باب **1**

5162CH01

سیٹس
(SETS)

❖ ” حقیقت میں آجکل نئی اور پرانی تعلیم کا فرق کچھ اس طرح ہونا چاہیے کہ نہ تو تعلیم فیثا غورس (Pythagoras) سے شروع ہو اور نہ ہی آئنس ٹائنس (Einstein) پر ختم ہو۔ لیکن سب سے پرانی اور جدید ہو (جی۔ ایچ ہارڈی)G.H HARDY“ ❖

1.1 تعارف(Introduction)


جارج کینٹر
(1845-1918)

اس دور میں ریاضی کی تمام شاخوں میں سیٹ کا تصور بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔آج یہ سوچ تقریباً ریاضی کی ہر شاخ میں کی جاتی ہے سیٹس کا استعمال رشتے اور تفاعلات کی تعریف بیان کرنے میں کیا جا تا ہے۔ میٹر۔تواتر اور احتمالی کے مطالع میں سیٹس کی جانکاری ضروری ہے۔

سیٹس کے نظریہ کا ارتقاء ایک جرمن ریاضی داں جارج کینٹر (Georg Cantor 1845-1918) نے کیا۔اسی نے سب سے پہلے اس کا استعمال ٹرگنومیٹری سیریز میں کیا۔اس سبق میں ہم سیٹ کی کچھ بنیادی تعریفوں اور عملیات (Operaters) کا مطالعہ کریں گے۔

1.2 سیٹس اور ان کے اظہار (Sets and their Representations)

ہم روزمرہ کی زندگی میں ایک خاص قسم کے اشیاء کے مجموعہ جیسے تاش کی گڈی، لوگوں کی بھیڑ، کرکٹ ٹیم وغیرہ کے بارے میں باتیں کرتے ہیں۔ ریاضی میں بھی ہمیں بہت سے مجموعوں سے سابقہ پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر طبعی اعداد، نقاط مفرد اعداد وغیرہ۔خاص طور پر ہم درج ذیل مجموعوں (Collections) کی جانچ کرتے ہیں۔

(i) 10 سے چھوٹے طاق طبعی اعداد یعنی 1,3,5,7,9,

(ii) ہندوستان کے دریا

(iii) انگریزی حروف کے حروف علت (vowels) یعنی a,e,i,o,u

(iv) مختلف اقسام کے مثلث۔

(v) 210 کے تمام مفرد اجزائے ضربی جیسے 2،3،5 اور 7 وغیرہ۔

(vi) دو درجی مساوات: $x^2 - 5x + 6 = 0$ کے حل 2 اور 3 ہیں۔

درج بالا تمام مجموعے (Collections) با معنی (Well defined) مجموعے ہیں کیونکہ ہم قطعی طور پر بتا سکتے ہیں کہ آیا ایک مخصوص چیز جو دیئے ہوئے مجموعے سے تعلق رکھتی ہے یا نہیں۔ مثال کے طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ دریائے نیل ہندوستان کے دریاروں سے تعلق نہیں رکھتا۔ جبکہ دریائے گنگا اس مجموعے سے تعلق رکھتا ہے۔

ہم نیچے کچھ اور مثالیں دے رہے ہیں جو خاص طور پر ریاضی میں استعمال ہوتی ہیں۔

N: طبعی اعداد کا سیٹ

Z: صحیح اعداد کا سیٹ

Q: ناطق اعداد کا سیٹ

R: حقیقی اعداد کا سیٹ

Z+: مثبت صحیح اعداد کا سیٹ

Q+: مثبت ناطق اعداد کا سیٹ اور

R+: مثبت حقیقی اعداد کا سیٹ۔

مندرجہ بالا علامت خصوصی سیٹوں کیلئے اس کتاب میں استعمال کی جائیں گی۔

دنیا کے پانچ مشہور و معروف (نامور) ماہر ریاضی کا مجموعہ (Collection) ایک با معنی (Well defined) مجموعہ نہیں ہے کیونکہ سب سے مشہور معروف ریاضی داں چننے کی کسوٹی پر شخصیت کے لیے علحیدہ ہے۔ اسلئے یہ ایک با معنی (Well defined) مجموعہ نہیں ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ سیٹ اشیا کا با معنی (Well defined) مجموعہ ہے۔

درج ذیل باتیں نوٹ کرنے کی ہیں۔

(i) ایک سیٹ کی اشیا عناصر اور ممبر ہم معنی ہیں۔

(ii) سیٹ کو اکثر ہم انگریزی کے بڑے حروف A'B'C'X'Y' اور Z وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(iii) سیٹ کے عناصر کو ہم عام طور پر چھوٹے حروف c'b'c'x'y' اور z وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر 'a' سیٹ A کا عنصر ہے تو ہم کہتے ہیں کہ a A سے تعلق رکھتا ہے۔ جملہ تعلق رکھتا ہے۔ کے لیے ایک یونانی علامت ' $\in$ ' استعمال کرتے ہیں، اس طرح ہم لکھتے ہیں کہ $a \in A$ اگر b سیٹ A کا عنصر نہیں ہے تو ہم اس کو پڑھتے ہیں b A سے تعلق نہیں رکھتا ہے اور علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں کہ $b \notin A$ ۔

اس طرح سے انگریزی حروف علت کے سیٹ میں، $a \in V$ لیکن $b \notin V$ ۔ 30 کے مفرد اجزائے ضربی کے سیٹ P میں $3 \in P$ لیکن $15 \notin P$ سیٹ کو ظاہر کرنے کے دو طریقے ہیں۔

(i) فہرستی طریقہ (Roster) یا جدول شکل (Tabular form)

(ii) سیٹ ساز شکل (Setbuilder form)

(i) فہرستی طریقہ میں سیٹ کے تمام عناصر ایک منجھلے بریکٹ { } میں درج رہتے ہیں اور ہر عنصر کے بعد ایک کومہ "، " لگا ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 7 سے چھوٹے تمام جفت مثبت صحیح اعداد کے سیٹ کو ہم فہرستی شکل $\{2, 4, 6\}$ لکھتے ہیں۔ درج ذیل میں فہرستی شکل کی کچھ اور مثالیں دی ہوئی ہیں۔

(a) ان طبعی اعداد کا سیٹ جو 42 کو تقسیم کرتے ہیں $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ ۔

نوٹ یہ بات نوٹ کرنے کی ہے کہ سیٹ کی فہرستی شکل میں عناصر کی ترتیب کی اہمیت نہیں ہے۔ اس لیے ہم درج بالا سیٹ کو $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42\}$ اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

(b) انگریزی کے حروف کے تمام حروف علت کا سیٹ ہے $\{a, e, i, o, u\}$

(c) طاق طبعی اعداد کے سیٹ کو ہم $\{1, 3, 5 \ldots\}$ لکھ سکتے ہیں۔ نقاطہ یہ ظاہر کرتے ہیں کہ سیٹ لامحدود ہے۔

نوٹ یہ بات نوٹ کرنے کی ہے کہ فہرستی شکل میں عام طور پر کوئی بھی عنصر دوھرایا نہیں جاتا۔ تمام عناصر مختلف ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر لفظ School کے تمام حروف کا سیٹ $\{S, C, H, O, L\}$ یا $\{H, O, L, C, S\}$ ہے۔ یہاں عناصر کی ترتیب بے اثر ہوتی ہے۔

(ii) سیٹ ساز شکل تمام عناصر کی ایک مشترک خاصیت ہوتی ہے جو کہ سیٹ کے باہر کسی عنصر میں نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر سیٹ (a,e,i,o,u) کے تمام عناصر کی ایک مشترک خاصیت ہے کہ یہ انگریزی حروف کے Vowel ہیں اور کسی حروف میں یہ خاصیت نہیں ہے۔ اس سیٹ کو ہم V سے ظاہر کرتے ہیں اور لکھتے ہیں

$V=\{x:$ انگریزی حروف کا واول ہے $x:\}$

یہاں یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ہم نے سیٹ کے عنصر کو x سے ظاہر کیا ہے۔ (کوئی دوسری علامت جیسے z'y وغیرہ بھی استعمال کی جاسکتی ہے) جس سے پہلے کولن : لگایا جاتا ہے کولن (colon) کے نشان کے بعد ہم سیٹ کے عناصر کی خصوصیت لکھتے ہیں اور پھر اسکو منجھلے بریکٹ سے بند کردیتے ہیں۔ درج بالا سیٹ V کو ہم پڑھتے ہیں، تمام x کا سیٹ جبکہ x ایک انگریزی کا حرف علت ہے۔ اس حلیہ میں بریکٹ تمام کا سیٹ کیلیے اور کولن جبکہ کیلیے استعمال ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل سیٹ کو

$A=\{x:$ ایک طبعی عدد ہے اور x $3<x<10\}$ کو ہم اسطرح پڑھتے ہیں ان تمام x کا سیٹ جبکہ x ایک طبعی عدد ہے اور 3 اور 10 کے درمیان ہے اس طرح 4، 5، 6، 7، 8 اور 9 سیٹ A کے عناصر ہیں۔

اگر ہم درج بالا (a)، (b) اور (c) میں بیان کئے گئے فہرستی شکل میں سیٹوں کو A، B اور C سے ظاہر کریں تو A، B اور C کو ہم سیٹ ساز شکل میں درج ذیل طریقے سے لکھتے ہیں۔

$A=\{x:$ ایک ایسا طبعی عدد ہے جو 42 کو تقسیم کرتا ہے $x\}$

$B=\{y:$ انگریزی ایک حرف علت ہے $y\}$

$C=\{z:$ ایک طاق طبعی عدد ہے $z\}$

مثال 1 مساوات $x^2+x-2=0$ کا حل فہرستی شکل میں لکھیے۔

حل دی ہوئی مساوات کو اسطرح لکھا جاسکتا ہے۔

$(x-1)(x+2)=0$ یعنی $x=1,-2$

اس طرح، دی ہوئی مساوات کا حل سیٹ فہرستی شکل میں ہے $\{1, 2\}$

مثال 2 دیئے ہوئے سیٹ $\{x : x^2 < 40$ اور، ایک مثبت صحیح عدد ہے $x\}$ کو فہرستی شکل میں لکھیے۔

حل 1,2,3,4,.5,6 مطلوبہ عناصر ہیں۔ اس لے دیئے ہوئے سیٹ کی فہرستی شکل $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔

مثال 3 سیٹ $A=\{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$ کو سیٹ ساز شکل میں لکھیے۔

حل ہم سیٹ A کو اسطرح لکھ سکتے ہیں۔

A= { x: x ایک طبعی عدد کا مربع ہے }

دوسرے طریقے سے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

A= { $x : x = n^2$ جہاں n ایک طبعی عدد ہے }

مثال 4 سیٹ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ کو سیٹ ساز شکل میں لکھئے۔

حل دیے ہوئے سیٹ میں ہر عدد کا نسب نما شمار کندہ سے ایک زیادہ ہے۔مزید شمار کندہ 1 سے شروع ہوتے ہیں اور 6 پر ختم ہو جاتے ہیں۔اس طرح سے سیٹ ساز شکل میں سیٹ ہے۔

{ $x : x = \frac{n}{n+1}$ جبکہ n ایک طبعی عدد ہے $, 1 < n < 6$ }

مثال 5 درج ذیل میں بائیں طرف فہرستی شکل اور دائیں جانب سیٹ ساز شکل میں دیئے ہوئے پر ایک سیٹ کو ملایئے:

(i) $\{P, R, I, N, C, A, L\}$ (a) { x: x ایک مثبت صحیح عدد ہے اور 18 کا قاسم ہے }

(ii) $\{0\}$ (b) { $x : x^2 - 9 = 0$ اور x ایک صحیح عدد ہے }

(iii) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ (c) { x: x+1=1 اور x ایک صحیح عدد ہے }

(iv) $\{3 - 3\}$ (d) { x: x لفظ PRINCIPAL کا ایک صرف ہے }

حل کیونکہ (d) میں لفظ PRINCIPAL میں 9 حروف ہیں اور دو حروف p اور L دوہرائے گئے ہیں اس لیے یہ (i) اور (d) میچ کھاتے ہیں اسی طرح (ii) (c) سے میچ کھاتا ہے کیونکہ x+1=1 کا مطلب ہے x=0 اسی طرح 18,9,6,3,2,1 تمام 18 تمام 18 کے قاسم ہیں اس لیے (iii) سے ملے کھاتا ہے۔اور آخر میں $x^2 - 9 = 0$ کا مطلب ہے x=3,-3 اس لیے (iv) b سے میل کھاتا ہے۔

1. درج ذیل میں کون سے سیٹ میں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

(i) حرف J سے شروع ہونے والے سال کے تمام مہینوں کا مجموعہ

(ii) ہندوستان کے 10 سب سے زیادہ دانشور مصنفوں کا مجموعہ

(iii) دنیا کے 11 سب سے اچھے بلے بازوں کی کرکٹ ٹیم

(iv) آپ کی جماعت کے تمام لڑکوں کا مجموعہ

(v) 100 سے چھوٹے تمام طبعی اعداد کا مجموعہ

(vi) مصنف پریم چند کے لکھے ہوئے تمام ناولوں کا مجموعہ

(vii) تمام جفت صحیح اعداد کا مجموعہ

(viii) اس سبق کے سوالوں کا مجموعہ

(ix) دنیا کے سب خطرناک جانوروں کا مجموعہ

.2 مان لیجئے $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہوتو درج ذیل خالی جگہوں میں مناسب علامت $\in$ اور $\notin$ بھریئے۔

