पूर्ण संख्या

प्रकरण 2

2.1 प्रस्तावना

आपल्याला ठाऊक आहे की आपण संख्या मोजायला सुरुवात करतो तेव्हा आपण 1, 2, 3, 4,... चा उपयोग करतो. अंक सुरू करताना या संख्या आपल्या डोळ्यांसमोर येतात. म्हणून गणिततज्ज्ञ या मोजसंख्यांना (Counting Numbers) नैसर्गिक संख्या (Natural Numbers) म्हणतात.

मागची (आधीची) संख्या आणि पुढची संख्या

दिलेल्या नैसर्गिक संख्येत 1 मिळवला तर तुम्हांला पुढची नैसर्गिक संख्या मिळेल. म्हणजेच तुम्ही तिची पुढची संख्या (successor) मिळवू शकता.

16 ची पुढची संख्या 16 + 1 = 17, 19 ची 19 +1 = 20 आहे आणि अशाप्रकारे पुढे चालू राहील.

16 ही संख्या 17 या संख्येच्या आधी येते. आपण म्हणू शकतो की 17 ची मागची संख्या आहे. (predecessor) 17–1=16 आहे 20 ची 20 – 1 = 19 आहे.

प्रयत्न करा

1. 19, 1997, 12000, 49, 100000, 2440701, 100199 आणि 208090 च्या मागच्या आणि पुढच्या संख्या लिहा.
2. अशी कोणती नैसर्गिक संख्या आहे की जिला मागची संख्या नाही?
3. अशी कोणती नैसर्गिक संख्या आहे की जिला पुढची संख्या नाही? शेवटची नैसर्गिक संख्या कोणती?

3 या संख्येला एक मागची संख्या व एक पुढची संख्या आहे. 2 बद्दल तुम्हांला काय वाटते? याची पुढची संख्या 3 आहे आणि मागची संख्या 1 आहे. 1 या संख्येला मागची आणि पुढची दोन्ही संख्या आहेत का?

आपण आपल्या शाळेतील मुलांची संख्या मोजू शकतो. आपण एखाद्या शहरात राहणाऱ्या व्यक्तींची संख्या मोजू शकतो. आपण भारतात राहणाऱ्या लोकांची संख्या पण मोजू शकतो. संपूर्ण जगातील लोकांची संख्या पण मोजता येईल. कदाचित आपण आकाशात दिसणारे तारे किंवा आपल्या डोळ्यांवरील केस मोजू शकणार नाही परंतु जर मोजावे लागले तर त्यासाठीदेखील एक संख्या असेलच. मग आपण त्या संख्येत 1 मिळवून आणखी मोठी संख्या मिळवू शकतो. अशा पद्धतीने आपण दोन व्यक्तींच्या डोळ्यावरील केस मोजून त्यांची संख्या लिहू शकतो.

आतापर्यंत हे स्पष्ट झाले अशी सर्वांत मोठी नैसर्गिक संख्या कोणतीही नाही. वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त जेव्हा आपल्याला नैसर्गिक संख्या वापराव्या लागतात, तेव्हा आपल्यासमोर अनेक प्रश्न येतात. तुम्ही अशा प्रश्नांबाबत विचार करा आणि मित्रांबरोबर चर्चा करा. तुम्ही या प्रश्नांमधील अनेकांची उत्तरे काढू शकणार नाही.

2.2 पूर्ण संख्या

आपण पाहिले आहे की नैसर्गिक संख्या 1 च्या मागची संख्या नाही. 0 ला आपण नैसर्गिक संख्याच्या मागची संख्या म्हणून मानतो.

नैसर्गिक संख्या शून्यच्या बरोबर घेतल्यास पूर्ण संख्या संच (Whole numbers) बनतो.

प्रयत्न करा

1. सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्यादेखील आहेत का?
2. सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या आहेत का?
3. सर्वांत लहान पूर्ण संख्या कोणती?
4. सर्वांत मोठी पूर्ण संख्या कोणती?

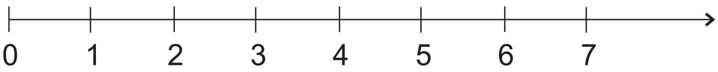
या पूर्वीच्या इयत्तांमध्ये तुम्ही पूर्ण संख्यावरील सर्व मूलभूत क्रिया जसे की– बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करणे शिकला आहात. तुम्ही हेही जाणता की यांचा उत्तर काढण्यासाठी कशाप्रकारे उपयोग केला जातो. चला तर आता या क्रिया एका संख्यारेषेवर करूया. परंतु त्याआधी 'संख्यारेषा' बद्दल जाणून घेऊया.

2.3 संख्यारेषा

एक रेषा काढा. त्यावर एक बिंदू घ्या. त्या बिंदूला '0' निर्देशांक द्या. 0 च्या उजवीकडे आणखी एक बिंदू काढा. त्याला 1 निर्देशांक द्या.

0 आणि 1 यामधील अंतराला 1 एकक अंतर (unit distance) म्हणतात. या रेषेवर 1 च्या उजवीकडे 1 एकक अंतरावर बिंदू काढा आणि 2 निर्देशांक द्या. अशाप्रकारे तुम्ही संख्यारेषेवर एक एकक अंतरावर बिंदूंना 3, 4, 5,....... या प्रमाणे निर्देशित करा. तुम्ही उजव्या बाजूने कोणत्याही पूर्ण संख्येपर्यंत जाऊ शकता.

खाली दिलेली रेषा पूर्ण संख्यांसाठी संख्यारेषा आहे.



बिंदू 2 आणि 4 मधील अंतर किती आहे? हे अंतर निश्चितच 2 एकक आहे. तुम्ही बिंदू 2 आणि 6 तसेच 2 आणि 7 मधील अंतर सांगू शकता का?

