीय सूत्र क्या है?

उत्तर- $[M^1L^{-1}T^{-2}]$.

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. प्रत्यास्थता से क्या अभिप्राय हैं?

उत्तर- किसी ठोस का वह गुण जिसके कारण ठोस किसी बाह्य बल या विरूपक बल के कारण होने के वाले आकार एवं आकृति के परिवर्तन का विरोध करता है, तथा ऐसे बल को हटा लेने पर अपनी प्रारम्भिक पहली अवस्था प्राप्त कर लेता है, **प्रत्यास्थता** कहलाता है।

प्र.2. प्रत्यानयन बल क्या होते हैं?

उत्तर- जब किसी पदार्थ पर बाह्य बल लगाने से उसके आकार या स्वरूप या दोंनों मे परिवर्तन आ जाता है, तब पदार्थ में आन्तरिक प्रतिक्रिया बल उत्पन्न होता है, जो बाह्य बल हटा लेने पर पदार्थ को पूर्व आकार या स्वरूप में लाता है। यही आन्तरिक प्रतिक्रिया बल **प्रत्यानयन बल** कहलाता है।

प्र.3. प्रतिबल किसे कहते हैं?

उत्तर- साम्यावस्था में विकृति के कारण पदार्थ के एकांक क्षेत्रफल पर उत्पन्न होने वाला आन्तरिक प्रतिक्रिया बल (प्रत्यानयन बल) प्रतिबल कहलाता है।

अर्थात्, प्रतिबल = $\frac{\text{आन्तरिक प्रतिक्रिया बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$

आन्तरिक प्रतिक्रिया बल बाह्य आरोपित बल F के बराबर होता है,

$\therefore$ प्रतिबल = $\frac{\text{बाह्य बल (F)}}{\text{क्षेत्रफल (A)}}$ न्यूटन/मीटर^2

प्र.4. विकृति क्या होती हैं?

उत्तर- जब किसी वस्तु पर बाह्य विरूपक बल लगाया जाता है तब उसकी लम्बाई अथवा आयतन अथवा स्वरूप में परिवर्तन होता है। बाह्य विरूपक बल के कारण होने वाले इस प्रकार के अनुपातिक परिवर्तन को **विकृति** कहते है।

विकृति = $\frac{\text{लम्बाई/आयतन /आकृति में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई/आयतन/आकृति}}$

प्र.5. प्रत्यास्थता सीमा से क्या अभिप्राय है?

उत्तर- किसी प्रत्यास्थ पदार्थ के लिये विरूपक बल लगाने पर उत्पन्न विकृति एक सीमा तक प्रतिबल के समानुपाती होती है। यही सीमा **प्रत्यास्थता सीमा** कहलाती है। इस सीमा के अन्तर्गत ही विरूपक बल के हट जाने पर वस्तु प्रत्यास्थता गुण के कारण अपनी मूल अवस्था में लौट आती हैं। वस्तु में प्रत्यास्थता सीमा से अधिक

विकृति उत्पन्न की जाये तो वह पुनः अपनी मूलअवस्था में वापस नहीं लौट पाती है, तथा आंशिक या पूर्णरूप से विरूपित रह जाती है।

प्र.6. पॉयसन अनुपात क्या होता है?

उत्तर- किसी पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता सीमा में अनुप्रस्थ विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात **पॉयसन अनुपात** कहलाता हैं। इसे σ से प्रदर्शित करते है।

$$\sigma = \frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$$

पॉयसन अनुपात अनुपात एक मात्रकहीन एवं विमाहीन राशि है, क्योंकि दो प्रकार की विकृतियों का अनुपात है। व्यवहार में इसका का मान 0 व 1/2 के मध्य पाया जाता है।

प्र.7. हुक का नियम लिखिये।

उत्तर- प्रत्यास्थता की सीमा में किसी वस्तु के लिये प्रतिबल विकृति के समानुपाती होता है। अर्थात्

$$\text{प्रतिबल} \propto \text{विकृति}$$

या
$$\text{प्रतिबल} = E \times \text{विकृति}$$

जहाँ समानुपाती स्थिरांक E को पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक कहते है। उपरोक्त नियम **हुक का नियम** जाना जाता है।

प्र.8. किसी ठोस की दृढ़ता से क्या तात्पर्य है?