(i) $5 \ldots A$ (ii) $8 \ldots A$ (iii) $0 \ldots A$

(iv) $4 \ldots A$ (v) $2 \ldots A$ (vi) $10 \ldots A$

.3 درج ذیل سیٹوں کو فہرستی شکل میں لکھئے۔

(i) $A = \{x :$ x ایک صحیح عدد ہے اور $-3 \le x < 7\}$

(ii) $B = \{x :$ x ایک 6 سے چھوٹا صحیح عدد ہے۔$\}$

(iii) $C = \{x :$ x ایک دو ہندسی طبعی عدد ہے جبکہ اسکے ہندسوں کا مجموعہ 8 ہے$\}$

(iv) $D = \{x :$ x ایک مفرد عدد ہے جو 60 کا قاسم ہے$\}$

(v) E= لفظ TRIGONOMETRY کے حروف کا سیٹ

(vi) F= لفظ BETTER کے حروف کا سیٹ

.4 درج ذیل سیٹوں کو سیٹ ساز شکل میں لکھئے۔

(i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$

(iv) $\{2, 4, 6, \ldots\}$ (v) $\{1, 4, 9, \ldots, 100\}$

.5 درج ذیل تمام سیٹوں کے عناصر کی فہرست بنائیے۔

(i) $A = \{x :$ xایک طاق طبعی عدد ہے$\}$

(ii) $B = \{x :$ xایک صحیح عدد ہے$\}$

(iii) $C = \{x : x^2 \leq 4$ اور ایک صحیح عدد ہے$\}$

(iv) $D = \{x :$ xلفظ "LOYAL" کا ایک حرف ہے$\}$

(v) $E = \{x :$ xسال کا ایک مہینہ ہے جس میں 31 دن نہیں ہوتے ہیں$\}$

(vi) $F = \{x :$ xایک Consonant ہے جو انگریزی حروف تہجی میں K سے پہلے آتا ہے$\}$

.6 درج ذیل سے سیٹ بائیں طرف فہرستی شکل میں اور دائیں طرف سیٹ ساز شکل میں دیئے ہوئے ہیں۔ ہر ایک سیٹ کو ملائیے۔

(i) $\{1, 2, 3, 6\}$	(a) $\{x : x$ ایک مفرد عدد ہے اور نا کا قاسم ہے$\}$
(ii) $\{2, 3\}$	(b) $\{x : x$ ایک 10 سے چھوٹا طاق طبعی عدد ہے$\}$
(iii) $\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	(c) $\{$ ایک طبعی عدد ہے اور 6 کا قاسم ہے $\}$
(iv) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d) $\{x : x$ لفظ MATHEMATICS کا حرف ہے$\}$

1.3 خالی سیٹ (Empty set)

درج ذیل سیٹ پر غور کیجیے

$A = \{x :$ xایک xi جماعت کا طالب علم ہے جو اس وقت زیر تعلیم ہے$\}$

ہم اسکول میں جا سکتے ہیں اور xi کلاس میں زیر تعلیم طلبا کی گنتی کر سکتے ہیں۔ اس طرح سیٹ A کے عناصر محدود ہیں۔

اب ہم ایک اور سیٹ B اس طرح لکھتے ہیں۔

$B = \{x :$ xایک طالب علم ہے جو اس وقت X اور XI جماعت میں پڑھ رہا ہے$\}$

ہم جانتے ہیں کہ ایک طالب علم ایک ساتھ X اور XI جماعت میں نہیں پڑھ سکتا۔ اس طرح سے B سیٹ میں کوئی عنصر نہیں ہے۔

تعریف 1 ایک سیٹ جس میں کوئی بھی عنصر موجود نہیں ہوتا خالی سیٹ عدیم سیٹ (Null Set) کہلاتا ہے۔

تعریف کے مطابق B ایک خالی سیٹ ہے جبکہ A خالی نہیں ہے۔ خالی سیٹ کو ہم علامت $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ہم درج ذیل میں خالی سیٹوں کی کچھ مثالیں دے رہے ہیں۔

(i) مان لیجئے A = $\{ x : 1 < x < 2, x$ ایک طبعی عدد ہے$\}$ ۔ تو A ایک خالی سیٹ ہے کیونکہ 1 اور 2 کے درمیان کوئی طبع عدد نہیں ہے۔

(ii) مان لیجئے B = $\{ x : x^2 - 2 = 0$ اور x ایک ناطق عدد ہے $\}$ تو B ایک خالی سیٹ ہے کیونکہ مساوات $x^2 - 2 = 0$ کا ناطق عدد میں حل نہیں ہے۔

(iii) مان لیجئے C = $\{$ x: x ایک 2 سے بڑا جفت مفرد عدد ہے $\}$ تو اس طرح C ایک خالی سیٹ ہے کیونکہ 2 ایک واحد جفت مفرد عدد ہے۔

(iv) D = $\{ x : x^2 = 4$ اور x ایک طاق عدد ہے $\}$ اس طرح D ایک خالی سیٹ ہے کیونکہ مساوات $x^2 = 4$ کسی بھی طاق عدد کی قیمت کو مطمئن نہیں کرتی۔

1.4 متناہی اور لامتناہی سیٹ (Finite and Infinite Sets)

مان لیجئے A = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$، B = $\{a, b, c, d, g\}$

اور C = $\{$ دنیا کے مختلف حصوں میں رہ رہے انسان $\}$ ہم جانتے ہیں کہ A میں پانچ اور B میں 6 عناصر ہیں C میں کتنے عناصر ہیں؟ کیونکہ ہم صحیح نہیں جانتے ہیں کہ C میں کتنے عناصر ہیں لیکن یہ جانتے ہیں کہ یہ ایک بہت بڑا طبعی عدد ہے۔ سیٹ میں عناصر کی تعداد کا مطلب سیٹ میں مختلف اعداد کی تعداد ہے اور اس کو ہم n(S) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر n(S) ایک طبعی عدد ہے تب S ایک محدود سیٹ ہے جو خالی نہیں ہے۔

سیٹ N طبعی اعداد کے سیٹ پر غور کیجئے۔ ہم جانتے ہیں کہ طبعی اعداد کے عناصر محدود نہیں ہیں کیونکہ طبعی اعداد میں لامحدود

عناصر ہیں مندرجہ بالا سیٹ B, A اور C سے محدود سیٹ ہیں۔ $n(a)=5$، $n(B)=6$ اور $n(C)=$ کچھ محدود اعداد۔

تعریف 2 ایک سیٹ جو یا تو خالی ہو یا عناصر کی تعداد ہو، متناہی کہلاتا ہے نہیں تو لا متناہی کہلاتا ہے۔

کچھ مثالوں پر غور کیجئے۔

(i) مان لیجئے W ہفتہ کو دنوں کا سیٹ۔ تب W متناہی ہے۔

(ii) مان لیجئے سیٹ S مساوات $x^2 - 16 = 0$ کے حل ہیں تب S متناہی ہے۔

(iii) مان لیجئے G ایک خط کے تمام نقاط کا سیٹ ہے تب G لا متناہی ہے۔

جب ہم ایک سیٹ کو فہرستی شکل میں لکھتے ہیں تب ہم سیٹ کے تمام عناصر کو بریکٹ { } میں رکھتے ہیں۔ ایک لا متناہی سیٹ کے تمام عناصر کو { } میں رکھنا ممکن نہیں ہے کیونکہ اس میں عناصر کی تعداد لا محدود ہوتی ہے لیکن ہم کچھ لا متناہی سیٹوں کو فہرستی شکل میں لکھتے ہیں۔ اس سیٹ کے کچھ عناصر لکھنے کے بعد ہم اسکے آگے تین نقطے لگا دیتے ہیں۔ جس کا مطلب ہے نہ ختم ہونے والا۔

مثال کے طور پر $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ طبعی اعداد کا سیٹ ہے $\{1, 3, 5, 7...\}$ تمام طاق طبعی اعداد کا سیٹ ہے اور $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ صحیح اعداد کا سیٹ ہے۔ یہ تمام لا متناہی سیٹ ہیں۔

نوٹ تمام لا متناہی سیٹ فہرستی شکل میں نہیں بیان کیجئے جا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حقیقی اعداد کا سیٹ اس شکل میں نہیں بیان کیا جا سکتا کیونکہ اس سیٹ کے عناصر کا کوئی خاص نمونہ نہیں ہوتا۔

مثال 6 ذیل میں دیئے گئے سیٹوں میں متناہی اور لا متناہی سیٹ بیان کیجئے۔

(i) {x: x ایک طبعی عدد ہے اور $(x-1(x-2)=0$}

(ii) {x: x ایک طبعی عدد ہے اور $x^2 = 4$}

(iii) {x: x ایک طبعی عدد ہے اور $2x-1=0$}

(iv) {x: x ایک طبعی عدد ہے اور x ایک مفرد عدد}

(v) {x: x ایک طبعی عدد ہے اور x ایک طاق عدد ہے}

حل

(i) دیا ہوا سیٹ ہے= $\{1, 2\}$ ،اس لیے یہ متناہی ہے۔

(ii) دیا ہوا سیٹ ہے= $\{2\}$ ،اس لیے یہ متناہی ہے۔

(iii) دیا ہوا سیٹ ϕ = اس لیے یہ متناہی ہے۔

(iv) دیا ہوا سیٹ تمام مفرد اعداد کا سیٹ ہے چوں کہ مفرد اعداد لا متناہی ہیں اسلیئے یہ سیٹ لا متناہی ہے۔

(v) کیونکہ طاق اعداد لا متناہی ہیں اس لیئے دیا ہوا سیٹ لا متناہی ہے۔

1.5 مساوی سیٹس (Equal Sets)

دو سیٹس A اور B دیئے ہوئے ہیں اگر A کا ہر ایک عنصر B کا عنصر ہے اور B کا ہر ایک عنصر A کا عنصر ہے تو سیٹ A اور B مساوی سیٹ کہلاتے ہیں۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ دونوں سیٹوں کے ایک ہی عناصر ہیں۔

تعریف 3 دو سیٹ A اور B مساوی ہوتے ہیں اگر ان میں یکساں عناصر ہوں اور ہم ان کو A=B لکھتے ہیں اگر ایسا نہ ہو تو سیٹ غیر مساوی کہلاتے ہیں اور ہم ان کو $A \neq B$ لکھتے ہیں۔

ہم درج ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

(i) مان لیجئے $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{3, 1, 4, 2\}$ ہو تو A=B

(ii) مان لیجئے A، 6 سے چھوٹے تمام مفرد اعداد کا سیٹ ہے اور P، 30 کے تمام مفرد اجزائے ضربی کا سیٹ ہے تو سیٹ A اور P مساوی ہیں کیونکہ 30 کے مفرد اجزائے ضربی صرف 2,3,5 ہی ہیں اور 6 سے چھوٹے ہیں۔

> **نوٹ** ایک سیٹ اسوقت نہیں بدلتا جب ان میں موجود ایک یا ایک سے زیادہ عناصر دوبارہ سیٹ میں لکھے جائیں۔
> مثال کے طور پر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ مساوی ہیں کیونکہ A کا ہر عنصر B میں ہے اور B کا ہے

ہیں۔ اسی وجہ سے ہم سیٹ لکھنے میں عناصر کو دوبارہ نہیں دہراتے ہیں۔

مثال 7 درج ذیل میں مساوی سیٹوں کے جوڑے معلوم کیجئے (اگر ہیں تو) اور وجوہات بھی بتائیے۔

$A = \{0\}$ ، B={ $x : x > 15$ اور $x < 5$ }

$C = \{x : x - 5 = 0\}$ $D = \{x : x^2 = 25\}$

$E = \{x:$ مساوات $x^2 - 2x - 15 = 0$ کا مثبت جذر ہے x $\}$

حل کیونکہ $0 \in A$ اور 0، B، C، D اور E کسی بھی سیٹ میں شامل نہیں ہے۔اس لیے $A \neq B$ ،
$A \neq C$ ، $A \neq D$ ، $A \neq E$

کیونکہ $B = \varnothing$ ہے اور دوسرا کوئی بھی سیٹ خالی نہیں ہے۔اس لیے $B \neq C$ ، $B \neq D$ اور $B \neq E$ ۔

$C = \{5\}$ لیکن $-5 \in D$ اس لیے $C \neq D$

کیونکہ $E = \{5\}$ ، $C = E$ ، $D = \{-5, 5\}$ اور $E = \{5\}$ اس لیے $D \neq E$ اس لئے

مساوی سیٹوں کا صرف ایک ہی جوڑا ہے C اور E۔

مثال 8 درج ذیل میں کون سے سیٹوں کے جوڑے مساوی ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

(i) A لفظ **Alloy** میں موجود حروف کا سیٹ ہے اور B لفظ **Loyal** میں موجود حروف کا۔

(ii) $A = \{ n : n \in z$ اور $n^2 \leq 4 \}$ ، $B = \{ n : x \in R$ اور $x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

