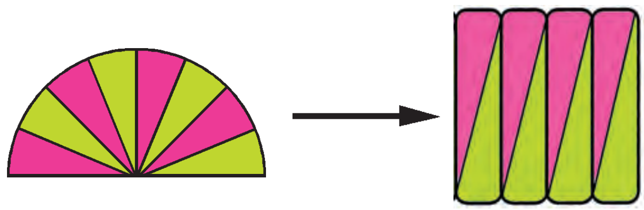
হাতেকলমে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করি।

আমি অর্ধবৃত্তাকার কাগজটিকে কতগুলি সমান ভাঁজ করে খুলে দিলাম এবং ভাঁজগুলি কেটে নীচের মতো সাজালাম।



প্রায় যে আয়তক্ষেত্র পেলাম তার দৈর্ঘ্য $\frac{\pi r}{2}$ একক

এবং প্রস্থ r একক

হাতে কলমে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পেলাম $\frac{\pi r}{2} \times r$ বর্গ একক

$= \frac{\pi r^2}{2}$ বর্গ একক

19 আমি অন্যভাবে অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করি।

$\frac{\text{অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{180}{360}$ (আমরা জানি, ক্ষেত্রফল ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল সমানুপাতী)

বা, অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{180}{360} \times$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\pi r^2}{2}$ বর্গ একক

অন্যভাবে, কেন্দ্রে 360° কোণের জন্য বৃত্তাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক।

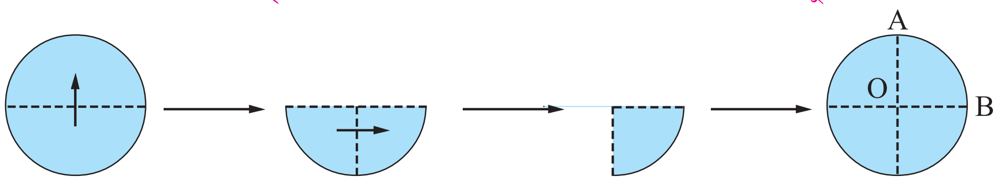
কেন্দ্রে 1° কোণের জন্য উৎপন্ন বৃত্তকলাটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2}{360}$ বর্গ একক।

কেন্দ্রে 180° কোণের জন্য অর্ধবৃত্তকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2 \times 180}{360}$ বর্গ একক।

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{180}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \pi r^2$ বর্গ একক

মেহেরের ভাই এসে নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি নীচের মতো সমান চার ভাঁজ করে খুলে ফেলল ।



দেখছি, নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি চারটি সমান ভাগে বিভক্ত হয়ে চারটি বৃত্তকলা তৈরি হয়েছে।

20 AOB বৃত্তকলার কেন্দ্রের কোণ মেপে AB চাপের দৈর্ঘ্য কত দেখি, যেখানে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

দেখছি, AOB বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে 90^0 কোণ করেছে।

$$\frac{\overset{\frown}{AB} \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{90}{360}$$ [∵ চাপের দৈর্ঘ্য ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল সমানুপাতী।]

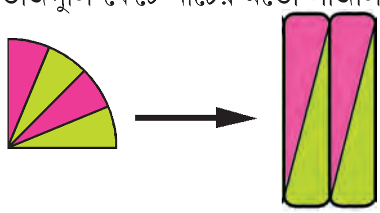
$$\therefore \overset{\frown}{AB} \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য} = \frac{90}{360} \times \text{বৃত্তের পরিধি}$$

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r \text{ একক}$$ [∵ বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r একক]

$$= \frac{\pi r}{2} \text{ একক}$$

21 আমি হাতে কলমে AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কত দেখি।

আমি AOB বৃত্তকলাটি কেটে নিয়ে নীচের মতো দু-বার সমান ভাঁজ করে সবুজ ও লাল রং করলাম এবং ভাঁজগুলি খুলে দিলাম। এবার ভাঁজগুলি কেটে নীচের মতো সাজালাম।



প্রায় আয়তক্ষেত্রের মতো পেলাম যার দৈর্ঘ্য $\frac{\pi r}{4}$ একক এবং প্রস্থ r একক।

$$\therefore \text{AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \text{AOB বৃত্তকলার দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}$$

$$= \frac{\pi r}{4} \times r \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} \text{ বর্গ একক}$$

আমি অন্যভাবে কেন্দ্রের কোণ মেপে AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

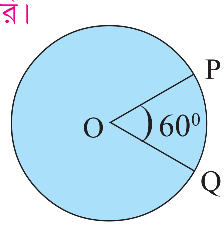
$$\frac{\text{AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{90}{360}$$

$$\therefore \text{AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{90}{360} \times \text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \boxed{} \text{ বর্গ একক}$$

রফিকুল নীল রঙের বৃত্তাকার ক্ষেত্র থেকে একটি বৃত্তকলা POQ কাটল, যেটি কেন্দ্রে 60^0 কোণ করেছে।

22 আমি হিসাব করে PQ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হিসাব করি।



$$\frac{\overset{\frown}{PQ} \text{ -এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \overset{\frown}{PQ} \text{ -এর দৈর্ঘ্য} = \frac{60}{360} \times \text{ বৃত্তের পরিধি}$$

আবার, $$\frac{\text{POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{60}{360}$$

$$\therefore \text{POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{60}{360} \times \text{ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

∴ যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হয় এবং ওই বৃত্তের কোনো বৃত্তকলা কেন্দ্রে θ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে থাকে,

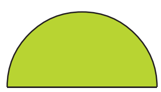
তাহলে ওই বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{\theta}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি

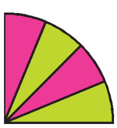
$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ একক

ওই বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক

23 অর্ধবৃত্তাকার একটি পার্ককে বেড়া দিয়ে ঘিরতে 144 মিটার রেলিং লাগে। পার্কটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।





ধরি, অর্ধবৃত্তাকার পার্কটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

পার্কটির পরিসীমা $= (\pi r + 2r)$ মিটার

শর্তানুসারে, $\pi r + 2r = 144$

বা, $\frac{22}{7} r + 2r = 144$

বা, $\frac{36r}{7} = 144$

∴ r = ☐ [নিজে করি]

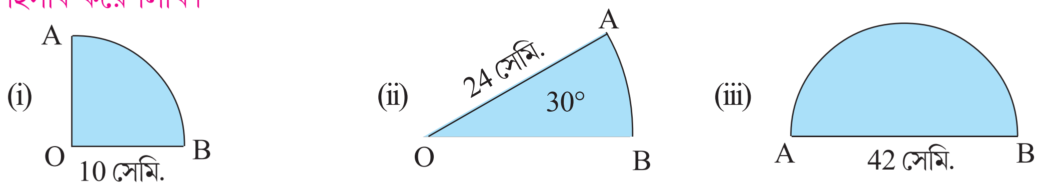
∴ পার্কটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \pi \times r^2$ বর্গ মিটার

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28$ বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার [নিজে করি]

24 যদি অর্ধবৃত্তাকার পার্কটির পরিসীমা 108 মিটার হয়, তাহলে পার্কটির ক্ষেত্রফল কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

25 আমি নীচের বৃত্তকলাগুলির AB বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য হিসাব করি ও বৃত্তকলাগুলির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।



(i) $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{90}{360} \times 2 \times \pi \times 10$ সেমি.

[$\because$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = 10 সেমি. এবং $\angle AOB = 90°$]

$= \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10$ সেমি.

$= \square$ সেমি.

$\therefore$ AOB বৃত্তকলার পরিসীমা $= \overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য + 2 × ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

= (15.7 সেমি. + 2 × 10 সেমি.) (প্রায়)

= 35.7 সেমি.(প্রায়)

AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{90}{360} \times \pi \times (10)^2$ বর্গ সেমি.

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

(ii) $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{30}{360} \times \square$

$= \frac{30}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 24$ সেমি.

$= \square$ সেমি. [নিজে হিসাব করি]

$\therefore$ AOB বৃত্তকলার পরিসীমা $= \overset{\frown}{AB}$-এর দৈর্ঘ্য + 2 × ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

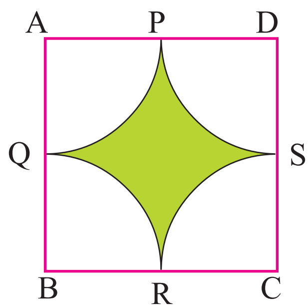
= (12.57 + 48) সেমি.(প্রায়) $= \square$ সেমি.(প্রায়)

AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\square}{360} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 24 \times 24$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

আমি (iii) নং ছবির $\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য, পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

26 মধুমিতাদের বর্গাকার বাগানের চারটি কোণে চারটি সমান মাপের ফুলের বাগান রেখে মাঝের বাকি অংশে কাঁচা আনাজের চাষ করেছে। যদি প্রতিটি ফুলের বাগান 3.5 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের অংশ হয় তবে ছবি এঁকে বাগানের মাঝের কাঁচা আনাজের চাষের জায়গার পরিসীমা ও বাগানের ক্ষেত্রফল এবং বাগানের কতটা জায়গায় ফুলের চাষ হয়েছে এবং কতটা জায়গায় কাঁচা আনাজের চাষ হয়েছে হিসাব করে লিখি।



ধরি, ABCD মধুমিতাদের বর্গাকার বাগান এবং A,B,C ও D চারটি 3.5 মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্র।

∴ A কেন্দ্রীয় বৃত্তের APQ বৃত্তকলা ফুল বাগান।

অনুরূপে, B, C ও D কেন্দ্রীয় বৃত্তের যথাক্রমে BQR, CRS ও DSP বৃত্তকলাগুলি ফুল বাগান।

$\overset{\frown}{PQ}$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \frac{90}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি

$= \square$ মিটার

∴ কাঁচা আনাজ তৈরির ক্ষেত্রের পরিসীমা $= \overset{\frown}{PQ}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{QR}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{RS}$ -এর দৈর্ঘ্য $+ \overset{\frown}{SP}$ -এর দৈর্ঘ্য

$= 4 \times \overset{\frown}{PQ}$ -এর দৈর্ঘ্য [যেহেতু প্রতিটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান]

$= 4 \times \frac{11}{2}$ মিটার $= \square$ মিটার

বাগানের ক্ষেত্রফল $= (AD)^2 = (2 \times 3.5)^2$ বর্গ মিটার $= 49$ বর্গ মিটার

বাগানের কতটা জায়গায় ফুলের চাষ হয়েছে ও কতটা জায়গায় কাঁচা আনাজের চাষ হয়েছে হিসাব করি।

APQ, BQR, CRS ও DPS বৃত্তকলাগুলির মোট ক্ষেত্রফল জুড়ে ফুলের চাষ হয়েছে।

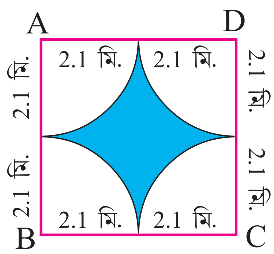
APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$ বর্গ মিটার $= \square$ বর্গ মিটার

∴ ফুলের চাষ হয়েছে $= 4 \times$ APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= 4 \times \frac{77}{8}$ বর্গ মিটার $= \square$ বর্গ মিটার

∴ কাঁচা আনাজের চাষের জন্য জমির ক্ষেত্রফল $(49 - 38.5)$ বর্গ মিটার $= \square$ বর্গ মিটার

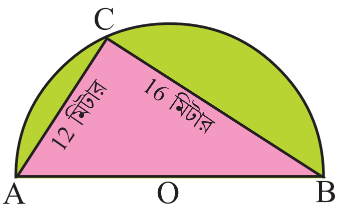
27 আমি নীচের চিত্রের রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]



28 নীচের ছবির মতো একটি অর্ধবৃত্তাকার মাঠের মধ্যে ত্রিভুজাকার জমিতে অরূপবাবু বাড়ি তৈরি করেছেন। ত্রিভুজাকার জমির দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার, 16 মিটার এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90^0 হলে, বাড়ি করার পরে কতটুকু জমি পড়ে রইল তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

অরুণবাবু ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার জমিতে বাড়ি করেছেন।

আমি প্রথমে অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ব্যাস AB-এর দৈর্ঘ্য মাপার চেষ্টা করি। অর্ধবৃত্তাকার মাঠটি যে বৃত্তাকার মাঠের অংশ তার কেন্দ্র O



ABC সমকোণী ত্রিভুজের, AC = 12 মিটার

এবং BC = 16 মিটার।

পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (12^2 + 16^2)$ বর্গ মিটার

$\therefore$ AB = ☐ মিটার

$\therefore$ অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{AB}{2} = 10$ মিটার।

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য = ☐ মিটার [নিজে করি]

$\therefore$ অরুণবাবুর বাড়ি বাদে বাকি জমির পরিসীমা = $\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য + 12 মিটার + 16 মিটার

= (31.4 মিটার + 28 মিটার) (প্রায়)

= 59.4 মিটার (প্রায়)

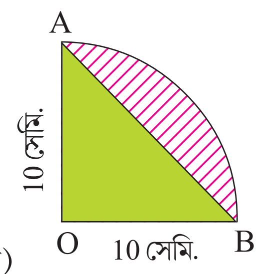
অরুণবাবুর বাড়ি করা জমির অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$ বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার

$\therefore$ অরুণবাবুর বাড়ি বাদে বাকি জমির ক্ষেত্রফল = অর্ধবৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল – ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ বর্গ মিটার – 96 বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার।

29 হাসান 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে কেটেছে। সে ওই বৃত্তকে সমান চার ভাঁজ করে একটি টুকরো কেটে পিচবোর্ডে আটকালো। রাবেয়া ওই বৃত্তাকার টুকরোর উপর পাশের ছবির মতো নকশা করল। রাবেয়া যতটা জায়গায় নকশা করল তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।



$\overset{\frown}{AB}$ -এর দৈর্ঘ্য = ☐ সেমি.

$\therefore$ AB -এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{10^2 + 10^2}$ সেমি. = ☐ সেমি.

$\therefore$ নকশার জায়গার পরিসীমা $= (15.7 + 10\sqrt{2})$ সেমি.

$= (15.7 + 10 \times 1.41)$ সেমি. $[\sqrt{2} \approx 1.41]$

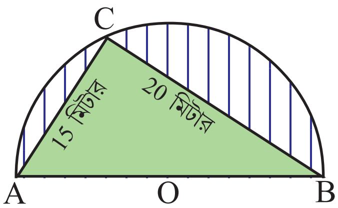
= (15.7 + 14.1) সেমি. (প্রায়) = 29.8 সেমি.(প্রায়)

রাবেয়ার নকশার ক্ষেত্রফল = AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – Δ AOB -এর ক্ষেত্রফল

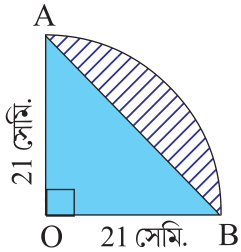
= ☐ বর্গ সেমি. [নিজে লিখি]

30 আমি নীচের বৃত্তকলাগুলির নকশার জায়গার (Shaded area) পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি

(i)



(ii)



কষে দেখি–18

1. আমিনাবিবি আজ 2.1 মিটার লম্বা একটি দড়ি দিয়ে তার গোরুটিকে ফাঁকা মাঠে খুঁটির সঙ্গে বাঁধলেন। হিসাব করে দেখি গোরুটি সবথেকে বেশি কতটা জমির ঘাস খেতে পারবে।

2. সুহানা একটি বৃত্ত আঁকবে যার পরিধি হবে 35.2 সেমি। হিসাব করে দেখি সুহানা যে বৃত্ত আঁকবে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত নেবে এবং বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত হবে।

3. রেখার দিদিমা একটি গোলাকার টেবিলের ঢাকনা তৈরি করেছেন যার ক্ষেত্রফল 5544 বর্গ সেমি। তিনি এই টেবিলের ঢাকনার চারিদিকে রঙিন ফিতে লাগাতে চান। হিসাব করে দেখি দিদিমাকে কত দৈর্ঘ্যের রঙিন ফিতে কিনতে হবে।

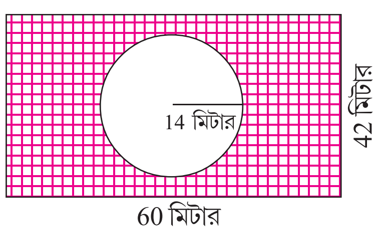
4. আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার খেলার মাঠটি বেড়া দিয়ে ঘিরতে প্রতি মিটার 21 টাকা হিসাবে 924 টাকা খরচ হয়েছে। মাঠটি ত্রিপল দিয়ে ঢেকে দেওয়ার জন্য কত বর্গ মিটার ত্রিপল কিনতে হবে হিসাব করে লিখি।

5. ফারুক একটি বৃত্ত আঁকবে যার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে 616 বর্গ সেমি। হিসাব করে দেখি ফারুক যে বৃত্ত আঁকবে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত নেবে এবং বৃত্তটির পরিধি কত পাবে।

6. পলাশ ও পিয়ালী দুটি বৃত্ত এঁকেছে যাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অনুপাত 4 : 5; হিসাব করে দুজনের আঁকা বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত লিখি।

7. সুমিত ও রেবা একই দৈর্ঘ্যের দুটি তামার তার এনেছে। সুমিত ওই তারটি বেঁকিয়ে আয়তাকার চিত্র তৈরি করেছে যার দৈর্ঘ্য 48 সেমি. এবং প্রস্থ 40 সেমি.। কিন্তু রেবা একই দৈর্ঘ্যের তামার তারটি বেঁকিয়ে বৃত্ত তৈরি করল। হিসাব করে দেখি সুমিতের তৈরি আয়তাকার চিত্র এবং রেবার তৈরি বৃত্তের মধ্যে কোনটি বেশি জায়গা জুড়ে থাকবে।

8. পাইওনিয়ার অ্যাথলেটিক ক্লাবের আয়তাকার মাঠের মাঝখানে একটি বৃত্তাকার জলাশয় আছে যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 মিটার। আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 60 মিটার ও 42 মিটার। জলাশয় বাদে আয়তাকার মাঠের বাকি জায়গায় ঘাস লাগাতে প্রতি বর্গমিটার 75 টাকা হিসাবে কত খরচ হবে হিসাব করে দেখি।



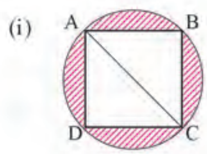
9. ইটালগাছা ফ্রেন্ডস এসোসিয়েশন ক্লাবের বৃত্তাকার পার্কের বাইরের দিকে পরিধি বরাবর একটি 7 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। বৃত্তাকার পার্কের পরিধি 352 মিটার হলে, রাস্তাটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গমিটার 20 টাকা হিসাবে রাস্তাটি বাঁধাতে কত টাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

10. আনোয়ারাবিবি তার অর্ধবৃত্তাকার জমির চারদিকে প্রতি মিটার 18.50 টাকা হিসাবে বেড়া দিতে 2664 টাকা খরচ করেছেন। তিনি যদি তার ওই অর্ধবৃত্তাকার জমি প্রতি বর্গ মিটার 32 টাকা হিসাবে চাষ করান তাহলে মোট কত টাকা খরচ করবেন হিসাব করে লিখি।

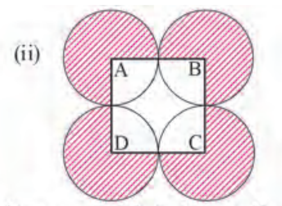
11. আজ আমার বন্ধু রজত একই বেগে দৌড়ে স্কুলের বৃত্তাকার মাঠটি যে সময়ে একবার প্রদক্ষিণ করল একই বেগে মাঠের ব্যাস বরাবর দৌড়তে 30 সেকেন্ড কম সময় নিল। তার গতিবেগ 9 মিটার/সেকেন্ড হলে, স্কুলের মাঠের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

12. বকুলতলার বৃত্তাকার মাঠের বাইরের চারদিকে একটি সমপরিসরের রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাইরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য ভিতরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 132 মিটার বেশি। পথটির ক্ষেত্রফল 14190 বর্গ মি. হলে, বৃত্তাকার মাঠটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

13. **নীচের ছবির রেখাঙ্কিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।**



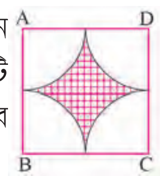
ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7 সেমি.।



প্রতিটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি.।
চারটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে A, B,C,D।

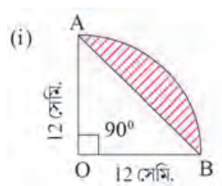
14. দীনেশ তাদের শ্রেণির কতজন কোন খেলা খেলতে ভালোবাসে তার একটা পাই-চিত্র তৈরি করেছে। সে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. নিয়েছে। হিসাব করে প্রতিটি বৃত্তকলার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।

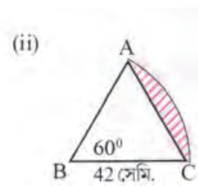
15. নীতু একটি বর্গক্ষেত্র ABCD এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। আমার বোন পাশের ছবির মতো A, B, C ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের চারটি বৃত্তচাপ এঁকেছে এবং কিছু জায়গায় নকশা এঁকেছে। হিসাব করে নকশা আঁকা ক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।



16. একটি বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি.। বৃত্তাকার মাঠটির পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। যদি বর্গক্ষেত্রটি বৃত্তাকার মাঠের অন্তর্লিখিত হতো, তাহলে বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত হতো তা হিসাব করে লিখি।

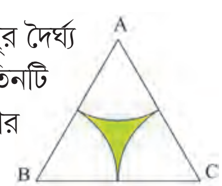
17. **নীচের বৃত্তকলাগুলির রেখাঙ্কিত অঞ্চলের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল লিখি।**





18. লীনা মেলা থেকে একটি বালা কিনে হাতে পরেছে। বালাটিতে 269.5 বর্গ সেমি. ধাতু আছে। বালাটির বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি. হলে, অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হিসাব করে লিখি।

19. প্রতুল পাশের ছবির মতো একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। সুমিতা A, B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্তচাপ এঁকেছে এবং মাঝের কিছু জায়গা রঙিন করেছে। হিসাব করে রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]



20. রাবেয়া একটি বড়ো কাগজে 21সেমি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ আঁকল। ওই সমবাহু ত্রিভুজের একটি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে বৃত্তাকার জায়গাটি রঙিন করল। আমি রঙিন জায়গার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

21. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 462 বর্গ সেমি.। ত্রিভুজটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

22. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 32 সেমি. এবং ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 38.5 বর্গ সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

23. 20 সেমি, 15 সেমি এবং 25 সেমি বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে নির্ণয় করি।

24. জয়া একটি বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করল। ওই বৃত্তটি আবার একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্ত যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সেমি। বর্গক্ষেত্রটির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

25. সুমিত একটি তারকে দুটি সমান অংশে কাটল। একটি অংশকে বর্গাকারে ও অপর অংশটিকে বৃত্তাকারে বাঁকাল। বৃত্তাকার তারটি বর্গাকার তারটির থেকে 33 বর্গ সেমি বেশি জায়গা নিলে তারটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

26. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) একটি বৃত্তকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল x বর্গ একক, পরিধি y একক ও ব্যাসের দৈর্ঘ্য z একক হলে, $\frac{x}{yz}$ এর মান

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{8}$

(ii) একটি বৃত্তের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(iii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিধি ও ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। ওই বৃত্তের পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য

(a) 4 একক (b) 2 একক (c) $4\sqrt{2}$ একক (d) $2\sqrt{2}$ একক

(iv) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 4 : 1 (b) 1 : 4 (c) 2 : 1 (d) 1 : 2

(v) একটি বলয়াকৃতি লোহার পাতের অর্ন্তব্যাস 20 সেমি. এবং বর্হিব্যাস 22 সেমি.। বলয়টিতে লোহার পাত আছে

(a) 22 বর্গ সেমি. (b) 44 বর্গ সেমি. (c) 66 বর্গ সেমি. (d) 88 বর্গ সেমি.

27. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 % বৃদ্ধি করলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পায় হিসাব করি।

(ii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা 50 % হ্রাস করলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত হ্রাস পায় হিসাব করি।

(iii) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার। অন্য একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হলে, তার ক্ষেত্রফল প্রথম বৃত্তের ক্ষেত্রফলের x গুণ হবে তা হিসাব করে দেখি।

(iv) 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত হিসাব করি।

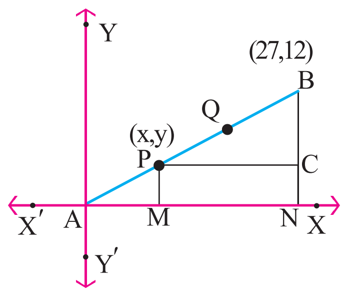
(v) সমবেধবিশিষ্ট একটি টিনের পাত থেকে তিনটি বৃত্তাকার চাকতি কেটে নেওয়া হলো। বৃত্তাকার চাকতি তিনটির ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, তাদের ওজনের অনুপাত কত হিসাব করে দেখি।

19 স্থানাঙ্ক জ্যামিতি:সরলরেখাংশের অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত

(Co-ordinate Geometry:Internal and External Division of Straight Line Segment)

এবছরের ফেব্রুয়ারি মাসে আমাদের তেতুঁলতলা গ্রামের মিলনী সংঘ ক্লাবের বড়ো আয়তাকার মাঠে যাত্রাপালা আয়োজিত হবে। তাই মাঠটির চারদিক বাঁশ দিয়ে ঘেরা হবে। প্রথমে এই আয়তাকার মাঠের কর্ণ বরাবর চারটি বাঁশ সমান দূরত্বে পোঁতা হবে।

1 ছবি এঁকে হিসাব করে দেখি কোন কোন বিন্দুতে বাঁশ পোঁতা হবে।



আয়তাকার মাঠটির দৈর্ঘ্য 27 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার

মাঠটির দৈর্ঘ্য বরাবর x- অক্ষ ও প্রস্থ বরাবর y- অক্ষ ধরি।

ধরি, আয়তাকার মাঠটির A (0,0) বিন্দুতে প্রথম বাঁশ পোঁতা হলো।

উভয়অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার ধরে B (27,12) বিন্দুতে শেষ বাঁশ পোঁতা হলো।

∴ A ও B-এর মাঝে সমদূরত্বে দুটি বাঁশ পোঁতা হবে।

ধরি, P ও Q বিন্দু দুটি A ও B বিন্দু দুটির মাঝে এমনভাবে আছে, যাতে AP = PQ = QB হয়।

∴ P, AB সরলরেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

আবার, Q, AB সরলরেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

2 P ও Q-এর সঠিক অবস্থান বুঝতে P ও Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। কিন্তু P ও Q-এর স্থানাঙ্ক কীভাবে পাব?

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ; P এবং B বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও BN লম্ব টানলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করল। আবার P বিন্দু থেকে BN-এর উপর PC লম্ব টানলাম যা BN-কে C বিন্দুতে ছেদ করল।

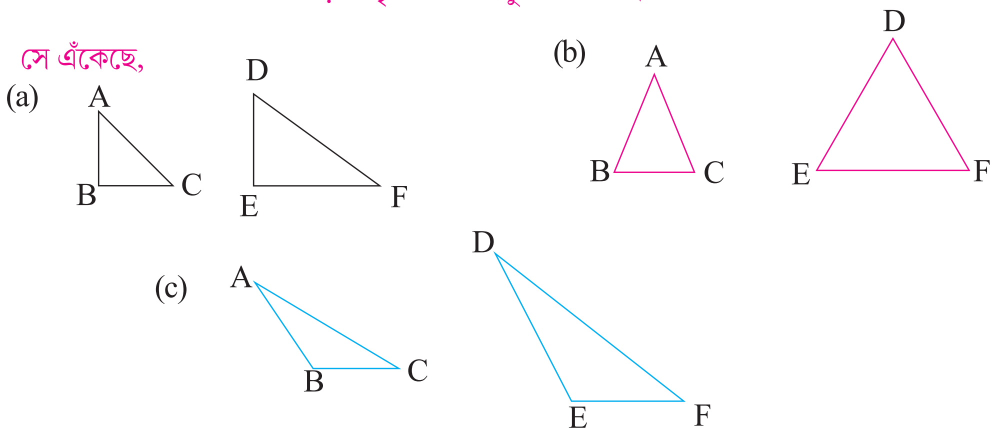
Δ PAM ও Δ BPC -এর অনুরূপ কোণগুলি সমান।

অর্থাৎ Δ PAM ও Δ BPC সদৃশকোণী।

দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের বাহুগুলির মধ্যে কী সম্পর্ক আছে দেখি ?

মারিয়া তার খাতায় তিন জোড়া সদৃশকোণী ত্রিভুজ এঁকেছে।

সে এঁকেছে,



চিত্র (a) -এর Δ ABC ও Δ DEF -এর $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$;

আমি চিত্র (a)- এর Δ ABC ও Δ DEF এর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{\square}{\square}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square} \text{ এবং } \frac{AC}{DF} = \frac{\square}{\square}$$

অর্থাৎ দেখছি, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

অর্থাৎ দেখছি, Δ ABC ও Δ DEF-এর অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে।

চিত্র (b), (c) ও (d)-এর ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মেপে দেখছি,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

আমি অন্য যে-কোনো দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি, ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

পেলাম, দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে থাকবে।

দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তারা সদৃশ হয় অর্থাৎ তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে থাকে।

যেহেতু, Δ PAM ও Δ BPC সদৃশকোণী

‘দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়’। এই প্রমাণটি পরে জানব।

$$\therefore \frac{PA}{BP} = \frac{AM}{PC} = \frac{PM}{BC}$$

অর্থাৎ, $\frac{PA}{BP} = \frac{AM}{PC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{x}{27 - x}$

বা, $27 - x = 2x$

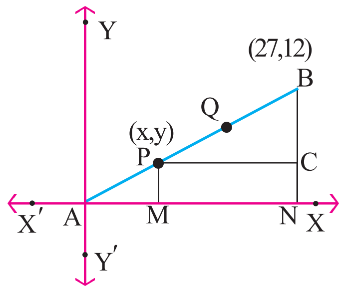
$\therefore \quad x = 9$

আবার, $\frac{PA}{BP} = \frac{PM}{BC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{y}{12 - y}$

বা, $12 - y = 2y$

$\therefore \quad y = 4 \qquad \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9,4)



$\therefore$ (9,4) বিন্দুটি A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ AB-কে অন্তঃস্থভাবে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

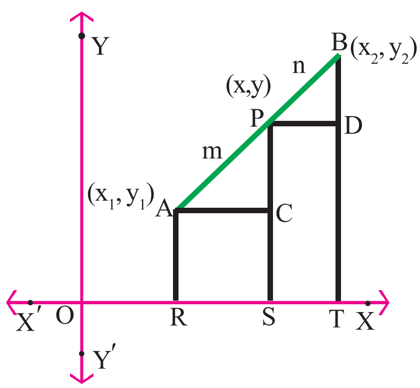
3 আমি একইরকমভাবে Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি যা A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে। [নিজে করি]

4 যদি A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) যে-কোনো বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু m : n অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে হিসাব করি।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

A, B ও P বিন্দু থেকে x- অক্ষের উপরে যথাক্রমে AR, PS ও BT তিনটি লম্ব অঙ্কন করলাম, যা x-অক্ষকে যথাক্রমে R, S এবং T বিন্দুতে ছেদ করল।

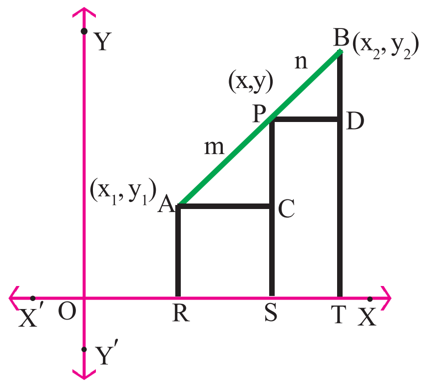
A এবং P বিন্দু থেকে PS এবং BT-এর উপর যথাক্রমে AC এবং PD দুটি লম্ব অঙ্কন করলাম যারা PS এবং BT -কে যথাক্রমে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করল।



দেখছি, Δ PAC ও Δ PBD সদৃশকোণী।

$\therefore$ Δ PAC ও Δ PBD সদৃশ। অর্থাৎ, তাদের অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতে আছে।

সুতরাং, $\frac{PA}{BP} = \frac{AC}{PD} = \frac{PC}{BD}$ .... (i)



যেহেতু, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)

$\therefore \quad AC = RS = OS - OR = x - x_1$

$PD = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PC = PS - CS = PS - AR = y - y_1$

$BD = BT - DT = BT - PS = y_2 - y$

সুতরাং, (i) থেকে পাই $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

এখানে, $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$

বা, $mx_2 - mx = nx - nx_1$

বা, $mx_2 + nx_1 = mx + nx$

বা, $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

আবার, $\frac{m}{n} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

বা, $my_2 - my = ny - ny_1$

বা, $my_2 + ny_1 = my + ny$

বা, $my_2 + ny_1 = y(m + n)$

$\therefore y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$

পেলাম, যে বিন্দু A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2)-এর সংযোজক সরলরেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

— একে বিভাজক সূত্র (Section Formula) বলা হয়।

যদি P বিন্দুটি A (x_1, y_1) ও B (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু হয়, অর্থাৎ সেক্ষেত্রে 1 : 1 অনুপাতে AB-এর সংযোজক সরলরেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করবে এবং সেক্ষেত্রে P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে,

$$\left(\frac{1.x_2 + 1.x_1}{1+1}, \frac{1.y_2 + 1.y_1}{1+1}\right) \quad [\text{এখানে, } m = 1, n = 1]$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

অর্থাৎ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

5 আমি (6,4) এবং (7,–5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করবে তার স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

যে বিন্দু (6,4) ও (7,–5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে

তার স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{3\times 7+2\times 6}{3+2}, \frac{3\times(-5)+2\times 4}{3+2}\right)$

$= \left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

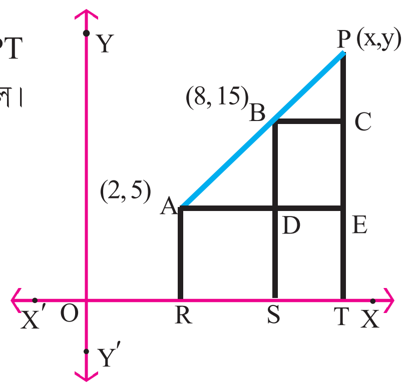
∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(\frac{33}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

6 (9,5) এবং (–7,–3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 3 : 5 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে তার স্থানাঙ্ক, (☐, ☐) লিখি। [নিজে হিসাব করে লিখি]

7 যদি A (2,5) এবং B (8,15) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু 3:2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে, তবে ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

A,B ও P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AR, BS ও PT লম্ব টানলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে R,S ও T বিন্দুতে ছেদ করল।



আবার, A ও B বিন্দু থেকে BS ও PT-এর উপরে যথাক্রমে AD ও BC লম্ব টানলাম যারা BS ও PT-কে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করল। বর্ধিত AD, PT-কে E বিন্দুতে ছেদ করল। যেহেতু, BS ও CT সমান্তরাল এবং AD, BS-এর উপর লম্ব, সুতরাং, AE, PT-এর উপরও লম্ব।

Δ APE ও Δ BPC সদৃশকোণী।

∴ Δ APE ও Δ BPC সদৃশ।

অর্থাৎ, ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতী।

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BC} = \frac{PE}{PC}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8} = \frac{y-5}{y-15}$$

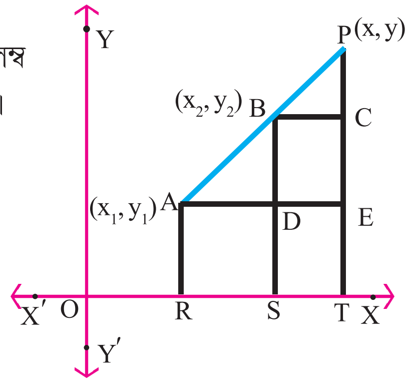
এখানে, $\frac{3}{2} = \frac{x-2}{x-8}$ এবং $\frac{3}{2} = \frac{y-5}{y-15}$ ∴ x = ☐ এবং y = ☐

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (20,35)

∴ (20,35) বিন্দুটি A (2,5) ও B (8,15) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

8 আমি ছবি এঁকে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি যা A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে m : n অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y)



A, B ও P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AR, BS এবং PT লম্ব অঙ্কন করলাম যা x-অক্ষকে যথাক্রমে R, S ও T বিন্দুতে ছেদ করল।

A ও B বিন্দু থেকে BS ও PT -এর উপর যথাক্রমে AD ও BC লম্ব অঙ্কন করলাম যা BS ও PT -কে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করল। বর্ধিত AD, PT-কে E বিন্দুতে ছেদ করল।

যেহেতু, BS ও PT সমান্তরাল এবং AD, BS-এর উপর লম্ব,

সুতরাং, AE, PT-এর উপরও লম্ব।

Δ AEP ও Δ BCP সদৃশকোণী।

$\therefore$ Δ AEP ও Δ BCP সদৃশ। সুতরাং, ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমানুপাতী।

সুতরাং, $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BC} = \frac{PE}{PC}$ .... (i)

এখানে, $AE = RT = OT - OR = x - x_1$

$BC = ST = OT - OS = x - x_2$

আবার, $PE = PT - TE = PT - AR = y - y_1$

$PC = PT - CT = PT - BS = y - y_2$

সুতরাং (i) থেকে পাই, $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$

এখানে, $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$

বা, $mx - mx_2 = nx - nx_1$

বা, $mx - nx = mx_2 - nx_1$

বা, $x(m - n) = mx_2 - nx_1$

$\therefore$ $x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

আবার, $\frac{m}{n} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$

বা, $my - my_2 = ny - ny_1$

বা, $my - ny = my_2 - ny_1$

বা, $y(m - n) = my_2 - ny_1$

$\therefore$ $y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}$

$\therefore$ যে বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে m : n অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে, তার স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

9 যদি A = (1,5) এবং B = (– 4,7) হয়, তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি যা AB সরলরেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{3\times(-4)-2\times1}{3-2}, \frac{3\times7-2\times5}{3-2}\right)$

$= \left(\frac{-12-2}{1}, \frac{21-10}{1}\right)$

$= (-14, 11)$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–14, 11)

10 (4, 3) এবং (5,–4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা কি অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে, তা হিসাব করে লিখি।

ধরি, (4,3) ও (5, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা P বিন্দুতে m : n অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে।

$\therefore$ P বিন্দুর কোটি (y-স্থানাঙ্কের মান) = $\frac{m(-4)+n(3)}{m+n}$

যেহেতু P বিন্দু x-অক্ষের উপর একটি বিন্দু, সুতরাং y = 0

$\therefore \frac{-4m+3n}{m+n} = 0$

বা, $-4m+3n = 0$

বা, $3n = 4m$

বা, $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

$\therefore m : n = 3 : 4$

$\therefore$ (4,3) এবং (5,– 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা 3 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

11 প্রমাণ করি যে (–7,2), (19,8), (15,–6) এবং (–11,–12) বিন্দু চারটিকে পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হবে।

ধরি, A = (–7, 2) , B = (19,8) , C = (15, – 6) এবং D = (–11,–12) বিন্দুগুলি কার্তেজীয় তলে বসিয়ে দেখছি ABCD একটি চতুর্ভুজ তৈরি করে।

AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{-7+15}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (4, -2)$

BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{19-11}{2}, \frac{8-12}{2}\right) = (4, -2)$

ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

কষে দেখি— 19

1. নীচের বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশগুলি যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

(i) (6,–14) এবং (–8, 10); 3 : 4 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।

(ii) (5, 3) এবং (–7, –2); 2 : 3 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে।

(iii) (–1, 2) এবং (4, –5); 3 : 2 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।

(iv) (3, 2) এবং (6, 5); 2 : 1 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে।

2. নীচের প্রত্যেক বিন্দুগুলোর সংযোজক সরলরেখাংশগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি ঃ

(i) (5,4) এবং (3,–4) (ii) (6,0) এবং (0,7)

3. (1, 3) বিন্দুটি (4, 6) ও (3, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে কী অনুপাতে বিভক্ত করেছে হিসাব করে লিখি।

4. (7, 3) ও (–9, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ y-অক্ষ দ্বারা কী অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে হিসাব করে লিখি

5. প্রমাণ করি যে A (7, 3), B (9, 6), C (10, 12) এবং D (8, 9) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হবে।

6. যদি (3, 2), (6, 3), (x, y) এবং (6, 5) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হয়, তাহলে (x, y) কত হবে হিসাব করে লিখি।

7. যদি (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_4, y_4) বিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ এবং $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

8. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–1, 3), (1,–1) এবং (5, 1); AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

9. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –4), (6, –2) এবং (–4, 2); ত্রিভুজটির তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

10. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 3), (–2, 7) এবং (0, 11); ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) $(\ell, 2m)$ এবং $(-\ell + 2m, 2\ell - 2m)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

(a) (ℓ, m) (b) $(\ell, -m)$ (c) $(m, -\ell)$ (d) (m, ℓ)

(ii) A(1, 5) এবং B (–4, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে P বিন্দু অন্তঃস্থভাবে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করলে P বিন্দুর ভুজ

(a) –1 (b) 11 (c) 1 (d) –11

(iii) একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (7, 9) এবং (–1, –3); বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

(a) (3, 3) (b) (4, 6) (c) (3, –3) (d) (4, –6)

(iv) (2, –5) এবং (–3, –2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে একটি বিন্দু 4 : 3 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে। ওই বিন্দুর কোটি

(a) –18 (b) –7 (c) 18 (d) 7

(v) PQRS সামান্তরিকের P(1, 2), Q (4, 6), R (5, 7) এবং S (x, y) শীর্ষবিন্দু হলে,

(a) x = 2, y = 4 (b) x = 3,y = 4 (c) x = 2, y = 3 (d) x = 2, y = 5

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) একটি বৃত্তের কেন্দ্র C এবং ব্যাস AB; A এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, –7) এবং (5, –2) হলে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হিসাব করে লিখি।

(ii) P ও Q বিন্দু যথাক্রমে প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে বিন্দুদুটির প্রত্যেকটির দূরত্ব যথাক্রমে 6 একক এবং 4 একক। PQ সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(iii) A ও B বিন্দু যথাক্রমে দ্বিতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে বিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দূরত্ব যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক। AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(iv) AB সরলরেখাংশের উপর P একটি বিন্দু এবং AP = PB; A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, –4) এবং (–5, 2); P বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

(v) ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল। B এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (7, 3) এবং (2, 6); A ও C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখি।

20 স্থানাঙ্ক জ্যামিতি:ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

CO-ORDINATE GEOMETRY: AREA OF TRIANGULAR REGION

আজ আমরা নবম ও দশম শ্রেণির বন্ধুরা ছক কাগজ ছাড়াই নানান ধরনের বিন্দু নিয়ে কিছু মজার খেলা তৈরির চেষ্টা করব। সেইজন্য দশম শ্রেণির রোফিকা বেগম ও গোরা বড়ো ক্লাসঘরের একটি বোর্ডে অনেকগুলি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখেছে।

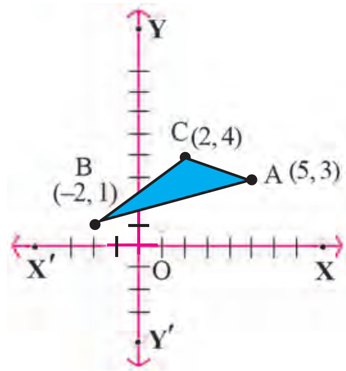
1 প্রথমে আমি ও বিবেক পাশের বোর্ডে কিছু বিন্দু আঁকব ও তাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করব। বিবেক লিখল, A (5, 3) ও B (– 2, 1) । আমি বোর্ডে A ও B বিন্দু আঁকি ও AB সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

AB সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+(3-1)^2}$ একক

$=\sqrt{49+4}$ একক $=\sqrt{53}$ একক

বুলু আর একটি বিন্দু C (2, 4) আঁকল।

আমি A, B ও C বিন্দু তিনটি যোগ করে একটি ত্রিভুজ পেলাম।



2 কিন্তু Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে বের করব?