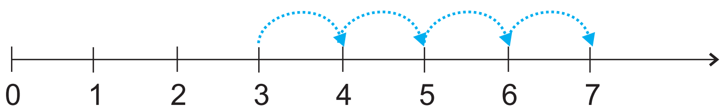
संख्यारेषेवर तुम्ही पाहू शकता की 7 ही संख्या 4 या संख्येच्या उजव्या बाजूला आहे आणि 7 ही संख्या 4 पेक्षा मोठी आहे म्हणजेच $7 > 4$ आहे. 8 ही संख्या 6 च्या उजव्या बाजूला आहे आणि $8 > 6$ आहे. या दृश्यांच्या आधारे आपण म्हणू शकतो की दोन पूर्ण संख्यांमध्ये जी संख्या रेषेवर इतर संख्यांच्या उजवीकडे असते ती मोठी असते. आपण असेही म्हणू शकतो की डाव्या बाजूला असणाऱ्या पूर्ण संख्या लहान असतात. उदाहरणार्थ, $4 < 9$ आहे. 4 ही 9 च्या डावीकडे आहे याचप्रकारे, $12 > 5$. 12 ही 5 च्या उजवीकडे आहे.

तुम्ही 10 आणि 20 बद्दल सांगू शकता का?

30, 12 आणि 18 यांचे संख्यारेषेवर स्थान पहा. कोणती संख्या सर्वांत डावीकडे आहे? तुम्ही 1005 आणि 9756 बद्दल सांगू शकाल का की कोणती संख्या दुसऱ्या संख्येच्या उजवीकडे आहे? संख्यारेषेवरील 12 नंतरची आणि 7 पूर्वीची संख्या सांगा.

संख्यारेषेवर बेरीज

पूर्ण संख्यांची बेरीज संख्यारेषेवर दाखवता येते. चला 3 आणि 4 ची बेरीज पाहूया.

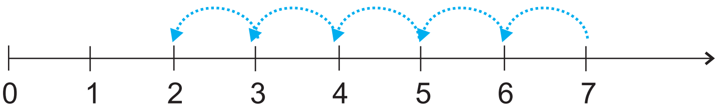


बाणाच्या टोकाला बिंदू 3 आहे. 3 पासून सुरुवात करा. आपल्या या संख्येत 4 मिळवायचे आहेत म्हणून आपण उजवीकडे वर दाखविल्याप्रमाणे 4 पावले 3 ते 4, 4 ते 5, 5 ते 6 आणि 6 ते 7 जाऊ. पावलाच्या शेवटी बाणाच्या दिशेला बिंदू 7 आहे. याप्रकारे 3 आणि 4 ची बेरीज 7 म्हणजेच $3 + 4 = 7$.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेवर वापर करून $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ आणि $1 + 6$ काढा.

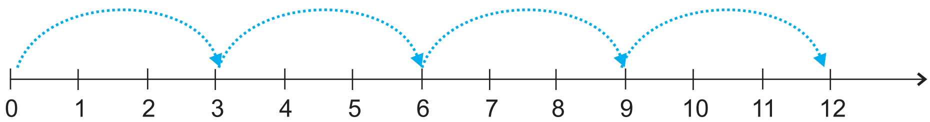
वजाबाकी – दोन पूर्ण संख्यांची वजाबाकीदेखील संख्यारेषेवर दाखवता येते. चला 7 – 5 हे काढूया.



बाणाच्या टोकाला बिंदू 7 आहे. 7 पासून सुरुवात करा. आपल्याला 5 कमी करायचे आहेत म्हणून आपण डावीकडे 1 एककाची 5 पावले जाऊया. आपण बिंदू 2 वर पोहोचू. आपल्याला 7 – 5 = 2 हे मिळते.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेचा वापर करून 8 – 3; 6 – 2 आणि 9 – 6 काढा.



गुणाकार : आता आपण संख्यारेषेवर पूर्ण संख्यांचा गुणाकार पाहूया.

चला, 4 × 3 = किती हे काढू.

0 पासून सुरुवात करा आणि उजवीकडे एकदा 3 एककांपर्यंत चला. अशाप्रकारे 4 वेळा जा. तुम्ही कोठे पोचलात? तुम्ही 12 वर पोहोचलात. म्हणून आपण म्हणतो की, 4 × 3 = 12.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेचा वापर करून 2 × 6; 3 × 3 आणि 4 × 2 काढा.

उदाहरणसंग्रह 2.1

1. 10999 च्या नंतर येणाऱ्या तीन नैसर्गिक संख्या लिहा.
2. 10001 च्या लगतची आधी नैसर्गिक संख्या लिहा.
3. सर्वांत लहान पूर्ण संख्या कोणती?
4. 32 आणि 53 च्या दरम्यान किती पूर्ण संख्या आहेत?
5. खालील संख्यांच्या पुढील संख्या लिहा.
   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. खालील संख्यांच्या मागील संख्या लिहा.
   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांपैकी प्रत्येक जोडीतील कोणती पूर्ण संख्या संख्यारेषेवर दुसऱ्या संख्येच्या डावीकडे आहे हे त्यांच्यामध्ये योग्य चिन्हांचा (>, <) उपयोग करून दाखवा.
   (a) 530, 503 (b) 370, 307
   (c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001

8. खालील विधानांपैकी कोणती विधाने सत्य आणि कोणती असत्य आहेत?
   (a) शून्य ही सर्वांत लहान नैसर्गिक संख्या आहे.
   (b) 400 ही 399 च्या आधीची संख्या आहे.
   (c) शून्य ही सर्वांत लहान पूर्ण संख्या आहे.
   (d) 600 ही संख्या 599 च्या पुढची संख्या आहे.
   (e) सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्या आहेत.
   (f) सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या आहेत.
   (g) दोन अंकी पूर्ण संख्येच्या आधीची संख्या कधीही एक अंकी असत नाही.
   (h) 1 ही सर्वांत लहान संख्या आहे.
   (i) 1 या नैसर्गिक संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नाही.
   (j) 1 या पूर्ण संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नसते.
   (k) 13 ही पूर्ण संख्या 11 आणि 12 या संख्यांच्या दरम्यान येते.
   (l) 0 या पूर्ण संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नसते.
   (m) दोन अंकी संख्येच्या पुढील संख्या नेहमी दोन अंकी संख्याच असते.