حل (i) $A = \{A, L, L, O, Y\}$ ، $A = \{A, L, L, O, Y\}$ جب A اور B مساوی سیٹ ہیں کیونکہ عناصر کے دوبارہ آنے سے سیٹ میں تبدیلی نہیں ہوتی اس لیے،

$A = \{A, L, O, Y\} = B$

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، $B = \{1, 2\}$ چونکہ $o \in A$ اور $o \notin B$ اس لیے A اور B مساوی سیٹ نہیں ہیں۔

مشق 1.2

1. درج ذیل میں کون سی مثالیں عدیم سیٹ (Null Set) کی ہیں۔

(i) 2 سے تقسیم ہونے والے تمام طاق طبعی اعداد کا سیٹ۔

(ii) جفت مفرد اعداد کا سیٹ۔

(iii) $\{$ x ایک طبعی عدد ہے اور x<5 اور ساتھ ساتھ x>7 : x $\}$

(iv) { y : y دو متوازی خطوط میں ایک مشترکہ نقطہ ہے }

.2 درج ذیل میں کون سے سیٹ متناہی اور کون سے سیٹ لامتناہی ہیں؟

(i) سال کے تمام مہینوں کا سیٹ۔

(ii) $\{1, 2, 3, ...\}$

(iii) $\{1, 2, 3, ...99, 100\}$

(iv) 100 سے بڑے تمام مثبت صحیح اعداد کا سیٹ۔

(v) 99 سے چھوٹے تمام مفرد اعداد کا سیٹ۔

.3 درج ذیل میں کون سے سیٹ متناہی اور کون سے سیٹ لامتناہی ہیں؟

(i) x محور کے متوازی تمام خطوط کا سیٹ

(ii) انگریزی کے تمام حروف کا سیٹ

(iii) اس نمبر کا سیٹ جو 5 کا اضعاف ہوں

(iv) زمین پر رہنے والے تمام جانوروں کا سیٹ

(v) ایک مستوی میں مبدا (0,0) سے گزرتے ہوئے تمام دائروں کا سیٹ۔

.4 درج ذیل میں بتائیے کہ آیا A=B ہے یا نہیں۔

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, b, a\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{$ $x : x$ ایک مثبت جفت عدد ہے اور $x \leq 10\}$

(iv) A = { x : 10 کا ایک جفت ہے x } $B = \{10, 15, 20, 25, 30, ...\}$

.5 کیا درج ذیل سیٹوں کے جوڑے مساوی ہیں؟ وجوہات بتائیے۔

(i) $A = \{2, 3\}$ B = { x : x مساوات $x^2 5n + 6 = 0$ کا ایک حل ہے }

(ii) A = { x : x، لفظ **FOLLOW** کا ایک حرف ہے }   B = { y : y لفظ **WOLF** کا ایک حرف ہے }

.6 درج ذیل میں مساوی سیٹ کا انتخاب کیجئے۔

$$H=\{0,1\} \qquad A=\{2,4,8,12\} \quad B=\{1,2,3,4\} \quad C=\{4,8,12,14\}$$

$$F=\{0,a\} \qquad E=\{-1,1\} \qquad G=\{1,-1\}$$

1.6 ذیلی سیٹ (Subsets)

درج ذیل سیٹوں پر غور کیجئے :X= آپکے اسکول کے تمام طلباء کا سیٹ Y= آپ کی کلاس کے تمام طلباء کا سیٹ۔
ہم یہ بات نوٹ کرسکتے ہیں کہ سیٹ Y کا ہر ممبر سیٹ X کا ممبر ہے۔ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سیٹ Y سیٹ X کا ذیلی سیٹ ہے (Subsets) ہم اسے علامت $Y \subset X$ سے ظاہر کرتے ہیں۔علامت "$\subset$" کا مطلب ہے ذیلی سیٹ (Sub Set) یا اس کا حصہ ہے۔

تعریف 4 اگر سیٹ A کا ہر عنصر B کا بھی عنصر ہو تو سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ (Subset) کہلاتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں $A \subset B$ اگر $a \in A$ تو $a \in B$۔نشان "$\Rightarrow$" کا استعمال زیادہ بہتر ہے۔جس کا مطلب ہے''اس سے ملتا ہے۔''اس نشان کا استعمال کر کے ہم ذیلی سیٹ کی تعریف اس طرح بھی بیان کرتے ہیں۔

$A \subset B$ اگر $a \in B \Leftarrow A \in A$۔

ہم اوپر دیے ہوئے بیان کو اسطرح بھی پڑھتے ہیں''A، B کا ذیلی سیٹ ہے اگر کوئی بھی عنصر سیٹ A میں ہو تو یہ سیٹ B کا بھی عنصر ہے اگر A، B کا ذیلی سیٹ نہیں ہے تو ہم یہ لکھتے ہیں $A \not\subset B$

ہم یہ بات نوٹ کرتے ہیں کہ A کو B کا ذیلی سیٹ ہونے کیلئے یہ ضروری ہے کہ A کے تمام عناصر B کے عناصر بھی ہوں۔یہ بھی ممکن ہے کہ B کے تمام عناصر A میں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ $A \subset B$ اس حالت میں A اور B ایک ہی سیٹ ہوتے ہیں یا $A \subset B$ یا $B \subset A$ جس کا مطلب $A=B (\Leftrightarrow)$ جہاں $(\Leftrightarrow)$ نشان دوطرفہ معاملات کو ظاہر کرتا ہے اور اسے اسطرح پڑھا جاتا ہے (یہ اور ضربہ) یا مختصر طور پر (iff)

ہم ذیلی سیٹ کی تعریف سے یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ ہر سیٹ اپنے آپ کا ذیلی سیٹ ہے یعنی $A \subset A$ کیونکہ خالی سیٹ $\varnothing$ میں کوئی عنصر نہیں ہوتا۔ہم اس بات پر متن ہیں کہ $\varnothing$ ہر سیٹ کا ذیلی سیٹ ہے اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

(i) ناطق اعداد کا سیٹ $\varnothing$ حقیقی اعداد R کا ذیلی سیٹ ہے اور ہم لکھتے ہیں QCR۔

(ii) اگر A،54 کے تمام قاسموں کا سیٹ ہے اور B,56 کے تمام مفرد قاسموں کا سیٹ ہے تو B سیٹ A کا ذیلی سیٹ ہے
ہم لکھتے ہیں۔ ACA۔

(iii) مان لیجئے $A = \{1,3,5\}$ اور $\{$ x، 6 سے چھوٹا ایک طاق طبعی عدد ہے: x $\}$ =B تب $A \subset B$ اور یعنی
$B \subset A$

(iv) مان لیجئے $A = \{a,e,i,o,u\}$ ، $B = \{a,b,c,d\}$ تب B,A کا ذیلی سیٹ نہیں ہے اور AB کا ذیلی سیٹ
نہیں ہے۔ہم لکھتے ہیں $A \not\subset B$ اور $B \not\subset A$

تعریف: واجب ذیلی سیٹ (Proper Subset): مان لیجئے A اور B دو سیٹس ہیں۔ اگر $A \subset B$ اور $A \neq B$ تب
B, A کا واجب ذیلی سیٹ ہے اور A, B کا Super Set کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر $A = \{1,2,3\}$ سیٹ
$B = \{1,2,3,4\}$ کا واجب ذیلی سیٹ ہے۔

تعریف: واحدی عنصری (Singleton Set): اگر ایک سیٹ A ہے اور اس میں ایک ہی عنصر ہے تو ہم اسکو واحدی عنصری
کہتے ہیں۔اس لیے $\{a\}$ ایک واحدی عنصری سیٹ ہے۔

مثال 9 ذیل کے سیٹوں پر غور کیجئے۔

$\varnothing A=\{1,3\}$ $\qquad B=\{1,5,9\}$ $\qquad C=\{1,3,5,7,9\}$

نیچے دیئے ہوئے سیٹوں کے جوڑوں کے درمیان $\subset$ یا $\not\subset$ علامت کا استعمال کیجئے۔

(i)$\varnothing$...B(iv) (ii)A...B(iii) (iii)A...C(ii) (iv)B...C(i)

حل (i) $\varnothing \subset B$ کیونکہ $\varnothing$ ہر سیٹ کا ذیلی سیٹ ہے۔

(ii) $A \not\subset B$ کیونکہ $3 \in A$ اور $3 \in B$

(iii) $A \subset C$ کیونکہ $1,3 \in A$ اور ان کا تعلق C سے بھی ہے۔

(iv) $B \subset C$ کیونکہ B کا ہر ممبر C کا بھی ممبر ہے۔

مثال 10 مان لیجئے $A=\{a,e,i,o,u\}$ اور $B=\{a,b,c,d\}$ ہے۔کیا B,A کا ذیلی سیٹ ہے اگر نہیں (کیوں؟) کا

B،A کا ذیلی سیٹ ہے؟ اگر نہیں (کیوں؟)

مثال 11 مان لیجیے A، B اور C تین سیٹ ہیں اگر $A \in B$ اور $B \subset C$ کیا یہ صحیح کہ $A \subset C$؟ اگر نہیں تو ایک مثال دیجیے۔

حل نہیں مان لیجیے $A=\{1\}$ ، $B=\{\{1\},2\}$ اور $C=\{\{1\},2,3\}$ یہاں $A \in B$ کیونکہ $A=\{1\}$ اور $B \subset C$

لیکن $A \not\subset C$ کیونکہ $1 \in A$ اور $1 \notin C$

یہ بات نوٹ کیجیے کہ ایک سیٹ کا کوئی عنصر اس کا ذیلی سیٹ نہیں ہوسکتا۔

1.6.1 حقیقی اعداد کے سیٹ کے ذیلی سیٹ (Subsets of Set of real numbers)

جیسا کہ ہم نے 1.6 میں دکھایا ہے حقیقی سیٹ کے بہت سے خاص ذیلی سیٹ ہیں ہم نے ذیل میں ان ذیلی سیٹ کے نام دیے ہیں۔

طبعی اعداد کا سیٹ $N=\{1,2,3,4,5...\}$

صحیح اعداد کا سیٹ $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

ناطق اعداد کا سیٹ $Q=\left\{x:x=\dfrac{p}{q},q \in z \text{ and } q \neq 0\right\}$

جسے ہم اسطرح پڑھتے ہیں ''Q ان سب x اعداد کا سیٹ ہے اور $x=\dfrac{p}{q}$ جہاں p اور q دونوں صحیح اعداد ہیں اور q،o کے برابر نہیں ہے۔'' Q میں 5- شامل ہے (جسے ہم اس طرح دکھا سکتے ہیں $\left(\dfrac{5}{1}\right)$ ، $\dfrac{5}{7}$، $3\dfrac{1}{2}$ جسے ہم لکھ سکتے ہیں اور $\dfrac{7}{2}$ ، $\dfrac{11}{3}$

غیر ناطق اعداد کا سیٹ جو کہ دوسرے حقیقی اعداد سے بنا ہے۔

اس لئے = {x ایک حقیقی عدد ہے اور x ناطق عدد نہیں ہے :x}=T یا

$$T=\{x:x \in R \text{ and } x \notin Q\} = R-Q$$

اس کا مطلب وہ تمام حقیقی اعداد جو ناطق نہیں ہیں T کے عناصر ہیں $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ اور ان ذیلی سیٹ کے کچھ رشتہ نیچے دے

گئے ہیں۔

$$N \subset Z \subset Q, Q \subset R, T \subset R, N \not\subset T$$

1.6.2 وقفے بحیثیت حقیقی سیٹ کے ذیلی سیٹس (Intervals as Subsets of R)

مان لیجیے $a,b \in R$ اور $a<b$ تب حقیقی اعداد کا سیٹ $\{y:a<y<b\}$ ایک کھلا ہوا وقفہ کہلاتا ہے اور ہم اسے (a,b) سے ظاہر کرتے ہیں a اور b کے درمیان تمام نقطہ کھلے ہوئے وقفہ (a,b) میں شامل ہیں لیکن a اور b اس وقفہ میں شامل نہیں ہے۔

وہ وقفہ جس میں یہ دونوں نقطہ a اور b شامل ہیں بند وقفہ (Closed Interval) کہلاتا ہے۔ اور اسے [a,b] سے ظاہر کیا جاتا ہے اس طرح :

$$[a,b] = \{x:a \le x<b\}$$

ہمارے پاس اس طرح کے وقفہ بھی ہو سکتے ہیں جو ایک ہی ساتھ ایک طرف سے کھلے اور ایک طرف سے بند ہوں یہ ایک کھلا ہوا وقفہ ہے جو a سے b کی طرف ہے۔ اور جس میں $[a,b)=\{x:a \le x<b\}$ a شامل ہے اور b نہیں۔

یہ ایک کھلا ہوا وقفہ ہے جو a سے b کی طرف ہے اور جس میں b شامل ہے a نہیں $(a,b]=\{x:a \le x<b\}$ یہ علامتی اظہار حقیقی اعداد کے سیٹ کے ذیلی سیٹ کو دکھانے کا دوسرا طریقہ ہے۔ مثال کے طور اگر $A=(-3,5)$ اور $B=(-7,9)$ ہو تو $A \subset B$ سیٹ $0, \infty$ مثبت حقیقی اعداد کی تعریف بیان کرتا ہے۔ جبکہ $(-\infty,0)$ جبکہ $(-\infty,\infty)$ منفی حقیقی اعداد کی تعریف بیان کرتا ہے۔ سیٹ $[-\infty,\infty]$ حقیقی اعداد اور ایک خط کے رشتے کو ظاہر کرتا ہے جو $-\infty$ سے ∞ تک بڑھ رہی ہے۔

