अध्याय **2**

एक चर वाले रैखिक समीकरण
(LINEAR EQUATIONS IN ONE VARIABLE)

SCERT TELANGANA

2.0 परिचय

सागर और लता संख्याओं के साथ खेल रहे हैं। सागर ने लता से कहा, "मैंने एक संख्या सोची है। यदि मैं उसके दोगुना में से 7 कम कर दूँ तो 35 बचेगा। क्या तुम वह संख्या बता सकती हो?"

लता ने कुछ देर सोचने के बाद उत्तर दिया, "क्या तुम ही उत्तर बता सकते हो?"

अब हम देखेंगे कि कैसे लता ने उत्तर बताया।

माना कि संख्या 'x' है। इसे दोगुणा करने पर '$2x$'

अब इसमें से 7 कम कर दीजिए। अर्थात, '$2x$' में से 7 घटा दीजिए। घटाने के बाद संख्या होगी

$2x - 7$

किंतु सागर के अनुसार वह 35 के बराबर है।

$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$

$\therefore \quad 2x = 35 + 7$ (7 का स्थानांतरण RHS की ओर करने पर)

$2x = 42$

$\therefore \quad x = \frac{42}{2}$ (2 का स्थानांतरण RHS की ओर करने पर)

$\therefore \quad x = 21$

$\therefore$ सागर द्वारा सोची गई संख्या 21 है।

> **तरकीब**
> अंतिम परिणाम लिखिए। उसमें 7 जोड़िए और परिणाम को आधा कीजिए।

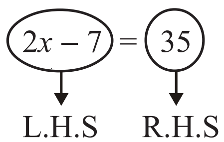
> **सूचना**
> पदों के स्थानांतरण पर
> '+' परिमाण '–' परिमाण होता है।
> '–' परिमाण '+' परिमाण होता है।
> '×' परिमाण '÷' परिमाण होता है।
> '÷' परिमाण '×' परिमाण होता है।

पिछली कक्षाओं में हमने सीखा है कि $2x - 7 = 35$ समीकरण का उदाहरण है। ऊपर की पद्धति से इस समीकरण को हल करने एवं सागर द्वारा सोची गई संख्या पता लगाने में लता को मदद मिली।

इस अध्याय में हम एक चर के रैखिक समीकरण अथवा सरल समीकरणों के बारे में चर्चा करेंगे। ऐसे समीकरणों को हल करने की विधि और इसके हर रोज की समस्याओं में उपयोग की भी चर्चा करेंगे।

आइए याद करें कि समीकरणों के बारे में हम क्या जानते हैं :

(i) बीजगणितीय समीकरण, बीजगणितीय व्यंजकों की समानता है जिसमें चर और अचर सम्मिलित हैं।



(ii) इसमें बराबर का चिह्न होता है।

(iii) बराबर चिह्न के बाँयीं ओर के व्यंजक को समीकरण का L.H.S (Left Hand Side) कहते हैं।

(iv) बराबर चिह्न के सीधी ओर के व्यंजन को समीकरण का R.H.S (Right Hand Side) कहते हैं।

(v) समीकरण में LHS और RHS का मान बराबर होता है।

यह चर के किसी निश्चित मान के लिए सही रहता है। यह मान समीकरण का हल कहलाता है।

$2x - 7 = 35$ यह केवल $x = 21$ के लिए सही है।

अर्थात, यदि $x = 21$

LHS $= 2x - 7$

$= 2 \times 21 - 7$

$= 35$

$=$ RHS

2.1 रैखिक समीकरण

निम्न समीकरणों पर ध्यान दीजिए।

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

समीकरण (1), (2) और (3) में प्रत्येक समीकरण का घातांक एक है। इसलिए वे रैखिक या एक घातीय समीकरण कहलाते हैं। जब कि समीकरण (4) का घातांक एक नहीं है। इसलिए यह रैखिक समीकरण नहीं है।

प्रयत्न कीजिए।

निम्न में से कौन से रैखिक समीकरण हैं।

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

2.2 एक चर वाले सरल समीकरण अथवा रैखिक समीकरण

निम्नलिखित समीकरण ध्यानपूर्वक देखिए।

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

हमने अभी-अभी सीखा है कि ये रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। प्रत्येक समीकरण में चर की संख्या का निरीक्षण कीजिए।

(i) और (ii) एक चर रैखिक समीकरण के उदाहरण हैं। किंतु समीकरण (iii) में दो चर 'x' और 'y' हैं। इसलिए इसे द्विचर रैखिक समीकरण कहते हैं।

SCERT TELANGANA

इस प्रकार $ax + b = 0$ या $ax = b$ रूप के समीकरणों को एक चर में रैखिक समीकरण अथवा सरल मीकरण कहते हैं, जहाँ a, b अचर है और $a \neq 0, x$ एक चर राशी है ।

प्रयत्न कीजिए।

निम्न में कौन से सरल समीकरण हैं?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

2.3 एक पक्ष में चर रखने वाले सरल समीकरण का हल करना

करल समीकरण (जिसमें चर एक पक्ष में हैं) हल करने की विधि का स्मरण कीजिए। उसी विधि का उपयोग करते हुए लता समस्या का हल ढूँढ़ पाई और सागर द्वारा सोची गई संख्या बताई।

उदाहरण 1: समीकरण हल कीजिए $3y + 39 = 8$

हल : दिया गया समीकरण : $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (39 को R.H.S. की ओर लाने पर)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (3 को R.H.S. की ओर लाने पर)

$\therefore 3y + 39 = 8$ 3 का हल $y = \frac{-31}{3}$ है।

सत्य/असत्य बताइए। उत्तर की जाँच कीजिए।

समीकरण हल करते समय काव्या ने ऐसे किया-

$3x + x + 5x = 72$

$9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$

वह कहाँ पर गलत है? सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

क्या आपने ध्यान दिया कि हल $(\frac{-31}{3})$ परिमेय संख्या है?