उत्तर- किसी ठोस पदार्थ में पाये जाने वाला वह गुण जिसके द्वारा बाह्य विरूपक बल के प्रभाव में उसके आकार एवं स्वरूप में परिवर्तन सुगमता से संभव न हो, **दृढ़ता** कहलाता है। अधिक दृढ़ता वाले ठोस पदार्थों की अपरूपण विकृति का मान नगण्य होता है। दृढ़ता का मूल कारण ठोसों में अणुओं का परस्पर दृढ़ता से बंधे रहना होता है, अर्थात् अणुओं के मध्य अन्तः आणुविक बल अत्याधिक पाया जाता है।

प्र.9. पूर्ण प्रत्यास्थ, प्लास्टिक व दृढ पिण्ड किन्हें कहते हैं? इन की सीमाओं का उल्लेख कीजिए?

उत्तर- ऐसे पिण्ड जिन पर प्रत्यास्थता सीमा में विरूपक बल लगाने पर आकार एवं आकृति में परिवर्तन हो तथा विरूपक बल हटा लेने पर पूर्णतः अपनी पूर्व अवस्था में आ जाते हैं, **पूर्ण प्रत्यास्थ पिण्ड** कहलाते हैं। प्रकृति में ऐसा कोई पदार्थ नहीं हैं जो पूर्ण प्रत्यास्थ हो एक निश्चित सीमा तक के बल के लिये ही पदार्थ पूर्ण प्रत्यास्थ माना जा सकता है। ऐसे पिण्ड जिन पर विरूपक बल हटा लेने पर अपनी पूर्ण अवस्था में नहीं लौटते हैं तथा सदैव के लिये विरूपित हो जाते हैं, **प्लास्टिक पिण्ड** कहलाते है। ऐसे पिण्डों के लिए विरूपक बल के लिये प्रत्यास्थता सीमा से बाहर जाना होता है। ऐसे पिण्ड जिन पर बाह्य बल लगाने पर उनके कणों के मध्य की दूरियाँ अपरिवर्तित रहती हों, दृढ़ पिण्ड कहलाते हैं। इन पिण्डों का प्रत्यास्थता गुणांक अनन्त होता है।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. प्रतिबल, विकृति, प्रत्यास्थता सीमा को समझाइये तथा पदार्थ मे उत्पन्न होने वाली विभिन्न विकृतियों की व्याख्या कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 10.3 व 10.2 पर देखें।

प्र.2. प्रत्यास्थता, प्रत्यास्थता सीमा, पराभव बिन्दु तथा विभंजक बिन्दु समझाइऐ।

उत्तर- अनुच्छेद 10.5 पर देखें।

प्र.3. प्रतिबल, विकृति तथा प्रत्यास्थता गुणांक पदों को समझाइये यंग प्रत्यास्थता गुणांक को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 10.3 व 10.6 तथा 10.6.1 पर देखें।

प्र.4. पॉयसन निष्पति क्या होती है? इसकी सीमाओं का वर्णन करो।

उत्तर- अनुच्छेद 10.7 पर देखें।

प्र.5. यंग प्रत्यास्थता गुणांक, दृढता गुणांक तथा आयतन गुणांक की परिभाषा दीजिए। यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करने की सर्ल की विधि का वर्णन कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 10.6.1, 10.6.2, 10.6.3 तथा 10.9 पर देखें।

प्र.6. प्रत्यास्थ प्रतिबल की परिभाषा दीजिये। यदि किसी तार को बाहर से बल लगाकर उसकी लम्बाई मे वृद्धि की जाये तो सिद्ध कीजिए कि तार के प्रति एकांक आयतन पर किया गया कार्य = ½ × प्रतिबल × विकृति