AB,BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে হেরনের সূত্রের সাহায্যে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি। এছাড়া ভূমি ও উচ্চতা জানা থাকলে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি × উচ্চতা -এর সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি।

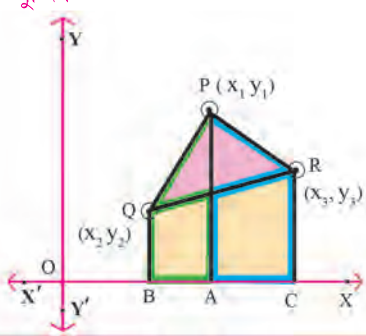
3 তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সহজে কীভাবে ওই তিনটি বিন্দুকে একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু ধরে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারব ছবি এঁকে খুঁজি।

ধরি, P $(x_1\ y_1)$, Q $(x_2\ y_2)$ এবং R (x_3, y_3) যে-কোনো তিনটি বিন্দু। P, Q ও R থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA, QB ও RC তিনটি লম্ব অঙ্কন করলাম যারা x-অক্ষকে যথাক্রমে A,B ও C বিন্দুতে ছেদ করল।

আমি ছবি থেকে দেখছি,

Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= QBAP ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + PACR ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – QBCR ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি × তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব

$= \frac{1}{2}(QB + PA) \times BA + \frac{1}{2}(PA + RC)\, AC - \frac{1}{2}(QB + RC) \times BC$

$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 + y_1) - x_2(y_2 + y_1) + x_3(y_1 + y_3) - x_1(y_1 + y_3) - x_3(y_2 + y_3) + x_2(y_2 + y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 + y_1 - y_1 - y_3) + x_2(y_2 + y_3 - y_2 - y_1) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

পেলাম, Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$............(i)

4 আমি (i) নং সূত্রের সাহায্যে A (5, 3), B (– 2, 1) ও C (2, 4) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{5(1 - 4) + (-2)(4 - 3) + 2(3 - 1)\}$ বর্গ একক

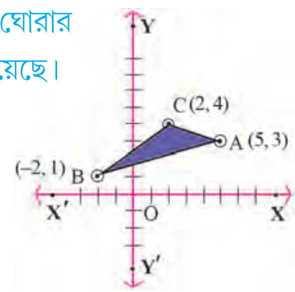
$= \frac{1}{2}(-15 - 2 + 4)$ বর্গ একক

$= -\frac{13}{2}$ বর্গএকক $= -6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

এখানে,
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (-2, 1)$
এবং $(x_3, y_3) = (2, 4)$

যেহেতু, ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করার সময় বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘোরার দিকে (Clock wise) নেওয়া হয়েছে তাই ΔABC -এর ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয়েছে।

যদি ঘড়ির কাঁটা ঘোরার বিপরীত দিকে নিতাম তাহলে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কী পেতাম দেখি।



ΔABC-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{5(4 - 1) + 2(1 - 3) + (-2)(3 - 4)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{5 \times 3 + 2 \times (-2) + (-2)(-1)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(15 - 4 + 2)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 13$ বর্গ একক $= 6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

এক্ষেত্রে,
$(x_1, y_1) = (5, 3)$,
$(x_2, y_2) = (2, 4)$
এবং $(x_3, y_3) = (-2, 1)$

দেখছি, বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিলে ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হচ্ছে।

তাই, (i) নং সূত্রে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$ লেখা হয়। ‘| |’ চিহ্নকে মডিউলাস (modulus) বা সংক্ষেপে মড্ (mod) বলা হয়।

$|x|$ এর অর্থ, $|x| = x$ যখন $x \geq 0$
$= -x$ যখন $x < 0$

যেমন $|5| = 5$
এবং $|-5| = -(-5) = 5$

যেহেতু, ক্ষেত্রফলের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 6\frac{1}{2}$ বর্গ একক

5 P (3,5) , Q (– 4 , 4) এবং R (5,2) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

Δ PQR ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}[3(4-2)+(-4)(2-5)+5\ (5-4)]$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\ [3 \times 2 + 12 + 5]$ বর্গ একক $= 11\frac{1}{2}$ বর্গ একক

6 প্রমাণ করি যে, (1, 4) , (2, 3) ও (0, 5) বিন্দুগুলি সমরেখ।

যদি A (1, 4), B (2, 3) ও C(0, 5) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হয় তবে (1, 4), (2, 3) ও (0, 5) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে।

B বিন্দুটি AC রেখাংশে অবস্থিত হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে

$\therefore$ Δ ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\ [1\ (3-5) + 2\ (5-4) + 0\ (4-3)]$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\ [-2 + 2 + 0]$ বর্গ একক $= 0$ বর্গ একক

$\therefore$ (1, 4), (2, 3) ও (0, 5) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সুতরাং, (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যখন $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ হবে।

7 প্রমাণ করি যে, (3a, 0), (0, 3b), এবং (a, 2b) বিন্দুগুলি সমরেখ। [নিজে করি]

8 (0, – 4), (–1, y) এবং (3, 2) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত (সমরেখ) হলে, y-এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, – 4), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (– 1, y) এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (3, 2)

যেহেতু A, B ও C সমরেখ,

$\therefore\ 0 \times (y-2) + (-1)(2+4) + 3(-4-y) = 0$

বা, $-6 - 12 - 3y = 0$

বা, $-3y = 18$

$\therefore\ y = -6$

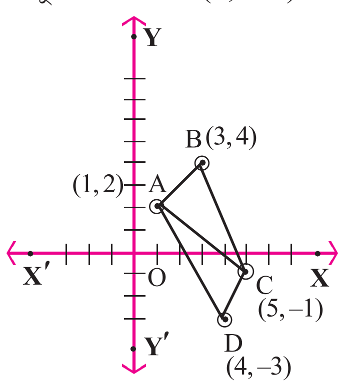
$\therefore$ y = – 6 হলে, A , B ও C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় থাকবে।

9 একটি চতুর্ভুর্জের পরপর কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2), (3, 4), (5, – 1) ও (4, – 3); চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (1, 2), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (3, 4), C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (5, – 1) এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (4, – 3)

AC কর্ণ টানলাম।

$\therefore$ Δ ABC ও Δ ACD দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পেলাম।



$\therefore$ ΔABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\ |1\ (4+1) + 3\ (-1-2) + 5\ (2-4)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\ |5 - 9 - 10|$ বর্গ একক

$= |-7|$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক

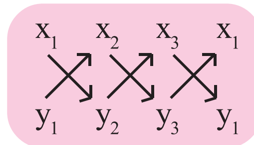
আবার, Δ ACD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ একক [নিজে করি]

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(7 + 5\frac{1}{2})$ বর্গ একক = $12\frac{1}{2}$ বর্গ একক

ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

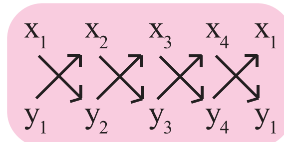
$$= \frac{1}{2} \left| x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) \right|$$



একইভাবে, চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

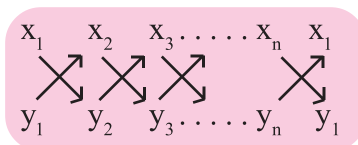
$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1) \right|$$



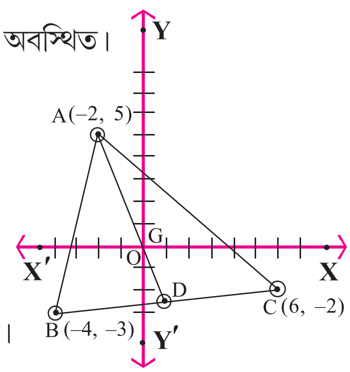
চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পর্যন্ত নবম শ্রেণির পাঠ্যসূচির অন্তর্ভুক্ত

n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + \dots + y_nx_1) \right|$$



10 ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 2, 5), (– 4, –3) এবং (6, – 2); ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কীভাবে পাব দেখি।



ধরি, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমার উপর অবস্থিত।

আবার, AG : GD = 2 : 1

ধরি, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

BC বাহুর মধ্যবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3-2}{2}\right)$

$= \left(1, \frac{-5}{2}\right)$

G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে।

সুতরাং, $x = \frac{2 \times 1 + 1 \times (-2)}{2+1}$ বা, $x = \frac{2-2}{3}$ $\therefore$ $x = 0$

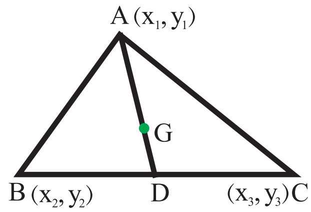
আবার, $y = \frac{2 \times (-\frac{5}{2}) + 1 \times 5}{2+1}$ বা, $y = \frac{-5+5}{3}$ $\therefore$ $y = 0$

সুতরাং, Δ ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক (0, 0)

11 ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কী হবে দেখি।

ধরি, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমার উপর অবস্থিত এবং AG : GD = 2 : 1

ধরি, ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক (x, y)



$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করছে।

সুতরাং, $x = \dfrac{2 \times \frac{(x_2+x_3)}{2} + 1 \times x_1}{2+1}$ $\qquad \therefore x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

আবার, $y = \dfrac{2 \times \frac{(y_2+y_3)}{2} + 1 \times y_1}{2+1}$ $\qquad \therefore y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ .... (ii)

(ii) নং সূত্রের সাহায্যে (7, – 5), (– 2, 5) এবং (4, 6) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। [নিজে করি]

কষে দেখি— 20

1. **নীচের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রতিক্ষেত্রে নির্ণয় করি:**

(i) (2, – 2) , (4, 2) এবং (– 1, 3)

(ii) (8, 9) (2, 6) এবং (9, 2)

(iii) (1, 2), (3, 0) এবং মূলবিন্দু

2. প্রমাণ করি যে, (3, – 2), (– 5, 4) এবং (– 1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

3. K-এর মান কত হলে, (1, – 1) ,(2, – 1) এবং (K, – 1) বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় থাকবে হিসাব করে লিখি।

4. প্রমাণ করি যে, (1, 2) এবং (–2, – 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী।

5. প্রমাণ করি যে, (2, 1) এবং (6, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু (– 4, – 5) ও (9, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত।

6. **নীচের প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দু চারিটির সংযোগে গঠিত চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি :**

(i) (1, 1), (3, 4), (5, –2), (4, –7) (ii) (1, 4), (– 2, 1), (2, – 3), (3, 3)

7. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) (– 4, 3) এবং (8, – 6); ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি এবং A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

8. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 5) এবং ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (–2, 1) হলে, BC বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

9. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, – 3), (– 5, 2) এবং (x, y); যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র মূলবিন্দু হয়, তাহলে x ও y-এর মান নির্ণয় করি।

10. A (–1, 5), B (3, 1) এবং C (5, 7) ত্রিভুজ ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু। D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। DEF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি এবং দেখাই যে $\Delta ABC = 4\Delta DEF$

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) (0,4), (0, 0) এবং (–6, 0) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
(a) 24 বর্গ একক (b) 12 বর্গ একক (c) 6 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক

(ii) (7, – 5), (– 2, 5) এবং (4, 6) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক
(a) (3, – 2) (b) (2, 3) (c) (3, 2) (d) (2, – 3)

(iii) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90°$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 4) এবং (3, 0) হলে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
(a) 12 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক (c) 24 বর্গ একক (d) 8 বর্গ একক।

(iv) (0, 0), (4, – 3) এবং (x, y) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে
(a) x = 8, y = –6 (b) x = 8, y = 6 (c) x = 4, y = – 6 (d) x = –8, y = – 6

(v) ABC ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, –4) এবং ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, 2) হলে, BC বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক
(a) (–2, –5) (b) (– 2, 5) (c) (2, – 5) (d) (5, –2)

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 1) (1, 1) এবং (1, 0); ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

(ii) একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, 9) এবং দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (15, 0) এবং (0, 10); তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

(iii) (a, 0), (0, b) এবং (1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাই যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

(iv) (1, 4), (–1, 2) এবং (– 4, 1) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

(v) (x – y, y – z), (– x, –y) এবং (y, z) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক লিখি।

21 লগারিদম্‌
(LOGARITHM)

আমার বন্ধু তথাগত একটি কালো রঙের চার্ট পেপারে অনেকগুলি সংখ্যা লিখে শ্রেণিকক্ষের দেওয়ালে টাঙিয়ে দিয়েছে। আমরা এই চার্টে লেখা সংখ্যাগুলি নিয়ে এক মজার খেলা খেলব। আমার বন্ধু বুলু ব্ল্যাকবোর্ডে একটি সংখ্যা 2 লিখল। আমরা তথাগতর তৈরি চার্ট পেপারে যে-কোনো একটি সংখ্যা বোর্ডে লিখব এবং সেই সংখ্যাটি 2-এর কোন ঘাতে আছে নির্ণয় করার চেষ্টা করব।

নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 8 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল

আমি 2-এর কোন ঘাতে 8 পাবো দেখি।

$2^3=8$

এবার নাজরিন 2 -এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 64 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল।

2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 64 পাবো হিসাব করি

ধরি, $2^x = 64 = 2^6$

$\therefore x = 6$

বুঝেছি, 2-এর ষষ্ঠঘাত 64

এবার নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 7 সংখ্যাটি লিখেছে।

আমি 2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 7 পাব দেখি।

ধরি, $2^x=7$———(i)

চারটি প্রাথমিক প্রক্রিয়া যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ এবং উদ্‌ঘাতন (Involution) [ঘাত বৃদ্ধি যেমন, 5^2, $3^{4/3}$ ইত্যাদি], অবঘাতন (Evolution) [মূল নির্ণয় যেমন, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি] এই 6 টি মৌলিক প্রক্রিয়া দ্বারা x-এর মান বের করতে পারব না।

কিন্তু (i) নং সমীকরণের সমাধান কীভাবে পাব ?

লগারিদমের ধারণা ব্যবহার করে আমরা (i) নং সমীকরণের সমাধান করতে পারি। লগারিদ্‌মের ধারণাকে কখন কখনও বলা হয় **সপ্তম মৌলিক প্রক্রিয়া**।

আমরা দেখছি, $2^2 = 4$ এবং $2^3 = 8$

সুতরাং বুঝতে পারছি, $2^x = 7$ হলে, x এমন একটি বাস্তব সংখ্যা হবে যে $2 < x < 3$ হবে এবং সেই বাস্তব সংখ্যাটিকে আমরা $\log_2 7$ বলি।

$\therefore 2^x = 7$ সমীকরণটি সমাধান করে পাই $x = \log_2 7$

সংজ্ঞা: যদি a ও M দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a > 0$, $a \neq 1$ এবং $M > 0$ হয়, তবে একটি বাস্তব সংখ্যা x-কে নিধান a-এর সাপেক্ষে M-এর লগারিদ্‌ম বলা হয় যদি $a^x = M$ হয় এবং লিখি $x = \log_a M$; $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M = \log_b M$ হবে, যদি এবং একমাত্র যদি $a = b$ হয়, অর্থাৎ $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M$ একটি অনন্য (Unique) বাস্তব সংখ্যা।

যেমন, $\log_2 1 = \log_3 1 = 0$; কেননা $2^0 = 1$ এবং $3^0 = 1$; কিন্তু $\log_2 5 \neq \log_3 5$

আবার, $\log_2 8 = 3$; কারণ $2^3 = 8$;

$\log_2 64 = 6$; কারণ $2^6 = 64$

1 নাজরিন এবার 2-এর পাশে ব্ল্যাকবোর্ডে 0.25 লিখল। আমি লগারিদ্‌মের ধারণা ব্যবহার করে 2-এর কোন ঘাত 0.25 হবে লিখি।

$2^x = 0.25$

বা, $2^x = \frac{25}{100}$ বা, $2^x = \frac{1}{4}$ বা, $2^x = \frac{1}{2^2}$

$\therefore$ $2^x = 2^{-2}$

সুতরাং, $\log_2 0.25 = -2$ [যেহেতু, $2^{-2} = 0.25$]

2 আমি $\log_{\sqrt{3}} 81$-এর মান হিসাব করে লিখি

ধরি, $x = \log_{\sqrt{3}} 81$

$\therefore$ সংজ্ঞা থেকে পাই, $(\sqrt{3})^x = 81 = 3^4$

বা, $3^{\frac{x}{2}} = 3^4$ বা, $\frac{x}{2} = 4$

$\therefore x = 8$

3 আমি $\log_{\sqrt{7}} 343$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

যদি $M > 0$ এবং $a > 0$ ও $a \neq 1$ না হয় তাহলে কি লগারিদ্‌মের সংজ্ঞা পাব না?

(i) নাজরিন $M < 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$ -এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি $\log_2 (-5) = x$ হয়, তবে $2^x = -5$ হতে হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(ii) নাজরিনের বন্ধু সহেলী $M = 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি, $\log_2 0 = x$ হয়, তবে $2^x = 0$ হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M=0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(iii) সহেলীর বন্ধু রজত $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

(a) যদি $\log_{-2} 16 = x$ হয়, তবে $(-2)^x = 16$; সুতরাং, $x = 4$

আবার, যদি $\log_2 16 = y$ হয়, তবে $2^y = 16$; অর্থাৎ, $y = 4$

$\therefore \log_{-2} 16 = \log_2 16$; কিন্তু $\log_a M = \log_b M$ হলে, $a = b$ হয় যখন $M \neq 1$; কিন্তু $-2 \neq 2$

সুতরাং, $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান অনন্য (Unique) নয়। তাই $a < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অনন্যতার অভাবে অসংজ্ঞাত।

(b) আবার রজত $a = 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

$\log_0 16 = x \qquad \therefore 0^x = 16$; কিন্তু $0^x = 0 \ (x > 0)$

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 0$

(c) এবার রজত $a = 1$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল

$\log_1 16 = x \qquad \therefore 1^x = 16$; কিন্তু বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য 1^x এর বাস্তব মান 1

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 1$

(iv) রজতের বন্ধু সিরাজ $a < 0$ এবং $M < 0$ নিয়ে লগারিদমের মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

4 $\log_{-2}(-16)$-এর মান পাওয়া যায় কিনা দেখি (নিজে করি)

নিজে করি — 20.1

(1) $\log_2(-7)$ (2) $\log_5 0$ (3) $\log_{-3} 2$ (4) $\log_0 2$ (5) $\log_1 7$ -এগুলির মান পাওয়া যায় কিনা দেখি

জোসেফ ব্ল্যাকবোর্ডে দুটি সংখ্যা 8 ও 32 লিখল।

5 আমি 2 নিধানের সাপেক্ষে 8 ও 32-এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

$\log_2 32 = 5 \quad [\because 2^5 = 32]$

6 2 নিধানের সাপেক্ষে 8×32 এবং $\frac{32}{8}$ -এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2(8 \times 32) = \log_2 256 = 8 = 3+5 = \log_2 8 + \log_2 32 \qquad [\because 2^8 = 256]$

আবার, $\log_2\left(\frac{32}{8}\right) = \log_2 4 = 2 = 5 - 3 = \log_2 32 - \log_2 8$

7 M ও N যে কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0$ এবং $N > 0$ এবং a যে কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা $a > 0, a \neq 1$ হলে, $\log_a M$, $\log_a N$-এর সাহায্যে $\log_a(MN)$ ও $\log_a \frac{M}{N}$ -কে প্রকাশ করে কী পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p, \log_a N = q$

$\therefore a^p = M$ এবং $a^q = N$

$\therefore MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$

$\therefore \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

$\therefore$ **পেলাম $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ .... (I)**

এবং $\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\therefore \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

পেলাম, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ———————— **II**

8 আমি 2-এর নিধানের সাপেক্ষে 8^5 -এর লগারিদ্‌ম নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

আবার, $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

$\therefore \log_2 8^5 = 15 = 5\times3 = 5 \times \log_2 8$

9 M, a, c যে কোনো তিনটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0, a > 0, a \neq 1, \log_a M^c$– এর সরল মান কি পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p \quad \therefore a^p = M$

$\therefore \quad M^c = (a^p)^c = a^{pc}$

$M^c > 0$, যেহেতু $M > 0$

$\therefore \log_a M^c = pc = c.p = c \log_a M$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M^c = c \log_a M$ ———— III**

10 কিন্তু আমি যদি লগারিদ্‌মের নিধান পরিবর্তন করতে চাই অর্থাৎ $\log_a M$ -কে $\log_b M$ (যেখানে b যেকোনো একটি বাস্তব সংখ্যা ও $b \neq 1, b > 0$) -এর সাহায্যে প্রকাশ করতে চাই, তবে কীভাবে প্রকাশ করব দেখি।

ধরি, M, a,b তিনটি বাস্তব সংখ্যা যেখানে, $M > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

ধরি, $\log_b M = r \quad \therefore b^r = M$

এবং $\log_a b = d \quad \therefore a^d = b$

$\therefore M = b^r = (a^d)^r = a^{rd}$

$\therefore \log_a M = rd = \log_b M \times \log_a b$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ ———— IV**

I থেকে IV পর্যন্ত 4 টি লগারিদ্‌মের সূত্র পেলাম এবং IV নং সূত্রটিকে নিধান পরিবর্তনের সূত্র বলা হয়। $\log_y x$-এই ধরনের কোন সংখ্যার ক্ষেত্রে সবসময় ধরে নেব x ও y দুটি বাস্তব সংখ্যা, $x > 0, y > 0, y \neq 1$

4 টি লগারিদ্‌মের সূত্র ছাড়াও লগারিদ্‌মের সংজ্ঞা ও সূত্র থেকে কী কী লিখতে পারি দেখি।

(i) $\log_a 1 = 0 \quad [\because a^0=1]$

(ii) $\log_a a = 1 \quad [\because a^1 = a]$

(iii) $a^{\log_a M} = M \quad$ [ধরি, $\log_a M = u \therefore a^u = M \therefore a^{\log_a M} = M$]

(iv) $\log_a b\times\log_b a = \log_a a = 1 \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(v) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

(vi) $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b} \quad [\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b]$

(vii) $\log_a (M_1M_2M_3......M_n) = \log_a M_1+\log_a M_2+\log_a M_3+....... + \log_a M_n$ [যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

(viii) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1 \quad$ [যেহেতু $\log_a \dfrac{1}{a} = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1 = -1$]

(ix) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N} \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(x) যদি $\log_a M = \log_a N$ হয়, তবে $M = N$

[$\log_a M = \log_a N$ হলে, $a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \therefore M = N$, (iii) নং থেকে পেলাম]

11 আমি $\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$ -এর মান নির্ণয় করি।

$\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$

$= \log_3 \{\log_2 (\log_{\sqrt{3}}3^4)\}$

$= \log_3 [\log_2 (\log_{\sqrt{3}} \{(\sqrt{3})^2\}^4)]$

$= \log_3\{\log_2 (\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8)\}$

$= \log_3 \{\log_2 8 (\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3})\}$ $[\because \log_a M^c = c \log_a M]$

$= \log_3 \{\log_2 8\}$ $[\because \log_a a = 1]$

$= \log_3 \{\log_2 2^3\} = \log_3 \{3\log_2 2\} = \log_3 3 = 1$

12 আমি $\log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5 = 1$ — প্রমাণ করি।

বামপক্ষ $= \log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2(5\times2) - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2 5 + \log_2 2 - \log_5 5^3 \times \dfrac{1}{\log_5 8}$ [$\because \log_a MN = \log_a M + \log_a N$ এবং $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$]

$= \log_2 5 + 1 - 3\log_5 5 \times \dfrac{1}{\log_5 2^3}$ [$\because \log_a a = 1$ এবং $\log_a M^c = c \log_a M$]

$= \log_2 5 + 1 - 3 \times \dfrac{1}{3\log_5 2} = \log_2 5 + 1 - \log_2 5 = 1 =$ ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

13 আমি $(7\log\dfrac{10}{9} - 2 \log\dfrac{25}{24} + 3 \log\dfrac{81}{80})$-এর সরলতম মান হিসাব করে লিখি।

[নিধানের উল্লেখ না থাকলে এই অধ্যায়ের সব অঙ্কে $\log M$ বললে বুঝব $\log_{10}M$]

$7 \log\dfrac{10}{9} - 2 \log \dfrac{25}{24} + 3 \log \dfrac{81}{80}$

$= 7(\log 10 - \log 9) - 2 (\log 25 - \log 24) + 3 (\log 81 - \log 80)$

$= 7 \{\log (2 \times 5) - \log 3^2\} - 2 \{(\log 5^2 - \log (2^3 \times 3)\} + 3 \{\log 3^4 - \log (5 \times 2^4)\}$

$= 7 \{\log 2 + \log 5 - 2 \log 3\} - 2\{2 \log 5 - 3 \log 2 - \log 3\} + 3 \{4 \log 3 - \log 5 - 4 \log 2\}$

$= 7 \log 2 + 7 \log 5 - 14 \log 3 - 4 \log 5 + 6 \log 2 + 2 \log 3 + 12 \log 3 - 3 \log 5 - 12 \log 2$

$= \log 2$

14 আমি $7 \log\dfrac{16}{15} + 5 \log\dfrac{25}{24} + 3 \log \dfrac{81}{80} = \log 2$ — প্রমাণ করি। [নিজে করি]

15 $\dfrac{1}{2}$ -এর লগারিদম $-\dfrac{1}{2}$ হলে নিধান নির্ণয় করি।

ধরি, নিধান $= x$

$\therefore \log_x \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

বা, $(x^{-\frac{1}{2}})^2 = (\dfrac{1}{2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

বা, $x^{-1} = \dfrac{1}{4}$ বা, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4}$ $\therefore x = 4$ নির্ণীত নিধান= 4

16 0.04 -এর লগারিদম – 2 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

17 যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log\frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$

বা, $(a+b)^2 = 9ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = (ab)$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [প্রমাণিত]

18 যদি $a^2 - 11ab + b^2 = 0$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\log\frac{1}{3}(a-b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [নিজে করি]

ফিরোজ ব্ল্যাকবোর্ডে অনেকগুলো লগারিদ্গম লিখল যাদের নিধান 10

ফিরোজ লিখল, (i) $\log_{10}10$ (ii) $\log_{10}100$ (iii) $\log_{10}1000$ (iv) $\log_{10}125$

19 আমি ফিরোজের লেখা লগারিদ্মের মান নির্ণয় করি।

(i) $\log_{10}10 = 1$ (ii) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10 = 2$

(iii) $\log_{10}1000 = \square$ [নিজে লিখি]

(iv) $\log_{10}125$

$= \log_{10}5^3$

$= 3\log_{10}5$

$= 3\log_{10}\frac{10}{2}$

$= 3(\log_{10}10 - \log_{10}2)$

$= 3(1 - \log_{10}2)$

কিন্তু যে সকল লগারিদ্মের নিধান 10 তাদের কী বলব?