जाँच कीजिए : L.H.S. $= 3y + 39 = 3\,(\frac{-31}{3}) + 39 = -31 + 39 = 8$ R.H.S.

उदाहरण 2: $\frac{7}{4} - p = 11$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{7}{4} - p = 11$

SCERT TELANGANA

$-p = 11 - \frac{7}{4}$ ($\frac{7}{4}$ को R.H.S. की ओर लाने पर)

$-p = \frac{44-7}{4}$

$-p = \frac{37}{4}$

$\therefore p = -\frac{37}{4}$ (दोनों ओर –1 से गुणा करने पर)

p को LHS से RHS की ओर स्थानांतरित कीजिए और p का मान ज्ञात कीजिए। क्या p के मान में कोई परिवर्तन आया है?

जाँच कीजिए : L.H.S. = $\frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = RHS$

अभ्यास - 2.1

निम्न सरल समीकरण हल कीजिए।

(i) $6m = 12$ (ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$ (iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$ (vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$ (viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$ (x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$ (xii) $11n + 1 = 1$

(xiii) $7x - 9 = 16$ (xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

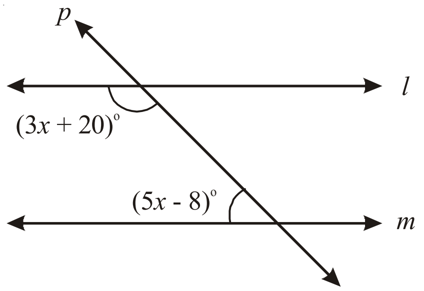
(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$ (xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

SCERT TELANGANA

2.3.1 कुछ अनुप्रयोग

निम्न उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए।

उदाहरण 3 : यदि $l \parallel m$, तो 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



हल : यहाँ $l \parallel m$ और p तिर्यक छेदी रेखा है।

अतः $3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$ (तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों का योग)

$3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$

$8x + 12^o = 180^o$

$8x = 180^o - 12^o$

$8x = 168^o$

$x = \frac{168^o}{8} = 21^o$; अतः $x = 21^o$

उदाहरण 4: यदि दो संख्याओं का योग 29 और एक संख्या दूसरी से 5 अधिक है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यह हमारी एक समस्या है। हम संख्याएँ नहीं जानते। हमें उन्हें ज्ञात करना है।

माना कि छोटी संख्या 'x' है, तो बड़ी संख्या '$x + 5$' होगी।

लेकिन दिया है कि इन दोनों संख्याओं का योग 29 है।

$\Rightarrow x + x + 5 = 29$

$\Rightarrow 2x + 5 = 29$

$\therefore 2x = 29 - 5$

$\therefore 2x = 24$

$x = \frac{24}{2}$ ('2' को RHS की ओर ले जाने पर)

$x = 12.$

SCERT TELANGANA

इसलिए छोटी संख्या $x = 12$ और

बड़ी संख्या $x + 5 = 12 + 5 = 17.$

जाँच कीजिए : 17, 12 से 5 अधिक है और उनका योग = 12 + 17 = 29.

उदाहरण 5: किसी संख्या के चौगुना में से 5 कम किया जाये तो वह 19 के बराबर होती है। वह संख्या मालूम कीजिए।

हल : यदि संख्या 'x' ली जाए तब

संख्या का चौगुना होगा '$4x$'

जह इसमें से 5 किया जाये तो यह 19 के बराबर होगी, अतः

$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$

$4x = 19 + 5$ (-5 को RHS ले जाने पर)

$4x = 24$

$\therefore x = \frac{24}{4}$ (4 को RHS ले जाने पर)

$\Rightarrow x = 6$

अतः वह संख्या 6 है।

जाँच कीजिए : 6 का चौगुना 24 और 24 – 5 = 19.

उदाहरण 6: एक आयताकार बगीचे की लंबाई, उसकी चौड़ाई से 17 मी अधिक है। यदि बगीचे की परिमिति 178 मी. हो तो बगीचे के माप बताइए।

हल : माना कि बगीचे की चौड़ाई = x मी

तब बगीचे की लंबाई = $x + 17$ मी

$\therefore$ परिमिति = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

= $2 (x + 17 + x)$ मी

= $2 (2x + 17)$ मी

लेकिन दिया है कि आयत का परिमाप 178 मी है।

$\therefore \quad 2 (2x + 17) = 178$

$4x + 34 = 178$

$4x = 178 - 34$

$4x = 144$

$x = \frac{144}{4} = 36$

SCERT TELANGANA

बगीचे की चौड़ाई = 36 मी

बगीचे की लंबाई = 36 + 17 = 53 मी

स्वयं इसकी जाँच करने का प्रयत्न कीजिए।

उदाहरण 7: दो संपूरक कोणों में अंतर 34 है। कोण बताइए।

हल : माना कि छोटा कोण x^o है।

चूँकि दोनों कोणों में अंतर 34^o है, बड़ा कोण $= x + 34^o$

चूँकि संपूरक कोणों का योग 180^o होता है

अत: $x + (x + 34) = 180^o$

$2x + 34 = 180^o$

$2x = 180 - 34 = 146^o$

$x = \frac{146^o}{2} = 73^o$

अत: छोटा कोण $x = 73^o$

बड़ा कोण $x + 34 = 73 + 34 = 107^o$

उदाहरण 8: विजया की माता की वर्तमान आयु, विजया की वर्तमान आयु के चारगुना अधिक है। 6 वर्ष के बाद उनके आयु का योग 62 वर्ष होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि विजया की वर्तमान आयु 'x' वर्ष है