2.4 पूर्ण संख्यांची वैशिष्ट्ये

जेव्हा आपण पूर्ण संख्यांवरील विविध क्रियांचा जवळून अभ्यास करतो तेव्हा आपल्याला अनेक वैशिष्ट्ये कळतात. या वैशिष्ट्यांचा उपयोग या संख्या चांगल्याप्रकारे समजण्यासाठी होतो. तसेच, या वैशिष्ट्यांमुळे अनेक क्रिया सोप्यादेखील होतात.

हे करा

तुमच्या वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याला कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज करायला सांगा. त्यांचे उत्तर प्रत्येक वेळेस पूर्ण संख्याच आले का? तुमच्या बेरजा पुढीलप्रमाणे असू शकतात. पूर्ण संख्यांच्या अशा 5 जोड्या घेऊन बेरजा करा. प्रत्येक बेरीज एक पूर्ण संख्याच येते का?

7	+	8	=	15, एक पूर्ण संख्या
5	+	5	=	10, एक पूर्ण संख्या
0	+	15	=	15, एक पूर्ण संख्या
.	+	.	=	…
.	+	.	=	…

तुम्हांला पूर्ण संख्यांची अशी जोडी मिळाली का की ज्याचे उत्तर पूर्ण संख्या येत नाही? अशा कोणत्याही दोन पूर्ण संख्या मिळणार नाही ज्यांचे उत्तर पूर्ण संख्या नसते. आपण म्हणतो की दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज एक पूर्ण संख्याच असते. पूर्ण संख्यांच्या बेरजेतून पूर्ण संख्याच मिळते म्हणून पूर्ण संख्यासंच बेरजेमुळे संवृत्त (Closed) बनतो. याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेचा संवृत्ततेचा (Closure property) गुणधर्म म्हणतात.

पूर्ण संख्या गुणाकाराच्या दृष्टीनेदेखील संवृत्त आहेत का? तुम्ही याचा पडताळा कशाप्रकारे घेऊ शकता?

तुमचे गुणाकार खालील प्रकारे असू शकतात.

7	×	8	=	56, एक पूर्ण संख्या
5	×	5	=	25, एक पूर्ण संख्या
0	×	15	=	0, एक पूर्ण संख्या
.	×	.	=	...
.	×	.	=	...

दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकारदेखील एक पूर्ण संख्याच असते. म्हणून आपण म्हणू शकतो की, पूर्ण संख्यासंच गुणाकाराच्या दृष्टीने पूर्ण संख्यासंच संवृत्त (Closed) आहे.

संवृत्ततेचा गुणधर्म – पूर्ण संख्या या बेरीज तसेच गुणाकारासाठी संवृत्त (Closed) असतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. पूर्ण संख्या वजाबाकीसाठी संवृत्त नसतात का?
   तुम्ही केलेल्या वजाबाकी खालील प्रकारच्या असू शकतात.
   तुम्ही मनाने काही उदाहरणे द्या आणि वरील विधानाचे समर्थन करा.

6	–	2	=	4, एक पूर्ण संख्या
7	–	8	=	?, एक पूर्ण संख्या नाही
5	–	4	=	1, एक पूर्ण संख्या
3	–	9	=	?, एक पूर्ण संख्या नाही

2. भागाकाराच्या दृष्टीने पूर्ण संख्या संवृत्त नसतात का?
   खालील तक्ता पाहा.

8	÷	4	=	2, एक पूर्ण संख्या
5	÷	7	=	$\frac{5}{7}$, एक पूर्ण संख्या नाही
12	÷	3	=	4, एक पूर्ण संख्या
6	÷	5	=	$\frac{6}{5}$, एक पूर्ण संख्या नाही

तुम्ही मनाने काही उदाहरणे घ्या आणि वरील विधानाचे समर्थन करा.

शून्याने भागणे

एका संख्येने भागणे याचा अर्थ होतो की ती संख्या वारंवार वजा करणे.

चला $8 \div 2$ सोडवू.

8 मधून 2 पुन्हापुन्हा वजा करा.

$$\begin{array}{rrl} & 8 & \\ - & 2 & \text{........ } 1 \\ & 6 & \\ - & 2 & \text{........ } 2 \\ & 4 & \\ - & 2 & \text{........ } 3 \\ & 2 & \\ - & 2 & \text{........ } 4 \\ & 0 & \end{array}$$

किती वेळा वजा केल्यावर आपण 0 पर्यंत पोहोचतो?

= चार वेळा

म्हणून, आपण $8 \div 2 = 4$ लिहितो.

ही पद्धत वापरून $24 \div 8$ आणि $16 \div 4$ सोडवा.

चला, आता $2 \div 0$ हे सोडवण्याचा प्रयत्न करू.

$$\begin{array}{rrl} & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 1 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 2 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 3 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 4 \\ & 2 & \\ & \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

प्रत्येक वेळी वजा करूनही आपल्याला पुन्हा 2 च मिळतात. ही क्रिया कधी संपेल का? नाही.