उत्तर- अनुच्छेद 10.3 व 10.8 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. एक तार में 4×10^{-4} रेखीय विकृति उत्पन्न करने से 4.8×10^{7} $N\,m^{-2}$ का प्रतिबल उत्पन्न होता है। तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- रेखीय विकृति $\frac{l}{L} = 4\times10^{-4}$

प्रतिबल $\frac{F}{A} = 4.8\times10^{-7}\,Nm^{-2}$

$\because$ पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \frac{F/A}{l/L}$

या $Y = \frac{4.8\times10^{7}}{4\times10^{-4}}$

$$Y = 1.2\times10^{11}\,Nm^{-2}$$

प्र.2. हिन्द महासागर की औसत गहराई लगभग **3 km** है। महासागर की तली में पानी के भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ की गणना कीजिए, दिया है कि पानी का आयतन गुणांक $2.2\times10^{9}\,N\,m^{-2}$ है ($g = 10\,m\,s^{-2}$)।

हल–औसत गहराई $h = 3\ Km = 3 \times 10^3 m$

पानी का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $K = 2.2 \times 10^9 Nm^{-2}$

$g = 10ms^{-2}$

पानी का घनत्व $d = 1\times10^3\ Kg\ m^{-3}$

महासागर की तली में पानी का भिन्नात्मक संपीडन $\frac{\Delta V}{V} = ?$

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $K = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \frac{\text{दाब (P)}}{\text{आयतन विकृति}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$

$$\because \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{P}{K} = \frac{hdg}{K}$$

या $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\times10^3\times1\times10^3\times10}{2.2\times10^9}$$

$$= 1.36 \times 10^{-2}$$

$$\%\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{V}\times100 = 1.36\times10^{-2}\times100 = 1.36\%$$

प्र.3. एक 2 mm व्यास तथा 0.5 m लम्बाई के तार को एक सिरे पर कस कर दूसरे सिरे पर 0.8 rad से मरोड़ा जाता है। तार की सतह पर अपरूपण विकृति ज्ञात कीजिए।

हल– तार का व्यास $= 2mm = 2\times10^{-3}\ m$

तार की लम्बाई $L = 0.5\ m$

तार की त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{2\times10^{-3}}{2} m = 1\times10^{-3} m$

स्पर्शीय मरोड़ कोण $\Delta\theta = 0.8\ rad$

$\because$ तार की सतह पर अपरूपण विकृति $\theta = \frac{\Delta x}{L} = \frac{r\times\Delta\theta}{L}$

या $$\phi = \frac{1\times10^{-3}\times0.8}{0.5} = 1.6\times10^{-3} rad$$

या $$\phi = \left(1.6\times10^{-3}\times\frac{180}{\Pi}\right)^\circ = \left(1.6\times10^{-3}\times\frac{180}{3.14}\right)^\circ$$

$$\phi = 0.0917^\circ \simeq 0.092^\circ$$

प्र.4. ताँबे का तार 2.2 m लम्बा तार तथा इस्पात का एक 1.6 m लम्बा तार जिन में दोनों के व्यास 3.0 mm है सिरे से जुड़े हुए है। जब इसे एक भार से तनित किया गया तो कुल विस्तार 0.7 mm हुआ। लगाए गये भार का मान ज्ञात कीजिए ?

हल– ताँबे के तार की लम्बाई $l_1 = 2.2m$

इस्पात के तार की लम्बाई $l_2 = 1.6m$

तारों के व्यास $= 3.0m$

$\because$ तारों की त्रिज्या $r = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{3.0}{2} mm = 1.5\times10^{-3} m$

एक भार से तनित करने पर कुल विस्तार

$$\Delta l = 0.7mm = 7\times10^{-4} m$$

लगाया गया भार $m.g = ?$ (जहाँ $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$)

ताँबे का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y_1 = 1.1\times10^{11} Nm^{-2}$

इस्पात का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y_2 = ?$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{mgl_1}{\pi r^2 Y_1} + \frac{mgl_2}{\pi r^2 Y_2}$$