तो हम निम्न तालिका बना सकते हैं-

	विजया	विजया की माँ
वर्तमान आयु	x	$4x$
6 वर्ष के बाद आयु	$x + 6$	$4x + 6$

$\therefore$ 6 वर्ष के बाद उनकी आयु का योग $= (x + 6) + (4x + 6)$

$= x + 6 + 4x + 6$

$= 5x + 12$

लेकिन दिया गया है कि 6 वर्ष के बाद उनकी आयु का योग 62 होगा, अत:

$\Rightarrow 5x + 12 = 62$

$5x = 62 - 12$

$5x = 50$

$x = \frac{50}{5} = 10$

SCERT TELANGANA

विजया की वर्तमान आयु $x = 10$ वर्ष

विजया की माँ की वर्तमान आयु $= 4x = 4 \times 10 = 40$ वर्ष

उदाहरण 9 : एक परीक्षा में 90 बहुवैकल्पिक प्रश्न पूछे गए। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक प्रदान किये जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक घटाया जाता है। सहाना को परीक्षा में 60 अंक मिले जबकि उसने सभी प्रश्नों के उत्तर दिये हैं, तो उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिये हैं?

हल : माना कि सही उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या 'x' है। तब गलत उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या होगी $= 90 - x$

दिया गया है कि प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक दिये जाते हैं।

$\therefore$ सही उत्तर के लिए कुल प्राप्तांक $= 2x$

और यह भी दिया गया है कि गलत उत्तर के लिए '1' अंक घटाया जाता है।

$\therefore$ प्राप्तांक में से घटाये जाने वाले अंकों की संख्या

$= (90 - x) \times 1 = 90 - x$

कुल अंक $= 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

लेकिन दिया है कि कुल प्राप्तांक 60 है।

$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$

$3x = 60 + 90$

$3x = 150$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

अतः सही उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या $x = 50$

जाँच

(50 x 2) - (40 x 1)

100 - 40 = 60

उदाहरण 10: रवि बैंक में कैशियर है। उसके पास क्रमशः ₹ 100, ₹50, ₹10 के नोट हैं। इन नोटों का अनुपात 2 : 3 : 5 रवि के पास कुल नगद ₹ 4,00,000 हैं तो उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने नोट हैं?

हल : माना कि ₹ 100 के नोटों की संख्या $= 2x$

₹ 50 के नोटों की संख्या $= 3x$

₹10 के नोटों की संख्या $= 5x$

$\therefore$ कुल रुपये $= (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

$200x + 150x + 50x = 400x$

परंतु प्रश्न के अनुसार कुल रुपये = ₹ 4, 00,000

संकेतः $2x : 3x : 5x$, 2 : 3 : 5 के समान है।

SCERT TELANGANA

$\Rightarrow \quad 400x = 4,00,000$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

अत: ₹ 100 के नोटों की संख्या $2x = 2 \times 1000 = 2000$

₹ 50 के नोटों की संख्या $3x = 3 \times 1000 = 3000$

₹ 10 के नोटों की संख्या $5x = 5 \times 1000 = 5000$

जाँच

2000 x 100 = 2L

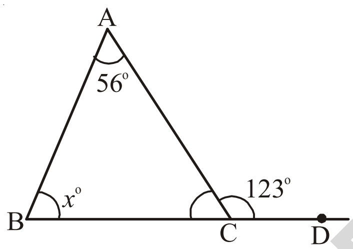
3000 x 50 = 1.5L

5000 x 10 = $\frac{.5L}{4Lakhs}$

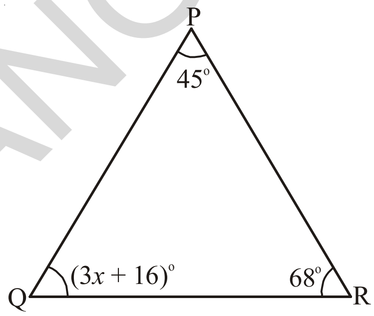
अभ्यास - 2.2

1. निम्न आकृतियों में ‘x’ ज्ञात कीजिए।

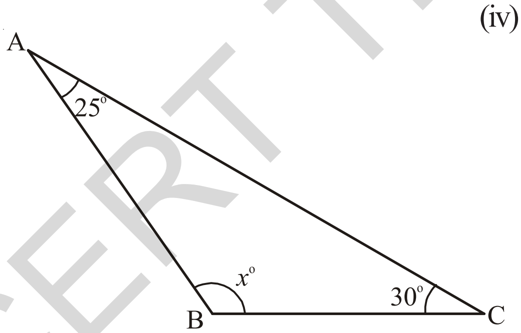
(i)



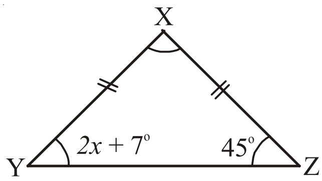
(ii)



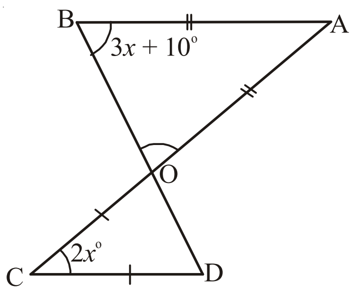
(iii)



(iv)



(v)



SCERT TELANGANA

2. दो संख्याओं में 8 का अंतर है। यजि बड़ी संख्या में 2 मिलाया जाये तो परिणाम छोटी संख्या से तिगुना होगा। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. वे दो संख्याएँ कौनसी हैं जिनका योग 58 और अंतर 28 है?
4. दो क्रमिक विषम संख्याओं का योग 56 है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. तीन क्रमिक 7 के गुणांकों का योग 777 है। वे गुणांक मालूम कीजिए।