आपण असे म्हणतो की, $2 \div 0$ हे सांगता येत नाही.

चला, $7 \div 0$ सोडवण्याचा प्रयत्न करू.

$$\begin{array}{rrl} & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 1 \\ & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 2 \\ & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 3 \\ & 7 & \\ & \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

पुन्हा आपल्याला वजाबाकीच्या कोणत्याही टप्प्यावर 0 मिळत नाही.

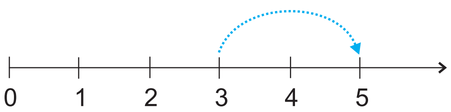
आपण असे म्हणतो की, $7 \div 0$ हे सांगता येत नाही.

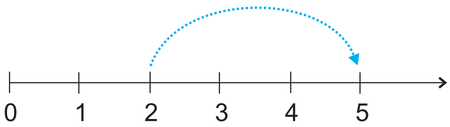
$5 \div 0$ आणि $16 \div 0$ साठी सोडवून पाहा.

पूर्ण संख्यांना शून्याने भाग देता येत नाही. (शून्याने भागाकार अव्याख्येय आहे)

बेरीज आणि गुणाकाराच्या क्रमनिरपेक्षतेचा गुणधर्म

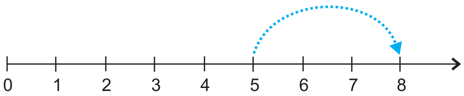
संख्यारेषेची खालील चित्रे काय सांगतात? दोन्ही स्थितींमध्ये आपण 5 वर पोहोचतो.

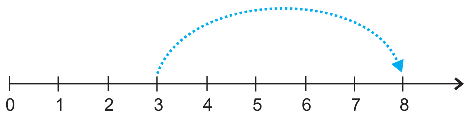




म्हणून 3 + 2 = 2 + 3 दोन्हीचे उत्तर एकच म्हणजे 5 येते.

अशाच पद्धतीने 5 + 3 आणि 3 + 5 दोन्ही समान येते.



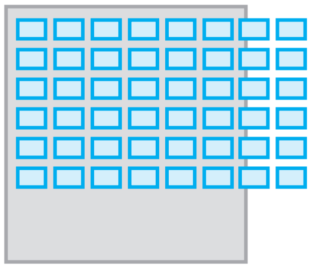


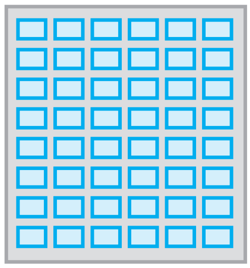
अशाप्रकारे, 4 + 6 आणि 6 + 4 ची उत्तरे काढण्याचा प्रयत्न करा. जेव्हा आपण दोन संख्यांची बेरीज करतो तेव्हा कोणतीही अशी जोडी मिळत नाही की ज्यात संख्यांचा क्रम बदलून वेगवेगळी उत्तरे येतील.

आपण दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज करताना कोणताही क्रम ठेवू शकतो.

पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा क्रम बदल लागू आहे, असे आपण म्हणतो. यालाच बेरजेचा क्रमनिरपेक्षतेचा गुणधर्म म्हणतात.

तुमच्या मित्रांबरोबर चर्चा करा.





तुमच्या घरात एक छोटा उत्सव आहे. तुम्ही पाहुण्यांसाठी खुर्च्यांच्या 6 ओळी मांडता, ज्यात प्रत्येक ओळीत 8 खुर्च्या आहेत. खोली इतकी रुंद नाही की त्यात 8 खुर्च्यांची ओळ बसेल. म्हणून तुम्ही निर्णय घेता की, 8 ओळी बनतील प्रत्येकी 6 खुर्च्यांच्या. तुम्हांला आणखी खुर्च्यांची गरज पडेल का?

गुणाकारामध्येसुद्धा क्रमबदलाचा गुणधर्म असतो का? 4 आणि 5 या संख्यांना वेगवेगळ्या क्रमाने गुणा. तुम्हांला कळेल की, $4 \times 5 = 5 \times 4$ आहे.

तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांचा कोणत्याही क्रमाने गुणाकार करू शकता.

पूर्ण संख्यांसाठी गुणाकार क्रमबदल लागू होतो, असे आपण म्हणतो.

अशाप्रकारे **पूर्ण संख्यांसाठी, बेरीज आणि गुणाकार या दोन्ही मध्येही क्रमबदल करता येतात.**

पडताळा घ्या

(i) पूर्ण संख्यांसाठी वजाबाकी क्रमबदलाने समान होत नाही याचा पडताळा घेण्यासाठी तीन वजाबाकी करा.

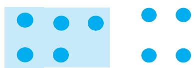
(ii) $(6 \div 3)$ चे उत्तर $(3 \div 6)$ इतकेच येते का?

पूर्ण संख्यांच्या आणखी जोड्या घेऊन विधानाचे समर्थन करा.

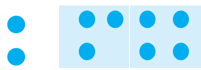
बेरीज आणि गुणाकारातील साहचर्य गुणधर्म

खालील चित्रे पाहा,

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$



(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



वरील (a) नुसार आधी 2 आणि 3 ची बेरीज करून बेरजेमध्ये 4 मिळवू शकता.

तसेच (b) नुसार आधी 3 आणि 4 ची बेरीज करून नंतर त्यात 2 मिळवू शकता.

दोन्हींची उत्तरे समान नाहीत का?

आपल्याला पुढीलप्रमाणेदेखील उत्तरे मिळू शकतील.