নিধান 10 সাপেক্ষে কোনো বাস্তব সংখ্যা $M(>0)$ -এর লগারিদ্মকে ওই সংখ্যাটির সাধারণ লগারিদ্ম (Common Logarithm) বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্ম-এর ধারণাটি প্রথম চালু করেছিলেন হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs)। তার নাম অনুসারে কখনো কখনো এই বিশেষ লগারিদ্মকে ব্রিগারীয় পদ্ধতি (Briggarian system of Logarithm) -ও বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্ম ছাড়া অন্য কোন লগারিদ্ম আমরা প্রচুর ব্যবহার করি?

সাধারণ লগারিদ্ম ছাড়া আমরা স্বাভাবিক লগারিদ্ম (Natural Logarithm) ব্যবহার করি।

কোনো বাস্তব সংখ্যা M(>0) -এর যে লগারিদ্‌মের নিধান e [যেখানে e হচ্ছে 2.71828-এর কাছাকাছি অর্থাৎ 2 ও 3 -এর অন্তবর্তী একটি তুরীয় অমূলদ সংখ্যা(Transcendental Irrational Number)] সেই লগারিদ্‌ম M-কে **স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম** বলা হয়।

স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম-এর ধারণাটি প্রথম পাওয়া যায় ইংরেজ গণিতজ্ঞ জন নেপিয়র-এর লেখা বইতে। স্বাভাবিক লগারিদ্‌মকে অনেক সময় লগারিদ্‌ম-এর নেপিয়রীয় পদ্ধতি বলা হয়।

20 $\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$ হলে, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

$\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$

বা, $\log_{10}(\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}) = \log_{10}2^2$

বা, $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4$

বা, $(a+b)^2 = 4ab$

বা, $(a+b)^2 - 4ab = 0$

বা, $(a-b)^2 = 0$

বা, $a-b = 0$ $\therefore$ $a = b$ এটি, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক।

21 হিসাব করে দেখাই যে, $\log_{10}3$-এর মান $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ -এর মধ্যে আছে।

ধরি, $\log_{10}3 = x$

$\therefore$ $10^x = 3$

$\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$-এর হরগুলির ল.সা.গু. ☐

$10^x = 3$

$\therefore$ $(10^x)^6 = 3^6 = 729$

$\therefore$ $10^{6x} = 729$

যেহেতু, $100 < 729 < 1000$

বা, $10^2 < 10^{6x} < 10^3$

বা, $2 < 6x < 3$

বা, $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

সুতরাং, $\frac{1}{3} < \log_{10}3 < \frac{1}{2}$

22 যদি $x = \log_{2a}a, y = \log_{3a}2a$ এবং $z = \log_{4a}3a$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $xyz + 1 = 2yz$

$x = \log_{2a}a, y = \log_{3a}2a$ এবং $z = \log_{4a}3a$

বামপক্ষ $= xyz+1 = \log_{2a}a \times \log_{3a}2a \times \log_{4a}3a + 1$

$= \log_{3a}a \times \log_{4a}3a + 1$

$= \log_{4a}a + 1 = \log_{4a}a + \log_{4a}4a$

$= \log_{4a}4a^2$

$= \log_{4a}(2a)^2$

$= 2\log_{4a}2a$

$= 2\log_{3a}2a \times \log_{4a}3a$

$= 2yz$ = ডানপক্ষ $\therefore$ পেলাম, $xyz + 1 = 2yz$ (প্রমাণিত)

23 $x = \log_a bc, y = \log_b ca$ এবং $z = \log_c ab$ হলে, দেখাই যে, $x + y + z = xyz - 2$ [নিজে করি]

24 $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হলে, দেখাই যে, $x^x. y^y. z^z = 1$

ধরি, $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$ [যেখানে $k \neq 0$]

$\therefore \log x = k(y-z)$, আবার, $\log y = k(z-x)$ এবং $\log z = k(x-y)$

বা, $x \log x = xk(y-z)$, বা, $y \log y = yk(z-x)$ বা, $z \log z = zk(x-y)$

বা, $\log x^x = k(xy - zx)$...(i) বা, $\log y^y = k(yz - xy)$...(ii) বা, $\log z^z = k(zx - yz)$ ...(iii)

(i) + (ii) + (iii) করে পাই, $\log x^x + \log y^y + \log z^z = k[xy - zx + yz - xy + zx - yz] = 0$

বা, $\log x^x y^y z^z = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

$\therefore x^x. y^y. z^z = 1$ (প্রমাণিত)

25 যদি $\frac{\log x}{b-c} = \frac{\log y}{c-a} = \frac{\log z}{a-b}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x^a. y^b. z^c = 1$

ধরি, $\frac{\log x}{b-c} = \frac{\log y}{c-a} = \frac{\log z}{a-b} = k$ $(k \neq 0)$

$\therefore \log x = k(b-c), \log y = k(c-a), \log z = k(a-b)$

এখন, $\log(x^a. y^b. z^c) = \log x^a + \log y^b + \log z^c$

$= a\log x + b\log y + c\log z$

$= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b)$

$= k(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

$= k \times 0 = 0 = \log 1$ সুতরাং, $x^a. y^b. z^c = 1$ (প্রমাণিত)

26 যদি $a^{2-x}. b^{5x} = a^{x+3}. b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log \frac{b}{a} = \log\sqrt{a}$

$a^{2-x}. b^{5x} = a^{x+3}. b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{x+3}}{a^{2-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{x+3-2+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2x+1}$

বা, $b^{2x} = a^{2x}.a$

বা, $(\frac{b}{a})^{2x} = a$

সুতরাং, $\log(\frac{b}{a})^{2x} = \log a$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2x \log(\frac{b}{a}) = \log a$

বা, $x \log(\frac{b}{a}) = \frac{1}{2}\log a$

বা, $x \log(\frac{b}{a}) = \log a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $x \log(\frac{b}{a}) = \log\sqrt{a}$ (প্রমাণিত)

27 সমাধান করি (i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$ (ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

(i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \log_{10}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $(\log_{10}x)^2 = 4$

বা, $\log_{10}x = \pm 2$

$\log_{10}x = 2$ হলে, $x = 10^2$ $\therefore$ $x = 100$

আবার, $\log_{10}x = -2$ হলে, $x = 10^{-2}$ $\therefore$ $x = \frac{1}{100}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{100}$ বা 100

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

বা, $\log_2\log_2 x = 2^1$ বা, $\log_2\log_2 x = 2$ বা, $\log_2 x = 2^2$ বা, $\log_2 x = 4$

বা, $x = 2^4$ $\therefore$ $x = 16$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 16$

কষে দেখি— 21

1. মান নির্ণয় করি :

(i) $\log_4 (\frac{1}{64})$ (ii) $\log_{0.01} 0.000001$ (iii) $\log_{\sqrt{6}} 216$ (iv) $\log_{2\sqrt{3}} 1728$

2. (a) 625 -এর লগারিদ্‌ম 4 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

(b) 5832- এর লগারিদ্‌ম 6 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

3. (a) $1 + \log_{10} a = 2 \log_{10} b$ হলে, a কে b -এর দ্বারা প্রকাশ করি ।

(b) $3 + \log_{10} x = 2 \log_{10} y$ হলে, x কে y-এর দ্বারা প্রকাশ করি।

4. মান নির্ণয় করি :

(a) $\log_2 [\log_2 \{\log_3 (\log_3 27^3)\}]$

(b) $\frac{\log\sqrt{27} + \log 8 - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

(c) $\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 3$

(d) $\log_{10} \frac{384}{5} + \log_{10} \frac{81}{32} + 3\log_{10} \frac{5}{3} + \log_{10} \frac{1}{9}$

5. প্রমাণ করি :

(i) $\log \frac{75}{16} - 2\log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$

(ii) $\log_{10} 15 (1+\log_{15} 30) + \frac{1}{2} \log_{10} 16 (1+\log_4 7) - \log_{10} 6 (\log_6 3+1+\log_6 7)=2$

(iii) $\log_2 \log_2 \log_4 256+2\log_{\sqrt{2}} 2=5$

(iv) $\log_{x^2} x \times \log_{y^2} y \times \log_{z^2} z = \frac{1}{8}$

(v) $\log_{b^3} a \times \log_{c^3} b \times \log_{a^3} c = \frac{1}{27}$

(vi) $\frac{1}{\log_{xy}(xyz)} + \frac{1}{\log_{yz}(xyz)} + \frac{1}{\log_{zx}(xyz)} = 2$

(vii) $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ca} + \log \frac{c^2}{ab} = 0$

(viii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$

6. (i) যদি $\log \frac{x+y}{5} = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 23$

(ii) যদি $a^4 + b^4 = 14a^2b^2$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log (a^2 + b^2) = \log a + \log b + 2\log 2$

7. যদি $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $xyz = 1$

8. যদি $\frac{\log x}{b-c} = \frac{\log y}{c-a} = \frac{\log z}{a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

(a) $x^{b+c} . y^{c+a} . z^{a+b} = 1$ (b) $x^{b^2+bc+c^2} . y^{c^2+ca+a^2} . z^{a^2+ab+b^2} = 1$

9. যদি, $a^{3-x} . b^{5x} = a^{5+x} . b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log (\frac{b}{a}) = \log a$

10. **সমাধান করি :**

(a) $\log_8 [\log_2 \{\log_3 (4^x + 17)\}] = \frac{1}{3}$ (b) $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

11. দেখাই $\log_{10} 2$ -এর মান $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{3}$ -এর মধ্যে অবস্থিত।

12. **বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)**

(i) যদি $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ হয়, তাহলে x -এর মান

(a) 0.5 (b) 0.25 (c) 4 (d) 16

(ii) $\log_{10}(7x-5) = 2$ হলে, x -এর মান

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18

(iii) $\log_2 3 = a$ হলে, $\log_8 27$ হবে

(a) 3a (b) $\frac{1}{a}$ (c) 2a (d) a

(iv) $\log_{\sqrt{2}} x = a$ হলে, $\log_{2\sqrt{2}} x$ হবে

(a) $\frac{a}{3}$ (b) a (c) 2a (d) 3a

(v) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ হলে, x- এর মান হবে

(a) 27 (b) 9 (c) 3 (d) $\frac{1}{27}$

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন**

(i) $\log_4 \log_4 \log_4 256$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(ii) $\log \frac{a^n}{b^n} + \log \frac{b^n}{c^n} + \log \frac{c^n}{a^n}$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(iii) দেখাই যে $a^{\log_a x} = x$

(iv) $\log_e 2 . \log_x 25 = \log_{10} 16 . \log_e 10$ হলে, x -এর মান নির্ণয় করি।

22 সেট তত্ত্ব (SET THEORY)

জেনে বা না জেনে সকলেরই সেটের একটা ধারণা আছে। প্রায়ই বলে থাকি বা শুনি একদল ছাত্র বা একদল ছাত্রী, এক ঝাঁক মৌমাছি, একভাঁড় মিষ্টি, গ্রন্থাগারের বই সমূহ, অখণ্ড সংখ্যা সমূহ, মূলবিন্দুগামী সরলরেখা গোষ্ঠী ইত্যাদি। প্রথম পাঁচটি উদাহরণ দল গঠন করেছে, ওই দলগুলি সেট গঠন করে না। কিন্তু শেষের দুটি দল সেট গঠন করে।

এই উক্তিগুলির মধ্যে একটি দলকে একটি নতুন উপাদান হিসাবে ভাববার মৌলিক ধারণা নিহিত আছে। আমরা প্রতিটি ক্ষেত্রে সসীম (finite) (যেমন নবম শ্রেণির ছাত্রীরা) বা অসীম (যেমন অখণ্ড সংখ্যাসমূহ) সংখ্যক মূর্ত (concrete) (যেমন নবম শ্রেণির ছাত্রীরা) বা বিমূর্ত (abstact) (যেমন অখণ্ড সংখ্যাসমূহ) উপাদানের সংকলন (collection) বিবেচনা করি।

সেট তত্ত্ব গণিতশাস্ত্রের একটি মূলভিত্তি। গণিতশাস্ত্রের যে-কোনো বিষয় আলোচনা করতে গেলে যেমন কলনবিদ্যা (calculus), বীজগণিত, তাত্ত্বিক কম্পিউটার বিদ্যা ইত্যাদি সেট তত্ত্বের ধারণা ছাড়া পূর্ণাঙ্গ আলোচনা সম্ভব নয়। ইংরেজ গণিতজ্ঞ জর্জ বুল [George Boole (1815-1864)] এই ব্যাপারে প্রথম আলোকপাত করেন। পরবর্তীকালে জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ এল. পি. ক্যান্টর [George L. P. Cantor (1845-1918)] বিষয়টির প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। তাঁকেই সেট তত্ত্বের জনক বলা হয়।

সেটের ধারণা :

পৃথক (distinct) বস্তুসমূহের **সুসংজ্ঞাত** (Well-defined) সমাহার বোঝাতে সেট শব্দটি ব্যবহৃত হয়। সুতরাং কোনো বস্তুসমূহের সমাহার (Collection) বা সমষ্টিকে (Aggregate) সেট বলা হবে যদি

(i) সমাহারটি সুসংজ্ঞাত (Well-defined) হয়

(ii) সমাহারের অন্তর্গত যেকোনো দুটি বস্তু পরস্পর ভিন্ন (distinct) হয়

সুসংজ্ঞাত বলতে কী বুঝি :

নবম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রী যাদের বয়স 14 বছর থেকে 14 বছর 3 মাস তাদের সেট তৈরি সম্ভব। কারণ এটি সুসংজ্ঞাত।

কিন্তু নবম শ্রেণির বুদ্ধিমান ছাত্র-ছাত্রীদের সেট তৈরি সম্ভব নয়। কারণ বুদ্ধিমান শব্দটি সুসংজ্ঞাত নয়। সপ্তাহের সাতদিন একটি সেট গঠন করে, কিন্তু সপ্তাহের তিনদিন সেট গঠন করে না।

চিহ্নের ব্যবহার :

সাধারণত ইংরাজি বর্ণমালার বড়ো হাতের অক্ষর A, B, C, ... X, Y, Z ইত্যাদি দিয়ে সেট এবং a, b, c, ... x, y, z ইত্যাদি ছোটো হাতের অক্ষর দিয়ে সেটের অন্তর্গত উপাদানগুলি (elements) চিহ্নিত করা হয়।

a যদি কোনো সেট A-এর একটি উপাদান হয় তবে বক্তব্যটি $a \in A$ (a belongs to A রূপে পড়ি) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করি। আবার a যদি কোনো সেট A-এর কোনো উপাদান না হয়, তবে বক্তব্যটি $a \notin A$ (a does not belong to A রূপে পড়ি) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করি।

'$\in$' চিহ্নটি গ্রিক বর্ণমালার একটি বর্ণ এর নাম এপসাইলন। ইতালীয় গণিতবিদ Peano (1854-1932) প্রথম এই চিহ্ন ব্যবহার করেন।

সেটের প্রকাশ পদ্ধতি :

কোনো সেটকে দুভাবে প্রকাশ করা হয়।

(i) তালিকা পদ্ধতি (Roster or Tabular method) (ii) সেট নির্মাণ পদ্ধতি (Set builder method)

ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট :

তালিকা পদ্ধতি : ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট V দ্বারা সূচিত করলে, $V = \{a, e, i, o, u\}$; অর্থাৎ, এই পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়।

সেট নির্মাণ পদ্ধতি : $V = \{x \mid P(x)\}$, যেখানে P(x) হলো ইংরাজী বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহ। অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে যদি কোনো সেট A-এর প্রত্যেকটি উপাদান x, একটি সাধারণ ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য P(x) মেনে চলে তবে $A = \{x \mid P(x)\}$ বা, $A = \{x : P(x)\}$ আকারে A সেটটি প্রকাশ করা হয়।

পরস্পর ভিন্ন বলতে কী বুঝি: $A = \{2,2\}$ ও $A = \{2\}$ একই। এখানে 2 ও2 অভিন্ন, তাই 2-কে একবারই নেওয়া যাবে।

স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সেট :

তালিকা পদ্ধতি : স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহের সেট N দ্বারা সূচিত করলে $N = \{1, 2, 3, ...\}$

সেট নির্মাণ পদ্ধতি : $A = \{x \mid x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$

ইংরাজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ সমূহের সেট V হলে, $V = \{a, e, i, o, u\}$; এতে যেকোনো উপাদানকে আগে বা পরে লেখা যায়। যেমন $V = \{a, i, e, o, u\}$

সসীম সেট (Finite Set):

যে সেটের উপাদানসমূহের সংখ্যা সসীম তাকে সসীম সেট বলে। যেমন, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $V = \{a,e,i,o,u\}$ ইত্যাদি।

সেটের উপাদান সমূহের সংখ্যা :

একটি সসীম সেট A-এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements of the Set A) যদি n হয়, তবে n-কে A সেটের মাত্রা (Order of the Set A) বলে এবং এটি $|A|$ বা n (A) [Order of Set A রূপে পড়ি] দ্বারা সূচিত করা হয়। n কে বলা হয় A ক্ষেত্রের অঙ্কবাচক সংখ্যা (Cardinal number of A)।

$n(A) = 6$ এবং $n(V) = 5$

যদি, $X = \{1, 1, 1, 1\}$ একটি সেট হয়, তবে, $X = \{1\}$; সুতরাং, $n(x) = 1$

অসীম সেট (Infinite Set):

যে সেটের উপাদান সমূহের সংখ্যা অসীম তাকে অসীম সেট বলে।

যেমন, (i) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ একটি অসীম সেট।

(ii) পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{............ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ....\}$ একটি অসীম সেট।

একপদী সেট (Singleton Set):

যে সেটের উপাদান সংখ্যা এক তাকে একপদী সেট বলে। যেমন, $A = \{2\}$, একটি একপদী সেট।

শূন্য সেট (Null or Empty or Void Set):

একটি সেটের মধ্যে কোনো উপাদান না থাকলে ওই সেটটিকে শূন্য সেট বলে।

শূন্য সেটকে গ্রিক অক্ষর Φ বা $\{\ \}$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন, $\Phi = \{x : x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $2 < x < 3\}$

(i) শূন্য সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য।

(ii) শূন্য সেটটি সসীম সেট।

(iii) Φ সেটটি এবং $\{0\}$ সেটটি এক নয়।

(iv) Φ সেটটি এবং $\{\Phi\}$ সেটটি ভিন্ন। Φ দ্বারা শূন্য সেটটি সূচিত হয়। কিন্তু $\{\Phi\}$ সেটটি একটি একক সেট যার একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদান হলো Φ অর্থাৎ শূন্য সেট।

(v) শূন্য সেটটি অনন্য (unique)। সেইজন্য কখনও একটি শূন্য সেট লেখা হয় না। সর্বদা শূন্য সেটটি লেখা হয়।

সেট সমূহের সেট (Set of Sets):

একটি সেটের প্রত্যেকটি উপাদান সেট হলে ওই সেটকে সেটসমূহের সেট বলে।

যেমন $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$

এখানে একটি সেট অন্য একটি সেটের উপাদান হিসাবে নেওয়া হয়েছে। একটি দলকে একটি নতুন উপাদান হিসাবে ভাবা সেট তত্ত্বের অতি প্রয়োজনীয় ধারণা।যেমন ভারত একটি দেশ, এশিয়া একটি মহাদেশ ইত্যাদি।

সেটের সমতা (Equality of Sets) :

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$ সুতরাং $A = B$

$C = \{x \mid x$, 'steep' শব্দটির একটি বর্ণ$\} = \{s, t, e, p\}$

$D = \{x \mid x$, 'step' শব্দটির একটি বর্ণ$\} = \{s, t, e, p\}$

$\therefore\ C = D$

যদি দুটি সেট A ও B-তে একই উপাদান থাকে, তবে সেট দুটিকে সমান বলা হবে।

অতএব, $A = B$ হবে যদি $x \in A \rightarrow x \in B$ এবং $y \in B \rightarrow y \in A$ হয়।

অনেকসময় '$\rightarrow$' চিহ্নের বদলে '$\Rightarrow$' ব্যবহার করা হয়। '$\Rightarrow$' বা '$\rightarrow$' চিহ্ন দ্বারা যৌক্তিক অনুসৃতি (Logical Implication) বোঝানো হয়। ('$\Rightarrow$' চিহ্ন Implies that or means that রূপে পড়ি।)

- $n(A) = n(B)$ হলে, সর্বদা $A = B$ হবে না। যেমন $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

সুতরাং, $n(A) = n(B)$, কিন্তু $A \neq B$; কেননা $3 \in A \not\Rightarrow 3 \in B$ ('$\not\Rightarrow$' এই চিহ্ন does not imply that রূপে পড়ি)

- কিন্তু $A = B$ হলে, সর্বদা $n(A) = n(B)$ হবে।

উপসেট ও অধিসেট (subset and super set) :

যদি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$ দুটি সেট হয়, তবে A সেটটিকে B সেটের উপসেট বলা হবে এবং B সেটটিকে A সেটের অধিসেট বলা হবে।

যদি কোনো সেট A-এর প্রত্যেকটি উপাদান (element) অপর একটি সেট B-এর উপাদান হয়, তবে A সেটকে B সেটের উপসেট এবং B সেটকে A সেটের অধিসেট বলা হয়। চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয়, $A \subseteq B$; যদি $A = B$ না হয়, কিন্তু A, B -এর উপসেট হয়, তখন লেখা হয় $A \subset B$

$A \subseteq B$ বলতে বুঝি, $x \in A \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ বলতে বুঝি, $y \in B \Rightarrow y \in A$

যদি, $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়, তখন $A = B$ হবে।

{1, 2, 3} সেটের উপসেটগুলি হলো Φ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {1, 2, 3}.