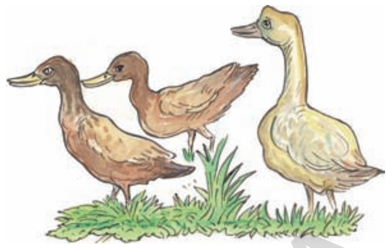
   (संकेत : 7 के तीन क्रमिक गुणज 'x', '$x + 7$', '$x + 14$')
6. एक आदमी 10 किमी पैदल चलता है, उसके बाद वह कुछ दूरी रेल से तय करता है और तत्पश्चात रेल द्वारा तय की गई दूरी के दोगुना मोटरकार द्वारा तय करता है। यदि कुल यात्रा 70किमी की हो तो उसने रेल द्वारा कितनी यात्रा की?
7. विनय ने पिजा खरीदा और उसे तीन टुकड़ों में काट दिया। जब उसने पहले टुकड़े का वजन किया तब उसे ज्ञात हुआ कि वह दूसरे टुकड़े से 7 ग्राम हल्का है और **तीसरा** टुकड़े से 4ग्राम भारी है। यदि पूर्ण पिजा का वजन 300 ग्राम हो तो प्रत्येक टुकड़े का वजन कितना होगा?

   (**संकेत :** प्रथम टुकड़े का वजन 'x' हो तो दूसरे टुकड़े का वजन '$x + 7$', **तीसरा** टुकड़े का वजन 'x - 4' है)
8. एक आयताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी 400 मी. है। क्षेत्र की लंबाई उसके चौड़ाई से 26 मी. अधिक है। इस क्षेत्र की लंबाई और चौड़ाई की गणना कीजिए।
9. एक आयताकार क्षेत्र की लंबाई, उसकी चौड़ाई के दोगुना से 8 मी. कम है। यदि आयताकार क्षएत्र का परिमाप 56 मी. हो तो इसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
10. एक त्रिभुज की दो समान भुजाएँ, तीसरी भुजा के दोगुणा से 5 मी. प्रत्येक भुजा कम हैं। यदि प्रत्येक त्रिभुज का परिमाप 55 मी. हो तो इसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।
11. दो पूरक कोणों में अंतर 12^o है। कोण ज्ञात कीजिए।
12. राहुल और लक्ष्मी की आयु में अनुपात 5:7 है। चार वर्ष बाद, उनकी आयु का योग 56 वर्ष होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
13. एक परीक्षा में 180 वैकल्पिक प्रश्न हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 प्राप्त होते हैं, और प्रत्येक छोड़े गये व गलत उत्तर के लिए एक अंक कुल प्राप्तांक में से घटाये जाते हैं। यदि एक छात्र को इस परीक्षा में 450 अंक प्राप्त होते हैं तो उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिये?
14. ₹ 500 की धनराशि ₹ 5 और ₹ 10 के नोटों के रूप में है। यदि कुल नोटों की संख्या 90 हो तो प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

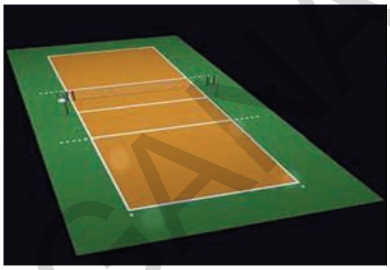
   (**संकेत :** ₹ 5 के नोटों की संख्या 'x' है, तो ₹ 10 के नोटों की संख्या = $90–x$)

SCERT TELANGANA

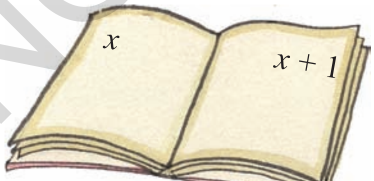
15. एक व्यक्ति ने पेन और पेन्सिल खरीदने में ₹ 564 खर्च किये। यदि प्रत्येक पेन का मूल्य ₹ 7 और प्रत्येक पेन्सिल का मूल्य ₹ 3 हो तथा खरीदे गये कुल वस्तुओं की संख्या 108 हो तो उसने प्रत्येक प्रकार के कितने वस्तु खरीदे?



16. एक पाठशाला के वालीबाल मैदान का परिमाप 177 फीट है और इसकी लंबाई, इसकी चौड़ाई की दोगुना है। तो वालीबाल मैदान की लंबाई-चौड़ाई बताइए।



17. एक पुस्तक के पृष्ठों पर अंकित पृष्ठसंख्याओं का योग 373 है। वह पुस्तक कितने पृष्ठों की है?



2.4 दोनों पक्षों में चर रहनेवाले समीकरण हल करना

हम जानते हैं कि दो व्यंजकों के मानों की समानता ही समीकरण है। $2x - 7 = 35$ समीकरण में दो व्यंजक 2x-7 और 35 है। अधिकतम उदाहरणों में जो हमने अबतक देखे हैं, RHS केवल एक संख्या है। परंतु यह हमेशा आवश्यक नहीं है। इसलिए दोनों तरफ के व्यंजकों में चर रह सकते हैं। यह कैसे होता है, अब हम देखेंगे।

निम्न उदाहरण की ओर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 11: रफी और फातिमा की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 5 है। दस वर्ष बाद उनकी आयु में अनुपात 9 : 7 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि रफी और फातिमा की वर्तमान आयु का अनुपात 7:5,

हम रफी की आयु $7x$ और फातिमा की आयु $5x$ ले सकते हैं।

(सूचित किया जाता है कि $7x$ और $5x$ का अनुपात 7:5 के समान है)