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ तसेच, $5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$

म्हणून $(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$

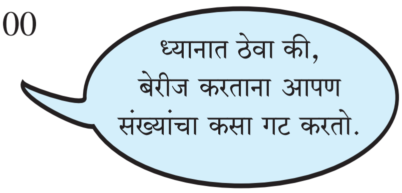
याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म (associative property) म्हणतात.

उदाहरण 1 : 234, 197 आणि 103 यांची बेरीज करा.

रीत : $234 + 197 + 103 = 234 + (197 + 103)$

$= 234 + 300$

$= 534$



हा खेळ खेळा

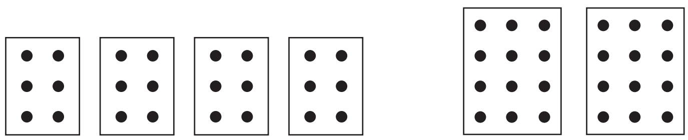
तुम्ही आणि तुमचा मित्र हा खेळ खेळू शकता.

तुम्ही 1 ते 10 मधील कोणतीही एक संख्या म्हणा. आता तुमचा मित्र त्यामध्ये 1 ते 10 मधील एक संख्या मिळवेल. यानंतर तुमची पाळी. तुम्ही आळीपाळीने दोघेही खेळा. जो पहिल्यांदा 100 पर्यंत पोचेल तो जिंकेल. जर तुम्हांला सतत जिंकायचे असेल तर काय युक्ती कराल?

(a) (b)

खालील (आकृती 2.1) प्रमाणे आकृतीत दाखवलेल्या गुणाकारांचे निरीक्षण करा.

(a) आणि (b) मधील ठिपक्यांची संख्या मोजा. तुम्हांला काय दिसेल? दोन्हींमध्ये ठिपक्यांची संख्या समान आहे. (a) मध्ये आपल्या जवळ प्रत्येक चौकटीत (box) 2×3 ठिपके आहेत. म्हणून ठिपक्यांची एकूण संख्या $(2 \times 3) \times 4 = 24$



(a) (b)

आकृती 2.1

(b) मध्ये प्रत्येक चौकटीत 3×4 ठिपके आहेत. म्हणून ठिपक्यांची एकूण संख्या $= 2 \times (3 \times 4) = 24$. अशाप्रकारे, $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$. अशाच पद्धतीने तुम्ही $(3 \times 5) \times 4 = 3 \times (5 \times 4)$ आहे, हे पाहू शकता.

असेच, $(5 \times 6) \times 2$ आणि $5 \times (6 \times 2)$ आणि $(3 \times 6) \times 4$ आणि $3 \times (6 \times 4)$ सोडवून पाहा.

याला पूर्ण संख्यांच्या गुणाकाराचा साहचर्य गुणधर्म म्हणतात.

विचार करा आणि जाणून घ्या.

कोणता गुणाकार सोपा आहे आणि का?

(a) $(6 \times 5) \times 3$ या $6 \times (5 \times 3)$

(b) $(9 \times 4) \times 25$ या $9 \times (4 \times 25)$

उदाहरण 2 : $14 + 17 + 6$ दोन पद्धतीने सोडवा.

उकल : $14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37$,

$14 + 17 + 6 = (14 + 6) + 217 = 20 + 17 = 37$

येथे तुम्ही बेरजेच्या साहचर्य व क्रमनिरपेक्षता या गुणधर्मांचा वापर केला आहे. तुम्हांला असे वाटते का की दोन्ही गुणधर्मांचा वापर करून उदाहरण सोडवणे सोपे जाते?

प्रयत्न करा

7 + 18 + 13 आणि 16 + 12 + 4 सोडवा.

गुणाकाराच्या गुणधर्माचा उपयोग खालील प्रकाराच्या प्रश्नांची उकल करताना होतो.

उदाहरण 3 : 12×35 सोडवा.

रीत : $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

या उदाहरणात आपण साहचर्य गुणधर्माचा उपयोग सर्वांत लहान सम संख्येला 5 च्या विभाज्याने (multiple) गुणून सोप्या पद्धतीने उत्तर काढण्यासाठी केला आहे.

उदाहरण 4 : $8 \times 1769 \times 125$ सोडवा.

$8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$ (या ठिकाणी तुम्ही कोणता गुणधर्म वापरला?)

$= (8 \times 125) \times 1769 = 1000 \times 1769 = 1769000$

प्रयत्न करा

सोडवा.

$25 \times 8358 \times 4$; $625 \times 3759 \times 8$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

$(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$ आहे का?

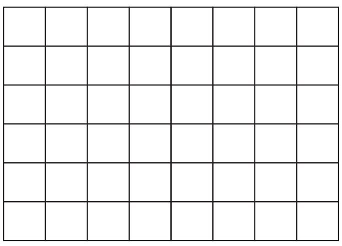
भागाकारासाठी साहचर्य गुणधर्म लागू होतो? नाही.

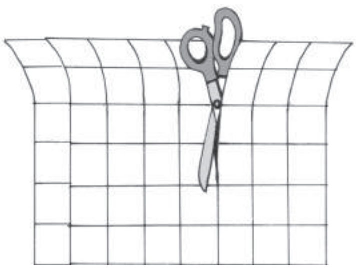
तुमच्या मित्रांबरोबर चर्चा करा $(28 \div 14) \div 2$ आणि $28 \div (14 \div 2)$ समान आहे का?

हे करा

गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म –

6 सेंमी × 8 सेंमी मापाचा एक आलेख कागद (graph) घ्या ज्यात 1 सेंमी × 1 सेंमीचे चौरस आहेत.

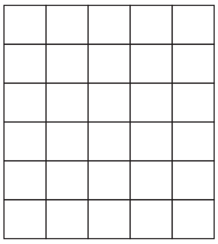




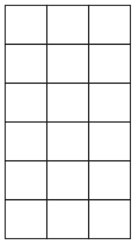
तुमच्याकडे एकूण किती चौरस आहेत?