Φ (শূন্য সেটটি) যেকোনো সেটের উপসেট।

যে-কোনো সসীম সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n; যেখানে n সসীম সেটটির উপাদানের সংখ্যা। এক্ষেত্রে A সেটের উপসেটগুলির সংখ্যা $2^3 = 8$; কেননা n(A)=3

A, B-এর প্রকৃত উপসেট হবে যদি এবং কেবল যদি A, B-এর উপসেট হয় কিন্তু $A \neq B$ হয়।

{1, 2, 3} এর প্রকৃত উপসেটগুলি হলো Φ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}

সুতরাং যে-কোনো সসীম সেটের n সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $2^n - 1$; যেমন এক্ষেত্রে প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $(2^3 - 1) = 7$

সমতুল্য সেট (Equivalent Set) :

দুটি সসীম সেট A ও B -কে সমতুল্য বলা হবে যদি উভয় সেটের উপাদান সংখ্যা একই হয়।

A = {1, 2, 3, 4} এবং B = {a, b, c, d}; n (A) = n (B) = 4; সুতরাং A ও B দুটি সমতুল্য সেট।

দুটি সসীম সেট সমান হলে তারা সমতুল্য হবে। কিন্তু দুটি সমতুল্য সেট সমান নাও হতে পারে।

সার্বিক সেট (universal Set) :

সেট সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যায় কোন কোন ক্ষেত্রে এমন একটি সেটের প্রয়োজন হয় যে, ওই সমস্যায় আলোচিত সব সেটগুলি এই সেটটির উপসেট হয়। এই নতুন সেটটিকে ওই সমস্যায় আলোচ্য সেটগুলির সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে। সার্বিক সেটকে সাধারণত U অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়। যেমন,

ধরি, এক অঙ্কের সংখ্যার তিনটি সেট A, B, C

এবং A = {0, 1}, B = {2, 3}, C = {1, 2, 3, 4}

সুতরাং, এক্ষেত্রে সার্বিক সেট ধরতে পারি U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

সার্বিক সেটটি অনন্য (unique) নয়।

দুটি সেটের অন্তর (Difference of two Sets) :

A = {1, 2, 3, 4, 5} এবং B = {2, 4, 6, 8, 10} হলে, A – B = {1, 3, 5}

A এবং B সেটদুটির অন্তর বলতে এমন সেট বোঝায় যার উপাদানগুলি A-তে আছে কিন্তু B-তে নেই এবং একে A – B দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$A - B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \notin B\}$

A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6, 8, 10} হলে,

B – A = {6, 8, 10}

A – Φ = A এবং Φ – A = Φ

$A - B \neq B - A$ যখন $A \neq B$

উপসেট গোষ্ঠী (Power Set) :

A একটি সেট; A সেটের সব উপসেটের সেটকে বলা হয় A-এর উপসেট গোষ্ঠী এবং এই উপসেট গোষ্ঠীকে P (A) দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন, $A = \{a, b, c\}$ হলে, উপসেট গোষ্ঠী হবে

$$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

কোন সসীম সেট A-র উপাদান সংখ্যা n হলে, A সেটের উপসেট গোষ্ঠী P (A)-এর উপাদান সংখ্যা হবে 2^n

পূরক সেট (Complement of a Set) :

কোনো সার্বিক সেট U-এর সাপেক্ষে একটি সেট A -এর পূরক সেটকে A^c দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং, পূরক সেট বলতে বুঝি $A^c = U - A = \{x \mid x \in U$ এবং $x \notin A\}$। যেমন, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{0, 1\}$ হলে, তবে A -এর পুরক সেট হবে $A^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; আবার যদি $U = \{x \mid x$ বাস্তব সংখ্যা$\}$, $A = \{x \mid x$ মূলদ সংখ্যা$\}$ হয়, তবে $A^c = U - A = \{x \mid x$ অমূলদ সংখ্যা$\}$ হবে।

দুটি সেটের সংযোগ (Union of two Sets) :

A ও B দুটি প্রদত্ত সেট। A ও B সেটের সংযোগকে $A \cup B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এটি বলতে বুঝি, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ অথবা $x \in B\}$ যেমন,

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $A \cup \Phi = A$

দুটি সেটের ছেদ (Intersection of two Sets) :

দুটি সেট A এবং B-এর ছেদকে $A \cap B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এটি বলতে বুঝি, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \in B\}$

যেমন, (i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ হলে, $A \cap B = \{2, 3\}$ হবে।

(ii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ হলে, $A \cap B = \Phi$

(iii) $A \cap \Phi = \Phi$

শূন্যছেদী সেটসমূহ (Disjoint Sets) :

দুটি প্রদত্ত সেট A ও B-এর মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে ওই সেট দুটিকে শূন্যছেদী সেটসমূহ বলে। অর্থাৎ $A \cap B = \Phi$ (যেখানে Φ হলো শূন্য সেট) হলে, A ও B সেট দুটিকে শূন্যছেদী সেটসমূহ বলা হয়।

যেমন, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ হলে,

$A \cap B = \Phi$; সুতরাং, A ও B সেট দুটি শূন্যছেদী সেটসমূহ।

দুটি সেটের প্রতিসম অন্তর (Symmetric difference of two sets) :

দুটি সেট A ও B-এর প্রতিসম অন্তর $A \Delta B$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

যেমন, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, e, f\}$,

$A - B = \{a, c\}$, $B - A = \{e, f\}$,

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

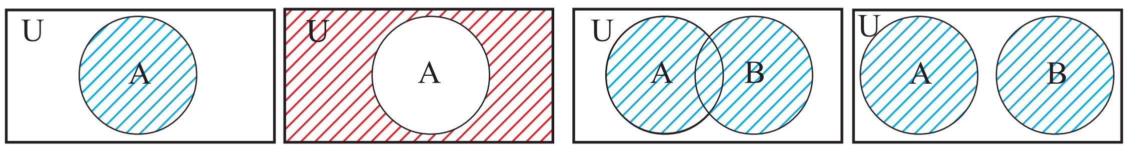
ভেন চিত্রসমূহ (Venn diagrams) :

যে চিত্রসমূহের মাধ্যমে সেট প্রক্রিয়া সমূহ উপস্থাপিত করা যায় তাকে ভেন চিত্র বলে। জন ভেন (John Venn) সেটের প্রক্রিয়াসমূহের ধারণা দিতে প্রথম এই ধরনের চিত্র ব্যবহার করেন।

ভেন চিত্রে সার্বিক সেটকে সাধারণত একটি আয়তক্ষেত্র দিয়ে দেখানো হয় এবং সার্বিক সেটের উপসেটসমূহ আয়তক্ষেত্রের ভিতর একটি বক্ররেখা দ্বারা বদ্ধক্ষেত্র বা বৃত্তকার ক্ষেত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়। প্রতিটি চিত্রেই রেখাঙ্কিত করা বা ভরাট করা অংশটির মাধ্যমে ওই চিত্রের নীচে লেখা সেটটিকে বোঝানো হয়।

1

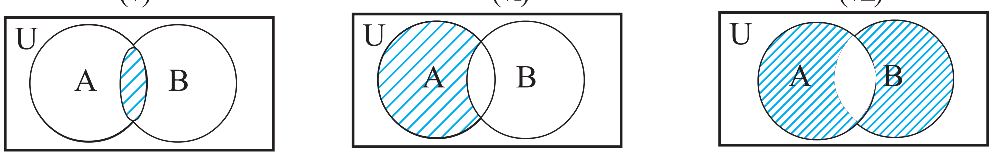
(i) (ii) (iii) (iv)



A | $U - A = A^C$ | $A \cup B$ | $A \cup B$

2

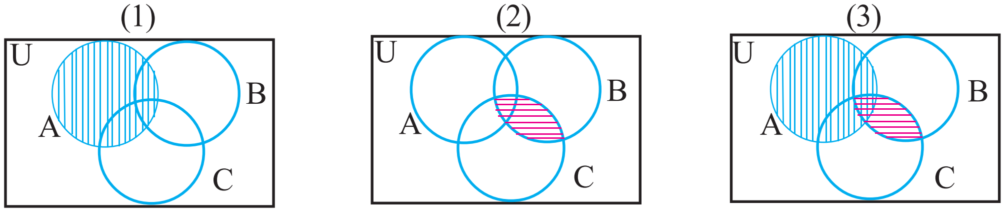
(v) (vi) (vii)



$A \cap B$ | $A - B$ | $A \Delta B$

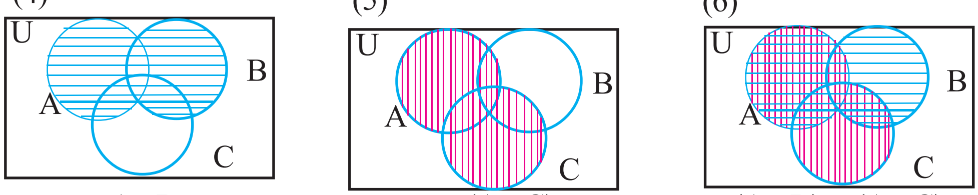
3 ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাই যে, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(1) (2) (3)



A | $B \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$

(4) (5) (6)



$A \cup B$ | $(A \cup C)$ | $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

ভেনচিত্রের সাহায্যে পেলাম, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4 **ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাই যে,**

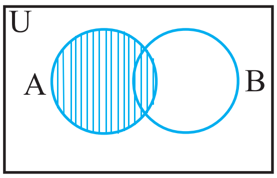
(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

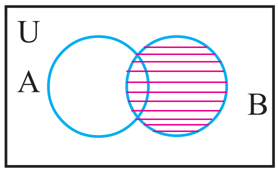
(c) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ [নিজে করি]

5 **ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাই যে,**

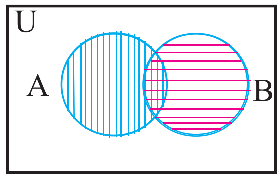
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



A



B



$A \cup B$

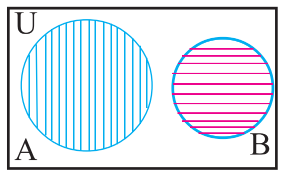
ধরি, A সেটের উপাদান সংখ্যা x অর্থাৎ $n(A) = x$, B সেটের উপাদান সংখ্যা y অর্থাৎ $n(B) = y$ এবং $A \cap B$ সেটের উপাদান সংখ্যা z অর্থাৎ $n(A \cap B) = z$

সুতরাং, $n(A \cup B) = x + y - z$

$\therefore \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

যদি $A \cap B$ সেটের পদসংখ্যা শূন্য হয়,

অর্থাৎ $n(A \cap B) = 0$ হলে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



6 **একটি অঞ্চলে সমীক্ষা করে দেখা গেছে যে 70 জন ইংরাজি সংবাদপত্র, 73 জন বাংলা সংবাদপত্র এবং 64 জন উভয় প্রকার সংবাদপত্র পড়েন। যদি 63 জন কোনো প্রকার সংবাদপত্র না পড়েন তবে মোট কতজনের মধ্যে সমীক্ষাটি চালানো হয়েছিল হিসাব করে দেখি।**

মনে করি, ইংরাজি সংবাদপত্র পড়েন এরকম লোকসংখ্যার সেট = E এবং বাংলা সংবাদপত্র পড়েন এরকম লোকসংখ্যার সেট = B

এখন, প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $n(E) = 70$, $n(B) = 73$ এবং $n(E \cap B) = 64$

সুতরাং, $n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ [A ও B দুটি সেট হলে, আমরা জানি, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$]

$= 70 + 73 - 64 = 79$

$\therefore$ 79 জন দুই রকম সংবাদপত্রের মধ্যে একরকম এবং দুইরকমই সংবাদপত্র পড়েন।

আবার, কোনো প্রকার সংবাদপত্র পড়েন না এমন লোকসংখ্যা = $n(E \cup B)^C = 63$

$\therefore$ নির্ণীত মোট লোকসংখ্যা $(79 + 63)$ জন = 142 জন।

$\therefore$ ওই সমীক্ষাটি চালানো হয়েছিল 142 জন লোকের মধ্যে।

23 সম্ভাবনা তত্ত্ব (PROBABILITY THEORY)

আমরা প্রায়ই বলি আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা আছে। আজ খেলায় ভারতের জেতার সম্ভাবনা আছে ইত্যাদি।

সম্ভাবনা কথাটা তখনই ব্যবহার হয়, যখন কোনো প্রকার অনিশ্চয়তা ঘটনার সঙ্গে জড়িয়ে থাকে। আমরা এই সম্ভাবনার ধারণা সুনির্দিষ্ট ভাবে বোঝার চেষ্টা করব।

সম্ভাবনা (Probability) শব্দটি ঘটনার (Event) সঙ্গে জড়িত এবং ঘটনা শব্দটি পরীক্ষার (Experiment) সঙ্গে জড়িত।

সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) :

আমরা সম্ভাবনা তত্ত্বে যে ধরনের পরীক্ষার বিষয় আলোচনা করবো সেই ধরনের পরীক্ষাকে **সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment)** বলা হয়।

আমরা এরকম একটি সমসম্ভব পরীক্ষার উদাহরণ দিই —

আমি একটা ছক্কা ফেলছি। এটি একটি সমসম্ভব পরীক্ষা কেননা—

(i) কী কী ফল হতে পারে তা আমাদের জানা ।

(ii) কিন্তু এখন কি হবে তা অজানা ।

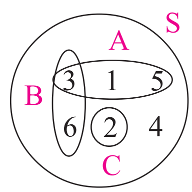
(iii) পরীক্ষাটি যতবার ইচ্ছা করা সম্ভব।

আমরা জানি একটি ছক্কা ফেললে 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6 এর কেউ না কেউ পড়বে। কিন্তু এখন কী পড়বে তা অজানা।

নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশ (Sample Space or Event Space) :

কোনো একটি সমসম্ভব পরীক্ষা করলে যা যা ফল **(Outcome)** হতে পারে তাদের সেটকে **নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশ (Sample Space or Event Space)** বলা হয় এবং ফলগুলিকে নমুনাবিন্দু **(Sample Points or event points)** বলা হয়।

এই সমসম্ভব পরীক্ষার জন্য যা যা **ঘটনা** ঘটবে তারা আসলে এই নমুনাদেশ বা ঘটনা দেশের উপসেট। যেমন আমরা যদি একটি ছক্কা ফেলি তাহলে নমুনা দেশটি হবে



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এখানে 1, 2, 3, 4, 5 ও 6 এরা এক একটি ফল (Outcome) এবং $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{2\}$ প্রভৃতি S এর উপসেটগুলি এই সমসম্ভব পরীক্ষার এক একটি ঘটনা(Event)। এই ঘটনাগুলির সম্ভাবনা আমরা বার করব।

যদি ছক্কাটি সুষম বা নিখুঁত বা সুনির্মিত (Fair) বা পক্ষপাতহীন (Unbiased) হয় এবং আমরা ওই ছক্কাটির ক্ষেত্রে $A = \{1, 3, 5\}$ এই ঘটনা (Event) ঘটার সম্ভাবনাকে P(A) চিহ্ন দ্বারা লিখি এবং পড়ি 'A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা'। এখানে আমরা পাবো, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

আবার যদি $B = \{3, 6\}$ বা $C = \{2\}$ ইত্যাদি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বার করি তাহলে পাবো,

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ এবং $P(C) = \frac{1}{6}$

এখানে দেখছি, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ এবং $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ নেওয়া হয়েছে। যেখানে n(A), n(B), n(C) এবং n(S) যথাক্রমে A, B, C ও S সেটের বিন্দুর সংখ্যা বোঝাচ্ছে।

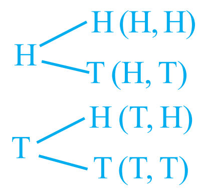
সম্ভাবনার পুরাতন সংজ্ঞা (Classical definition of Probability) বা প্রাথমিক সংজ্ঞা (A Priori definition of Probability) বা গাণিতিক সংজ্ঞা (Mathematical definition of Probability)

E একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random experiment) এবং এই পরীক্ষার ফলে নমুনাদেশ বা ঘটনাদেশটি (Sample space or Event space) হল S, এখানে S সেটের ফলের (Outcome) সংখ্যা সসীম এবং ফলগুলি সমভাবে সম্ভাব্য (equally likely or mutually symmetrical)। যদি A একটি ঘটনা (Event) হয়, অর্থাৎ A, S এর একটি উপসেট হয় এবং A সেটে বিন্দুর সংখ্যা n(A) ও S সেটে বিন্দুর সংখ্যা n(S) হয়, তবে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P(A) দ্বারা চিহ্নিত করা হবে এবং $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ হবে।

1 কোনো নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন মুদ্রা পরপর দুবার ফেলা হলে দুবারই হেড পড়ার সম্ভাবনা কত?

হেড ও টেল পড়াকে যথাক্রমে H ও T দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হল S = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T) }



এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটি হল A = {(H, H)}

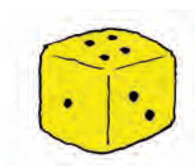
এখানে দেখছি n (A) = 1 এবং n (S) = 4

∴ প্রাথমিক সংজ্ঞা অনুযায়ী পাই,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

2 একটি নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন ছক্কা দুবার চালা হলো এবং উভয়ক্ষেত্রে ছক্কার উপরদিকে যে সংখ্যাটি উঠল তার পার্থক্য লক্ষ করা হলো। এই পার্থক্য 3 হবার সম্ভাবনা কত?

এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হলো,



S = {(1,1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2),.................................(2,6),
(3,1), (3,2),.................................(3,6),
....
(6,1), (6,2),................................(6,6)}

এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটা হলো,

A = {(1,4), (2,5), (3,6),(4,1), (5,2), (6,3)}

এখানে দেখছি n(A) = 6 এবং n(S) = 36

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3 একটি নিখুঁত বা পক্ষপাতহীন মুদ্রা 3 বার ফেলা হলে, ঠিক দুটি হেড (H) ও একটি টেল (T) পড়ার সম্ভাবনা কত?

এক্ষেত্রে নমুনাদেশটি হলো,

S = {(T, T, T), (T, H, H), ☐, ☐, ☐, ☐, ☐, (H, H, H)}

এবং আমরা যে ঘটনার সম্ভাবনা বের করতে চাইছি সেটা হলো,

A = {(H, H, T), (H, T, H), ☐} $\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\square}{\square}$

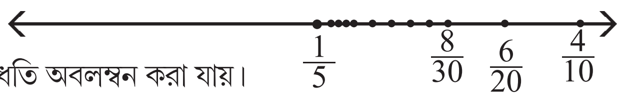
আগের আলোচনায় আমরা কোনো সমসম্ভব পরীক্ষায় একটি একবিন্দুযুক্ত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা কী হবে তা ধরে নিচ্ছিলাম। আমরা যখন বলছি একটি সুষম (Fair) ছক্কা ফেলছি তখন ওই সুষম কথার মাধ্যমে আমরা ধরে নিচ্ছি {1}, {2}, {3}, {4}, {5} ও {6} এই একবিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলির প্রত্যেকটির ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ অর্থাৎ $P(\{1\})=\frac{1}{6}, P(\{2\})=\frac{1}{6}, \ldots\ldots, P(\{6\})=\frac{1}{6}$ এবং এর সাহায্যেই আমরা ওই পরীক্ষায় অন্য ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বের করছিলাম।

অর্থাৎ $P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

এখন আমরা নিখুঁত বা পক্ষপাতযুক্ত নয় এমন ছক্কার একবিন্দু যুক্ত ঘটনাগুলির ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চেষ্টা করব। আমরা ছক্কা ফেলার পরীক্ষাটি ওই নিখুঁত নয় ছক্কাটি নিয়ে বার বার করে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চেষ্টা করব। এই পদ্ধতি পরিসংখ্যাভিত্তিক ব্যাখ্যা (frequency interpretation) নামে পরিচিত।

এই পক্ষপাতযুক্ত ছক্কাটির ক্ষেত্রে A = {3} এই একবিন্দুযুক্ত ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চাই। প্রথমে আমি ওই ছক্কাটি 10 বার ফেললাম এবং {3}, 4 বার পড়ল এবং পরে আবার ছক্কাটি 20 বার ফেললাম এবং {3}, 6 বার পড়ল। এইভাবে আমি ছক্কাটি 30 বার ফেললাম এবং {3}, 8 বার পড়ল এইভাবে আমি 40 বার, 50 বার, 60 বার এই ছক্কাটি ফেলতে থাকলাম এবং {3} কবার পড়ে গুনলাম এবং প্রতিবারই আমি একটি করে ভগ্নাংশ সংখ্যা পেতে থাকলাম তারা হলো যথাক্রমে : $\frac{4}{10}, \frac{6}{20}, \frac{8}{30}, \ldots$

আমি যদি এই সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় স্থাপন করি তাহলে দেখব ওই ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলি ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে জড়ো হচ্ছে। ওই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকেই A = {3} ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ধরা হয়। সম্ভাবনার এই সংজ্ঞাটিকে পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞা (Frequency definition) বলা হয়। এক্ষেত্রে হয়তো A = {3} ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$ হবে।



সুষম ছক্কার ক্ষেত্রেও একই পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়।

পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞা (Frequency definition):

ধরি, একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) N বার করা হলো এবং এই পরীক্ষার সঙ্গে যুক্ত একটি একবিন্দুযুক্ত ঘটনা A ওই N বারের ভেতর N (A) বার ঘটলে তখন একটি ভগ্নাংশ সংখ্যা $\frac{N(A)}{N}$ পাব। N এর বিভিন্ন বড়ো বড়ো মানের জন্য এইরকম যে ভগ্নাংশগুলি পাব তারা ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে জড়ো হয় [জড়ো হবার এই বিশেষ ধর্মটিকে পরিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা (statistical regularity) বলা হয়] এবং ওই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বলা হয় ও P (A) চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, যখন N খুব খুব বড়ো সংখ্যা।

একটি পক্ষপাতযুক্ত ছক্কা 10000 বার ফেলা হলো এবং এক বিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলি কবার করে পড়েছে তা একটি ছকে লেখা হলো : (এখানে N = 10000)

একবিন্দু যুক্ত ঘটনা	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
পরিসংখ্যা অর্থাৎ N(A)	1300	1000	2000	3500	1700	500

পরিসংখ্যা ভিত্তিক সংজ্ঞা অনুযায়ী একবিন্দুযুক্ত ঘটনাগুলির ঘটার সম্ভাবনা পাব:

$$P(\{1\}) = \frac{1300}{10000} = \frac{13}{100} \qquad P(\{4\}) = \frac{3500}{10000} = \frac{7}{20}$$

$$P(\{2\}) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} \qquad P(\{5\}) = \frac{1700}{10000} = \frac{17}{100}$$

$$P(\{3\}) = \frac{2000}{10000} = \frac{1}{5} \qquad P(\{6\}) = \frac{500}{10000} = \frac{1}{20}$$

দেখছি: $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$

$$= \frac{13}{100}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{7}{20}+\frac{17}{100}+\frac{1}{20} = 1$$

যদি এইক্ষেত্রে $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$ ইত্যাদি ঘটনার অর্থাৎ ছক্কাটি ফেললে বিজোড় পড়বে বা 3-এর গুণিতক পড়বে তার সম্ভাবনা বার করতে হয়, তাহলে বিজোড় পড়ার সম্ভাবনা এবং 3-এর গুণিতক পড়ার সম্ভাবনা পাব:

$$P(\{1,3,5\}) = P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\}) = \frac{13}{100}+\frac{1}{5}+\frac{17}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{3,6\}) = P(\{3\})+P(\{6\}) = \frac{1}{5}+\frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

যদি একটি সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment) করা হয় এবং সেই পরীক্ষার জন্য নমুনা দেশ বা ঘটনা দেশটি (Sample Space or Event Space) S হয় তবে আমরা কয়েকটি নিয়ম পাব।

সেগুলি আমরা এখানে বিবৃত করছি: (A ও B এই পরীক্ষার সঙ্গে যুক্ত দুটি ঘটনা নিলাম। অর্থাৎ $A \subseteq S$ এবং $B \subseteq S$ এবং ϕ শূন্য সেট ও A^c কে A-এর পূরক সেট ধরলাম।)

(i) $0 \le P(A) \le 1$ **(ii)** $P(S) = 1$ **(iii)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ যদি $A \cap B = \phi$ হয়।

(iv) $P(\phi) = 0$ **(v)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(vi)** $P(A^c) = 1 - P(A)$

আগের উদাহরণ এর সাহায্যে নিয়মগুলি যাচাই করি:

ধরি, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{2, 4\}$

দেখছি, (i) $0 \le P(A) \le 1$, $0 \le P(B) \le 1$, $0 \le P(C) \le 1$

$(\because 0 \le \frac{1}{2} \le 1,\ 0 \le \frac{1}{4} \le 1,\ 0 \le \frac{9}{20} \le 1)$

(ii) $P(S) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

(iii) $P(A \cup C) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{19}{20}$ এবং $P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \frac{19}{20}$

$(\because A \cap C = \phi)$ (iv), (v), (vi) নিজে করি।

ল্যাপলাসের (Laplace) দেওয়া সম্ভাবনার প্রাচীন বা গাণিতিক সংজ্ঞা (Classical or Mathematical definition of Probability) ও ফন্ মিসেস (Von Mises) -এর দেওয়া পরিসংখ্যাভিত্তিক সংজ্ঞার (Frequency definition of Probability) কোনোটিই ত্রুটিমুক্ত নয়। তাই পরে অঙ্কবিদ কলমোগরভ (Kolmogoroff) সম্ভাবনার স্বীকারভিত্তিক সংজ্ঞা (Axiomatic definition of Probability) দিয়ে সম্ভাবনা তত্ত্বকে ত্রুটিমুক্ত করেন। বিজ্ঞানের প্রায় সব শাখায় ও অন্যান্য শাখাতেও সম্ভাবনা তত্ত্বের গভীর প্রয়োগ দেখা যায়। আমরা পরে স্বীকারভিত্তিক সংজ্ঞার সাহায্যে সম্ভাবনা তত্ত্ব পড়ব।

মিলিয়ে দেখি (LET'S MATCH)

নিজে করি

অধ্যায় - 1

20. $\frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}$ **21.** $\frac{7}{20}, \frac{11}{30}, \frac{23}{60}$ **22.** $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{11}{24}$ **33.** (ii) 11

34. 0.5, 0.3, 1.75, 0.32, 0.65

37. (ii) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো (iv) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো (v) সসীম দশমিক সংখ্যা পাবো না

38. (iii) 0.2916, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা (iv) 0.136, সসীম দশমিক সংখ্যা

40. 5.875, সসীম দশমিক সংখ্যা; 2.6, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা; 0.45, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা; 1.285714, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

41. মুলদ সংখ্যা, 0.5 সসীম দশমিক সংখ্যা এবং 0.49 আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

অধ্যায় - 2

4. সূচক এবং নিধান **14.** (iii) 63 (iv) $\frac{1089}{64}$ (vi) 343 (vii) 256 (viii) 1296 **20.** 3^{200}
21. (ii) $\frac{1}{50}$ **23.** 32 **25.** $\frac{1}{4}$ **26.** 3

অধ্যায় - 3

10. y

অধ্যায় - 4

5. 2 **9.** $5\sqrt{5}$

নিজে করি : **4.** (i) 10 একক (ii) 11 একক (iii) 5 একক (iv) 7 একক (v) 8 একক (vi) 14 একক (vii) $5\sqrt{5}$ একক (viii) 5 একক (ix) 2 একক (x) $4\sqrt{2}$ একক

অধ্যায় - 5

5. (d) সাধারন সমাধানযোগ্য, একটি মাত্র সমাধান $x = -2, y = -3$ (e) সাধারন সমাধানযোগ্য নয়, পরস্পর সমান্তরাল (f) সাধারণ সমাধানযোগ্য, অসংখ্য সমাধান **6.** (c) পরস্পর সমান্তরাল **26.** 29

অধ্যায় - 6

6. $\angle QRS = 75^\circ$ **9.** $\angle ABO = 50^\circ, \angle ODC = 50^\circ, \angle ACB = 50^\circ, \angle CBD = 45^\circ$ **11.** 8 সেমি. **13.** 5 সেমি.