10 वर्ष के बाद रफी की आयु $= 7x + 10$

10 वर्ष के बाद फातिमा की आयु $= 5x + 10$

10 वर्ष के बाद रफी और फातिमा की आयु में अनुपात होगा $7x + 10 : 5x + 10$

परंतु दिये अनुसार यह अनुपात 9 : 7 होनी चाहिए।

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

SCERT TELANGANA

अर्थात, $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

$\Rightarrow \quad 49x + 70 = 45x + 90.$

क्या तुमने देखा है कि ऊपर के समीकरण में दोनों ओर बीजगणितीय व्यंजक हैं। अब हम ऐसे समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

ऊपर का समीकरण है $49x + 70 = 45x + 90$

$\Rightarrow \quad 49x - 45x = 90 - 70$ (70 को RHS और $45x$ को LHS स्थानांतरण करने पर)

$\therefore \quad 4x = 20$

$\therefore \quad x = \frac{20}{4} = 5$

अतः रफी की आयु $7x = 7 \times 5 = 35$ वर्ष

और फातिमा की आयु $5x = 5 \times 5 = 25$ वर्ष

उदाहरण 12: Solve $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$

हल : $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (कोष्टक निकालने पर)

$13x + 4 = 7x - 1$ (सदृश पदों को जोड़ने पर)

$13x - 7x = -1 - 4$ (4 को RHS, $7x$ को LHS स्थानांतरित करने पर)

$6x = -5$

$x = \frac{-5}{6}$ (6 को RHS स्थानांतरित करने पर)

अभ्यास - 2.3

निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

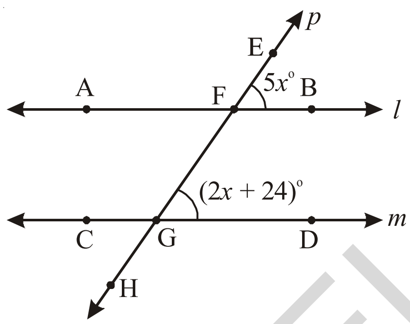
1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x-2)$

SCERT TELANGANA

8. $3(t-3) = 5(2t-1)$
9. $5(p-3) = 3(p-2)$
10. $5(z+3) = 4(2z+1)$
11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$
13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$
14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

2.4.1 कुछ अधिक अनुप्रयोग

उदाहरण 13: आकृति में $l \parallel m$, और p तिर्यक छेदी रेखा है। 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है कि $l \parallel m$ और p तिर्यक छेदी रेखा है।

इसलिए $\angle EFB = \angle FGD$ (संगत कोण)

इसलिए $5x^o = (2x+24)^o$

$5x - 2x = 24$

$3x = 24$

$x = \frac{24}{3} = 8^o$

उदाहरण 14: हेमा उसकी बेटी दामिनी से 24 वर्ष आयु में बड़ी है। 6 वर्ष पहले, हेमा की आयु, दामिनी की आयु की तिगुना थी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दामिनी की वर्तमान आयु 'x' वर्ष है। तो हम निम्न तालिका बना सकते हैं।

	दामिनी	हेमा
वर्तमान आयु	x	$x + 24$
6 वर्ष पहले	$x - 6$	$(x+24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$

परंतु, दिया है कि 6 वर्ष पूर्व हेमा की आयु, दामिनी की आयु के तिगुना थी।

$\therefore\ x + 18 = 3(x-6)$

SCERT TELANGANA

$x + 18 = 3x - 18$

$x - 3x = -18 - 18$

$-2x = -36$

$x = 18.$

इसलिए, दामिनी की वर्तमान आयु $= x = 18$ वर्ष

हेमा की वर्तमान आयु $= x + 24 = 18 + 24 = 42$ वर्ष

उदाहरण 15: दो अंकों की एक संख्या में अंकों का योग 8 है। यदि संख्या में 18 मिलाया जाये तो उनके अंकों का क्रम उलटा होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इकाई के स्थान का अंक 'x' है

तो दहाई के स्थान का अंक $= 8 - x$ (अंकों का योग 8)

अतः संख्या $10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ ——(1)

अब, अंकों की अदल-बदल करने पर प्राप्त संख्या $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

दिया है कि यदि संख्या में 18 मिलाया जोये तो इसके अंकों की अदल-बदल होती है।

$\therefore$ संख्या + 18 = अंकों की अदल-बदल करने के बाद प्राप्त संख्या

$\Rightarrow (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$98 - 9x = 9x + 8$

$98 - 8 = 9x + 9x$

$90 = 18x$

$$x = \frac{90}{18} = 5$$

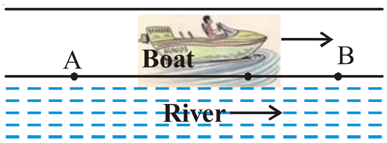
समीकरण (1) में x का मान रखने पर

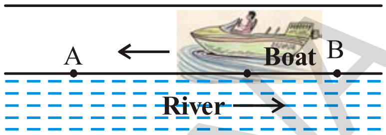
$\therefore$ संख्या $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

उदाहरण 16: एक मोटर बोट स्थित नदी में प्रवाह के साथ जाती है और समुद्र तट पर स्थित दो शहरों के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। यदि यही दूरी वह प्रवाह के विरुद्ध छह घंटे में तय करती है। यदि प्रवाह का वेग 2 किमी/घंटे है तो बोट का स्थिर पानी में वेग ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

हल : चूँकि हमें बोट का स्थिर पानी में वेग ज्ञात करना है, माना कि यह x किमी/घंटे है। इसका अर्थ है कि प्रवाह के सात बोट का वेग $(x + 2)$ किमी/घंटे रहेंगे। क्योंकि पानी का प्रवाह बोट को अपने वेग से 2 किमी/घंटे अधिक वेग से धकेलती है। परंतु प्रवाह के विरुद्ध जाते समय वोट को पानी के प्रवाह के विपरीत कार्य करना पड़ता है।