ही संख्या 6×8 आहे का?

आता हा कागद 6 सेमी × 5 सेमी आणि 6 सेमी × 3 सेमी मापाच्या दोन भागांत कापा, जसे आकृतीमध्ये दाखवले आहे.



चौरसांची संख्या : 6 × 5 आहे का?



चौरसांची संख्या : 6 × 3 आहे का?

दोन्ही भागांतून मिळून एकूण किती चौरस आहेत?

वरील चौरस $(6 \times 5) + (6 \times 3)$ आहेत का? याचा अर्थ $6 \times 8 = (6 \times 5) + (6 \times 3)$ आहे का? पण, $6 \times 8 = 6 \times (5 + 3)$ आहे. यावरून असे दिसते का की, $6 \times (5 + 3) = (6 \times 5) + (6 \times 3)$

अशाप्रकारे तुम्हांला उत्तर मिळेल $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$

याला गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म (distributive property of multiplication over addition) म्हणतात.

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून, $4 \times (5 + 8)$; $6 \times (7 + 9)$ आणि $7 \times (11 + 9)$ सोडवा.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

आता खालील गुणाकाराची क्रिया पाहा आणि चर्चा करा की आपण संख्यांचा गुणाकार करताना बेरजेमधील गुणाकाराचे वितरण या गुणधर्माचा अवलंब करतो का?

425			
×136			
2550	←	425 × 6	(6 एकक‍ाने गुणा)
12750	←	425 × 30	(3 दशकाने गुणा)
42500	←	425 × 100	(1 शतकाने गुणा)
57800	←	425 × (6 + 30 100)	

उदाहरण 5 : एका शाळेच्या उपाहारगृहात (Canteen) दररोज दुपारचे जेवण (Lunch) साठी ₹ 20 आणि दुधासाठी ₹ 4 घेतात. अशाप्रकारे आपण 5 दिवसांत एकूण किती खर्च करता?

उकल : हे दोन पद्धतींनी सोडवता येते.

पद्धत 1 : जेवणासाठी लागणारी 5 दिवसांची रक्कम काढा.
दुधासाठी लागणारी 5 दिवसांची रक्कम काढा.
नंतर यांची बेरीज करा.

जेवणाचा खर्च = ₹ 5 × 20

दुधाचा खर्च = ₹ 5 × 4

एकूण खर्च = ₹ (5×20) + ₹ (5×4) = ₹ $(100 + 20)$
= ₹ 120

पद्धत 2 : एका दिवसाची एकूण रक्कम काढा.
मग त्याला 5 ने गुणा
एक दिवसाचा खर्च (जेवण + दूध) = ₹ $(20 + 4)$
5 दिवसांचा एकूण खर्च = 5 × ₹ $(20 + 4)$ = ₹ (5×24)
= ₹ 120

वरील उदाहरणावरून असे दिसून येते की,
$5 \times (20 + 4) = (5 \times 20) + (5 \times 4)$
हा बेरजेमधील गुणाकाराच्या वितरणाचा नियम आहे.

उदाहरण 6 : वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून 12×35 सोडवा.

उकल : $12 \times 35 = 12 \times (30 + 5) = 12 \times 30 + 12 \times 5$
$= 360 + 60 = 420$

उदाहरण 7 : सोडवा $126 \times 55 + 126 \times 45$

उकल : $126 \times 55 + 126 \times 45 = 126 \times (55 + 45) = 126 \times 100$
$= 12600$

प्रयत्न करा

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून, 15×68, 17×23 आणि $69 \times 78 + 22 \times 69$ ची उत्तरे काढा.

अविकारी अवयव (बेरीज आणि गुणाकारासाठी)

पूर्ण संख्या संच हा नैसर्गिक संख्या संचाहून कशाप्रकारे भिन्न आहे? याचे कारण म्हणजे केवळ पूर्ण संख्या संचामध्ये 'शून्य' असतो. या 'शून्या'ची बेरजेमध्ये विशेष भूमिका असते. याचा अर्थ लावण्याचा प्रयत्न करा.

खालील तक्ता तुम्हांला उपयोगी ठरेल.

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	.....	=	.....

जेव्हा तुम्ही कोणत्याही पूर्ण संख्येत शून्य मिळवता तेव्हा काय उत्तर मिळते?

उत्तर म्हणजे तीच पूर्ण संख्या असते. त्यामुळेच शून्याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेसाठी अविकारक (identity element) म्हणतात. शून्याला पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा अविकारक (additive identity) देखील म्हणतात.

गुणाकाराच्या क्रियेतदेखील शून्याची विशेष भूमिका असते. कोणत्याही पूर्ण संख्येला शून्यने गुणल्यास गुणाकार शून्यच येतो.

उदाहरणार्थ, खालील गुणाकार पाहा.

$5 \times 6 = 30$

$5 \times 5 = 25$

$5 \times 4 = 20$

$5 \times 3 = 15$

$5 \times 2 = ...$

$5 \times 1 = ...$

$5 \times 0 = ?$

गुणाकाराची उत्तरे कशा पद्धतीने घटतात?
तुम्हांला एखादे प्रतिरूप दिसते का?
शेवटच्या पायरीबद्दल कोणते अनुमान काढता येईल?
हे प्रतिरूप इतर पूर्ण संख्यांसाठी योग्य आहे का?
दोन वेगवेगळ्या पूर्ण संख्या घेऊन जाणून घ्या.