या $$\Delta l = \frac{mg}{\pi r^2}\left(\frac{l_1}{Y_1} + \frac{l_2}{Y_2}\right)$$

$$\because\ mg = \frac{\pi r^2 . \Delta l}{\left(\frac{l_1}{Y_1} + \frac{l_2}{Y_2}\right)}$$

या $$m.g = \frac{22}{7}\times\frac{1.5\times10^{-3}\times1.5\times10^{-3}\times7\times10^{-4}}{\left(\frac{2.2}{1.1\times10^{11}} + \frac{1.6}{2\times10^{11}}\right)}$$

या $$m.g = \frac{22\times1.5\times1.5\times10^{-10}}{\frac{1}{10^{11}}\times(2+0.8)} = \frac{49.50}{2.8}\times10^1$$

$$mg = 1.77\times10^2 N \simeq 1.8\times10^2 N$$

प्र.5. एक 5 मी. लम्बी फौलाद की छड़ दो दृढ़ आधारों के बीच कसी हुई है। फौलाद का रेखीय प्रसार गुणांक $= 12\times10^{-6}/^\circ C$ तथा $Y = 2\times10^{11}\ N\ m^{-2}$। यदि ताप में $40^\circ C$ की वृद्धि हो जाए तो छड़ में उत्पन्न प्रतिबल ज्ञात करो।

हल– फौलाद की छड़ की लम्बाई $L = 5m$

फौलाद का रेखीय प्रसार गुणांक $\alpha = 12\times10^{-6}/^\circ C$

$y = 2\times10^{11}\ Nm^{-2}$

ताप में वृद्धि $\Delta t = 40^\circ C$

छड़ में उत्पन्न प्रतिबल $= ?$

लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = \alpha . L. \Delta t$

$$\because\quad \Delta l = 12\times10^{-6}\times5\times40$$

या $\Delta l = 24\times10^{-4} m$

$\because$ अनुदैर्ध्य विकृति $= \frac{\Delta t}{L} = \frac{24\times10^{-4}}{5} = 4.8\times10^{-4}$

$\because$ छड़ में उत्पन्न प्रतिबल $= Y \times$ अनुदैर्ध्य विकृति

$= 2\times10^{11}\times4.8\times10^{-4}$

$= 9.6\times10^7 Nm^{-2}$

प्र.6. एक $1\ mm^2$ परिच्छेद तथा 2 m लम्बे तार में 0.1 mm वृद्धि उत्पन्न करने के लिए कितना कार्य करना पड़ेगा?

हल- तार इस्पात का लिया गया है, जिसके लिये यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 2\times10^{11}\ Nm^{-2}$ तार का परिच्छेद $A = 1mm^2 = 10^{-6}m^2$

तार की लम्बाई $L = 2m.$

तार की लम्बाई में वृद्धि $l = 0.1mm = 10^{-4}m$

तार में वृद्धि के लिये किया गया कार्य $W = ?$

$$\text{कुल किया गया कार्य} = \frac{1}{2}\times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{आयतन}$$

$$W = \frac{1}{2}\times (Y\times \text{विकृति})\times \text{विकृति}\times \text{आयतन}$$

$$= \frac{1}{2}Y\times\left(\frac{l}{L}\right)^2\times A.L$$

$$= \frac{1}{2}Y\ \frac{l^2A}{L}$$

$$= \frac{1}{2}\times2\times10^{11}\times\frac{10^{-4}\times10^{-4}}{2}\times10^{-6}$$

$$= 0.5\times10^{-3}\ J = 5\times10^{-4}\ J$$

प्र.7. जब एक रबड की डोरी खीचीं जाती है तब आयतन में परिवर्तन उसके रूप में परिवर्तन की अपेक्षा उपेक्षीणीय है। रबड़ के लिए पाइसा निष्पति का परिकलन कीजिए।