इसलिए प्रवाह की विपरीत दिशा में बोट का वेग $= (x - 2)$ किमी/घंटे

अब प्रवाह की दिशा में बोट का वेग $= (x + 2)$ किमी/घंटे

$\Rightarrow$ 1 घंटे में तय की गई दूरी $= x + 2$ किमी

$\therefore$ 5 घंटे में तय की गई दूरी $= 5\,(x + 2)$ किमी

अतः A और B के बीच की दूरी $= 5\,(x + 2)$ किमी

प्रवाह के विपरीत बोट का वेग $= (x - 2)$ किमी/घंटे

$\Rightarrow$ 1 घंटे में तय की गई दूरी $= (x - 2)$ किमी

6 घंटे में तय की गई दूरी $= 6\,(x - 2)$किमी

$\therefore$ अतः A और B के बीच की दूरी निश्चित है।

$$\therefore\ 5\,(x + 2) = 6\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$$

$$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$$

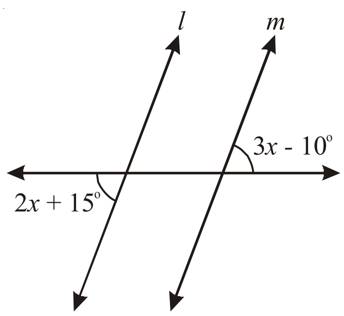
$$\therefore\quad -x = -22$$

$$x = 22.$$

इसलिए स्थिर पानी में बोट का वेग 22 किमी/घंटे होगा।

अभ्यास - 2.4

1. 'x' का मान ज्ञात कीजिए यदि $l \| m$.



SCERT TELANGANA

2. किसी संख्या के आठ गुना में से 10 कम कर दिया जाये तो वह किसी संख्या के छह गुना और 4 योग के बराबर रहता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
3. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 9 है। यदि संख्या में से 27 घटाया जाये तो इसके अंकों के स्थान बदलते हैं। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक संख्या दो भागों में इस प्रकार विभाजित की जाती है कि एक भाग, दूसरे भाग से 10 अधिक रहता है। यदि दोनों भागों का अनुपात 5:3 हो तो संख्या और दोनों भाग ज्ञात कीजिए।
5. जब मैंने एक निश्चित संख्या के तीन गुना में 2 जोड़ा तो मुझे वही संख्या प्राप्त होती है जो मैं इस संख्या में से 50 घटाता हूँ तो प्राप्त होती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
6. मेरी अपनी बहन से दोगुनी आयु की है। 5 वर्ष बाद वह अपनी बहन से दो वर्ष बड़ी होगी। दोनों बहनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
7. 5 वर्ष में रेशमा की आयु अपने 9 वर्ष पहले की आयु से तिगुनी हो जायेगी। उसकी वर्तमान आयु क्या है?
8. एक नगर की जनसंख्या में 1200 लोग बढ़ गये और फिर यह नई जनसंख्या 11% घट गई। इस समय नगर में, 1200 लोग बढ़ने से पहले की जनसंख्या से 32 लोग कम हैं। वहाँ की वर्तमान जनसंख्या मालूम कीजिए।

2.5 समीकरणों को सरलतम रूप में लघुकृत करना- रैखिक समीकरण का लघुकरण

उदाहरण 17: हल कीजिए $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

हल :

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$ ($\frac{x}{3}$ को L.H.S. और $\frac{1}{4}$ को R.H.S. करने पर)

$$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$$ (2 और 3 का LCM 6 ; 2 और 4 का LCM 4)

$$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$$ (6 को R.H.S. स्थानांतरण करने पर)

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$ दिये गये समीकरण का हल है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 18: हल कीजिए $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$

हल : $$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$\Rightarrow$ $-2x-48=(x+3)\times 5$

$\Rightarrow$ $-2x-48=5x+15$

$\Rightarrow$ $-2x-5x=15+48$

$-7x = 63$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

उदाहरण 19: समीकरण हल कीजिए $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ ————(1)

हलः दिये हुए समीकरण के दोनों ओर $2x+3$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

फिर समीकरण के दोनों ओर 7 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

SCERT TELANGANA

$\Rightarrow 7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$ ——————(2)

$35x+14=24x+36$

$35x-24x=36-14$

$11x=22$

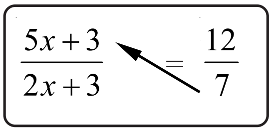
$\therefore x=\dfrac{22}{11}=2$

अब दिया गया समीकरण (1) और समीकरण (2) ध्यानपूर्वक कीजिए।

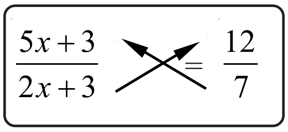
दिया गया समीकरण	समीकरण का सरलीकृत रूप
$\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{12}{7}$	$7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$

आपने क्या ध्यान दिया? हमने इसे इसप्रकार किया-

1. LHS के अंश को RHS के हर से गुणा कीजिए।



2. RHS के अंश को LHS के हर से गुणा कीजिए।

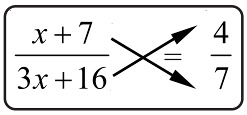


3. (1) और(2) में प्राप्त व्यंजकों को बराबर मानिए $7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$

स्पष्ट कारणों के लिए, हल करने की इस पद्धति को हम 'वज्रगुणन पद्धति' कहते हैं। अब उदाहरणों द्वारा वज्रगुणन पद्धति का हम निरूपण करते हैं।

उदाहरण 20: $\dfrac{x+7}{3x+16}=\dfrac{4}{7}$ समीकरण हल कीजिए।

हल : वज्रगुणन द्वारा, हमें प्राप्त होता है



$7\times(x+7)=4\times(3x+16)$

$7x+49=12x+64$

$7x-12x=64-49$

$-5x=15$

$x=-3$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 21: रेहाना को उसके फ्राक पर 24% छूट मिली। छूट के बाद उसने ₹ 380 दुकानदार को दिये। उस फ्राक का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि फ्राक का अंकित मूल्य ₹ x