तुम्हांला पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा अविकारक मिळाला. कोणत्याही पूर्ण संख्येत शून्य मिळवल्यास किंवा शून्यात कोणतीही पूर्ण संख्या मिळवल्यास उत्तर ती संख्या येते. हीच परिस्थिती पूर्ण संख्यांसाठी गुणाकार अविकारक (multiplicative identity) साठी आहे.

7	×	1	=	7
5	×	1	=	5
1	×	12	=	12
1	×	100	=	100
1	×	......	=	......

आपण योग्य विचार करीत आहात की, पूर्ण संख्यांच्या गुणाकारासाठी, 1 हा अविकारी अवयव किंवा अविकारक आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर पूर्ण संख्यांसाठी 1 हा गुणाकार अविकारक अवयव आहे.

उदाहरणसंग्रह 2.2

1. योग्य क्रम लावून बेरीज करा.
   (a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$
2. योग्य क्रम लावून गुणाकार करा.
   (a) $2 \times 1768 \times 50$ (b) $4 \times 166 \times 25$
   (c) $8 \times 291 \times 125$ (d) $625 \times 279 \times 16$
   (e) $285 \times 5 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$
3. खालील प्रत्येकाचे उत्तर काढा.
   (a) $297 \times 17 + 297 \times 3$ (b) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$
   (c) $81265 \times 169 - 81265 \times 69$ (d) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$
4. योग्य गुणधर्माचा उपयोग करून गुणाकार करा.
   (a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008 (d) 1005×168

5. एका टॅक्सीचालकाने त्याच्या गाडीत सोमवारी 40 लीटर पेट्रोल टाकले. दुसऱ्या दिवशी त्याने 50 लीटर पेट्रोल टाकले. जर पेट्रोलचा दर प्रतिलीटर ₹ 44 असेल तर त्याने पेट्रोलवर किती खर्च केला?

6. एक दूधवाला एका हॉटेलसाठी सकाळी 32 लीटर दूध देतो आणि संध्याकाळी 68 लीटर दूध देतो. जर दुधाचा दर ₹45 प्रतिलीटर आहे, तर दूधवाल्याला रोज किती रुपये मिळतील?

7. खालील जोड्या लावा.

   (i) $425 \times 136 = 425 \times (6 + 30 + 100)$ (a) गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता

   (ii) $2 \times 49 \times 50 = 2 \times 50 \times 49$ (b) बेरजेची क्रमनिरपेक्षता

   (iii) $80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005$ (c) बेरजेमधे गुणाकाराचे वितरण

2.5 पूर्ण संख्यांमध्ये आकृतिबंध

आपण संख्यांना ठिपक्यांच्याद्वारे प्राथमिक आकार देऊ. (1) एक रेषा (2) एक आयत (3) एक चौरस (4) एक त्रिकोण. प्रत्येक संख्येला या आकारांपैकी एक आकारात बसवायचे आहे. इतर कोणता आकार नसावा.

- प्रत्येक संख्या एका रेषेच्या रूपात बसवता येते.

  2 ही संख्या पुढीलप्रकारे दाखवता येते. • •

  3 ही संख्या पुढीलप्रकारे दाखवता येते. • • •

  इत्यादी.

- काही संख्या आयताच्या रूपात दाखवता येतात. उदाहरणार्थ–

  6 ही संख्या आयताच्या रूपात दाखवता येऊ शकते.

  लक्षात घ्या की इथे 2 ओळी आणि 3 स्तंभ आहेत.

- काही संख्या जसे की 4 आणि 9 या चौरसाच्या रूपातदेखील दाखवता येतात.

- काही संख्या त्रिकोणाच्या रूपातदेखील दाखवता येतात. उदाहरणार्थ–

लक्षात घ्या की त्रिकोणाच्या दोन बाजू समानच असल्या पाहिजेत. खालच्या बाजूने सुरुवात करून ओळींमध्ये ठिपक्यांची संख्या 4, 3, 2, 1 अशाप्रकारे असेल. सर्वांत वरच्या ओळीत केवळ एकच ठिपका येईल.

तक्ता पूर्ण करा.

1, एक विशेष संख्या आहे.

संख्या	रेषा	आयत	वर्ग	त्रिकोण
2	हो	नाही	नाही	नाही
3	हो	नाही	नाही	हो
4	हो	हो	हो	नाही
5	हो	नाही	नाही	नाही
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयत्न करा

1. कोणकोणत्या संख्या फक्त रेषेच्या स्वरूपात दाखवता येतात?
2. कोणत्या संख्या चौरसाच्या स्वरूपात दाखवल्या जाऊ शकतात?
3. कोणत्या संख्या आयताच्या स्वरूपात दाखवता येतात?
4. पहिल्या सात त्रिकोणी संख्या लिहा. (ज्या त्रिकोणाच्या स्वरूपात मांडता येतात.) 3, 6, ...
5. काही संख्या दोन आयतांच्या रूपात दाखवता येतात. उदाहरणार्थ,

3×4 2×6

अशी कमीत कमी पाच उदाहरणे लिहा.

आकृतिबंध पाहणे

आकृतिबंध पाहिल्यामुळे आपल्यात सरळरूप देण्याच्या क्रियेत मार्गदर्शन मिळू शकते.

खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

(a) $117 + 9 = 117 + 10 - 1 = 127 - 1 = 126$

(b) $117 - 9 = 117 - 10 + 1 = 107 + 1 = 108$

(c) $117 + 99 = 117 + 100 - 1 = 217 - 1 = 216$

(d) $117 - 99 = 117 - 100 + 1 = 17 + 1 = 18$

ही रूपांतरे 9, 99, 999 ...... अशाप्रकारच्या संख्यांची बेरीज-वजाबाकीमध्ये साहाय्य करतात का?

या ठिकाणी आणखी एक रूपांतर दिले आहे.