নিজে করি : 6.1 : **1.** $\angle A = \angle C = 120^\circ, \angle D = 60^\circ$ **2.** $\angle PRQ = 55^\circ$ **3.** $\angle APD = 90^\circ$
4. (i) $x = 40, y = 130$; (ii) $x = 50, y = 40$

অধ্যায় - 7

নিজে করি : 7.1 : (i) $x^5 + 3x^3 - 7x^2 + x + 7$ (ii) $x^5 + x^2 - 1$ (iii) $x^5 - x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 4$ (iv) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 8$ (v) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 8x^2 + x + 9$ (vi) $x^4 - x^2 - 7y^3 + y - 8$ (vii) $x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 6x + 6$ (viii) $x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1$

15. 3; 3 ও 16; 7 ও 6; f (y), g (v) ও t(x)-এর মাত্রাগুলি যথাক্রমে 3, 7 ও 6

20. অসংজ্ঞাত **21.** (i) 4 (ii) 3 (iii) 2 **22.** (vi) বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 0. **31.** –127

36. 2, –1, 0 **47.** –2 **48.** $-3\frac{1}{2}$ **50.** f (2) = 0 **52.** – 8 **57.** 5

অধ্যায় - 8

7. (x–1) (x+3) (x–2); (x–1) (x^2+2x+1)

10. (2a–1) ($4a^2$+2a+3); 1, 2a–1, $4a^2$+2a+3, (2a–1) ($4a^2$+2a+3)

অধ্যায় - 9

প্রয়োগ : 2. PQ=3 সেমি. , ∠APQ=60°

অধ্যায় - 10

1.7.

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি	বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ/ক্ষতি
400 টাকা	475 টাকা	75 টা. লাভ	$18\frac{3}{4}$ লাভ	$15\frac{15}{19}$ লাভ
125 টাকা	150 টাকা	25 টা. লাভ	20 লাভ	$16\frac{2}{3}$ লাভ
750 টাকা	700 টাকা	50 টা. ক্ষতি	$6\frac{2}{3}$ ক্ষতি	$7\frac{1}{7}$ ক্ষতি

3. (i) 75 টাকা (ii) সরল সম্পর্ক (iii) 32 টাকা (iv) 100 টাকা (v) 72 টাকা (vi) 20

4. (i) সরল সম্পর্ক (ii) 30 টাকা (iii) 60 টাকা (iv) 40 টাকা (v) $33\frac{1}{3}$

18.

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ধার্যমূল্য	ধার্যমূল্যের উপর ছাড়	শতকরা লাভ/ক্ষতি
140 টাকা	144 টাকা	160 টাকা	10%	$2\frac{6}{7}$ লাভ
260 টাকা	285 টাকা	300 টাকা	5 %	$9\frac{8}{13}$ লাভ
350 টাকা	340 টাকা	400 টাকা	15 %	$2\frac{6}{7}$ ক্ষতি
420 টাকা	480 টাকা১	500 টাকা	4 %	$14\frac{2}{7}$ লাভ
600 টাকা	630 টাকা	700 টাকা	10 %	5 লাভ

21. 2592 টাকা, 35.2%

অধ্যায় - 11

6.

মাসিকভাড়া (টাকা)	ট্যালিমার্ক	পরিসংখ্যা (দোকানের সংখ্যা)
305 — 385	~~||||~~ |	6
385 — 445	||||	4
445 — 525	~~||||~~ |	6
525 — 605	|||	3
605 — 685	~~||||~~ |	6
685 — 765	~~||||~~ ||	7
765 — 845	~~||||~~ |||	8
মোট পরিসংখ্যা		40

নিজে করি : 11.1 : (i) 12 (ii) 23 (iii) 20

অধ্যায় - 15

নিজে করি : 15.1 (i) 66 সেমি. **(ii)** 57.4 সেমি. **(iii)** 39.6 সেমি. **(iv)** 61 সেমি. **(v)** 63 সেমি.

নিজে লিখি : **8.** 13 সেমি.

নিজে করি : 15.2 **1.** 80 মিটার **2.** 2232 টাকা **3.** (i) 60 সেমি., 20 সেমি. (ii) 36 সেমি., 12 সেমি. (iii) 39 সেমি., 13 সেমি. (iv) 66 সেমি., 22 সেমি. (v) 30 সেমি., 10 সেমি. (vi) 45 সেমি., 15 সেমি.

17. $4\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **24.** 84 বর্গ মিটার

নিজে করি : 15.3 **1.** (i) 30 বর্গ সেমি. (ii) $9\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. (iii) $8\sqrt{5}$ বর্গ সেমি. (iv) $(30+20\sqrt{3})$ বর্গ সেমি. **2.** 55.25 সেমি. **3.** 72 বর্গ সেমি. **4.** 56 মিটার **5.** 16.9

34. 105 বর্গ সেমি. **38.** 96 বর্গ সেমি.

অধ্যায় - 16

2. 44 সেমি., $62\frac{6}{7}$ সেমি. **3.** $94\frac{2}{7}$ মিটার, $100\frac{4}{7}$ মিটার **8.** (b) 84 মিটার **10.** 250 বার **12.** 3.5 মিটার

অধ্যায় - 17

নিজে করি : 17.1 **1.** ভিতর **2.** বাহিরে **3.** কোনো বাহুর উপর কোনো বিন্দুতে **17.2** **1.** 5 সেমি. **2.** 20 সেমি.

অধ্যায় - 18

3. 1386 বর্গ সেমি. **5.** 7 ডেসিমি. **7.** 154 বর্গ মিটার **9.** 2464 বর্গ সেমি. **11.** 15400 বর্গ মিটার **24.** 693 বর্গ মিটার **25.** (iii) 66 সেমি., 108 সেমি., 693 বর্গ সেমি. **27.** 3.78 বর্গ মিটার **30.** (i) 74.29 মিটার (প্রায়), 95.54 বর্গ মিটার (প্রায়) (ii) 62.61 সেমি. (প্রায়), 126 বর্গ সেমি.

অধ্যায় - 19

3. (18, 8) **6.** (3, 2)

অধ্যায় - 21

16. 5

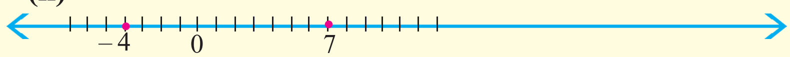
মিলিয়ে দেখি (Let's Match)

কষে দেখি - 1.1

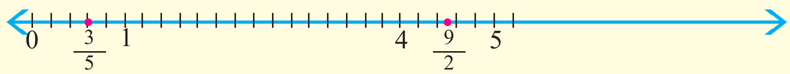
1. যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ সেই সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে। $\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{11}{13}$ (অন্য চারটিও নিতে পারি)

2. হ্যাঁ, $0 = \frac{0}{1}$

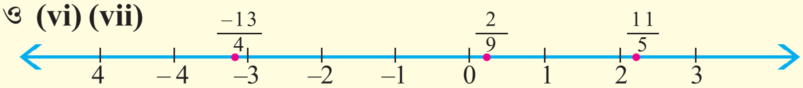
3. (i) ও (ii)



(iii) ও (iv)



(v) ও (vi) (vii)



4. (i) $\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ (iv) $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{24}$

   (v) $\frac{(-2)+(-1)}{2} = -\frac{9}{2}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

5. $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$, $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

6. $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $4 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

7. $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{9}{40}$, $\frac{\frac{1}{5}+\frac{9}{40}}{2} = \frac{17}{80}$, $\frac{\frac{9}{40}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{19}{80}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

8. (i) T (ii) F 9. মূলদ সংখ্যা

কষে দেখি - 1.2

1. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) সত্য (iv) মিথ্যা (v) সত্য (vi) মিথ্যা

2. যে সব বাস্তব সংখ্যাদের $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় না, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সেই সব বাস্তবসংখ্যাদের অমূলদ সংখ্যা বলে।
   $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, e, π (অন্য উত্তরও সম্ভব)

3. মূলদ— (i), (ii), (v), (vi), অমূলদ— (iii), (iv), (vii), (viii) , (ix)

কষে দেখি 1.3

1. **সসীম** (i), (iv) **অসীম** (ii), (iii), (v)

2. **(i)** $0.\dot{0}\dot{9}$, **(ii)** 0.625, **(iii)** $0.\dot{2}3076\dot{9}$ **(iv)** 3.125 **(v)** $0.\dot{1}\dot{8}$ **(vi)** 0.28

3. **(i)** $\frac{1}{3}$ **(ii)** $\frac{4}{3}$ **(iii)** $\frac{49}{90}$ **(iv)** $\frac{34}{99}$ **(v)** $\frac{311}{99}$ **(vi)** $\frac{8}{45}$ **(vii)** $\frac{43}{90}$ **(viii)** $\frac{6}{11}$ **(ix)** $\frac{1}{999}$ **(x)** $\frac{163}{999}$

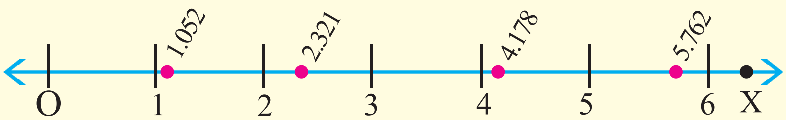
4. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব)

5. 0.80 800 8000 80000 8......, 0.85 855 8555 85555 8 ......, (অন্য উত্তরও সম্ভব)
0. 91 911 9111 91111 9 ....,

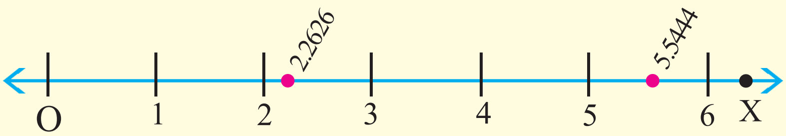
6. 0.121221222122221 ...., 0.373773777377779 ....., (অন্য উত্তরও সম্ভব)

7. মূলদ → (ii), (iii) অমূলদ → (i), (iv)

8.



9.



10. 0.22, 0.23 (অন্য উত্তরও সম্ভব) **11.** 0.2, 0.21 (অন্য উত্তরও সম্ভব)

14. **(i)** (c) **(ii)** (d) **(iii)** (d) **(iv)** (c) **(v)** (c) **15.** **(i)** $(\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = 0$ **(ii)** $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

(iii) $\dfrac{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{2} = \dfrac{3}{14}$

(iv) 0.151551555155551 .....

(v) $\frac{37}{3000}$ (15-এর সব অঙ্কগুলোর অন্য উত্তরও সম্ভব) **(vi)** (d)

কষে দেখি— 2

1. **(i)** $2^{-\frac{9}{2}}$ **(ii)** 10 **(iii)** 2

2. **(i)** $\frac{1}{4}$ **(ii)** x **(iii)** 2 **(iv)** $\sqrt[3]{abc}$ **(v)** 8 **(vi)** 8 **(vii)** 1

3. **(i)** $10^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{2}}$ **(ii)** $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{4}}$ **(iii)** $5^{24}, 2^{60}, 4^{36}, 3^{48}$

9. **(i)** $x = 1\frac{1}{2}$ **(ii)** (a) x = 1 **(iii)** x = 3 **(iv)** $x = \frac{2}{9}$ **(v)** x = **(vi)** x = 1
(vii) x = 4

10. **(i)** (b) 3 **(ii)** (c) 4 **(iii)** (b) $\frac{9}{2}$ **(iv)** (c) 49 **(v)** (d) 27

11. **(i)** 4:3 **(ii)** x = 3 **(iii)** x = 7 **(iv)** $\frac{1}{2}$ **(v)** 3^{3^3} বৃহত্তর [$\because 3^{27} > 3^9$]

কষে দেখি 3.1

1.

বিন্দু	(3, –2),	(–4, 2)	(4, 5)	(–5, –5)	(–2, 7)	(7, –7)	(0, 9)	(0, –9)
x-অক্ষের উপরে/নীচে	নীচে	উপরে	উপরে	নীচে	উপরে	নীচে	উপরে	নীচে

2.

বিন্দু	(5, –7),	(10, 10)	(–8, –4)	(4, 3)	(–6, 2)	(11, –3)	(4, 0)	(–4, 0)
y-অক্ষের ডান /বাম	ডান	ডান	বাম	ডান	বাম	ডান	ডান	বাম

3. তৃতীয়পাদে, y-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে, x-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে, তৃতীয়পাদে, চতুর্থপাদে, প্রথমপাদে, y-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে, x-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে। **7.** (7, 5)

কষে দেখি — 3.2

1. **(i)** x-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে **(ii)** y-অক্ষের উপর ধনাত্মক দিকে **(iii)** x-অক্ষের উপর ঋণাত্মকদিকে **(iv)** y-অক্ষের উপর ঋণাত্মক দিকে **(v)** প্রথম পাদে **(vi)** দ্বিতীয় পাদে **(vii)** চতুর্থপাদে **(viii)** তৃতীয় পাদে

3. **(i)** $3x + 2y = 55$, $4x + 3y = 75$

(ii) $x + y = 80$, $3(x - y) - x = 20$ [ধরি বড়ো সংখ্যাটি x এবং ছোট সংখ্যাটি y]

(iii) $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$, $\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$

(iv) $x = 2y$, $(10x + y) - (10y + x) = 27$

4. **(i)** $x - y = 26$ **(ii)** $x + y = 15$ **(iii)** $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$

(iv) $2 \times (x + y) = 80$ **(v)** $5x = 8y$

6. **(i)** $x - y = 16$, $x + 8 = 2(y + 8)$
রজতের বয়স 8 বছর এবং রজতের মামার বয়স 24 বছর

(ii) $x + y = 15$, $x - y = 3$
সংখ্যা দুটি 9 ও 6

(iii) $\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x-4}{y-2} = \frac{1}{2}$
ভগ্নাংশটি $\frac{5}{4}$

(iv) $2(x + y) = 60$, $(x + 2).(y - 2) = xy - 24$
দৈর্ঘ্য 20 মিটার, প্রস্থ 10 মিটার

(v) $16(x + y) = 96$, $8(x - y) = 16$
নৌকার বেগ 4 কিমি./ঘণ্টা
স্রোতের বেগ 2 কিমি./ঘণ্টা

7. **(i)** (0,5) **(ii)** (–2, 5) **(iii)** (7, 5) **(iv)** (7, 1)

8. **(i)** $x = 1$, $y = 1$ **(ii)** $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = 1$, $y = 1$ **(iv)** $x = 3$, $y = 2$ (v) $x = 1$, $y = 2$

9. $x=2, y=3$ **10.** 24 বর্গ একক **11.** 6 বর্গ একক

12. $x = -2$ -এর জন্য $y = 0$ এবং $x = 7$ -এর জন্য $y = 3$ হবে। **13.** $x = 3$

14. **(i)** (b) **(ii)** (a) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (d)

15. **(i)** (6, 0) **(ii)** (0, –4) **(iii)** 6 বর্গ একক **(iv)** x-অক্ষ থেকে দূরত্ব 8 একক এবং y-অক্ষ থেকে দূরত্ব 6 একক **(v)** 45^0

কষে দেখি— 4

1. **(i)** 25 একক **(ii)** 5 একক **(iii)** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

2. **(i)** 5 একক **(ii)** 13 একক **(iii)** 2.5 একক **(iv)** 13 একক **(v)** $\sqrt{85}$ একক **(vi)** 5 একক

6. 10 একক **8.** $y = -15$ বা -3 **9.** (6,0)

15. **(i)** (b) $2\sqrt{b^2 + d^2}$ **(ii)** (a) 0 অথবা, 6 **(iii)** (c) ± 3 **(iv)** (d) সমকোণী সমদ্বিবাহু
(v) (a) 5 একক

16. **(i)** ± 3 **(ii)** (0,4) **(iii)** (3,0) ও (0,3) **(iv)** (1,2) ও (3,–2) **(v)** (2,5) ও (–2,10)

[**16. (iii), (iv), (v)** -এর ক্ষেত্রে অন্য স্থানাঙ্কও হতে পারে]

কষে দেখি - 5.1

1. **(b)** একটি সাধারণ সমাধান পাবো। **(c)** বাবার বয়স 42 বছর এবং দিদির বয়স 13 বছর

2. **(b)** অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাবো। **(c)** অসংখ্য সমাধান অর্থাৎ 1টি পেনের দাম 10 টাকা হলে 1টি পেনসিলের দাম 3টাকা, আবার 1টি পেনের দাম 6 টাকা হলে 1টি পেনসিলের দাম 6 টাকা ......

3. **(b)** কোনো সাধারণ সমাধান পাবো না।
(c) 1টি আর্ট পেপার ও 1টি স্কেচ পেনের আলাদা আলাদা দাম পাবো না।

কষে দেখি - 5.2

1. **(b)** সমাধান যোগ্য, $x= 2, y =1$ **(b)** সমাধান যোগ্য, অসংখ্য সমাধান, $x = 2, y = -3; x = 3, y=1; x = 4, y =5;$ .... **(c)** সমাধান যোগ্য নহে **(d)** সমাধান যোগ্য, $x = \frac{53}{20}$, $y = -\frac{1}{4}$

2. **(a)** সমাধান যোগ্য নহে **(c)** সমাধানযোগ্য এবং একটিমাত্র সাধারণ সমাধান আছে। **(c)** সমাধানযোগ্য এবং অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে। **(d)** সমাধানযোগ্য এবং অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে।

3. **(a)** পরস্পরছেদী **(b)** সমাপতিত হয়েছে **(c)** পরস্পর সমান্তরাল **(d)** পরস্পরছেদী

4. **(a)** সমাধানযোগ্য, অসংখ্য সমাধান, $x = 5, y = 0; x = -1, y =8; x = 2, y =4;$ .... **(b)** সমাধানযোগ্য নহে **(c)** সমাধানযোগ্য, $x = 2, y =4$ **(d)** সমাধানযোগ্য, $p = 9, q = 6$ **(e)** সমাধানযোগ্য নহে **(f)** সমাধানযোগ্য নহে।

কষে দেখি - 5.3

1. **(a)** $x = 2, y = -1$ **(b)** $x = 2, y = 1$

2. 3

3. $4x - 3y = 16$ কে 3 দিয়ে এবং $6x + 5y = 62$ কে 2 দিয়ে গুণ করতে হবে।

4. **(i)** $x = 4, y = -3$ **(ii)** $x = 7, y = 6$ **(iii)** $x = 36, y = 12$ (iv) $x = 12, y = 6$ (v) $x = 2, y = 2$
(vi) $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{7}$ **(ix)** $x = 1\frac{1}{4}, y = 1$
(x) $x = 4, y = 3$ **(xi)** $x = 20, y = 3$, **(xii)** $x = a, y = b$ **(xiii)** $x = a, y = b$ **(xiv)** $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$, $y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)}$ **(xv)** $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$ (xvi) $x = 1, y = 1$

কষে দেখি - 5.4

1. $x = 3\left(8 - \frac{y}{2}\right)$

2. $y = \frac{7x}{x-2}$

3. **a)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **b)** $x = 1, y = 1$ **b)** $x = 1\frac{1}{5}, y = 1\frac{1}{5}$ **c)** $x = 51, y = 62$

4. $x = 3, y = 2$

5. **(i)** $x = 4, y = 5$ **(ii)** $x = 10, y = 4$ **(iii)** $x = 8, y = 5$ **(iv)** $x = 7, y = 9$ **(v)** $x = 6, y = 5$
(vi) $x = \frac{3}{2}, y = 2$ **(vii)** $x = 6, y = 2$ **(viii)** $x = 2, y = 3$ **(ix)** $x = 2, y = \frac{2}{3}$
(x) $x = 12, y = 8$ **(xi)** $x = 4, y = 4$, **(xii)** $x = -2, y = 3$

কষে দেখি - 5.5

1. $x = \frac{2y}{y-3}$ **2.** $x = 3$ **3.** **(a)** $x = 2, y = -1$ **(b)** $x = 2, y = 3$ **4.** **(a)** $x = \frac{1}{4}, y = 6$
(b) $x = 2, y = 3$ **(c)** $x = 1, y = \frac{1}{2}$ **(d)** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{5}$

5. **(i)** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **(ii)** $x = 1, y = 1$ **(iii)** $x = \frac{6}{5}, y = \frac{6}{5}$ **(iv)** $x = 6, y = 8$ **(v)** $x = 4, y = 10$
(vi) $x = 8, y = 5$ **(vii)** $x = 7, y = 9$ **(viii)** $x = p + q, y = q - p$

কষে দেখি - 5.6

1. $x = 2, y = -1$ **2.** $x = 3, y = 2$ **3.** $x=1, y=2$ **4.** $x = 4, y = -1$ **5.** $x = 16, y = -4$
6. $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{5}$ **7.** $x=5, y=9$ **8.** $x = 16, y = 4$ **9.** $x = 21, y = 24$
10. $x = a + b, y = b - a$ **11.** $x = a + b, y = b - a$ **12.** $x = a, y = b$
13. $x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$

কষে দেখি - 5.7

1. 1 টি পেন 5 টাকা, 1 টি পেনসিল 3 টাকা **2.** আয়েশা 40 কিগ্রা., রফিক 45 কিগ্রা.