तो x का 24% छूट है

उसने $x - 24\%$ दिये जो प्रश्न में दिये अनुसार ₹380 है

$x - x$ का $24\% = 380$

$$\Rightarrow x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$\therefore \quad x = 500$

$\therefore$ अंकित मूल्य = ₹ 500

उदाहरण 22: किसी संख्या का $\frac{4}{5}$ भाग उसके $\frac{3}{4}$ भाग से 4 अधिक है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि वह संख्या 'x' है

संख्या का $\frac{4}{5}$ भाग $= \frac{4}{5}x$

और संख्या का $\frac{3}{4}$ भाग $= \frac{3}{4}x$

दिया गया है कि $\frac{4}{5}x$, $\frac{3}{4}x$ से 4 बड़ा है।

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

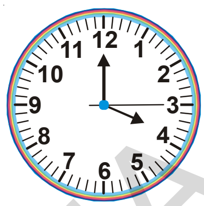
$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

अत: वह संख्या 80 है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 23: जॉन ने अपनी घड़ी ₹ 301 में बेची और उसपर उसे 14% हानि हुई। उस घड़ी का क्रय मूल्य मालूम कीजिए।

हल : माना कि घड़ी का क्रय मूल्य $= ₹\ x$



उस घाटा = 'x' का 14% $= \frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$

घड़ी का विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

अतः घड़ी का क्रय मूल्य = ₹ 350

उदाहरण 24: एक आदमी को कुछ निश्चित दूरी तय करनी है। उसने इसका दो-तिहाई भाग 4 किमी प्रतिघंटे से और शेष दूरी 5 किमी प्रतिघंटे की गति से तय की। यदि इसके लिए उसे कुल समय 42 मिनट लगे तो कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दूरी 'x' किमी है।

	पहला भाग	दूसरा भाग
तय की गई दूरी	x का $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$	बाकी दूरी $= x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$
गति	4 किमी प्रति घंटे	5 किमी प्रति घंटे
लगा हुआ समय	$\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ घंटे	$\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$

अतः कुल समय $= \frac{2x}{12} + \frac{x}{15}$ घंटे

SCERT TELANGANA

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$घंटे $= 42$ मिनट

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$घंटे $= \frac{42}{60}$ मिनट

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}=\frac{42}{60}$$

$$\frac{10x+4x}{60}=\frac{42}{60}$$

$\Rightarrow \quad 14x = 42$

$\Rightarrow \quad x = 3$

कुल दूरी $x = 3$ किमी

उदाहरण 25: एक भिन्न का अंश उसके हर से 6 कम है। यदि अंश में 3 जोड़ा जाये तो वह $\frac{2}{3}$ के बराबर होता है। मूल भिन्न संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि भिन्न का हर है 'x' ता

भिन्न का अंश होगा $= x - 6$

अतः भिन्न होगा $= \frac{x-6}{x}$

यदि 3 अंश में जोड़ दिया जाये तो यह होगा $\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 3x-9=2x$

$x=9$

$\therefore$ भिन्न $= \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

इसलिए मूल भिन्न $\frac{3}{9}$ है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 26: शिरीषा के पास पचास पैसे और पच्चीस पैसों के सिक्कों के रूप में कुल ₹ 9 है। पचास पैसों के सिक्कों की संख्या से पच्चीस के सिक्कों की संख्या दोगुनी है। उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के हैं?

हल : माना कि पचास पैसों के सिक्कों की संख्या $= x$

अतः पच्चीस पैसों के सिक्कों की संख्या $= 2x$

पचास पैसों के सिक्कों का कुल मूल्य $= x \times 50$ पैसा $=$ ₹ $\frac{50x}{100} =$ ₹ $\frac{x}{2}$

पच्चीस पैसों के सिक्कों का कुल मूल्य $= 2x \times 25$ पैसा $= 2x \times \frac{25}{100}$

$= 2x \times \frac{1}{4} =$ ₹ $\frac{x}{2}$

कुल सिक्कों का मूल्य $= \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

लेकिन प्रश्न के अनुसार यह मूल्य ₹ 9 है।

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$

$\frac{2x}{2} = 9$

$\therefore \; x = 9$

अतः पचास पैसों के सिक्कों की संख्या $= x = 9$

पच्चीस पैसों के सिक्कों की संख्या $= 2x = 2 \times 9 = 18.$

उदाहरण 27: एक आदमी अपनी बाइक 24 किमी प्रति घंटे की गति से चलाता हुआ अपने गंतव्य स्थान पर 5 मिनट देर से पहुँचता है। यदि वह 30 किमी प्रति घंटे से गाड़ी चलाता तो वह उसके गंतव्य स्थान पर नियत समय से 4 मिनट पहले पहुँचता था। उसके गंतव्य स्थान की दूरी कितनी है?

हल : माना कि दूरी 'x' किमी है।

अतः 24 किमी/घंटे की गति से 'x' किमी के लिए लगनेवाला समय $= \frac{x}{24}$ घंटे

30 किमी प्रति घंटे की गति से 'x'किमी के लिए लगनेवाला समय $= \frac{x}{30}$ घंटे

SCERT TELANGANA

परंतु प्रश्न के अनुसार दिया है कि दोनों के समय में अंतर $= 9$ मिनट $= \frac{9}{60}$ घंटे

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

अतः दूरी 18 किमी है।

अभ्यास - 2.5

1. निम्न समीकरण हल कीजिए।

(i) $\frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$

(ii) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$ (iv) $\frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$

(v) $9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ (viii) $\frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$

(ix) $\frac{8p-3}{7p+1} = \frac{-2}{4}$ (x) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$

(xi) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$ (xii) $\frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$

2. वह कौनसी संख्या है जिसका तीसरा भाग उसके पाँचवें भाग से 4 अधिक है?