حقیقی اعداد والے خط پر بہت سے وقفہ جو مندرجہ بالا حقیقی سیٹ کے ذیلی سیٹ ہیں نیچے شکل 1.1 میں دکھائی گئے ہیں۔

شکل 1.1

یہاں، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایک دقفہ میں لامحدود نقاط ہیں۔

مثال کے طور پر سیٹ $\{x:x \in R,-5<x \leq 7\}$ جو سیٹ ساز شکل میں ہے وقفہ کے شکل میں اس طرح لکھا جاسکتا ہے$[-5,7]$اور وقفہ$[-3,5]$کو سیٹ ساز شکل میں اس طرح لکھتے ہیں $\{x:-3 \leq x < 5\}$ ۔

اعداد $(b,-a)$ کسی بھی وقفہ (a,b)، $[a,b]$، $[a,b)$، یا $(a,b]$ کی لمبائی ہے۔

1.7 قوت سیٹ (Power Set)

سیٹ$\{1,2\}$ پر غور کیجئے ہم اب $\{1,2\}$ کے تمام ذیلی سیٹ لکھتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ $\varnothing$ ہر سیٹ کا ذیلی سیٹ ہے۔اس لیے $\varnothing$ سیٹ $\{1,2\}$ کا ذیلی سیٹ ہے$\{1\}$ اور$\{2\}$ بھی سیٹ$\{1,2\}$ کے ذیلی سیٹ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ہر سیٹ خود کا ذیلی سیٹ ہوتا ہے۔اس لیے $\{1,2\}$ سیٹ $\{1,2\}$ کا ذیلی سیٹ ہے۔اس طرح سیٹ $\{1,2\}$ کے چار ذیلی سیٹ کے سیٹ کو قوت سیٹ(Power Set) کہتے ہیں۔

تعریف 5 سیٹ کے تمام ذیلی سیٹوں کے مجموعہ کو A کا قوت سیٹ کہتے ہیں۔اس کو ہم $P(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں $P(A)$ کا ہر عنصر ایک سیٹ ہوتا ہے۔

اس لیے جیسا اوپر ہے اگر $A=\{1,2\}$، تو

$$P(A)\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

یہ بات بھی نوٹ کر لیجئے کہ $n[p(A)]=4=2^2$

عام طور پر اگر A کوئی سیٹ ہے جس میں $n(A)=m$ تو دکھایا جاسکتا ہے کہ $n[P(A)=2^m$

1.8 آفاقی سیٹ (Universal Set)

عام طور پر کسی بھی سیاق وسیاق میں ہمارے ذہن میں بنیادی سیٹ کے عنصر اور ذیلی سیٹ ہوتے ہیں جو ایک خاص قسم کا رشتہ رکھتے ہیں۔مثال کے طور پر جب ہم اعداد کے نظام کا مطالعہ کرتے ہیں۔تو ہماری دلچسپی طبعی اعداد اوران کے ذیلی سیٹ میں ہوتی ہیں۔جیسے تمام مفرد اعداد کا سیٹ، تما جفت اعداد کا سیٹ وغیرہ وغیرہ۔یہ بنیادی سیٹ آفاقی سیٹ کہلاتا ہے۔اور اسے عموماً U سے ظاہر کرتے ہیں۔اور اسکے تمام ذیلی سیٹ کو A، B اور C وغیرہ سے۔

مثال کے طور پر تمام صحیح اعداد کے سیٹ Z کے لئے ناطق اعداد کا سیٹ Q یا حقیقی اعداد کا سیٹ R آفاقی سیٹ ہوتا ہے۔

دوسری مثال کے طور پر انسانوں کی آبادی کے سلسلے میں دنیا میں موجود تمام لوگوں کا سیٹ آفاقی سیٹ ہے۔

مشق 1.3

1. خالی جگہوں میں مناسب علامات سے اور $\subset$ یا $\not\subset$ بھر کر درج ذیل بیانات کو درست کیجیے۔

(i) $\{2,3,4\} \ldots \{1,2,3,4,5\}$ (ii) $\{a,b,c\} \ldots \{b,c,d\}$

(iii) {x : x آپ کے اسکول کا ایک طالب علم ہے} ... {x : x آپ کے اسکول کی xi جماعت کا ایک طالب علم ہے}

(iv) {x : x نصف قطر والا ایک دائرہ ہے} ... {x : x مستوی میں ایک دائرہ ہے}

(v) {x : x مستوی میں ایک مستطیل ہے} ... {x : x مستوی میں ایک مثلث ہے}

(vi) {x : x مستوی میں ایک مثلث ہے} ... {x : x مستوی میں ایک مساوی ضلعی مثلث ہے}

(vii) {x : x ایک صحیح عدد ہے} ... {x : x ایک جفت طبعی عدد ہے}

2. جانچ کیجیے کہ درج ذیل بیانات آیا درست ہیں یا غلط۔

(i) $\{a,b\} \not\subset \{b,c,a\}$

(ii) $\{a,e\} \subset$ {x : x انگریزی حروف کا ایک حرف علت ہے}

(iii) $\{1,2,3\} \subset \{1,3,5\}$ (iv) $\{a\} \subset \{a,b,c\}$

(v) $\{a\} \in \{a,b,c\}$

(vi) {x : x ایک طبعی عدد ہے جو 36 کو تقسیم کرتا ہے} $\subset$ {x : x ایک جفت طبعی عدد ہے جو 6 کو تقسیم کرتا ہے}

3. مان لیجیے $A=\{1,2,\{3,4\},5\}$ ہو تو درجہ ذیل میں کون سے بیانات غلط ہیں اور کیوں؟

(i) $\{3,4\} \subset A$ (ii) $\{3,4\} \in A$ (iii) $\{\{3,4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1,2,5\} \subset A$

(vii) $\{1,2,5\} \in A$ (viii) $\{1,2,3\} \subset A$ (ix) $\varnothing \in A$

(x) $\varnothing \subset A$ (xi) $\{\varnothing\} \subset A$

4. نیچے دیے گئے تمام سیٹوں کے ذیلی سیٹ لکھئے

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a,b\}$ (iii) $\{1,2,3\}$ (iv) ϕ

5. P(A) کے کتنے عناصر ہیں اگر $A=\varnothing$ ہو؟

6. مندرجہ ذیل سیٹوں کو وقفہ کے طور پر لکھئے۔

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \le 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x \le -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \le x \le 4\}$

7. مندرجہ ذیل وقفوں کو سیٹ ساز شکل میں لکھئے:

(i) (-3,0) (ii) [6,12] (iii) (6,12] (iv) [-23,5)

8. نیچے دیئے گئے سیٹوں کے لیے آپ کون سا آفاقی سیٹ تجویز کریں گے؟

(i) زاویہ قائمہ کے سیٹ کے لیے (ii) مساوی الساقین مثلث کے سیٹ

9. دیئے گئے سیٹ $A=\{1,3,5\}$، $B=\{2,4,6\}$ اور $C=\{0,2,4,6\}$ کے لیے نیچے دیا گیا۔

کون سا آفاقی سیٹ ہوگا جو کہ A،B اور C تینوں کے لیے ہو۔

(i) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

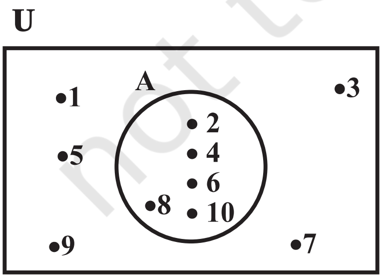
(ii) $\varnothing$

(iii) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(vi) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1.9 وین ڈائی گرام (Venn Diagram)

سیٹ کے درمیان بیشتر رشتوں کا اظہار ہم ڈائیگرام سے کر سکتے ہیں جسے ہم وین ڈائی گرام کہتے ہیں۔ اسکا نام ایک برطانوی جان وین (1834-1883) کے نام پر رکھا گیا۔ یہ ڈائی گرام مستطیل اور تخمنی بند زیادہ تر دائروں پر مبنی ہے۔ اس ڈائیگرام میں آفاقی سیٹ کو مستطیل کے اندرون سے ظاہر کرتے ہیں اور

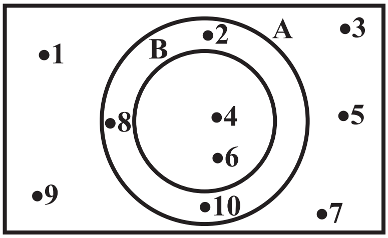


شکل 1.2

دوسرے سیٹوں کو دائروں کے اندرون سے ظاہر کرتے ہیں۔

وین ڈائیگرام میں سیٹ کے عنصر اپنے خاص سیٹوں کی شکل میں لکھے جاتے ہیں (شکل 1.2 اور 1.3)

U



شکل 1.3

تشریح 1 شکل 1.2 میں $U=\{1,2,3,...,10\}$ ایک آفاقی سیٹ ہے جسکا اور ایک ذیلی سیٹ ہے۔

تشریح 2 شکل 1.3 میں $U=\{1,2,3,...10\}$ ایک آفاقی سیٹ ہے جسکے $A=\{2,4,6,8,10\}$ اور $B=\{2,6\}$ ذیلی سیٹ ہیں اور $B \subset A$

جب ہم اجماع (union) تقاطع (Intersection) اور سیٹوں کے فرق پر بحث و مباحثہ کریں گے تو آپ اس درمیان وین ڈائیگرام کا بھرپور استعمال دیکھیں گے۔

1.10 سیٹوں پر عملیات (Operations on Sets)

ہم نے سابقہ جماعتوں میں اعداد پر جمع گھٹا (تفریق)، ضرب اور تقسیم پر عمل کئے ہیں۔ ہر عمل میں دو اعداد سے ایک نیا عدد ملتا تھا۔ مثال کے طور پر جب ہم 5 اور 13 کو جمع کرتے ہیں تو ہمیں 18 حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم 5 اور 13 کیساتھ ضرب کا عمل کرتے ہیں تو ہمیں 65 حاصل ہوتا ہے اسی طرح کچھ عملیات ایسے ہیں جو اگر دو سیٹوں پر کیئے جائیں تو ہمیں ایک نیا سیٹ ملتا ہے۔ اب ہم سیٹوں پر کچھ عملیات بیان کریں گے اور ساتھ ہی ان کی خصوصیات کو بھی دیکھیں گے۔ اس طرح تمام سیٹ آفاقی سیٹ کے ذیلی سیٹ ہوں گے۔

1.10.1 اتحادی سیٹ (Union of Sets)

مان لیجئے A، B دو سیٹ ہیں A اور B کا اتحادی سیٹ وہ سیٹ ہوتا ہے جس میں A، B کے تمام عنصر موجود ہوتے ہیں مشترکہ عناصر کو ایک مرتبہ لکھتے ہیں۔ اسکے لئے علامت 'U' کا استعمال ہوتا ہے۔ علامتی طور پر اسے AUB سے ظاہر کیا جاتا ہے اور پڑھتے ہیں A اتحاد B

مثال 12 مان لیجئے $A=\{2,4,6,8\}$ ، $B=\{6,8,10,12\}$ ہو تو $A \cup B$ معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے $A \cup B=\{2,4,6,8,10,12\}$

یہ بات نوٹ کرنے کی ہے کہ مشترکہ عناصر 6 اور 8 کو $A \cup B$ لکھنے میں صرف ایک ہی مرتبہ لیا گیا ہے۔

مثال 13 مان لیجیے $A=\{a,e,i,o,u\}$ اور $B=\{a,i,u\}$ دکھائے $A \cup B = A$ ہے

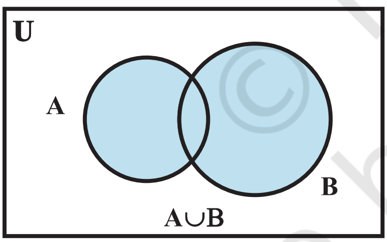
حل ہمارے پاس ہے $A \cup B=\{a,e,i,o,u\} = A$

درج بالا مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ سیٹ A اور اس کے ذیلی سیٹ B کا اتحادی سیٹ خود A ہی ہوتا ہے۔ بعد اگر $B \subset A$ ہو تو

$A \cup B=A$

مثال 14 مان لیجیے $X = \{$ رام گیتا، اکبر $\}$، XI جماعت کے ان طلباء کا سیٹ ہے جو اسکول کی ہاکی ٹیم میں ہیں۔ مان لیجیے $Y = \{$ گیتا، ڈیوڈ اشوک $\}$ جماعت کے ان طلباء کا سب ہے جو اسکول کی فٹ بال ٹیم میں شامل ہیں $X \cup Y$ معلوم کیجیے اور سیٹ کی ترجمانی کریں۔