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

तुम्हांला एखाद्या संख्येला 9, 99, 999 .... या प्रकारच्या संख्यांशी गुणण्याची सोपी युक्ती मिळते का?

अशा सोप्या युक्त्या आपल्याला अनेक गणिते तोंडी सोडवण्यास मदत करतात.

खालील रूपांतरे तुम्हांला एखाद्या संस्थेला 5 किंवा 25 किंवा 125 ने गुणण्याची एक मजेशीर पद्धत दाखवतात.

(तुम्ही या संख्या आणखी वाढवू शकता.)

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$ ....

खाली दिलेला आकृतिबंध काय सुचवतो?

(i) $64 \times 5 = 64 \times \frac{10}{2} = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times \frac{30}{2} = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times \frac{50}{2} = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times \frac{70}{2} = 32 \times 70 = 320 \times 7$ ....

उदाहरणसंग्रह 2.3

1. खालीलपैकी कोणत्या उदाहरणांतून 0 मिळत नाही?

   (a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d)

2. जर दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार शून्य आहे, तर आपण असे म्हणू शकतो का की दोनपैकी एक किंवा दोन्हीही शून्य असल्या पाहिजेत? उदाहरण देऊन उत्तर स्पष्ट करा.

3. जर दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार 1 आहे तर यांपैकी एक किंवा दोन्हीही 1 ही संख्या असली पाहिजे, असे आपण म्हणू शकतो का? उदाहरण देऊन स्पष्ट करा.
4. विस्तार पद्धती जाणून घ्या.
   (a) 728×101 (b) 5437×1001 (c) 824×25
   (d) 4275×125 (e) 504×35
5. खालील आकृतिबंधाचा अभ्यास करा.
   $1 \times 8 + 1 = 9$
   $12 \times 8 + 2 = 98$
   $123 \times 8 + 3 = 987$
   $1234 \times 8 + 4 = 9876$
   $12345 \times 8 + 5 = 98765$
   याच्या पुढील दोन टप्पे लिहा. असे आकृतिबंध कशाप्रकारे काम करतात, हे तुम्ही सांगू शकाल का?
   (संकेत : $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

आपण कोणती चर्चा केली?

1. 1, 2, 3 .... अशा संख्या त्यांचा उपयोग आपण मोजण्यासाठी करतो त्यांना नैसर्गिक संख्या म्हणतात.
2. जर तुम्ही एखाद्या नैसर्गिक संख्येत 1 मिळवलात तर तुम्हांला लगतची पुढची संख्या मिळते आणि 1 वजा केला तर लगतची मागची संख्या मिळते.
3. प्रत्येक नैसर्गिक संख्येची पुढची संख्या असते. 1 ही संख्या सोडून प्रत्येक नैसर्गिक संख्येला मागची संख्या असते.
4. जर नैसर्गिक संख्यासंचात 0 वाढवला तर आपल्याला पूर्ण संख्या संच मिळतो. अशा प्रकारे 0, 1, 2, 3,....... या संख्यांनी पूर्ण संख्यासंच बनतो.
5. प्रत्येक पूर्ण संख्येला पुढची संख्या असते. ‘0’ सोडून इतर प्रत्येक पूर्ण संख्येला मागची संख्या असते.
6. सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्यादेखील असतात. परंतु सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या नाहीत.
7. आपण एक रेषा घेऊन त्यावर एक बिंदू घेऊन त्याला ‘0’ ने निर्देशित करतो. मग ‘0’ च्या उजवीकडे समान अंतरावर बिंदू देतो. यांना क्रमशः 1, 2, 3,....... ने निर्देशित केल्यास आपल्याला एक संख्यारेषा मिळते. जिच्यावर पूर्ण संख्या दाखविल्या जातात. त्यावर आपण बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार अशा अनेक क्रिया करू शकतो.
8. संख्यारेषेवर उजवीकडे जात राहिल्यास बेरीज मिळत जाते. तसेच, डावीकडे जात राहिल्यास वजाबाकी मिळत जाते. शून्य (0) पासून सुरुवात केल्यास समान अंतरावरील टप्प्यावर आपल्याला गुणाकार मिळतो.

9. दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज एक पूर्ण संख्याच असते. तसेच, दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार नेहमी एक पूर्ण संख्या असतो. पूर्ण संख्यांची बेरीज आणि गुणाकार नेहमी संवृत्त असतो. परंतु पूर्ण संख्यांची वजाबाकी आणि भागाकार संवृत्त नसतो.
10. शून्याने भाग देणे व्याख्येय नाही.
11. शून्याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेसाठी अविकारक (identity clement) म्हणतात. '1' या पूर्ण संख्येला गुणाकारासाठी अविकारक म्हणतात.
12. तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांना कोणत्याही क्रमाने मिळवू शकता. तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांना कोणत्याही क्रमाने गुणू शकता. आपण असे म्हणतो की, पूर्ण संख्यांसाठी बेरीज व गुणाकार क्रमनिरपेक्ष (commutative) आहेत.
13. गुणाकार आणि बेरीज यांचा साहचर्य (Associative) नियम पूर्ण संख्यांसाठी लागू पडतो.
14. गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म पूर्ण संख्यांसाठी लागू पडतो.
15. पूर्ण संख्यांचे क्रमनिरपेक्षता, साहचर्य आणि वितरण हे गुणधर्म सोप्या पद्धतीने सोडवण्यासाठी उपयुक्त आहेत. आपण नकळत हे वापरत असतो.
16. संख्यांची रूपांतरे ही केवळ गमतीशीर नसतात, तर तोंडी उदाहरण सोडवण्यासाठी उपयुक्त असतात. संख्यांचे गुणधर्म समजून घेण्यासाठी मदत करतात.