SCERT TELANGANA

3. दो धनात्मक पूर्णांकों में अंतर 36 है। एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से भाग देने पर भागफल 4 आता है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए। (**संकेतः** यदि एक पूर्णांक 'x' हो तो दूसरा '$x-36$' होगा)

4. एक भिन्न का अंश उसके हर से 4 कम है। यदि अंश और हर दोनों में 1 जोड़ा जाये तो वह $\frac{1}{2}$ होता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

5. ऐसी तीन क्रमिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए यदि उन्हें क्रमशः 10, 17 और 26 से भाग दिया जाये तो उनके भागफलों का योग 10 होगा।

(संकेत : माना कि क्रमिक संख्याएँ $= x, x+1, x+2$, तो $\frac{x}{10}+\frac{x+1}{17}+\frac{x+2}{26}=10$)

6. 40 छात्रों की कक्षा में लड़कियों की संख्या, लड़कियों की संख्या के $\frac{3}{5}$ है। कक्षा में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. 15 वर्ष बाद, मेरी की आयु उसकी वर्तमान आयु की चारगुना होगी। उसकी वर्तमान आयु बताइए।

8. अरविंद के पास किडी बैंक है। इसमें एक रुपये के पचास सिक्के भरे हैं। इसमें पचास पैसों के सिक्कों की संख्या से एक रुपये के सिक्कों की संख्या से तिगुनी अधिक है। यदि किडी बैंक में कुल रु.35 हैं तो बैंक में प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या कितनी है?

9. A और B दोनों मिलकर एक काम 12 दिनों में करते हैं। यदि 'A' अकेला वह काम 20 दिनों में करता है तो बताइए कि B अकेला उस काम को कितने समय में पूरा करेगा?

10. एक रेलगाड़ी 40 किमी/घंटे चलती है तो अपने गंतव्य पर 11 मिनट देर से पहुँचती है। यदि वह 50 किमी/घंटे से चलती है तो केवल 5 मिनट देर से पहुँचती है। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

11. मृगों के झुंड का एक चौथाई भाग घने जंगल में गया है। इनकी कुल संख्या का एक-तिहाई भाग खेत में चरने गये हैं, शेष नदी के किनारे पानी पी रहे हैं जिनकी संख्या 15 है। कुल मृगों की संख्या बताइए।

12. एक रेडियो ₹ 903 में बेचने से व्यापारी को 5% लाभ हुआ। रेडियो का क्रयमूल्य बताइए।

13. शेखर, अपनी मिठाइयों का एक-चौथाई रेणु को देता है और फिर 5 मिठाइयाँ राजी को देता है। उसके पास 7 मिठाइयाँ बचती हैं तो शुरू में उसके पास कुल कितनी मिठाइयाँ थीं?

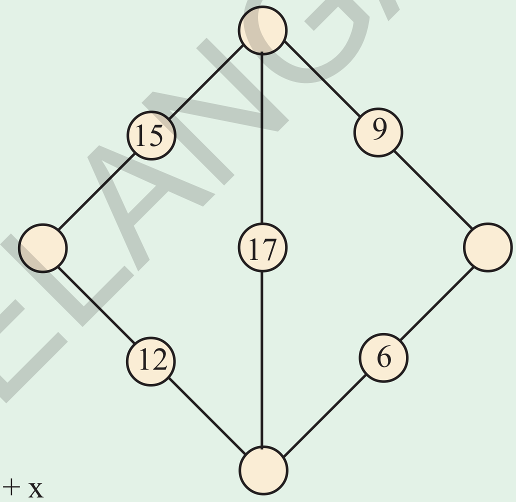
SCERT TELANGANA

हमने क्या चर्चा की ?

1. यदि समीकरण का घातांक एक हो तो इसे रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. यदि रैखिक समीकरण में केवल एक चर हो तो इसे एक चर में रैखिक समीकरण अथवा सरल समीकरण कहते हैं।
3. वह मान जो समीकरण में चर के लिए प्रतिस्थापन करने पर L.H.S. = R.H.S हो, उसे समीकरण का हल अथवा मूल कहते हैं।
4. समीकरण में संख्याओं के जैसे ही चर भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानांतरण किये जा सकते हैं।

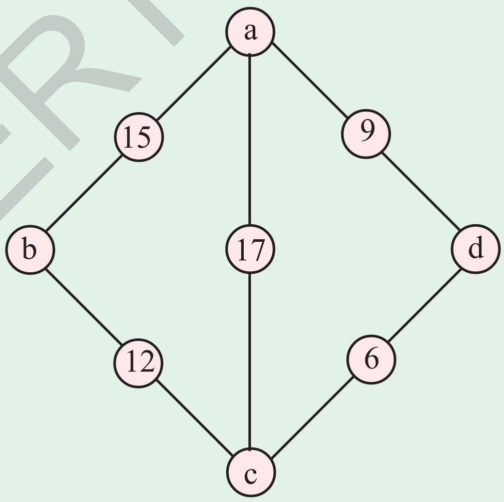
एक जादूई हीरा

खाली वृत्त ऐसी संख्याओं से भरिए जिससे कि हीरे की प्रत्येक पंक्ति के अंकों के योग से समान राशि प्राप्त हो।



संकेतः संख्याएँ इस पैटर्न में हों

$a = x, b = 5 + x, c = 3 + x, d = 11 + x$



जहाँ x कोई एक संख्या है और प्रत्येक पंक्ति का योग होगा $20 + 2x$

उदाहरणतः यदि $x = 1$, तो $a = 1, b = 6, c = 4, d = 12$ और प्रत्येक पंक्ति का योग 22 होगा।

SCERT TELANGANA