حل ہمارے پاس ہے $X \cup Y = \{$ رام گتا۔ اکبر، ڈیوڈ، اشوک $\}$ جماعت کے ان طلباء کا سیٹ ہے جو یا تو اسکول کی ہاکی ٹیم میں ہیں یا فٹ بال ٹیم میں یا دونوں میں ہیں۔



شکل 1.4

ہم دوسٹ کے اتحاد کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں۔

تعریف 6 دو سیٹوں A اور B کا اتحادی سیٹ سے وہ سیٹ ہے جس میں وہ تمام عناصر ہوتے ہیں جو یا تو A میں ہوتے ہیں یا B میں (اور جو دونوں میں مشترک ہوتے ہیں)

علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں $A \cup B=\{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

دو سیٹوں کے اتحاد کو ہم درج ذیل وین ڈائیگرام سے ظاہر کرتے ہیں۔

شکل 1.4 میں شیڈ کیا گیا حصہ $A \cup B$ کو ظاہر کرتا ہے۔

اتحادی عملیات کی کچھ خصوصیات (Some Properties of the operation of union)

(i) $(A \cup B)=A \cup B$ (تقلیبی قانون)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (تلازمی قانون)

(iii) $A \cup \varnothing = A$ (تماثلی قانون $\varnothing$ اتحاد کا تماثلہ ہے)

(iv) $A \cup A = A$ (کلیہ ہماں قوت قانون)

(v) $U \cup A = U$ (تماثلی قانون)

1.10.2 سیٹوں کا تقاطع (Intersection of Sets)

دو سیٹوں A اور B کا تقاطع وہ سیٹ ہوتا ہے جس میں A اور B کے مشترک عناصر ہوتے ہیں۔ علامت '$\cap$' تقاطع کے لیے ظاہر کرتے ہیں ہیں۔ دو سیٹ A اور B کا تقاطع وہ سیٹ ہے جس کے عناصر دونوں سیٹوں میں موجود ہوتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں $A \cap B = \{x : x \in A$ اور $x \in B\}$

مثال 15 مثال 12 کے سٹ A، B کو لیجئے اور $A \cap B$ معلوم کیجئے۔

حل ہم شاہدہ کرتے ہیں کہ 6 اور 8 دونوں میں مشترک ہیں اس لئے $A \cap B = \{6, 8\}$

مثال 16 مثال 14 کے سیٹ X اور Y لیجئے اور $X \cap Y$ معلوم کیجئے۔

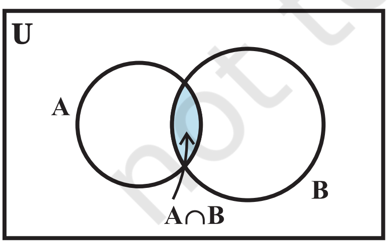
حل ہم دیکھتے ہیں کہ عنصر ''گیتا'' واحد عنصر ہے جو دونون میں مشترک ہے۔ اس لیے { گیتا } = XUY

مثال 17 مان لیجئے $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ ہے $A \cap B$ معلوم کیجئے اور تصدیق کیجئے کہ $A \cap B = B$

حل ہمارے پاس ہے $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ اگر $B \subset A$ ہو تو $A \cap B = B$

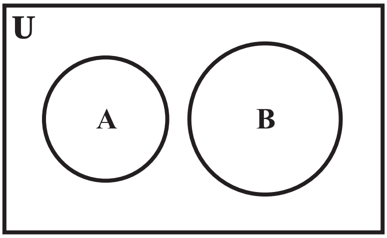
تعریف 7 دو سیٹ A اور B کا تقاطع سیٹ وہ سیٹ ہے جن کے عناصر دونوں سیٹوں میں موجود ہوتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں $A \cap B = \{x : x \in A$ اور $x \in B\}$



شکل 1.5

شکل 1.5 میں شیڈ کیا گیا حصہ $A \cap B$ کو ظاہر کرتا ہے

اگر A، B دو سیٹ اسطرح ہوں کہ $A \cap B = \varnothing$ تو A، B غیر مشترک سیٹ کہلاتے ہیں مثال کے طور پر $A = \{2, 4, 6, 8\}$



شکل 1.6

اور $B=\{1,3,5,7\}$ تو A، B غیر مشترک سیٹ (Disjoint Sets) کہلاتے ہیں کیونکہ ان دونوں میں کوئی بھی عنصر مشترک نہیں ہے ۔ غیر مشترک سیٹوں کو ہم دین ڈائیگرام کے درج ذیل شکل 1.6 میں دکھاتے ہیں۔ مندرجہ بالا ڈائیگرام میں A، B غیر مشترک سیٹ ہیں۔

تقاطع عملیات کی کچھ خصوصیات (Some properties of operation of intersection)

(i) $A \cap B = B \cap A$ (تقلیبی قانون)

(ii) $(A \cap B) \cap C = (B \cap C)$ (تلازمی قانون)

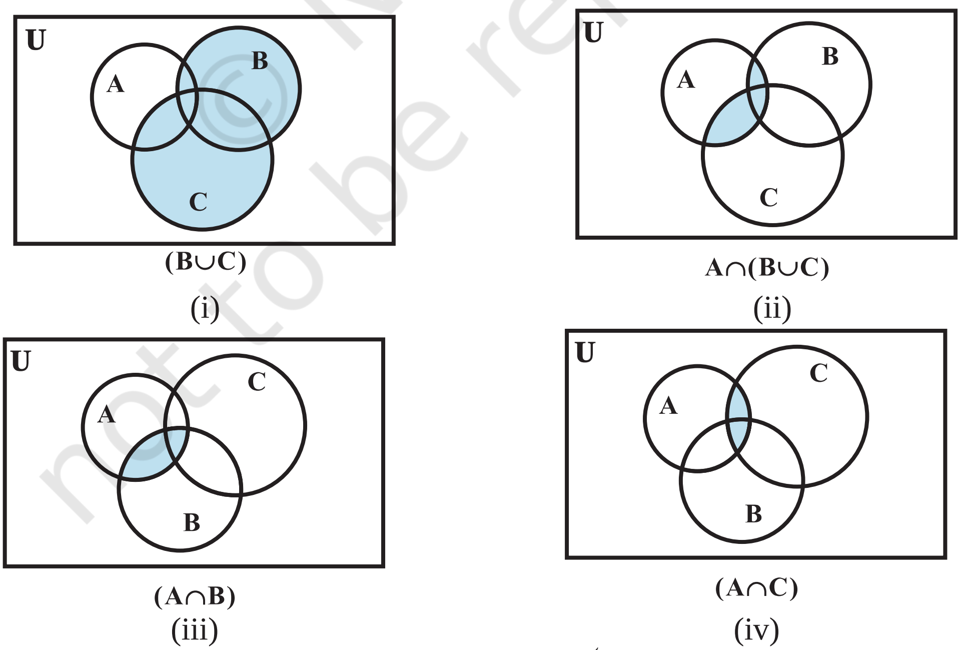
(iii) $\varnothing \cap A = \varnothing, U \cap A = A$ ($\varnothing$ اور U کا قانون)

(iv) $A \cap A = A$ (کلیہ ہماں قوت قانون)

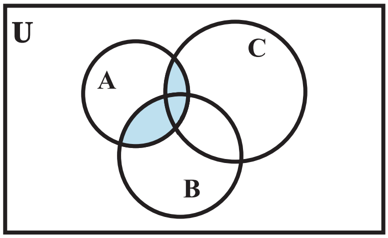
(v) $A \cap (BUC) = (A \cap B)U(A \cap C)$ (تقاطع کا تقسیمی قانون)

اس سے ملتا ہے $\cap$ تقسیمی ہے U پر

ان قوائین کی تصدیق دین ڈائیگرام [1.7(i)-(v)] سے کی جاسکتی ہے۔ شکل 1.7(i)-(v)



شکل 1.7(i) سے (iv) تک



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v)

شکل 1.7 (v)

1.10.3 سیٹوں کی تفریق (Difference of Sets)

سیٹ A اور سیٹ B کی تفریق وہ سیٹ ہے جس کے عناصر A سے تعلق رکھتے ہیں لیکن B X سے تعلق نہیں رکھتے۔ علامتی طور پر ہم لکھتے ہیں کہ A-B اور پڑھتے ہیں A فرق B

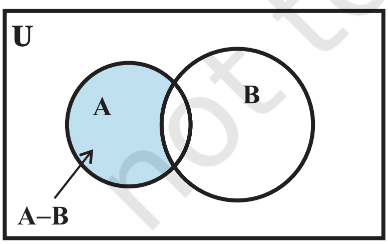
مثال 18 مانا کہ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{2,4,6,8\}$ ۔ A-B اور B-A معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $A-B=\{1,3,5\}$ کیونکہ 1، 3 اور 5 ایسے عناصر ہیں جو A میں ہیں اور B میں نہیں ہیں۔ اسی طرح $B-A=\{8\}$ کیونکہ عنصر 8، B میں موجود ہے A میں نہیں۔

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ $A-B \neq B-A$

مثال 19 مانا کہ $V=\{a,e,i,o,u\}$ ، $B=\{a,i,l,u\}$ تو V-B اور B-V معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $V-B=\{e,o\}$ کیونکہ e اور o ہی دو ایسے عناصر ہیں جو B میں نہیں ہیں اور V میں موجود ہیں۔ اور اسی طرح $B-V=\{k\}$ کیونکہ k عنصر B میں ہے اور V میں نہیں ہے۔

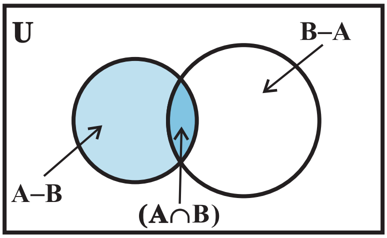


شکل 1.8

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $V-B \neq B-V$ سیٹ ساز علامت کا استعمال کرکے ہم سیٹوں کی تفریق کی تعریف اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$A-B=\{ x : x \in A$ اور $x \notin i \}$

دو سیٹوں A اور B کی تفریق کو وین ڈائیگرام کے ذریعہ شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 1.9

دوسیٹوں A اور B کی کا فرق شکل میں دیئے گئے شیڈ سے دکھایا گیا ہے۔

ریمارک سیٹ A - B، $A \cap B$ اور B - A باہم غیر مشترک ہیں (mutually disjoint) اس طرح دوسیٹوں کا تقاطع ایک خالی سیٹ ہے جیسا کہ شکل 1.9 میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 1.4

.1 درج ذیل ہر ایک سیٹ کے جوڑوں کا اتحاد معلوم کیجیے۔

(i) $X=\{1,3,5\}$ $Y=\{1,2,3\}$

(ii) $A=\{a,e,i,o,u\}$ $B=\{a,b,c\}$

(iii) A= {x: ایک طبعی عدد ہے اور 3 کا صف ہے x}

B= {x: ایک طبعی عدد ہے اور 6 سے چھوٹا ہے x}

(iv) A= {x: ایک طبعی عدد ہے اور $1 < x \le 6$ ہے x}

B= {x: ایک طبعی عدد ہے اور $6 < x \le 10$ x}

(v) $A=\{1,2,3\}$، $B=\phi$

.2 مانا کہ $A=\{a,b\}$ اور $B=\{a,b,c\}$، $A \subset B$ کیا ہے؟ $A \cup B$ کیا ہے۔

.3 اگر A اور B دوسیٹ ہیں اس طرح کہ $A \subset B$ تب $A \cup B$ کیا ہوگا؟

.4 اگر $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{3,4,5,6\}$، $C=\{5,6,7,8\}$ اور $D=\{7,8,9,10\}$ تو معلوم کیجیے۔

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$

(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

.5 درج بالا سوال نمبر 1 کے تمام سیٹوں کے جوڑوں کے تقاطع معلوم کیجیے۔

.6 اگر $A=\{3,5,7,9,11\}$، $B=\{7,9,11,13\}$، $C=\{11,13,15\}$ اور $D=\{15,17\}$

درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) $A\cap B$ (ii) $B\cap C$ (iii) $A\cap C\cap D$ (iv) $A\cap C$

(v) $B\cap D$ (vi) $A\cap(B\cup C)$ (vii) $A\cap D$ (viii) $A\cap(B\cup D)$

(ix) $(A\cap D)\cap(B\cup C)$ (x) $(A\cup D)\cap(B\cup C)$

.7 مانا کہ $A=\{x:$ x ایک طبعی عدد ہے$\}$ $B=\{x:$ x ایک طبعی جفت عدد ہے$\}$ $\{$ x ایک طاق طبعی عدد ہے

$C=\{x:$ مفرد عدد ہے $\{$ x ایک مفرد عدد ہے $:x\}=D$ تو معلوم کیجیے۔

(i) $A\cap B$ (ii) $A\cap C$ (iii) $A\cap D$ (iv) $B\cap C$ (v) $B\cap D$

(vi) $C\cap D$

.8 درج ذیل میں کون سے سیٹوں کے جوڑ غیر مشترک ہیں۔

(i) $\{1,2,3,4\}$ اور $\{x:$ x ایک طبعی عدد ہے اور $4\le x<6\}$

(ii) $\{a,e,i,o,u\}$ اور $\{c,d,e,f\}$

(iii) $\{x:$ x ایک طاق صحیح عدد ہے$\}$ اور $\{x:$ x ایک مثبت صحیح عدد ہے$\}$

.9 مانا کہ $A=\{3,6,12,15,18,21\}$، $B=\{4,8,12,16,20\}$، $C=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