3. কাকাবাবু 40 বছর, বোন 20 বছর **4.** পাঁচটাকার নোট 22টি, দশ টাকার নোট 48 টি

5. ভগ্নাংশটি $\frac{12}{17}$ **6.** সংখ্যাদুটি 15 ও 18 **7.** লালিমা 12 দিনে, রমেন 9 দিনে

8. প্রথম দ্রবণ $77\frac{7}{9}$ লিটার, দ্বিতীয় দ্রবণ $72\frac{2}{9}$ লিটার **9.** অখিলবাবু 235টি, ছন্দাদেবী 160টি

10. দৈর্ঘ্য 15 মিটার,প্রস্থ 12 মিটার **11.** মেরির 160 টাকা, ঈশানের 120 টাকা **12.** 12 জন গিয়েছিল, 180 টাকা দিয়েছিলেন **13.** 1 টাকার মুদ্রা 200 টি,50 পয়সার মুদ্রা 300টি **14.** দূরত্ব 540 কিমি., গতিবেগ 36 কিমি./ঘণ্টা **15.** সংখ্যাটি 35 **16.** সংখ্যাটি 95 **17.** নৌকার বেগ 4 মাইল/ঘণ্টা, স্রোতের বেগ 1 মাইল/ঘণ্টা **18.** দূরত্ব 100 কিমি., গতিবেগ 25 কিমি./ঘণ্টা **19.** সংখ্যাটি 96

20. মোট কমলালেবু 1200টি এবং বাক্স 15 টি **21.** **(i)** $t = -3$ **(ii)** $k = -5$ **(iii)** $x = 5, y = 5$ **(iv)** $x = 1, y = -2$ **(v)** $r = 3$ (vi) $y = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(-\frac{c_1}{b_1}\right)$ **(vii)** $k \neq 24$ **(viii)** $a = -\frac{13}{9}, b = \frac{1}{3}$

22. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** a **(vi)** (c)

কষে দেখি - 6

16. **(i)** (c) **(ii)** (d) **(iii)** (c) **(iv)** (c) **(v)** (a)

17. **(i)** $\angle A = 108° = \angle C, \angle B = 72° = \angle D$ **(ii)** 4 সেমি. **(iii)** 150° **(iv)** 75° **(v)** 4 সেমি.

কষে দেখি - 7.1

1. **(i)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 6 **(iii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 3 **(v)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 51 **(vii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 0 **(viii)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা অসংজ্ঞাত **(x)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 3 **(xi)** বহুপদী সংখ্যামালা, মাত্রা 2

2. **(i)** একচল বিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা **(vi)** একচল বিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা। **(v)** একচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সংখ্যামালা **(ii)** একচল বিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা **(iv)** একচল বিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা

3. **(i)** 5 **(ii)** –1 **(iii)** 0 **(iv)** $\sqrt{11}$ **4.** **(i)** 4 **(ii)** 1 **(iii)** 0 **(iv)** 3 **(v)** 1 **(vi)** 19

5. $x^{17}+1$, $2y^{17}-9$ (অন্য উত্তর সম্ভব) **6.** x^4, $7y^4$ (অন্য উত্তর সম্ভব)

7. x^3+x^2+1, $7y^3-9x^2-5$ (অন্য উত্তর সম্ভব)

8. **(i), (ii) , (iii), (iv), (v)** বহুপদী সংখ্যামালা

(i) একচল বিশিষ্ট, **(ii), (iii), (iv)** এবং **(v)** দুইচল বিশিষ্ট (a কে ধ্রুবক ধরা হয়েছে।)

কষে দেখি - 7.2

1. $f(0)=-6$, $f(1)=4$, $f(3)=30$

2. **(i)** $f(1)=8$, $f(-1)=2$ **(ii)** $f(1)=7$, $f(-1)=17$ **(iii)** $f(1)=11$, $f(-1)=7$

(iv) $f(1)=9$, $f(-1)=-11$

4. **(i)** 2 **(ii)** $-\frac{2}{7}$ **(iii)** –9 **(iv)** 3, **(v)** 0 **(vi)** $-\frac{b}{a}$

কষে দেখি - 7.3

1. **(i)** 5 **(ii)** –19 **(iii)** $5\frac{3}{8}$ **(iv)** $3\frac{1}{8}$

2. **(i)** 68 **(ii)** 52 **(iii)** 6 **(iv)** 5

3. **(i)** –8 **(ii)** a

4. $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\therefore$ গুণিতক ।

5. 1 **6.** $4\frac{2}{3}$ **7.** 62 **9.** $a=1$, $b=3$ **10.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{-5}{3}$, $c=2$

11. **(i)** c **(ii)** a **(iii)** b **(iv)** d **(v)** d **12.** **(i)** $\frac{3}{2}$ **(ii)** 8 **(iii)** –3 **(iv)** 128

কষে দেখি - 7.4

1. (x+1) **(i), (ii), (iv), (vi)** -এর উৎপাদক

2. **(i)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক **(ii)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক। **(iii)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক **(iv)** g(x), f(x) -এর একটি উৎপাদক

3. $k=-1$ **4.** (i) $k=-12$ (ii) $k=\frac{3}{2}$ (iii) $k=8$ (iv) $k=-7$

5. $a=1$, $b=-8$ **6.** $a=1$, $b=0$ **7.** $a=0$, $b=2$ **11.** (i) c (ii) b (iii) a (iv) a (v) a

12. **(i)** $a=4$ **(ii)** $k=0$ অথবা $k=\frac{1}{27}$ **(iii)** 10 **(iv)** $p=r$ **(v)** $-\frac{3}{2}$

কষে দেখি - 8.1

1. $(x-1)(x^2+x-2)$
2. $(x+1)(x^2-x+3)$
3. $(a+2)^2(a-4)$
4. $(x-2)(x^2+2x-2)$
5. $(x+2)(x+3)(x-5)$
6. $(a-1)(4a^2-5a-2)$
7. $(x-1)(x-3)(x-5)$
8. $(a+1)(5a^2+6a-2)$
9. $(2x+1)(x^2-x+5)$
10. $(y-2)(y+3)(2y-7)$

কষে দেখি - 8.2

1. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$
2. $\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m+\frac{1}{m}-2\right)$ বা $\frac{1}{m^2}(m^2+1)(m-1)^2$
3. $(3p-4q)(3p-4q+a)$
4. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$
5. $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$
6. $(p^2+3pq-q^2)(p^2-3pq-q^2)$
7. $(a-b+c)(a-b-c)$
8. $(3a-2b)(3a+2b+2c)$
9. $(a-2c)(a-6b+2c)$
10. $(3a+b+c)(a+b-c)$
11. $(x+y-4a)(x-y-2a)$
12. $(a+3b-2c-5d)(a-3b-2c+5d)$
13. $(a+b+c)(3a-b-c)$
14. $(x+149)(x-151)$
15. $(ax-bx+ay+by)(ax+bx-ay+by)$

কষে দেখি - 8.3

1. $(t-2)(t^2+2t+4)(t^6+8t^3+64)$
2. $(3p+q)(3p-q)(9p^2-3pq+q^2)(9p^2+3pq+q^2)$
3. $(2p+1)(4p^2-38p+127)$
4. $\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{4}{b^2}\right)$
5. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$
6. $A(R-r)(R^2+Rr+r^2+Rh+rh)$
7. $(a+b-2)(a^2+2ab+b^2+2a+2b+4)$
8. $4x(2x-5)(4x^2+10x+25)$
9. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2-2x)$
10. $(x-5)(x^2-x+7)$

কষে দেখি - 8.4

1. $(x+y+4)(x^2+y^2+16-xy-4y-4x)$
2. $(2x-y+1)(4x^2+y^2+1+2xy+y-2x)$
3. $(2a-3b-1)(4a^2+9b^2+1+6ab-3b+2a)$
4. $(1+2x-3y)(1+4x^2+9y^2-2x+6xy+3y)$
5. $3(3a-2b)(2b-5c)(5c-3a)$
6. $3(2x-y)(x+y)(x-2y)$
7. $(a^2+2a-4)(a^4-2a^3+8a^2+8a+16)$
8. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^3+4a^2-15a+25)$
9. $3pqr(p-q)(q-r)(r-p)$
10. $\left(p+\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\right)\left(p^2+\frac{1}{p^2}-\frac{8}{9}+\frac{1}{3p}+\frac{p}{3}\right)$

কষে দেখি - 8.5

1. **(i)** $(a+b-3)(a+b-2)$ **(ii)** $(x-1)(3x+5)(3x^2+2x-4)$ **(iii)** $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$ **(iv)** $2b^2(15b^2-a^2)$ **(v)** $(x^2+5x+1)(x^2+3x+1)$ **(vi)** $(x-1)(ax-x+a-2)$ **(vii)** $(x+ay+y)(ax-x+y)$ **(viii)** $(x-p+2q)(x+p-3q)$ **(ix)** $(a-2)\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}+1\right)$ **(x)** $(xy-y+x)(xy-x-1)$
2. **(i)** (c) **(ii)** (d) (iii) (b) **(iv)** (d) **(v)** (a)
3. **(i)** $(a+b)(b+c)(c+a)$ **(ii)** $a=b=c$ **(iii)** $a=-15, b=-1$. (অন্য উত্তর সম্ভব) **(iv)** 0 **(v)** $a=3, p=-7$

কষে দেখি - 9

15. **(i)** (b) **(ii)** (c) **(iii)** (d) **(iv)** (b) **(v)** (b)

16. **(i)** 2 সেমি. **(ii)** 51 সেমি **(iii)** 5 সেমি. **(iv)** 6 সেমি. **(v)** 3 সেমি.

কষে দেখি - 10.1

1. ₹ 625, ₹ 125; ₹ 279, ₹ 21; ₹ 1150, ₹ 100; ₹ 20000, ₹ 3000 **2.** **(a)** সরল সমানুপাতী **(b)** ₹ 75 **(c)** ₹ 100 **(d)** শতকরা লাভ 25 **(e)** শতকরা লাভ 20 **3.** ₹ 200 **4.** $16\frac{2}{3}$ **5.** ₹ 800 **6.** ₹ 290 **7.** ₹ 300 **8.** $33\frac{1}{3}$ **9.** শতকরা লাভ 8 **10.** ₹ 200 **11.** 8 টি **12.** ₹ 350, ₹ 1050 **13.** লাভ শতকরা $12\frac{1}{2}$ **14.** 13.5 **15.** 15 **16.** ₹ 6 **17.** ₹ 4 ক্ষতি **18.** $44\frac{4}{9}$ **19.** প্যান্ট ₹ 360, জামা ₹ 250 **20.** 25 **21.** 2 : 1

কষে দেখি - 10.2

1. সুবলবাবু 20% লাভ, সাহানাবিবি 10% লাভ, উৎপলবাবু 12% লাভ

(i) ₹ 9000 **(ii)** ₹ 3696 **(iii)** $47\frac{21}{25}$

2. **(i)** ₹ 80 **(ii)** ₹ 241.50 **(iii)** ₹ 122.50 **(iv)** ₹ 262.50 **(v)** ₹ 184

3. **(i)** 15 **(ii)** 15 **(iii)** 20 **(iv)** 58.7 **(v)** ₹ 301.35

4. **(i)** (d) **(ii)** (a) **(iii)** (b) **(iv)** (a) **(v)** (b)

5. **(i)** $16\frac{2}{3}$ **(ii)** 25 **(iii)** $9\frac{1}{11}$ **(iv)** ₹ 360 **(v)** ₹ 576 **(vi)** 28%

কষে দেখি - 11.1

1.

শ্রেণি অন্তর	শ্রেণি সীমা	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	শ্রেণি পরিসংখ্যা
0 – 2	0 – 2	2	11
2 – 4	2 – 4	2	17
4 – 6	4 – 6	2	9
6 – 8	6 – 8	2	3

2.

শ্রেণি অন্তর	শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা
1 – 10		𝍸 |	6
11 – 20		𝍸 |||	8
21 – 30		𝍸 𝍸 |	11
31 – 40		𝍸 ||	7
41 – 50		𝍸 |||	8
			মোট পরিসংখ্যা = 40

3.

শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (ক্ষুদ্রতর সূচক)
30 – 40	||||	4	4
40 – 50	卌 |	6	10
50 – 60	|||	3	13
60 – 70	||||	4	17
70 – 80	卌 |||	8	25
80 – 90	卌 ||	7	32
90 – 100	|||	3	35
100 – 110	|||	3	38
110 – 120	||	2	40
		মোট পরিসংখ্যা = 40	

4.

শ্রেণি সীমা	ট্যালি মার্ক	শ্রেণি পরিসংখ্যা
50 – 60	||	2
60 – 70	卌 |	6
70 – 80	||||	4
80 – 90	||||	4
90 – 100	卌 ||	7
100 – 110	卌 ||	7
110 – 120	卌 |	6
120 – 130	卌 ||	7
130 – 140	||	2
		মোট পরিসংখ্যা = 40

5.

বয়স (বছরে)	রোগীর সংখ্যা পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (বৃহত্তর সূচক)
10 – 20	80	300
20 – 30	40	220
30 – 40	50	180
40 – 50	70	130
50 – 60	40	60
60 – 70	20	20

6.

শ্রেণি	10-এর কম	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	17	5	7	8	13	10

7.

প্রাপ্ত নম্বর	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60-এর বেশি
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	8	5	12	35	24	16	0

8. **(i)** (a) **(ii)** (d) **(iii)** (b) **(iv)** (b) **(v)** (b)

9. **(a)** 2m – u **(b)** 37 – 47 **(c)** 0.6 **(d)** 0.4 **(e)** চল— (i), (ii), (iv), গুণ— (iii), (v)

কষে দেখি - 11.2

12. **(i)** (c) **(ii)** (c) **(iii)** (b) **(iv)** (d) **(v)** (d)

কষে দেখি - 12

21. **(i)** (c) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (d) **(v)** (a)

22. **(i)** 7.5 সেমি. **(ii)** 25 বর্গ একক **(iii)** 1 : 6 **(iv)** 10 বর্গ সেমি. **(v)** 1 : 1

কষে দেখি— 15.1

1. **(i)** 400 বর্গ মিটার **(ii)** ₹1500 **(iii)** 480
2. **(i)** 51 বর্গমিটার **(ii)** 111 বর্গমিটার **(iii)** 264 বর্গমিটার **(iv)** 252 বর্গমিটার **(v)** 882 বর্গমিটার
3. 6912 বর্গ মিটার **4.** ₹680 **5.** 25 মিটার ও 20 মিটার **6.** ₹17982 **7.** 1.5 মিটার
8. 2500 বর্গ সেমি. **9.** ₹4949 **10.** 3মিটার **11.** 38 সেমি. **12.** 196 বর্গ মিটার এবং 19.796 মিটার
13. 80 মিটার, ₹8000 **14.** $\sqrt{193}$ মিটার, $(19 + \sqrt{193})$ মিটার **15.** ₹1,12,500
16. 288 বর্গ মিটার, **17.** 42 মিটার, 108 বর্গ মিটার, **18.** 5 মিটার × 5 মিটার, 924 টি
19. **(i)** (b) 144 বর্গ সেমি. **(ii)** (a) $A_1:A_2 = 1:2$ **(iii)** (c) 600 **(iv)** (b) S >R **(v)** (b) 15 সেমি.
20. **(i)** শতকরা 21 বৃদ্ধি পাবে। **(ii)** শতকরা 1 হ্রাস পাবে। **(iii)** 3 সেমি. **(iv)** 8 সেমি. **(v)** 13 সেমি.

কষে দেখি— 15.2

1. $25\sqrt{3}$ বর্গ সেমি., $8\sqrt{21}$ বর্গ সেমি., 13.5 বর্গ সেমি., 247.5 বর্গ সেমি., $304\sqrt{5}$ বর্গ সেমি.

2. $64\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **3.** 30 সেমি., $25\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **4.** $8\sqrt{6}$ বর্গ সেমি. **5.** 48 বর্গ সেমি. **6.** 13872 বর্গ সেমি. **7.** 72 বর্গ সেমি. **8.** 5 সেমি., রম্বস **9.** **(i)** $432\sqrt{15}$ বর্গ মিটার **(ii)** $9\sqrt{15}$ মিটার **10.** **(i)** ₹ 1680 **(ii)** ₹ 1422 **11.** $300\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **12.** $100\sqrt{2}$ বর্গ সেমি. **13.** 100 বর্গ সেমি. **14.** 1 সেমি., 0.25 বর্গ সেমি. **15.** 2.89 মিনিট(প্রায়) **16.** 1.5 মিটার **17.** 180 সেমি. **18.** 30 বর্গ সেমি. **19.** 4.615 সেমি.(প্রায়) **20.** $1\frac{5}{7}$সেমি. **21.** **(i)** (d) **(ii)** (b) **(iii)** (c) **(iv)** (b) **(v)** (a) **(vi)** (c) **22.** **(i)** 2 একক **(ii)** শতকরা 300 বৃদ্ধি পায় **(iii)** শতকরা 800 বৃদ্ধি পায় **(iv)** 10 সেমি. **(v)** $1 : \sqrt{3}$

কষে দেখি— 15.3

1. 20 বর্গ সেমি. **2.** 14 সেমি. ও 7 সেমি. **3.** 168 বর্গ মিটার **4.** 12 সেমি. **5.** 6 সেমি. **6.** 50 মিটার, 150 বর্গ মিটার, 12 মিটার **7.** 2420 বর্গ মিটার **8.** 24 বর্গ সেমি. **9.** 60 ডেকামিটার, 80 ডেকামিটার **10.** $96\sqrt{3}$ বর্গ সেমি. **11.** 114 বর্গ মিটার **12.** 88 বর্গ সেমি. **13.** 72.5 বর্গ সেমি. **14.** 1536 বর্গ সেমি. **15.** $\sqrt{185}$ সেমি., 88 বর্গ সেমি. **16.** 67.2 বর্গ মিটার **17.** **(i)** (b) **(ii)** (b) **(iii)** (d) **(iv)** (b) **(v)** (b)
18. **(i)** 8 সেমি. **(ii)** $3\frac{1}{3}$ সেমি. **(iii)** 20 বর্গ সেমি. **(iv)** $31\sqrt{2}$ সেমি. **(v)** 12 বর্গ সেমি.

কষে দেখি - 16

1. **(i)** $24\frac{2}{7}$ মিটার **(ii)** 64 সেমি. **2.** 220 মিটার **3.** ঘণ্টায় 59.4 কিমি. **4.** 19 মিনিট 12 সেকেন্ড
5. 10.5 সেমি. **6.** 42 মিটার **7.** 17.5 সেমি. **8.** 352 মিটারের প্রতিযোগিতা, 88 মিটারে পরাজিত করেছিল **9.** 28 সেমি. **10.** 14400 বার **11.** ঘণ্টার কাঁটা 105.6 সেমি., মিনিটের কাঁটা 2112 সেমি.
13. 28 মিটার **14.** 12 সেমি. ও 8 সেমি. **15.** 22 সেমি. **16.** 28 মিটার **17.** 330 মিটার **18.** 190 মিটার
19. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (a) **(iv)** (a) **(v)** (a) **20.** **(i)** 14 সেমি. **(ii)** 11 সেমি. **(iii)** $1:\sqrt{2}$ **(iv)** 11 সেমি. **(v)** 11 : 14

কষে দেখি - 17

8. **(i)** 12 বর্গ সেমি. **(ii)** 6 বর্গ সেমি. **(iii)** 12 বর্গ সেমি.
9. **(i)** (a) **(ii)** (b) **(iii)** (b) **(iv)** (c) **(v)** (b)
10. **(i)** 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুর মধ্যবিন্দুতে **(ii)** 3 সেমি. **(iii)** চারটি বিন্দু **(iv)** 30° **(v)** 1 সেমি.