हल- माना कि रबर की डोरी की प्रारंभिक लम्बाई व त्रिज्या क्रमश: L व R हैं। जब डोरी खींची जाती है तब लम्बाई में वृद्धि dL तथा त्रिज्या में कमी –dR होती है।

$$\because \text{पॉयसन निष्पत्ति } \sigma = \left(\frac{\frac{-dR}{R}}{\frac{dL}{L}}\right) \quad ...(1)$$

डोरी का आयतन $V = \pi R^2 L$

L के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dL} = \frac{d}{dL}\left(\pi R^2 L\right) = \pi\frac{d}{dL}\left(R^2L\right)$$

$$\text{या } \frac{dV}{dL} = \pi\left[R^2\times1 + L\times2R.\frac{dR}{dL}\right]$$

$$\text{या } \frac{dV}{dL} = \pi R^2\left[1+2\times\frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dL}{L}}\right]$$

$\pi R^2 = A$

= डोरी का परिच्छेद

समीकरण (1) से मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\because \frac{dV}{dL} = A\,[1 - 2\sigma]$$

$$\because \frac{dV}{AdL} = 1 - 2\sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(1-\frac{dV}{AdL}\right)$$

प्रश्नानुसार आयतन में परिवर्तन dV उसके रूप में परिवर्तन की अपेक्षा उपेक्षणीय है। $\because \frac{dV}{AdL}$ का का मान उपेक्षणीय होगा।

$$\because \sigma = \frac{1}{2}\ (1)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} = 0.5$$

प्र.8. रबड की एक ठोस गेंद को **200 m** गहरी चिलका झील के उपरी सतह से उसकी तली तक ले जाने में गेंद के आयतन में **0.1** प्रतिशत की कमी हो जाती है। झील के जल का घनत्व **$1.0\times10^3\ kg\ m^{-3}$** है। रबड के आयतन प्रत्यास्थता गुंणाक का मान ज्ञात कीजिए। **($g = 10\ m\ s^{-2}$)**

हल- चिलका झील की गहराई h = 200m, पानी का घनत्व $d = 1\times10^3 kg\ m^{-3}$ झील के ऊपरी सतह से उसकी तली तक ले जाने में गेंद के आयतन में 0.1 प्रतिशत की कमी हो जाती है।

$$\therefore \text{आयतन विकृति} = \frac{dV}{V} = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 1\times10^{-3}$$

प्रतिबल = दाब में परिवर्तन = hdg

$= 200\times1\times10^3\times10$

$= 2\times10^6\ N/m^2$

∵ आयतन प्रत्यास्थता गुणंक =

$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \frac{2\times10^6}{1\times10^{-3}} = 2\times10^9\ Nm^{-2}$$

प्र.9. सीसे के **50 cm** भुजा के एक वर्गाकार स्लैब पर, ,जिसकी मोटाई **10 cm** है, की पतली फलक पर **9.0×10^4 N** का एक अपरूपक बल लगा है। दूसरा पतला फलक फर्श से दृढ़ता पूर्वक चिपका हुआ है। उपरी फलक कितना विस्थापित हो जावेगा ?

हल- उस पतली फलक का क्षेत्रफल जिस पर अरूपक बल लगाया गया है।

$A = L\times B = 50cm\times10cm$

$= 0.50m\times0.10m$

$= 0.05m^2$

$\because$ प्रतिबल = $\frac{F}{A} = \frac{9.0\times10^4}{0.05} = 1.80\times10^6\,Nm^{-2}$

सीसे का अपरूपण गुणांक $\eta = 5.5\times10^9\,Nm^{-2}$

$\because$ ऊपरी फलक का विस्थापन = $\Delta x = \frac{\text{प्रतिबल}\times L}{\eta}$

या $\Delta x = \frac{1.80\times10^6\times0.50}{5.5\times10^9}$

या $\Delta x = 0.16\times10^{-3}\,m$

$\therefore \quad \Delta x = 0.16\,mm$

प्र.10. 4.7 m लम्बे व $3.0\times10^{-5}\,m^2$ अनुप्रस्थ काट के स्टील के तार तथा 3.5 m लम्बे व $4.0\times10^{-5}\,m^2$ अनुप्रस्थ काट के ताँबे के तार पर दिए गये समान परिमाण के भारों को लटकाने पर उनकी लम्बाई में समान वृद्धि होती है। स्टील तथा ताँबे के यंग प्रत्यास्थता गुणाकों में क्या अनुपात है?