اور $D=\{5,10,15,20\}$ تو معلوم کیجیے۔

(i) A-B (ii) A-C (iii) A-D (iv) B-A (v) C-B (vi) D-A

(vii) B-C (viii) B-D (ix) C- B (x) D-B (xi) C-D

(xii) D-C

.10 اگر $X=\{a,b,c,d\}$ اور $Y=\{f,b,d,g\}$ تو معلوم کیجیے۔

(i) X-Y (ii) Y-X (iii) $X\cap Y$

.11 اگر **R** حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور **Q** ناطق اعداد کا سیٹ ہے تو **R-Q** معلوم کیجیے؟

.12 بیان کیجیے کہ آیا درج ذیل بیانات درست ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $\{2,3,4,5\}$ اور $\{3,6\}$ غیر مشترک سیٹ ہیں۔

(ii) $\{a,e,i,o,u\}$ اور $\{a,b,c,d\}$ غیر مشتک سیٹ ہیں۔

(iii) $\{2,6,10,14\}$ اور $\{3,7,11,15\}$ غیر مشترک سیٹ ہیں۔

(iv) $\{2,6,10\}$ اور $\{3,7,11\}$ غیر مشترک سیٹ ہیں۔

1.11 سیٹ کا تکملہ (Complement of a Set)

مان لیجئے آفاقی سیٹ U تمام مفرد اعداد کا سیٹ ہے۔ مانا کہ A، U کا ذیلی سیٹ ہے جس کے اندر وہ تمام مفرد اعداد ہیں جو 42 کے قاسم نہیں ہیں۔ اس لیے $A=\{x : x \in U$ اور 'x' 42 کا قسم نہیں ہے$\}$ ہم دیکھتے ہیں کہ $2 \in U$ لیکن $2 \notin A$ کیونکہ 2، 42 کا قاسم ہے اسی طرح $3 \in U$ لیکن $3 \notin A$ اور $7 \in U$ لیکن $7 \notin A$۔ اب 2، 3 اور 7 آفاقی سیٹ کے وہ عناصر ہیں جو A میں نہیں ہیں۔ ان تین مفرد اعداد کا سیٹ بھی $\{2,3,7\}$ U کی مناسبت میں کا تکملہ کہلاتا ہے اور اس کو ہم A' سے ظاہر کرتے ہیں۔

اسطرح ہمارے پاس ہے $A'=\{2,3,7\}$ اور ہم دیکھتے ہیں کہ $A'=\{x : x \in U$ اور $x \notin A\}$ صاف طور پر $A'=U-A$ ہم دیکھتے ہیں کہ سیٹ A کے تکملہ کو اسطرح بھی کہا جا سکتا ہے کہ یہ آفاقی سیٹ اور سیٹ A کی تفریق ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ سیٹ A کی تفریق ہے۔

مثال 20 مان لیجئے $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ اور $A=\{1,3,5,7,9\}$ تو A' معلوم کیجئے

حل ہم نوٹ کرتے ہیں کہ 2,4,6,8,10 U کے وہ عناصر ہیں جو A میں موجود نہیں ہیں اس لیے $A'=\{2,4,6,8,10\}$

مثال 21 مان لیجئے 'U' XI جماعت کے ان تمام طلباء کا آفاقی سیٹ ہے جو کسی اسکول میں تعلیم پا رہے ہیں جہاں مخلوط تعلیم رائج ہے (Co-Educational school)-A، XI جماعت کی تمام لڑکیوں کا سیٹ ہے تو A' معلوم کیجئے۔

حل کیونکہ A تمام XI کلاس کی لڑکیوں کا سیٹ ہے اس لیے A' تمام لڑکوں کا سیٹ ہوگا۔

> **نوٹ** اگر A آفاقی سیٹ U کا ماتحت سیٹ ہے تو اسکا تکملہ A' بھی U کا ذیلی (ماتحت) سیٹ ہوگا۔

دوبارہ اگر ہم مندرجہ بالا مثال نمبر 20 پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں۔ $A'=\{2,4,6,8,10\}$

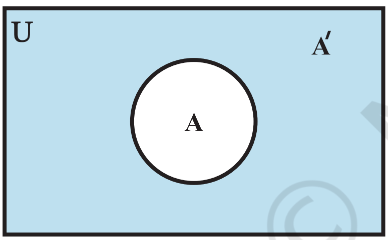
$(A')'=\{2,4,6,8,10\}$

اس لیے $(A')'=\{x:x \in U$ اور $x \notin A'\}$

یہ تکمیہ کی تعریف سے صاف ہوجاتا ہے کہ آفاقی سیٹ کے کسی بھی ذیلی سیٹ کے لیے ہمارے پاس ہے $(A')'=A$
اب ہم $(A\cup B)'$ اور $A'N\ B'$ کے نتائج مندرجہ ذیل مثال میں معلوم کریں گے۔

مثال 22 مان لیجیے $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,3\}$ اور $B=\{3,4,5\}$ تو معلوم کیجیے A'، B'، $A'\cap B'$ ، $A\cup B$ اور پھر ثابت کیجیے کہ $(AUB)'=A'\cap B'$

حل صاف طور پر $A'=\{1,4,5,6\}$ ، $B'=\{1,2,6\}$ ہے۔ اس لیے $A'\cap B'=\{1,6\}$
اسی طرح $A\cup B=\{2,3,4,5\}$ ۔ اس لیے $(A\cup B)'=\{1,6\}$ اور $(A\cup B)'=\{1,6\}=A'\cap B'$



شکل 1.10

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اوپر دیا ہوا نتیجہ سب کیلئے صحیح ہے اگر A اور B کسی بھی آفاقی سیٹ کے ذیلی سیٹ ہیں
تب $(A\cup B)'=A'\cap B'$ اسی طرح $(A\cap B)'=A'\cup B'$ یہ دو نتائج الفاظ میں اس طرح بیان کئے جاسکتے ہیں:
دو اتحادی سیٹ کا تکملہ ان کے تکملہ کا تقاطع ہے اور دو تقاطع سیٹ کا تکملہ ان کے تکملہ کا اتحادی ہے۔ انہیں ڈی مارگن کا قانون (De Morgan's laws) کہا جاتا ہے۔ یہ اس ریاضی دان کے نام کے بعد دئے گئے ہیں۔

سیٹ A کا تکملہ A وین ڈائیگرام کے ذریعہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔
سیٹ A کا تکملہ تصویر میں شیڈ سے دکھایا گیا ہے۔

تکملہ کی کچھ خصوصیات (Some Properties of complements)

1. تکملہ کے قانون (i) $A\cap A'=U$ (ii) $A\cap A'=\phi$
2. ڈی مارگن کا قانون (i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

3. قاعدہ در پیچ $(A')'=A$

4. قانون تکملہ ϕ اور U کا قانون $U=\phi$ اور $U'=\phi$

ان قانون کی ہم وین ڈائیگرام کے ذریعہ بھی تصدیق کر سکتے ہیں۔

مشق 1.5

1. مان لیا $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{2,4,6,8\}$ اور $C=\{3,4,5,6\}$

تو معلوم کیجئے (i) A' ،

(ii) B' (iii) $(A\cup C)'$ (iv) $(A\cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B-C)'$

2. اگر $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ ہو تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے تکملیمعلوم کیجئے۔

(i) $A=\{a,b,c\}$ (ii) $B=\{d,e,f,g\}$

(iii) $C=\{a,c,e,g\}$ (iv) $D=\{f,g,h,a\}$

3. طبعی اعداد سیٹ کو آفاقی سیٹ مان کر مندرجہ ذیل سیٹوں کے تکملے معلوم کیجئے۔

(i) $\{x$ ایک طبعی طاق عدد ہے $: x\}$ (ii) $\{x$ ایک طبعی جفت عدد ہے $: x\}$

(iii) $\{x$ ایک مفرد اعداد ہے $: x\}$ (iv) $\{x$ ، 3 کا جفت ضریب ہے $: x\}$

(v) $\{x$ ایک کامل مربع ہے $: x\}$ (vi) $\{x$ ، 3 اور 5 سے تقسیم ہوتا ہے $x : x\in N\}$

(vii) $\{x$ ایک کامل کعب عدد $x : x\in N\}$ (viii) $\{x : x\in N$ اور $x+5=8\}$

(ix) $x\}$ $\{x:2x+5=9\}$ (x) $\{x:x\geq 7\}$

(xi) $\{x : x\in N$ اور $2x+1>10\}$

4. اگر $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، $A=\{2,4,6,8\}$ اور $B=\{2,3,5,7\}$ تو تصدیق کیجئے کہ:

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

5. ذیل میں ہر ایک کے لیے مناسب وین ڈائیگرام بنائیے۔

(i) $(A\cup B)'$ (ii) $A'\cap B'$ (iii) $(A\cap B)'$ (iv) $A'\cup B'$

6. مانا کہ U مستوی تمام مثلثوں کا سیٹ ہے۔ اگر A مثلثوں کا وہ سیٹ ہے جن میں کم از کم ایک زاویہ 60^0 سے مختلف ہو تو معلوم کیجئے A کیا ہے۔

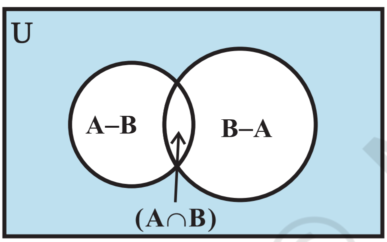
7. ذیل میں خالی جگہوں کو اس طرح بھریئے تا کہ ہر بیان درست ہو۔

(i) $A\cup A'$ (ii) $\varnothing'\cap A=\ldots$ (iii) $A\cap A'=\ldots$

(iv) $U'\cap A=\ldots$

1.12 دو سیٹوں کے اتحاد اور تقاطع پر عملی مسئلہ

(Practical Problems on Union and intersection of two Sets)



شکل 1.11

پچھلے سیکشن میں ہم نے دو سیٹوں کے اتحاد، تقاطع اور تفریق کے بارے میں پڑھا ہے اس سیکشن میں ہم روزمرہ کی زندگی میں درپیش مسائل کا مطالعہ کریں گے۔ اس باب میں حاصل شدہ فارمولا آنے والے باب-16 احتمالی میں بھی استعمال ہوگا۔

مان لیا کہ A اور B محدود سیٹ ہیں۔ اگر $A\cap B=\varnothing$ ہو تو

(i) $$n(A\cup B)=n(A)+n(B) \quad ...(1)$$

$A\cup B$ میں موجود عناصر یا تو A میں ہیں یا B میں موجود ہیں لیکن دونوں سیٹوں میں موجود نہیں ہیں کیونکہ $A\cap B=\varnothing$ ہے جس سے کی تصدیق ہوتی ہے۔

عام طور پر اگر A اور B محدود سیٹ ہیں۔ تو

(ii) $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \quad ...(2)$$

یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ سیٹ A-B، $A\cap B$ اور B-A غیر مشترک ہیں اور ان کا اتحاد $A\cup B$ ہے شکل (1.11) اس لیے

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ جو '2' کو ثابت کرتی ہے

(iii) اگر B,A اور C محدود سیٹس ہیں تو

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$$
$$-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C) \quad \ldots(3)$$

دراصل میں ہمارے پاس ہے

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B\cup C))-n[A\cap(B\cup C)] \quad \text{[by (2)]}$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n[A\cap(B\cup C)] \quad \text{[by (2)]}$$

اس لیے ہمیں ملتا ہے۔ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

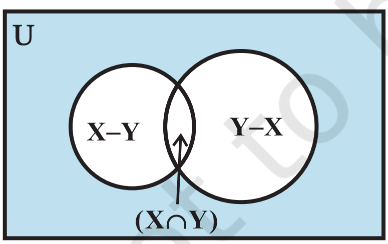
$$n[A\cap(B\cup C)=n(A\cap B)+n(A\cap C)-n[(A\cap B)\cap(A\cap C)]$$
$$=n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

اس لئے

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$$
$$-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

اس سے 3 ثابت ہوتا ہے۔

مثال 23 اگر X اور Y دو ایسے سیٹ ہیں کہ $n(X\cap Y)=50$، $n(X)=28$ اور $n(Y)=32$ ہوتو $n(X\cap Y)$ معلوم کیجیے۔



شکل 1.12

حل دیا ہوا ہے $n(X\cap Y)=50$،

$n(X)=28$، $n(Y)=32$،

$n(X\cap Y)=?$

درج ذیل فارمولہ استعمال کرنے پر

$$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$$

اس سے ہم کو ملتا ہے $n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)=28+32-50=10$

متبادل طریقے سے اگر مان لیجئے $n(X-Y) = k$ تو

$n(X-Y) = k, n(Y-X)+n=32-k$ (شکل 1.12 وین ڈائیگرام سے)

اس ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $50 = n(X \cup Y) = n(Y-X)+n(X \cap Y)+n(Y-X)$