কষে দেখি - 18

1. 13.86 বর্গ মিটার **2.** 5.6 মিটার, 98.56 বর্গ মিটার **3.** 264 মিটার **4.** 154 বর্গ মিটার **5.** 14 মিটার, 88 মিটার **6.** 16:25 **7.** 1920 বর্গ মিটার, 2464 বর্গ মিটার, বৃত্ত **8.** ₹ 142800 **9.** ₹ 52360 **10.** ₹ 39424 **11.** 12474 বর্গ মিটার **12.** $29571\frac{1}{7}$ বর্গ মিটার **13.** **(i)** 56 বর্গ সেমি. **(ii)** 115.5 বর্গ সেমি. **15.** $37\frac{5}{7}$ সেমি., $30\frac{6}{7}$ বর্গ সেমি. **16.** পরিবৃত্ত 56 সেমি., 196 বর্গ সেমি.; অন্তর্বৃত্ত $28\sqrt{2}$ সেমি., 98 বর্গ সেমি. **17.** **(i)** পরিসীমা 35.83 সেমি. (প্রায়), ক্ষেত্রফল $41\frac{1}{7}$ বর্গ সেমি. **(ii)** 86 সেমি., ক্ষেত্রফল 5704.19 বর্গ সেমি.(প্রায়) **18.** 21 সেমি. **19.** 4.02 বর্গ সেমি. (প্রায়) **20.** 115.5 বর্গ সেমি. **21.** 21 সেমি. **22.** 56 বর্গ সেমি. **23.** অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সেমি., ক্ষেত্রফল $78\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি.; পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 12.5 সেমি., ক্ষেত্রফল $491\frac{1}{14}$ বর্গ সেমি. **24.** $8\sqrt{2}$ সেমি. **25.** 88 সেমি. **26.** **(i)** (b) **(ii)** (c) **(iii)** (c) **(iv)** (a) **(v)** (c) **27.** **(i)** 21 **(ii)** 75 **(iii)** $r\sqrt{x}$ মিটার **(iv)** $19\frac{9}{14}$ বর্গ সেমি. **(v)** 9 : 25 : 49

কষে দেখি— 19

1. (i) $(0, -\frac{26}{7})$ (ii) $(\frac{1}{5}, 1)$ (iii) (14,–19) (iv) (9,8)
2. (i) (4, 0) (ii) $(3, \frac{7}{2})$
3. 3:2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত **4.** 7:9 **6.** (9,6) **8.** 5 একক **9.** $\sqrt{89}$ একক, $\sqrt{17}$ একক, $5\sqrt{2}$ একক
10. (6,7), (2,–1), (–6,15). **11.** (i) (d) (m,l) (ii) (a) –1 (iii) (a) (3,3) (iv) (d) 7 (v) (c) x=2,y=3 **12.** (i) (4,3) (ii) (0,0) (iii) (0,0) (iv) (–1,–1) (v) (2,3), (7,6) এবং $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

কষে দেখি— 20

1. (i) 11 বর্গ একক (ii) $22\frac{1}{2}$ বর্গ একক (iii) 3 বর্গ একক
3. k -এর যে-কোনো বাস্তব মান **6.** (i) $20\frac{1}{2}$ বর্গ একক (ii) $18\frac{1}{2}$ বর্গ একক
7. 37.5 বর্গ একক, 5 একক, **8.** (– 4,–1) **9.** (1,1) **10.** 4 বর্গ একক
11. (i) (b) 12 বর্গ একক, (ii) (c) (3,2) (iii) (b) 6 বর্গ একক, (iv) (a) x = 8, y = –6 (v) (b) (–4,1)
12. (i) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (ii) (3,17) (iv) 2 বর্গ একক (v) (0,0)

কষে দেখি - 21

1. (iv) 6 (ii) 3 (iii) 6 (i) – 3
2. (a) 5 (b) $3\sqrt{2}$
3. (a) $a = \frac{1}{10}b^2$ (b) $x = \frac{1}{1000}y^2$
4. (a) 0 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) 2
10. (a) x = 3 (b) x = 64
12. (i) (a) (ii) (c) (iii) (d) (iv) (a) (v) (a)
13. (i) 0 (ii) 0 (iv) $\sqrt{5}$

গণিতের পরিভাষান্তর (Terminology of Mathematics)

অকুব্জ বহুভুজ	- Concave Polygon
অখণ্ড সংখ্যা	- Whole Number
অঙ্ক	- Digit
অঙ্কন	- Construction
অতিভুজ	- Hypotenuse
অনুপাত	- Ratio
অনুভূমিক	- Horizontal
অনুরূপ কোণ	- Corresponding Angle
অনন্য	- Unique
অন্তঃকেন্দ্র	- Incentre
অন্তঃস্থ কোণ	- Interior Angle
অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ	- Interior Opposite Angle
অন্তঃবৃত্ত	- Incircle
অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক	- Internal Bisector
অর্ন্তলিখিত	- Inscribed
অপনয়ন পদ্ধতি	- Method of Elimination
অপ্রকৃত ভগ্নাংশ	- Improper Fraction
আপেক্ষিক পরিসংখ্যা	- Relative Frequency
অবিচ্ছিন্ন চল	- Continuous Variable
অবঘাতন	- Evolution
আবৃত্ত দশমিক	- Recurring Decimal
অভেদ	- Identity
অমূলদ সংখ্যা	- Irrational Number
অসীম অনাবৃত্ত দশমিক	- Non Terminating and Non Recurring Decimal
অসংখ্য	- Infinite
অসংজ্ঞাত	- Undefined
আয়তক্ষেত্র	- Rectangular region
আয়তলেখ	- Histogram
আয়তাকার চিত্র	- Rectangle
উচ্চতা	- Height
উদ্‌ঘাতন	- Involution
ঊর্ধ্বক্রম	- Ascending Order
উপপাদ্য	- Theorem
উল্লম্ব	- Vertical
উৎপাদক	- Factor
উৎপাদকে বিশ্লেষণ	- Factorisation
ঋণাত্মক	- Negative
একক	- Unit
একান্তর কোণ	- Alternate Angle
একপদী সংখ্যামালা	- Monomial Expression
ঐকিক নিয়ম	- Unitary Method
কুব্জ বহুভুজ	- Convex Polygon
কোটি	- Ordinate
কর্ণ	- Diagonal
কোণ	- Angle
কেন্দ্রীয় কোণ	- Angle Subtended at the Centre
ক্রয়মূল্য	- Cost Price
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যান	- Cumulative frequency
ক্ষতি	- Loss
ক্ষেত্রফল	- Area
ক্ষুদ্রতর	- Smaller
গুণ	- Multiplication
গুণ-লক্ষণ বা গুণ	- Attribute
গুণ্য	- Multiplicand
গুণক	- Multiplier
গুণফল	- Product
গ.সা.গু.-গরিষ্ঠ সাধারণ গুণণীয়ক	- Highest Common Factor or Greatest Common Divisor (H.C.F. or G.C.D.)
ঘটনা	- Event
ঘটনা দেশ	- Event Space
ঘাত	- Power
ঘনক	- Cube
ঘনফল	- Volume
ঘনমূল	- Cube Root
চতুর্ভুজ	- Quadrilateral
চাঁদা	- Protractor
চারপদী সংখ্যামালা	- Tetranomial Expression
চল	- Variable
ছেদক	- Transversal
ছেদবিন্দু	- Point of Intersection

ছাড় - Discount
তথ্য - Data
তুলনামূলক পদ্ধতি - Method of Comparison
ত্রিভুজ - Triangle
ত্রিপদী সংখ্যামালা - Trinomial Expression
ত্রৈরাশিক - Rule of Three
দৈর্ঘ্য - Length
দ্বিপদী সংখ্যামালা - Binomial Expression
দ্বি-মাত্রিক - Two Dimentional
ধনাত্মক - Positive
ধ্রুবক - Constant
ধার্যমূল্য - Marked Price
নিধান - Base
নমুনা দেশ - Sample space
নিম্নক্রম / অধ:ক্রম - Descending Order.
পাইচিত্র/বৃত্তক্ষেত্রাকার চিত্র - Pie chart
প্রকৃত ভগ্নাংশ - Proper Fraction
পূর্ণবর্গ - Perfect Square
পূর্ণসংখ্যা - Integer
পূর্ণঘনসংখ্যা - Perfect Cube
পাদ - Quadrant
পাদ ত্রিভুজ - Pedal Triangle
প্রমাণ - Proof
প্রমাণিত - Proved
প্রসার - Range
পরিসংখ্যা - Frequency
পরিসংখ্যার শতকরা হার - Percentage Frequency
পরিলিখিত - Circumsribed
পরিমিতি - Mensuration
পরিসংখ্যা বহুভুজ - Frequency Polygon
পরিসংখ্যা ঘনত্ব - Frequency Density
পরিবর্ত পদ্ধতি - Method of Substitution
পরিবৃত্ত - Circum Circle
পরিকেন্দ্র - Circum Centre
পরিব্যাসার্ধ - Circum Radius
পূরক কোণ - Complementary Angle
পূরক ঘটনা - Complementary Event
পঞ্চভুজ - Pentagon
প্রস্থ - Breadth
প্রবৃদ্ধ কোণ - Reflex angle
বিক্রয়মূল্য - Selling Price
বর্গ - Square
বর্গমূল - Square Root
বর্গক্ষেত্র - Square Region
বর্গাকার চিত্র - Square
বিচ্ছেদ নিয়ম - Distributive Law
বিচ্ছিন্ন চল - Discrete Variable
বজ্রগুণনপদ্ধতি - Method of Cross Multiplcation
বীজ - Root
বীজগাণিতিক সংখ্যামালা - Algebraic Expression
বৃত্ত - Circle
বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ - Radius of Circle
বৃত্তাকার - Circular
বৃত্তকলা - Sector
বৃত্তের পরিধি - Circumference of a circle
বৃত্তের ব্যাস - Diameter of a circle
বৃত্তাকার চাকতি - Circular Disc
বিনিময় নিয়ম - Commutative Law
বিপ্রতীপ কোণ - Vertically Opposite Angle
ব্যস্ত সমানুপাতী - Inversely Proportional
বাস্তব সংখ্যা - Real Number
বিষমবাহু ত্রিভুজ - Scalene Triangle
বাহু - Side
বহিঃসমদ্বিখণ্ডক - External Bisector
বহুপদী সংখ্যামালা - Polynomial Expression
বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য - Zeros of a Polynomial
বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণ - Polynomial Equation
বহিঃস্থ কোণ - Exterior Angle
বৃহত্তর - Greater
বহুভুজ - Polygon
বিয়োগ - Subtraction
বিয়োগফল (অন্তর) - Difference
ভাগ - Division
ভাগফল - Quotient
ভাগশেষ - Remainder
ভগ্নাংশ - Fraction
ভুজ - Abscissa
ভাজ্য - Dividend

ভাজক - Divisor
ভূমি - Base
ভরকেন্দ্র - Centroid
মূলদ সংখ্যা - Rational Number
মূলবিন্দু - Origin
মৌলিক সংখ্যা - Prime Number
মৌলিক উৎপাদক - Prime factor
মিশ্রণ - Mixture
মধ্যবিন্দু - Mid point
যোগ - Addition
যোগফল - Sum
রৈখিক সমীকরণ - Linear Equation
রম্বস - Rhombus
রশ্মি - Ray
লেখচিত্র - Graph
লব - Numerator
লাভ - Profit
লম্ব - Perpendicular
লম্ববিন্দু - Orthocentre
ল.সা.গু.-লঘিষ্ঠ সাধারণগুণিতক- Least Common Multiple (L.C.M.)
শতকরা - Percentage
শূন্য পদ্ধতি - Vanishing Method
শ্রেণি সীমানা - Class-boundary
শ্রেণি অন্তর - Class Interval
শ্রেণি পরিসংখ্যা - Class Frequency
শ্রেণি সীমা - Class Limit
শ্রেণি দৈর্ঘ্য - Class-length
শীর্ষবিন্দু - Vertex
শীর্ষকোণ - Vertical Angle
সূচক - Index/Exponent
সূত্র - Formula
স্বতঃসিদ্ধ - Axiom
স্তম্ভচিত্র - Bar graph
সিদ্ধ - Satisfy
সাধারণ বাহু - Common Side
সাধারণ উৎপাদক - Common Factor
সন্নিহিত কোণ - Adjacent Angle
স্থানাঙ্ক - Coordinates
সর্বসমতা/সর্বসম - Congruence / Congruent
স্বাভাবিক সংখ্যা - Natural Number
স্বীকার্য - Postulate
সমতুল্য ভগ্নাংশ - Equivalent Fraction
সমরেখ - Collinear
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ - Isosceles Triangle
সমবাহু ত্রিভুজ - Equilateral Triangle
সমদ্বিখণ্ডিত করা - Bisect
সমদ্বিখণ্ডক - Bisector
সমবিন্দু - Concurrent
সমসম্ভব পরীক্ষা - Random Experiment
সামান্য ভগ্নাংশ - Vulgar Fraction
সমান্তরাল সরলরেখা - Parallel Lines
সমীকরণ - Equation
সমাধান - Solution
সমানুপাত - Proportion
সমাধান করা - Solve
সামান্তরিক - Parallelogram
সমকোণ - Right Angle
সম্পূরক কোণ - Supplementary Angle
সম্ভাবনা - Probability
সরল করা - Simplify
সরলরেখা - Straight Line
সরলরেখাংশ - Straightline Segment
সরল সমানুপাতী - Directly Proportional
স্থূলকোণ - Obtuse Angle
সসীম দশমিক - Terminating Decimal
সুষম বহুভুজ - Regular Polygon
সহগ - Coefficient
সহ সমীকরণ - Simultaneous Equations
সংখ্যা - Number
সংখ্যামালা - Expression
সংযোগ নিয়ম - Associative Law
সূক্ষ্মকোণ - Acute Angle
হর - Denominator
X-অক্ষ - X-axis
Y-অক্ষ - Y-axis

শিখন পরামর্শ

- জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখা (NCF) - 2005-এর পরামর্শ এই যে শিক্ষার্থী যেন তার বিদ্যালয় জীবন ও বিদ্যালয়ের বাইরের জীবনের সঙ্গে সর্বদা সংযোগ ঘটাতে পারে। এই নথি নির্দেশ করে যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন কেবলমাত্র বই থেকে না হয়। শুধুমাত্র বই থেকে শিক্ষা হলে শিক্ষার্থীর শিক্ষায় বিদ্যালয়, বাড়ি এবং সমাজ থেকে শিক্ষার ভেতর একটি ফাঁকের সৃষ্টি হয়। জাতীয় পাঠক্রম রূপরেখার এই মূল দৃষ্টির উপর ভিত্তি করেই বর্তমান পাঠক্রম, পাঠ্যসূচি ও পাঠ্যবই তৈরি করা হয়। এই নথি আরও পরামর্শ দেয় যে শিক্ষার্থীর শিক্ষা যেন বিষয়কেন্দ্রিক না হয়। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যতটা সম্ভব সে যেন সম্পর্ক খুঁজে পায়।
- আশা করা যায়, শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যখন এই পাঠ্যবইটি ব্যবহার করবেন যতটা সম্ভব এই নথি ও নীচের পরামর্শ অনুধাবন করবেন।
- বর্তমানে শিক্ষা শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক। শিক্ষিকা/শিক্ষক সহায়ক মাত্র। অর্থাৎ শিক্ষার্থী যে জন্মের পর থেকেই বাড়ি, পরিবেশ, সমাজ থেকে অনেক কিছুই শিখে ফেলে সেটা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা খেয়াল রাখবেন। কোনো বিষয় জানানোর আগে সেই বিষয়ে শিক্ষার্থীর পূর্বে অর্জিত জ্ঞানের দিকে খেয়াল রেখে সহায়তা করবেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা বা যুক্তি কোনোভাবে যাতে আটকে না যায়, সে যেন মুক্ত চিন্তায় যেতে পারে সেদিকে সর্বদা খেয়াল রাখবেন।
- পাঠ্যবই শিক্ষার্থীর শিক্ষার একটি সহায়ক মাত্র। একমাত্র সহায়ক নয়। শিক্ষার্থীর শিক্ষা যাতে আনন্দদায়ক হয়ে ওঠে তার জন্য বিভিন্ন শিখন সম্ভারের সাহায্য নেওয়া প্রয়োজন এবং প্রয়োজনে শিক্ষার্থীর চাহিদা মতো বিভিন্ন সমস্যা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা শ্রেণিকক্ষে তৈরি করে দেবেন যাতে শিক্ষার্থীর শ্রেণি অনুযায়ী কোনো অধ্যায়ের জ্ঞান অসম্পূর্ণ না থাকে।
- গণিত শিক্ষায়, শিক্ষার্থীর যেন মূর্ত বস্তুর ধারণা থেকে বিমূর্তের ধারণা জন্মায়। তা না হলে শিক্ষার্থীর কাছে গণিত বিষয় একটি ভয়ের কারণ হয়ে ওঠে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যে অধ্যায়ে সম্ভব শিক্ষার্থীর পরিচিত পরিবেশ থেকে কিছু বাস্তব সমস্যা তৈরি করে গণিতের কোনো অধ্যায় শুরু করেন। তারপর সম্ভব হলে সক্রিয়তাভিত্তিক কাজের (Activity) মাধ্যমে সেই অধ্যায় সম্পর্কে শিক্ষার্থীর মনে যুক্তিপূর্ণ ধারণার জন্ম দেন। শিক্ষার্থীর চিন্তা ও যুক্তির স্বচ্ছতা আসার পরেই যেন সে বিমূর্ত বিষয় নিয়ে কাজ করে।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন লক্ষ রাখেন শিক্ষার্থী পাঠ্যবইটি থেকে নিজে নিজেই কতদূর পর্যন্ত কোনো একটি অধ্যায় শিখতে পারে। যখন সে ওই অধ্যায়ের কোনো একটি অংশ শিখতে বাধাপ্রাপ্ত হয় তখনই তাঁরা যেন ধীরে ধীরে সহায়তা করেন, যাতে সে সমস্যাটি সমাধানের পথ নিজেই খুঁজে পায়।
- শিক্ষিকা/শিক্ষকরা কোনো অধ্যায় সম্পর্কে প্রথমে শিক্ষার্থীর কাছে এমনভাবে গল্প বলবেন যাতে শিক্ষার্থী প্রথমে কিছু বুঝতে না পারে যে তাকে কিছু শেখানো হচ্ছে।
- দলগত শিক্ষণ শিক্ষার্থীর পক্ষে শিখনে যথেষ্ট সহায়ক হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে সেদিকটি খেয়াল রাখবেন।
- বর্তমান শিক্ষায় শিক্ষার্থীকে পাঠদান বা কিছু তথ্য জানানো নয়, শিক্ষার্থী যাতে জ্ঞান গঠন করতে পারে সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা লক্ষ রাখবেন। শিক্ষার্থী জ্ঞান গঠন করতে পারলেই সে ধীরে ধীরে অনেক বিষয়ের মধ্যে গণিত খুঁজতে চাইবে এবং গণিত বিষয়টি তার কাছে আনন্দদায়ক হয়ে উঠবে।
- শিক্ষার্থী যাতে মনে মনে তাড়াতাড়ি কোনো অঙ্ক করতে পারে (মানসাঙ্ক) সেদিকে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন। গণিতের প্রতিটি অধ্যায় থেকেই শিক্ষার্থী যদি মানসাঙ্ক করতে শেখে তাহলে শিক্ষার্থীর চিন্তা, যুক্তি ও গণনা করার ক্ষমতা তাড়াতাড়ি তৈরি হয়।
- শিক্ষার্থী গণিতের কোনো অধ্যায় শেখার সময় শিক্ষিকা/শিক্ষকরা ওই অধ্যায়ের উপর এমনভাবে যদি একটি তালিকা তৈরি করেন যাতে ওই অধ্যায় থেকে শিক্ষার্থীর শিখনের যতগুলি সম্ভাবনা থাকে সবগুলিই সে শেখে। যেমন, বহুপদী সংখ্যামালার ক্ষেত্রে —

  1) বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

  2) একপদী, দ্বিপদী, ত্রিপদী ইত্যাদি বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

3) একঘাত, দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ইত্যাদি বহুপদী সংখ্যামালার ধারণা।

4) বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যের ধারণা।

5) শূন্য বহুপদীর ধারণা।

6) বহুপদী সংখ্যামালাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের (শূন্য ছাড়া) ধারণা ইত্যাদি।

- যে-কোনো অধ্যায়ের কিছু Open ended প্রশ্ন থাকা প্রয়োজন।

a) যেমন একটি মূলদ সংখ্যা লেখ।

b) প্রথম পাদে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লেখ।

c) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লেখ যাতে বৃত্তাকার ক্ষেত্রদুটির অনুপাত 4 : 9 হয়।

d) তিনটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য লেখ যাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বাহুর উপর অবস্থিত।

- এরকম সম্ভাবনা শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরা আরও তৈরি করলে তাঁদের পক্ষে শিক্ষার্থীর আরহিত জ্ঞান মৌলিক কিনা বুঝতে সুবিধা হবে।

- গণিতের কোনো প্রক্রিয়া শিক্ষার্থী যেন না বুঝে মুখস্থ করে না নেয়। প্রত্যেকটি প্রক্রিয়া যেন সে যুক্তি দিয়ে বুঝতে পারে কেন হয়। শিক্ষিকা/শিক্ষকরা সেদিকে যেন যথেষ্ট খেয়াল রাখেন।

- শ্রেণিকক্ষে শিক্ষিকা/শিক্ষকের দেওয়া কোনো সমস্যা কোনো শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি সমাধান করে যেন চুপ করে বসে না থাকে। যে শিক্ষার্থী তাড়াতাড়ি অধ্যায়টি বুঝে এগিয়ে যাচ্ছে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা তাকে আরও কঠিন থেকে কঠিনতর যুক্তি নির্ভর সমস্যা দিয়ে এগিয়ে দেবেন। আর যে ধীরে ধীরে এগোচ্ছে তাকে ধীরে ধীরে যুক্তির বিকাশ ঘটিয়ে ওই অধ্যায়ের যে সামর্থ্য কাম্য সেটায় পৌঁছোতে সাহায্য করবেন।

1. সর্বভারতীয় বোর্ড এবং কাউন্সিলের পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচির মাধ্যে সামঞ্জস্য রাখার জন্য নবম শ্রেণিরও পাঠক্রম ও পাঠ্যসূচিতে পরিবর্তন করা হয়েছে।

2. একাদশ শ্রেণির গণিতের পাঠ্যসূচির সাথে সামঞ্জস্য রাখার জন্য নবম শ্রেণির গণিতে বিভিন্ন নতুন অধ্যায় সংযুক্ত করা হয়েছে।

3. নবম শ্রেণির ‘গণিত প্রকাশ’ বইয়ে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি, রাশিবিজ্ঞান অধ্যায়গুলি আলাদাভাবে নেই। কারণ, পাটিগণিতের একটি অধ্যায়ের সঙ্গে বীজগণিতের একটি অধ্যায় বা জ্যামিতির একটি অধ্যায়ের সঙ্গে পরিমিতির একটি অধ্যায় পরস্পরযুক্ত। যেমন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা বা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা এই সূত্রগুলি পরিমিতির প্রয়োগের ক্ষেত্রে ব্যবহার করতে হলে জ্যামিতির ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য জানা প্রয়োজন। আবার, পাটীগণিতে লাভ ও ক্ষতির সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে বীজগণিতের রৈখিক সহসমীকরণের সমাধান জানা প্রয়োজন।

   অর্থাৎ শিক্ষার্থীরা যেন কোনো সূত্র মুখস্থ বিদ্যার (Rote Learning) উপর নির্ভর না করে কেন হয় জেনে প্রয়োগ করতে পারে। তাই গণিতের বিভিন্ন শাখার অধ্যায়গুলি পাঠ্যপুস্তকে সেভাবে সাজান হয়েছে।

4. পরিশিষ্টে সেট তত্ত্ব ও সম্ভাবনা তত্ত্ব সংযোজিত হয়েছে যা নবম শ্রেণির মূল্যায়নের অন্তর্ভূক্ত নয়। কিন্তু যে সমস্ত শিক্ষার্থী বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় আগ্রহী তারা যাতে নিজেরাই পাঠ্যপুস্তক থেকে পড়ে কিছুটা জ্ঞান আহরণ করে ও সেই অর্জিত জ্ঞান প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় প্রয়োগ করতে পারে।

5. পাঠ্যপুস্তকে প্রতিটি অধ্যায়ের প্রথমে না দিয়ে শেষে বহু পছন্দভিত্তিক প্রশ্ন এবং সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। কারণ শিক্ষার্থীদের যাতে বড় সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে অধ্যায়টি সম্বন্ধে ধারণা সম্পূর্ণ হয় এবং তারপর ওই ধরনের সমস্যা যাতে তারা খুব তাড়াতাড়ি করতে পারে।

6. শ্রেণিকক্ষের ও বাস্তবের সমস্যা বুঝে শিক্ষিকা/শিক্ষকরা নিজেরাই শিক্ষার্থীর যুক্তিপূর্ণ আনন্দদায়ক শিক্ষার জন্য পাঠ্যবইটিকে কেমন করে আরও ভালোভাবে ব্যবহার করা যাবে সেটিরও পরামর্শ জানাবেন যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবইটি নিখুঁত ও সর্বাঙ্গীন সুন্দর হয়।

পাঠ পরিকল্পনা

মাস	অধ্যায়
January	1. বাস্তব সংখ্যা 2. সূচকের নিয়মাবলি
February	3. লেখচিত্র 4. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : দূরত্ব নির্ণয়
March	5. রৈখিক সহ সমীকরণ (দুই চল বিশিষ্ট) 6. সামান্তরিকের ধর্ম
April	7. বহুপদী সংখ্যামালা 8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ
May	9. ভেদক ও মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য 10. লাভ ও ক্ষতি
June	11. রাশিবিজ্ঞান
July	12. ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য 13. সম্পাদ্য : ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কন যার একটি কোণের পরিমাপ নির্দিষ্ট 14. সম্পাদ্য : চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন
August	15. ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল 16. বৃত্তের পরিধি
September	17. সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য 18. বৃত্তের ক্ষেত্রফল
October	19. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : সরলরেখাংশের অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত 20. স্থানাঙ্ক জ্যামিতি : ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
November	21. লগারিদ্ম