हल- स्टील के तार के लिये

लम्बाई $L_1 = 4.7\,m$

अनुप्रस्थकाट $A_1 = 3.0\times10^{-5}m^2$

ताँबे के तार के लिये

लम्बाई $L_2 = 3.5m$

अनुप्रस्थकाट $A_2 = 4.0\times10^{-5}m^2$

दोंनों तारों पर लटकाया गया समान भार = M.g

दोंनों तारों में से प्रत्येक की लम्बाई में वृद्धि = l

स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y_1 = \frac{Mg.L_1}{A_1.l}$$

ताँबे का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y_2 = \frac{Mg.L_2}{A_2.l}$$

$$\therefore \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{L_1}{L_2}\times\frac{A_2}{A_1} = \frac{4.7}{3.5}\times\frac{4.0\times10^{-5}}{3.0\times10^{-5}} = \frac{1.79}{1}$$

$$\frac{Y_1}{Y_2} = 1.8 \qquad \because \qquad Y_1 : Y_2 = 1.8:1$$

प्र.11. दो तार एक ही धातु के बने हुए हैं। प्रथम तार की लम्बाई द्वितीय तार की लम्बाई की आधी है तथा उसका व्यास दूसरे तार के व्यास का दुगुना है। यदि दोनों तारों पर समान भार लटकाया जाये तो उनकी लम्बाईयों में हुई वृद्धि का क्या अनुपात होगा ?

हल- एक ही धातु के प्रथम तार की लम्बाई $L_1 = \frac{L}{2}$ (प्रश्नानुसार)

दूसरे तार की लम्बाई $\quad L_2 = L$ (माना)

प्रथम तार का व्यास = 2 × द्वितीय तार का व्यास

$\therefore$ प्रथम तार की त्रिज्या = 2 × द्वितीय तार की त्रिज्या

$\because \; r_1 = 2r_2$

दोंनों तारों पर लटकाया गया समान भार = M.g

उन तारों की लम्बाईयों में वृद्धि का अनुपात $l_1 : l_2 = ?$

प्रथम तार की लम्बाई में वृद्धि

$$l_1 = \frac{M.gL_1}{\pi r_1^2 Y} = \frac{Mg\times\frac{L}{2}}{\pi r_1^2 Y} = \frac{MgL}{2\pi r_1^2 Y}$$

द्वितीय तार की लम्बाई में वृद्धि

$$l_2 = \frac{M.gL_2}{\pi r_2^2.Y} = \frac{Mg.L}{\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2.Y} = \frac{4MgL}{\pi r_1^2 Y}$$

$$\therefore \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{MgL}{2\pi r_1^2 Y}}{\frac{4MgL}{\pi r_1^2 Y}} = \frac{1\times1}{2\times4} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad l_1 : l_2 = 1:8$$

प्र.12. एक पदार्थ $10^9\,N\,m^{-2}$ के प्रतिबल से टूट जाती है यदि पदार्थ का घनत्व $3\times10^3\,kg\,m^{-3}$ हो तो उससे बने तार की वह लम्बाई ज्ञात कीजिये, जिससे वह तार लटकाये जाने पर स्वतः ही अपने भार से टूट जाये ।

हल- माना तार की अधिकतम लम्बाई L तथा उसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है तब तार का अपना भार

W = ALdg

जहाँ d तार के पदार्थ का घनत्व है।

इस भार के कारण भंजक प्रतिबल $= \frac{W}{A}$

$\therefore \quad$ भंजक प्रतिबल $= \frac{ALdg}{A} = L.d.g$

$\therefore \quad$ तार की लम्बाई $L = \frac{\text{भंजक प्रतिबल}}{d.g}$

या $\quad L = \frac{10^9}{3\times10^3\times9.8} = 3.40\times10^4\,m$

प्र.13. एक ही धातु के दो तारों की त्रिज्याओं का अनुपात 2:1 है इनको समान बल आरोपित करके खींचा जाए तो उनमें उत्पन्न प्रतिबलों का अनुपात क्या होगा ?