$= (28 - k) + k+(32-K)$

اس لیے $k=10$

مثال 24 ایک اسکول میں 20 اساتذہ میں جو یا تو ریاضی پڑھاتے ہیں یا طبعیات اس میں سے 12 ریاضی پڑھاتے ہیں اور 4 طبعیات اور ریاضی دونوں۔ تو معلوم کیجئے کتنے اساتذہ طبعیات پڑھاتے ہیں

حل مانا کہ m اساتذہ ریاضی پڑھاتے ہیں اور اساتذہ پڑھاتے ہیں۔ مسلئہ کے بیان میں لفظ یا اتحاد کی طرف اشارہ کرتا ہے اور لفظ ''اور'' تقاطع کی طرف۔

اس لیے ہمارے پاس ہے $n(M \cap P)=4$ اور $n(M \cup P)=20, n(M)=12$

ہمیں $n(P)$ معلوم کرنا ہے۔

$n(M \cup P)=n(M)+n(P)-n(M \cap P)$ نتیجہ استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$20=12+n(P)-4$

اس لیے $n(P)=12$

اس لئے 12 اساتذہ طبعیات پڑھاتے ہیں۔

مثال 25 35 طلباء کی ایک کلاس میں 24 کرکٹ کھیلنا پسند کرتے ہیں اور 16 فٹ بال۔ ساتھ ہی ہر طالب علم کم سے کم ایک کھیل کھیلنا پسند کرتا ہے۔ کتنے طلب علم ایسے ہیں جو دونوں فٹ بال اور کرکٹ کھیلنا پسند کرتے ہیں۔

حل مانا کہ 'X' طلباء کا وہ سیٹ ہے جو کرکٹ کھیلنا پسند کرتے ہیں۔ اور Y طلباء کا وہ سیٹ ہے جو فٹ بال کھیلنا پسند کرتے ہیں۔ اس لیے XUY طلباء کا وہ سیٹ ہے جو کم سے کم ایک کھیل کھیلنا پسند کرتا ہے۔ اور $X \cap Y$ طلباء کا وہ سیٹ ہ جو دونوں کھیل کھیلنا پسند کرتا ہے۔

دیا ہوا ہے $n(x)=24$ ، $n(y)=16$ ، $n(X \cup Y)=35$

فارمولے کا استعمال کرکے ہیں $n(X\cup Y)=n(x)+n(y)-n(X\cap Y)$

حاصل ہوتا ہے $35=24+16-n(X\cap Y)$

اس لیے $n(X\cap Y)=5$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 5 طلباء دونوں کھیل کھیلنا پسند کرتے ہیں۔

مثال 26 400 طالب علموں کے اسکول کے ایک سروے میں 100 طلباء سیب کا جوس پیتے ہیں۔ 150 سنترے کا اور 75 طلباء دونوں طرح کا سیب اور سنترے کا جوس پیتے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کتنے طلباء دونوں میں سے کوئی سا جوس نہیں پیتے؟

حل مان کہ U ان طلباء کا سیٹ ہے جن کا سروے ہوا ہے۔ A ان طلباء کو ظاہر کرتا ہے جو سیب کا جوس پیتے ہیں۔ اور B ان طلباء کو ظاہر کرتا ہے جو سنترے کا جوس پیتے ہیں۔

تب $n(U)=400, n(A)=100, n(B)=150$ اور $n(A\cap B)=75$

اب $n(A'\cap B')=n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A'\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=400-100-150+75=225$

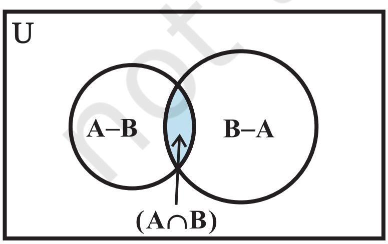
اس طرح 225 طلباء نہ تو سیب اور نہ ہی سنترے کا جوس پیتے ہیں۔

مثال 27 200 لوگوں کو جلد کی بیماری ہے۔ جن میں 120 لوگوں کا کیمیا C_1 سے 50 کا علاج کیمیا C_2 سے اور 30 کا کیمیا C_1 اور C_2 سے علاج کرایا گیا ہے۔ وہ تعداد معلوم کرو جو۔

(i) کیمیا C_1 سے علاج ہوا اور C_2 سے نہیں۔

(ii) کیمیا C_2 سے علاج ہوا اور C_1 سے نہیں۔

(iii) کیمیا C_1 یا C_2 سے علاج ہوا۔



شکل 1.13

حل مان لیاں U آفاقی سیٹ ان لوگوں کو ظاہر کرتا ہے جن کو جلد کی بیماری ہے A ان لوگوں کا سیٹ ہے جنہیں کیمیا C_1 سے علاج کرایا گیا ہے اور جن

کا علاج کیمیا C_2 سے علاج کرایا گیا ہے۔یہاں $n(U)=200$ ، $n(A)=120$ ، $n(B)=50$ اور $n(A \cap B)=30$

(i) نیچے دی گئی وین ڈائیگرام سے شکل 1.13 میں ہمیں ملتا ہے۔

$$A=(A-B)U(A \cap B)$$

$n+(A)=n(A-B)+n(A \cap B)$ کیونکہ $(A-B)$ اور $A \cap B$ غیر مشترک ہیں۔

یا $n(A-B)=n(A)-n(A \cap B)=120-30=90$

اس طرح 90 لوگوں کا علاج کیمیا C_1 سے کرایا گیا اور C_2 سے نہیں۔

(ii) شکل 1.13 ا سے ہمارے پاس ہے

$$B=(B-A) \cup (A \cap B)$$

اور اس لیے $n(B)=n(B-A)+n(A \cap B)$

(کیونکہ $B-A$ اور $A \cap B$ غیر مشترک ہیں۔)

یا $n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)$

$$=50-30=20$$

اس لیے 20 لوگوں کا علاج کیمیا C_2 سے کرایا گیا اور C_1 سے نہیں۔

(iii) وہ لوگ جن کا علاج کیمیا C_1 سے کرایا گیا یا کیمیا C_2 سے

یعنی $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$$=120+50-30=140$$

مشق 1.6

1. اگر X اور Y دو سیٹ اس طرح ہیں کہ $n(x)=17$ ، $n(Y)=23$ اور $n(X \cup Y)=38$ ہیں تو $n(X \cap Y)$ معلوم کیجیے۔

2. اگر X اور Y دو سیٹ اس طرح ہیں کہ $X \cup Y$ کے 18 عناصر ہیں X کے 8 عناصر ہیں اور Y کے 15 عناصر ہیں تو

$X \cap Y$ میں کتنے عناصر ہوں گے۔

3. 400 لوگوں کے ایک گروپ میں 250 لوگ ہندی بول سکتے ہیں اور 200 لوگ انگریزی بول سکتے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کتنے لوگ انگریزی اور ہندی بول سکتے ہیں۔

4. اگر S اور T دو ایسے سیٹ ہیں کہ S کے 21 عناصر، T کے 32 عناصر اور $S \cap T$ کے 11 عناصر ہیں تو معلوم کیجئے کہ $S \cup T$ میں کتنے عناصر ہوں گے؟

5. اگر X اور Y دو سیٹ ہیں اور X کے 40 عناصر ہیں، $X \cup Y$ کے 60 عناصر ہیں اور $X \cap Y$ کے 10 عناصر ہیں تو معلوم کیجئے کہ y کے کتنے عناصر ہوں گے؟۔

6. 70 لوگوں کے ایک گروپ میں 37 کافی پسند کرتے ہیں 52 لوگ جائے پسند کرتے ہیں اور ہر شخص کم از کم ایک چیز پسند کرتا ہے۔ تو معلوم کیجئے کہ کتنے لوگ دونوں چیزیں کافی اور جائے پسند کرتے ہیں۔

7. 65 لوگوں کے ایک گروپ میں 40 کرکٹ پسند کرتے ہیں، 10 کرکٹ اور ٹینس دونوں پسند کرتے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کہ کتنے لوگ صرف ٹینس پسند کرتے ہیں کرکٹ نہیں؟ اور کتنے لوگ ٹینس پسند کرتے ہیں۔

8. 50 لوگوں کی ایک کمیٹی میں 20 لوگ فرانیسی زبان بولتے ہیں اور 10 لوگ فرانسیسی اور اسپینی دونوں بولتے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کہ کتنے لوگ دونوں میں سے کم از کم ایک زبان بولتے ہیں؟۔

متفرق مثالیں (Miscellaneous Examples)

مثال 28 دکھائے کہ لفظ CATARACT کی ہجا کرنے میں ضروری حروف کا سیٹ اور لفظ tract کی ہجّا کرنے کے لیے ضروری حروف کا سیٹ مساوی ہے۔

حل مان لیجئے X لفظ "CATARACT" کے حروف کا سیٹ ہے۔

تب $X=\{C,A,T,R\}$ ہوگا مان لیجئے Y لفظ "TRACT" کے حروف کا سیٹ ہے

تو $Y=\{T,R,A,C,T\} = \{T,R,A,C\}$ چونکہ X کا ہر حرف Y میں ہے اور Y کا ہر حرف X میں ہے اس لیے $X=Y$

مثال 29 سیٹ $\{-1,0,1\}$ کے تمام ذیلی سیٹ لکھے۔

حل مانا کہ $A=\{-1,0,1\}$، A ایک ذیلی سیٹ $\varnothing$ ہے جو خالی ہے۔ A کے دو ذیلی سیٹ جن میں صرف ایک عنصر ہے

$\{1\}, \{0\}, \{-1\}$ ہیں A کے ذیلی سیٹ جن میں دوعنصر ہیں وہ $\{-1,0\}$ تین عناصر ہیں وہ A خود ہے۔اس لیے A کے تمام ذیلی سیٹ ہیں۔

$$\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$$

مثال 30 ثابت کیجئے کہ $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

حل مان لیجئے $a \in A$ اس کا مطلب ہے $a \in A \cup B$

چونکہ $a \in A \cap B$ ، $A \cup B = A \cap B$ اس لیے $a \in B$

اس لیے $A \subset B$ اسی طرح $b \in B$ اس کا مطلب ہے۔

$b \in A \cup B$ چونکہ $A \cup B = A \cap B$ ، $b \in A \cap B$ ۔اس لیے $b \in A$

تب $B \subset A$ اس طرح $A = B$

مثال 31 کسی بھی سیٹ A اور B کے لیے ثابت کیجئے کہ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

حل مان لیجئے $X \in P(A \cap B)$ تو $X \subset A \cap B$ اس لیے $X \subset A$ اور $X \subset B$ ۔اس لیے $X \in P(A)$ اور $X \in P(B)$ جس کا مطلب ہے $X \in P(A) \cap P(B)$ اس سے ملتا ہے۔ $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$

مان لیجئے $Y \in P(A) \cap P(B)$ تو $Y \in P(A)$ اور $Y \in P(B)$ اس لئے $Y \subset A$ اور $Y \subset B$ اس لئے $Y \subset A \cap B$ جس کا مطلب ہے $Y \in P(A \cap B)$ اس سے ملتا ہے $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$

اس لیے $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

مثال 32 1000 خریداری کے ایک سروے میں 720 خریداروں نے پروڈکٹ A کو پسند کیا اور 450 نے پروڈکٹ B کو پسند کیا خریدروں کی وہ کم از کم تعداد بتائے جنھوں نے دونوں پروڈکٹ کو پسند کیا؟

حل مان لیا U خریداروں کا سیٹ ہے۔S ان خریداروں کا سیٹ ہے جنھوں نے پروڈکٹ A کو پسند کیا اور T ان خریداروں

کا سیٹ ہے جنھوں نے پروکٹ B کو پسند کیا۔

دیا ہوا ہے $n(U)=1000, n(S)=720, n(T)=450$

اس لیے $n(S\cup T)=n(s)+n(T)-n(S\cap T)$

$=720+450-n(S\cap T)1170-n(S\cap T)$

اس لئے جب $n(S\cup T)$ سب سے زیادہ ہوتو $n(S\cap T)$ سب سے کم ہوگا۔

لیکن $nS\cup T\subset U$ ہے اس کا مطلب $n(S\cup T)\leq n(U)=1000$ ، $n(S\cup T$ کی ۔اس لئے سب سے زیادہ قیمت 1000 ہے اوراسی طرح $n(S\cap T)$ کی سب سے کم قیمت 170 ہے۔اس لیے 170 وہ لوگ ہیں جو کم ازکم ایک پورڈکٹ پسند کرتے ہیں۔

مثال 33 500 کار مالکوں کا سروے کیا گیا۔400 لوگ کار A رکھتے ہیں اور 200 لوگ کار B رکھتے ہیں۔50 لوگ A اور B دونوں کاریں رکھتے ہیں کیا یہ آنکڑے صحیح ہیں۔

حل مان لیجئے U تمام کار مالکوں کا سیٹ ہے۔M ان کار مالکوں کا سیٹ ہے جو کار A رکھتے ہیں،اور S ان کار مالکوں کا سیٹ ہے جو کار B رکھتے ہیں۔

دیا ہوا ہے $n(U) = 500, n(M)=400, n(S)=200$ اور $n(N\cap M) = 50$

تب $n(S\cup M) = n(S)+n(M)-n(S\cap M)n(SAM)=50$

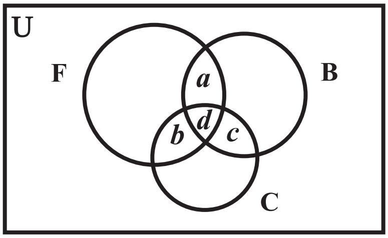
لیکن $S\cup M\subset U \Rightarrow M(S\cup M)\leq n(U)$

یہاں تضاد ہے۔اس لئے دیا ہوا ڈیٹا صحیح نہیں ہے۔

مثال 34 ایک اسکول فٹ بال میں 38 میڈل انعام میں دیتا ہے۔15 باسکٹ بال میں اور 20 کرکٹ میں ۔اگر یہ تمال میڈل کل 58 آدمیوں کو ملے ہیں۔اورصرف تین آدمی تینوں کھیلوں میں میڈل لیتے ہیں تو معلوم کیجئے کہ کتنے لوگ تین میں سے دوکھیلوں میں میڈل حاصل کرتے ہیں؟

حل مان لیجئے B,F اور C ان آدمیوں کے سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں جنھوں نے بالترتیب فٹ بال، باسکٹ بال اور کرکٹ میں

میڈل جیتتے تب



شکل 1.14

$n(F)38, n(B)=15, b(C)=20, n(F \cup B \cup C)=58$

اور $n(F \cap B \cap C)=3$

اس لئے $n(FUBVC)=n(F)+n(B)$
$+n(c)-n(F \cap B)-n(F \cap C)-n(B \cap C)$
$+n(F \cap B \cap C)$

اس لیے $n(F \cap B)+n(F \cap C)+n(B \cap C)=18$

متبادل،شکل 1.14 میں دیے گئے وین ڈائیگرام پر غور کیجئے۔

یہاں a ان آدمیوں کی تعداد کو صرف ظاہر کرتا ہے جن کو فٹ بال اور باسکٹ بال میں میڈل ملے ہیں اور b ان آدمیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جن کو صرف فٹ بال اور کرکٹ میں میڈل ملے ہیں اور c ان آدمیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جو کو صرف باسکٹ بال اور کرکٹ میں میڈل ملے ہیں اور d ان آدمیوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جنھوں نے تینوں کھیلوں میں میڈل جیتے ہیں۔اس لئے۔

$d=n(F \cap B \cap C)=3$ اور $a+b+c=9$ اس لیے $a+d+b+d+c+d=18$

یہ ان آدمیوں کی تعداد ہے جنھوں نے تین میں سے دو کھیلوں میں میڈل حاصل کئے ہیں۔

متفرق مشق باب 1

.1 بتائے درج ذیل میں کون سے سیٹ کس کے ذیلی سیٹ ہیں۔

{وہ تمام حقیقی اعداد جو مساوات $x^2-8x+12=0$ کے حل ہیں } = A ، $B=\{2,4,6\}$ ، $C=\{2,4,6...\}$ ، $D=\{6\}$

ثابت کیجئے کہ $A \subset \varnothing$ کا مطلب ہے $A=\varnothing$

.2 درج ذیل میں دیئے گئے بیانات میں کون سے درست ہیں اور کون سے غلط۔اگر یہ صحیح میں تو ثابت کیجئے اور اگر غلط ہیں تو مثالیں دیجئے۔

(i) اگر $X \in A$ اور $A \in B$ تب $X \in B$

(ii) اگر $B \subset C$ اور $B \in C$ تب $A \in C$

(iii) اگر $A \subset B$ اور $B \subset C$ تب $A \subset C$

(iv) اگر $A \not\subset B$ اور $B \not\subset C$ تب $A \not\subset C$

(v) اگر $X \in A$ اور $A \not\subset B$ تب $X \in B$

(vi) اگر $A \subset B$ اور $X \notin B$ تب $X \notin A$

3. مان لیجئے B,A اور XC سیٹ ہیں اس طرح کہ $A \cup B = A \cup C$ اور $A \cap B = A \cap C$ تو دکھائیے کہ $B=C$

4. دکھائیے کہ درج ذیل چار حالتیں معادل ہیں۔

(i) $A \subset B$ (ii) $A-B=\varnothing$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

5. دکھائے اگر $A \subset B$ اگر تب $C-B \subset C-A$

6. فرض کیجئے کہ $P(A)=P(B)$ تو ثابت کیجئے کہ $A=B$

7. کیا کہیں دو سیٹ A اور B کیلئے یہ صحیح ہے، $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

8. کہیں دو سیٹ A اور B کے لیے ثابت کیجئے۔

$A \cup (A-B) = (A \cup B)$ اور $A = (A \cap B) \cup (A-B)$

9. سیٹوں کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیئے کہ

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

10. ثابت کیجئے کہ $A \cap B = A \cap C$ اس کا مطلب یہ ضروری نہیں ہے کہ $B=C$

11. مان لیجئے A اور B سیٹ ہیں اگر $A \cap X = B \cap X = \varnothing$ اور $A \cup X = B \cup X$ کسی بھی سیٹ X کے لئے ثابت کیجئے کہ $A=B$

(اشارہ $A = A \cap (A \cup X)$ ، $B = B \cap (B \cup X)$ اور تقسیمی قانون استعمال کریں۔)

12. سیٹ B,A اور C معلوم کیجئے جبکہ $A \cap B$ ، $A \cap C$ اور $B \cap C$ غیر خالی سیٹ ہیں اور $A \cap B \cap C = \varnothing$

13. 600 طلباء کے ایک سروے میں 150 طلبا چائے پینا پسند کرتے ہیں اور 225 کافی پینا پسند کرتے ہیں۔ ان میں سے 100 دونوں چائے اور کافی پینا پسند کرتے ہیں۔ تو بتائے کہ کتنے طلبا دونوں میں سے ایک بھی پینا پسند نہیں کرتے؟

14. طلباء کے ایک گروپ میں 100 طلباء ہندی جانتے ہیں 50 انگریزی جانتے ہیں۔ 25 دونوں جانتے ہیں۔ ہر ایک طالب علم انگریزی یا ہندی میں سے ایک زبان جانتا ہے۔ تو معلوم کیجئے کہ اس گروپ میں کتنے طلباء ہیں؟

.15 60 لوگوں کے ایک سروے میں پایا گیا کہ 20 لوگ اخبار H پڑھتے ہیں، 26 لوگ اخبار T پڑھتے ہیں اور 26 لوگ اخبار I پڑھتے ہیں۔ 9 لوگ H، I دونوں پڑھتے ہیں 11 لوگ اخبار H اور T پڑھتے ہیں، 8 لو اخبار T اور I پڑھتے ہیں اور 3 لوگ تینوں اخبار پڑھتے ہیں معلوم کیجئے۔

(i) ان لوگوں کی تعداد جو کم از کم ایک اخبار پڑھتے ہیں۔

(ii) ان لوگوں کی تعداد جو صرف ایک ہی اخبار پڑھتے ہیں۔

.16 ایک سروے میں پایا گیا کہ 21 لوگ پروڈکٹ A پسند کرتے ہیں، 26 پروڈکٹ B اور 29 پروڈکٹ سے پسند کرتے ہیں۔ اگر 14 لوگ دونوں پروڈکٹ A اور B پسند کرتے ہیں، 12 لوگ پروڈکٹ C اور A پسند کرتے ہیں 14 لوگ پروڈکٹ B اور C پسند کرتے ہیں اور 8 لوگ تینوں پروڈکٹ پسند کرتے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کہ کتنے لوک صرف پروڈکٹ C پسند کرتے ہیں۔

خلاصہ (Summary)

اس باب میں سیٹ سے متعلق تعریفیں اور ان پر ہونے والے عوامل کا مطالعہ کیا ہے۔ یہاں ہم اس کا خلاصہ اس طرح کررہے ہیں۔

- ایک سیٹ واضح اشیاء کا مجموعہ ہوتا ہے۔
- جس سیٹ میں کوئی بھی عنصر نہ ہو اسے خالی سیٹ کہتے ہیں۔
- جس سیٹ کے عناصر کسی خاص تعداد میں ہوں تو اس سیٹ کو متناہی سیٹ کہتے ہیں ورنہ وہ لامتناہی سیٹ کہلاتا ہے۔
- اگر کسی بھی دو سیٹ A اور B میں بالکل ایک جیسے عناصر ہوں تو وہ مساوی (برابر) کہلاتے ہیں۔
- سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ کہلاتا ہے اگر A کے قوت سیٹ کو P(A) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- کسی بھی دو سیٹ A اور B کا اتحاد ایک سیٹ ہوتا ہے جس کے عناصر یا تو A میں ہوتے ہیں یا B میں ہوتے ہیں۔
- کسی بھی دو سیٹ A اور B کا تقاطع ایک سیٹ ہوتا ہے جس کے عناصر A اور B میں مشترک ہوتے ہیں۔

دو سیٹ A اور B کی تفریق اسی ترتیب میں ایک سیٹ ہوتا ہے جس کے عناصر A سے تو تعلق رکھتے ہیں مگر B سے تعلق نہیں رکھتے ہیں۔

- آفاقی سیٹ U کے کسی بھی ذیلی سیٹ A کا تکملہ ایک سیٹ ہوتا ہے جس کے عناصر U سے تعلق رکھتے مگر A سے تعلق نہیں رکھتے ہیں۔
- اگر A اور B کوئی بھی دو سیٹ ہیں تو

(i – $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(ii – $(A\cap B)'=A'\cup B'$

- اگر A اور B دو متناہی (Fioite Sets) اس طرح ہو کہ $A\cup B=\varnothing$ تو

$n(A\cup B) = n(A) + n(B)$

اور اگر $A\cap B \neq \varnothing$ تب $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

تاریخ کے اوراق سے

مانا جاتا ہے کہ سیٹوں کے جدید نظریئے کی شروعات ایک جرمن ریاضی داں (Georg Cantor 1845-1918) نے کی سیٹ نظریہ پر اس کے پیپرس 1874 سے 1997 میں سامنے آئے۔ سیٹ نظریہ کا مطالعہ اس کے سامنے اس وقت آیا جب وہ ٹرگنومیٹرک سیریز... $a_1\sin 2x+a_3\sin 3x+$ کا مطالعہ کر رہا تھا۔ اسکے ایک پیر سے جو 1874 میں شائع ہوا معلوم ہوتا ہے کہ حقیقی اعداد کو صحیح اعداد کے ساتھ One to One تناظرت میں نہیں رکھا جا سکتا۔ 1879 کے پھر اس نے کئی پیپر شائع کیے جس میں Abstract سیٹ کی بہت خصوصیات دکھائی گئیں۔

Cantor کے کام کو ایک دوسرے مشہور ریاضی داں رچرڈ ڈیڈے کنڈ (Richard Dedekind(1831-1916)) نے سراہا لیکن (Kronecker, 1810-1893) نیلا متناہی سیٹوں کو متناہی ڈھنگ سے لینے کے لئے اس کو غلط بتایا۔ ایک دوسرے ریاضی داں Gottlob Frege نے صدی کے آخر میں سیٹوں کے نظیر کو منطق کے اصولوں کے طور پر پیش کیا۔ اس وقت تک پوری کی پوری سیٹ تھیوری تمام سیٹوں کے وجود کے مفروضہ پر منحصر تھی لیکن مشہور انگریزی فلاسفر برٹینڈ رشل (Bertand Russdl) 1902 میں یہ بتایا کہ تمام سیٹوں کے سیٹ کے مفرضہ میں تضاد ہے۔ اس کی وجہ سے مشہور Russell's Paradox (تناقص) ملا Paul R. Halmos نے اس بارے میں اپنی کتاب Naive Set Theory میں

لکھتے ہیں ہر چیز میں ''کچھ نہیں'' ہوتا ہے۔ Russell کے تناقص (Paradox) کی سادگی اور سیدھا پن (Directness) Froge یا Cantor کی مجوزہ سیٹ تھیوری کو ریاضی کی بنیاد کے طور سمجھنے کی کوشش کو رد کر دیا۔ Russell کا تناقص ہی اکیلا نہیں تھا جو سیٹ تھیوری میں آیا۔ بہت سے ریاضی دانوں اور منطقیوں نے بعد میں بہت سے تناقص پیش کیئے۔ ان سبھی تناقصون (Paradoxes) کے نتیجہ طور پر پہلا سیٹ تھیوری کا بدیچہ 1908 میں Ernst Zermelo نے شائع کیا۔ ایک دوسری تجویز (Abraham Fraenkel) "1992" میں دی John Von Neumann نے 1925 میں کھول کھول کر بدیچہ کے مستقل پن سے متعارف کرایا۔ بعد میں 1937 میں Paul Bernays نے بہت زیادہ اطمینان بخش بدیچہ (Axiomatisation) دیا ان بدیچوں کو نئی شکل Kurt Godel نے اپنے سونو گراف میں 1940 میں دی یہ Godel Bernays کا (G.B) سیٹ نظریہ کہلاتا ہے۔

ان تمام مشکلات کے باوجود Gantor کی سیٹ تھیوری موجودہ ریاضی میں استعمال ہوتی ہے۔ بلکہ آجکل ریاضی کے زیادہ تصورات اور نتائج سیٹ تھیوری کی زبان میں ظاہر کئے جاتے ہیں۔