हल- एक ही धातु के दो तारों की त्रिज्याओं का अनुपात

$$r_1 : r_2 = 2:1 \text{ या } \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1}$$

दोंनों तारों पर आरोपित समान बल = F

∴ दोनों तारों पर उत्पन्न प्रतिबलों का अनुपात

$$= \frac{\frac{F}{A_1}}{\frac{F}{A_2}} = \frac{\frac{F}{\pi r_1^2}}{\frac{F}{\pi r_2^2}}$$

$$= \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

∵ प्रतिबलों का अनुपात = 1: 4

प्र.14. किसी दृढ़ आधार से **2 m** लम्बे तथा **3 g** स्टील तार के द्वारा **2.5 kg** भार लटकाया जाता है। स्टील के तार में **2.5 mm** की लम्बाई में वृद्धि प्रेक्षित होती है। यदि स्टील के तार का घनत्व **7.8×10^3 kg m^{-3}** हो तो उसके पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- स्टील के तार की लम्बाई $L = 2m.$

स्टील के तार का द्रव्यमान $m = 3g = 3\times10^{-3}Kg$

तार से लटकाया गया भार $M = 2.5$ Kg भार

तार की लम्बाई में वृद्धि $l = 2.5\ mm = 2.5 \times 10^{-3} m$

स्टील के तार का घनत्व $d = 7.8 \times 10^{-3}\ Kg\ m^{-3}$

यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = ?$

$$\because \quad \text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} \Rightarrow d = \frac{m}{\pi r^2 L}$$

$$\therefore \quad \pi r^2 = \frac{m}{L.d} = \frac{3\times10^{-3}}{2\times7.8\times10^3} = 1.92\times10^{-7} m^2$$

$$\because \quad Y = \frac{M.g.L}{\pi r^2 l}$$

$$\text{या} \quad Y = \frac{2.5\times9.8\times2}{1.92\times10^{-7}\times2.5\times10^{-3}} = \frac{49}{4.8}\times10^{10}$$

$$Y = 10.20 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$$

प्र.15. **0.8 cm^2 अनुप्रस्थ काट की एक ताँबे की छड़ को दोनों ओर दृढ़तापूर्वक कस दिया जाता है। यदि छड़ का ताप 20°C कम कर दिया जाये तो छड़ में उत्पन्न तनाव का परिकलन कीजियें । ताँबे का यंग प्रत्यास्थता गुणाक 11×10^{10} N m^{-2} तथा प्रसार गुणाक 17×10^{-6} /°C है।**

हल- ताँबे की छड़ का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल $A = 0.8\ cm^2$

या $A = 8 \times 10^{-5} m^2$

छड़ के ताप में परिवर्तन $\Delta t = 20°C$

छड़ में उत्पन्न तनाव $T = ?$

यंग प्रत्थास्थता गुणांक $Y = 11\times10^{10}\ Nm^{-2}$

प्रसार गुणांक $\alpha = 17\times10^{-6}/°C$

लम्बाई में परिवर्तन $\Delta L = \alpha.L.\ \Delta t$

∵ अनुदैर्ध्य विकृति $\frac{\Delta L}{L} = \alpha.\Delta t$

$= 17 \times 10^{-6} \times 20$

$= 3.4 \times 10^{-4}$

$$\because \quad Y = \frac{\left(\frac{T}{A}\right)}{\frac{\Delta L}{L}}$$

∴ छड़ में उत्पन्न तनाव $T = Y.\ A.\ \frac{\Delta L}{L}$

$= 11\times 10^{10} \times 8 \times 10^{-5} \times 3.4 \times 10^{-4}$

$= 2992$ N