

آنکڑوں کا بندوبست (Management of Data)

4.1 - تمہید:

پچھلی جماعت میں آپ نے مختلف طرح کے آنکڑوں پر کام کیا تھا۔ آپ نے آنکڑوں کو جمع کرنا، ان کو فہرست نما کرنا، انھیں تصویر نما اور تصویری خاکہ اور ڈنڈا گراف کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھا تھا۔ آنکڑوں کا جمع، تصویری خاکہ اور پیشکش ہمارے تجربوں کو منظم کرنے اور ان سے نتیجہ نکالنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ اس باب میں ہم اس سے آگے آنکڑوں کے بارے میں سیکھیں گے۔

جدول: 4.1

شہروں کی حرارت		شہر
کم سے کم	زیادہ سے زیادہ	
25°C	41°C	پٹنہ
26°C	43°C	گیا
23°C	37°C	بھاگلپور
24°C	36°C	راپچی
27°C	42°C	دلی
29°C	36°C	ممبئی
27°C	31°C	چنئی
11°C	23°C	سری نگر

آپ کی روزمرہ کی زندگی میں آپ کے سامنے مختلف نوع کی رپورٹ آتی ہیں۔ جیسے آپ کی جماعت کے طلباء کے ذریعہ ریاضی کے پونٹ ٹسٹ میں حاصل کیے گئے نمبر وغیرہ۔ اسی طرح آپ اخباروں، ٹیلی ویژنوں، رسالوں اور دوسرے ذرائع سے مختلف طرح کی خبریں دیکھ اور پڑھ چکے ہیں۔ انھیں رپورٹوں کو آنکڑا (Data) کہتے ہیں۔ آنکڑے ہمیشہ ایک ایسی حالت کے ضمن میں حاصل کیے جاتے ہیں۔ جن کا ہم مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ آنکڑوں کے یہ مجموعے آپ کو کیا بتاتے ہیں؟

جدول 4.1

جدول: 4.2

ایک اسکول میں مختلف سوموار کو غیر حاضری بتانے والے آنکڑے سے ہم کہہ

سکتے ہیں کہ گیا کا زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت سب سے زیادہ تھا اور سری نگر کا درجہ حرارت سب سے کم تھا۔ جدول 4.2 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ چوتھے سوموار کو اسکول میں سب سے کم بچے غیر حاضر تھے۔ جتنے بچے پہلے سوموار کو غیر حاضر تھے اتنے ہی بچے پانچویں سوموار کو غیر حاضر تھے۔ اس طرح آنکڑے ہمیں مختلف طرح کی

😊😊😊😊😊	پہلا سوموار
😊😊😊	دوسرا سوموار
😊😊😊😊😊😊	تیسرا سوموار
😊😊	چوتھا سوموار
😊😊😊😊😊	پانچواں سوموار

باتیں ہمیں بتا سکتے ہیں۔

آئکڑوں کی فراہمی یا جمع کرنا (Collection of Data)

جدول 4.1 کے اعداد و شمار ہمیں یہ نہیں بتا سکتے کہ پورے سال میں کس شہر کا زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت سب سے زیادہ تھا؟ یہ جاننے کے لیے ہمیں ان شہروں میں سے ہر ایک شہر کے پورے سال کے دوران رکارڈ (Record) کیے گئے زیادہ سے زیادہ درجہ حرارتوں سے متعلق آئکڑے جمع کرنے پڑیں گے۔

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ آئکڑوں کا ایک دیا ہو مجموعہ (Collection of Data) ہمیں اس سے متعلق ایک خصوصی رپورٹ دے پائے۔ اس کے لیے ہمیں اس خصوصی رپورٹ کو دھیان میں رکھتے ہوئے آئکڑوں کو اکٹھا کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ جدول 4.1 ہمیں پورے سال کے دوران ان شہروں کے زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت کیا رہے، کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کر سکتا۔ اس طرح آئکڑوں کو جمع کرنے سے پہلے ہمیں یہ جاننا بہت ضروری ہو جاتا ہے کہ ہم ان کا استعمال کس کے لیے کریں گے؟

بطور مثال آپ درج ذیل صورت حال پر غور کریں:

- جماعت میں آپ کا ریاضی میں مظاہرے کا آئکڑا

- آپ کی جماعت کا ریاضی میں مظاہرے کا آئکڑا

- بہار میں خواندگی شرح کا آئکڑا

- کسی گاؤں میں 5 سال سے کم بچوں کی تعداد کا آئکڑا

مندرجہ بالا حالات میں آپ کو کس طرح کے آئکڑوں کی ضرورت ہے؟ یعنی ہر ایک کے لیے مندرجہ بالا آئکڑہ کیا ہے۔ اپنے دوستوں سے تذکرہ کیجیے اور پہچانے۔ ہر ایک حالت میں کن آئکڑوں کی ضرورت ہے؟

4.3 - آئکڑوں کی تنظیم (Organization of Data)

جب ہم آئکڑوں کو جمع کرتے ہیں، تو ہمیں انھیں ریکارڈ (Record) کر کے منظم کرنا ہوتا ہے۔ آئیے ایک مثال پر تذکرہ کریں۔

کلاس ٹیچر محترمہ ارچنا یہ جاننا چاہتی تھی کہ ریاضی میں بچوں کی کارکردگی کیسی رہی؟ وہ بچوں کے ذریعہ حاصل شدہ نمبروں کو مندرجہ ذیل طریقے سے لکھتی ہیں:

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

اس حالت میں آئکڑے آسانی سے سمجھنے کے لائق نہیں تھے۔ اس آئکڑوں سے یہ بھی معلوم نہیں ہوتا کہ کس

طالب علم کی کارکردگی کیسی رہی ہے؟ ارچنا کے ایک دوست نے ان آنکڑوں کو جدول کی صورت میں جمع کرنے میں اس کی مدد کی۔

جدول: 4.3

رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر	رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر
1	آشیش	23	6	سہانا	46
2	ارشد	35	7	اکبر احمد	13
3	امریندر	48	8	کویل	27
4	دیپو	30	9	منیشا	32
5	دیپتی	25	10	دھیرج	38

اب ارچنا یہ سمجھ سکی کہ کس طلبا نے کتنے نمبرات حاصل کیے۔ لیکن وہ کچھ اور معلومات چاہتی تھیں۔ تو ان کے دوست نے آنکڑوں کو دوسرے طریقے سے ظاہر کیا۔

رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر	رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر
3	امریندر	48	4	دیپو	30
6	سہانا	46	8	کویل	27
10	دھیرج	38	5	دیپتی	25
2	ارشد	35	1	آشیش	23
9	منیشا	32	7	اکبر احمد	13

اب ارچنا کو یہ جاننا آسان ہو گیا کہ کس کی سب سے اچھی کارکردگی ہے؟ کتنے بچوں نے 25 سے کم نمبر لایا ہے؟ اور اسکو مدد کی ضرورت ہے۔ اس طرح جب ہم آنکڑوں کو ایک مناسب جدول میں رکھتے ہیں تو انہیں سمجھنا اور اس کا بیان کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

ہمارے سامنے آنے والے کئی طرح کے آنکڑے جدول کی صورت میں ہوتے ہیں۔ ہمارے اسکول کے رجسٹر، پروگریس رپورٹ، مشقی کتابوں میں ترتیب وار فہرست، درجہ حرارت کے ریکارڈ اور دوسرے مختلف آنکڑے جدول نما

(Tabular) صورت میں ہوتے ہیں۔ کیا آپ کچھ اور آنکڑوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں، جو جدول نما ہو؟
خود کر کے دیکھئے:

اپنے جماعت کے بچوں کا وزن معلوم کیجیے۔ حاصل شدہ آنکڑوں کو جدول میں منظم کیجیے اور

مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

- (i) سب سے کم وزن کس کا ہے؟
- (ii) کتنے طلبہ 40 کیلوگرام سے زیادہ وزن کے ہیں؟
- (iii) کون سا وزن زیادہ سے زیادہ بچوں کا ہے؟
- (vi) سب سے زیادہ اور سب سے کم وزن کا فرق کتنا ہے؟

4.4 - نمائندہ قیمت

آپ اوسط (Average) لفظ سے ضرور ہی واقف ہوں گے اور اپنے روزمرہ کی زندگی میں اوسط لفظ سے متعلق مندرجہ ذیل اقوال ضرور ہی سنے اور پڑھے ہوں گے:

- عیسیٰ اوسطاً 5 گھنٹے پڑھتا ہے۔

- میری جماعت کے طلبہ کی اوسط عمر 12 سال ہے۔

- میرے شہر کا اوسط درجہ حرارت 40 ڈگری سلسیس (40°C) ہے۔

- ایک اسکول کا سالانہ امتحان کے وقت طلبہ کی اوسط حاضری 98 فیصد تھی۔

اس طرح کے مختلف قول ہو سکتے ہیں۔ اوپر دیئے گئے اقوال کے بارے میں غور کیجیے۔

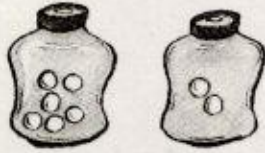
کیا آپ سوچتے ہیں کہ پہلے قول میں بتایا گیا بچہ روزانہ ٹھیک 5 گھنٹے پڑھتا ہے؟ یا کیا اُس خاص وقت پر دی گئی جگہ کا درجہ حرارت ہمیشہ 40°C رہتا ہے؟ یا کیا اس جماعت کے ہر ایک طلبہ کی عمر 12 سال ہے؟ ظاہر ہے کہ ان سوالوں کا جواب ہے ”نہیں“۔ تب یہ قول ہمیں کیا بتاتے ہیں؟

اوسط سے ہم سمجھتے ہیں کہ عیسیٰ ہمیشہ ایک دن میں 5 گھنٹے پڑھتا ہے۔ کچھ دن وہ اس سے کم گھنٹے پڑھتا ہے۔ اور کچھ دن اس سے زیادہ گھنٹے بھی پڑھتا ہے۔ اسی طرح 40°C کے رہتا ہے۔ کبھی وہ 40°C سے زیادہ بھی رہتا ہے۔

اوسط ایک ایسا عدد ہے جو آنکڑوں کے مجموعہ کے مرکزی رجحان (Central Tendency) کو ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ اوسط، آنکڑوں کے ایک مجموعہ کے مرکزی رجحانات کا پیمانہ ہے۔

مختلف قسم کے آنکڑوں کی تشریح کرنے کے لیے مختلف طرح کے نمائندے (Representative) یا مرکزی قیمت (Central Value) کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان میں سے ایک نمائندہ قیمت ریاضی اوسط یا متوازی اوسط (Arithmetic Mean) ہے۔

4.5 - آنکڑوں کا ریاضی اوسط



خاکہ : 4.1

آنکڑوں کے ایک مجموعے کے لیے خاص طور سے استعمال کیا جانے والا نمائندہ قیمت ریاضی اوسط یا متوازی اوسط (Arithmetic Mean) ہے۔ مختصر میں اسے اوسط (Mean) کہتے ہیں۔ دو برتنوں میں بالترتیب 2 لڈو اور 6 لڈو ہیں۔ اگر دونوں برتنوں میں برابر برابر لڈو رکھے جائیں تو ہر ایک برتن میں

کتنا لڈو ہوگا؟

اس کے لیے ہمیں ہندسوں کی ریاضی اوسط معلوم کرنا ہوگا۔

$$\frac{\text{لڈو کی کل تعداد}}{\text{برتنوں کی تعداد}} = \text{ہندسوں کی اوسط}$$



خاکہ 4.2

$$= \frac{2+6}{2} \text{ لڈو} = 4 \text{ لڈو}$$

اوسط (Mean) کو مندرجہ ذیل صورت سے بھی جانا جاتا ہے۔

$$\frac{\text{سبھی مشاہدوں کی جمع}}{\text{مشاہدوں کی تعداد}} = \text{اوسط}$$

مثال 1: نیلم تین پچھلے بالترتیب دنوں میں بالترتیب 5 گھنٹے، 6 گھنٹے اور 4 گھنٹے پڑھتی ہے۔ اس کے پڑھنے کا اوسط وقت کیا ہے؟

حل: نیلم کے پڑھنے کا اوسط وقت ہوگا:

$$= \frac{5+6+4}{3} \text{ گھنٹے} = 5 \text{ گھنٹے روزانہ}$$

اس طرح نیلم روزانہ 5 گھنٹے کی اوسط سے پڑھائی کرتی ہے۔ یعنی کچھ دن وہ اس سے کم گھنٹے اور کچھ دن

اس سے زیادہ گھنٹے پڑھتی ہے۔

مثال: 2 ایک بے باز نے 6 پاروں میں حسب ذیل رن بنائے: 45, 56, 58, 38, 37, 48

ایک پارے میں اُس کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کی اوسط معلوم کیجیے۔

$$\text{کل رن} = 45 + 56 + 58 + 38 + 37 + 48 = 282$$

$$\text{اوسط} = \frac{\text{سبھی مشاہدوں کا جوڑ}}{\text{مشاہدوں کی تعداد}} = \frac{282}{6} = 46$$

اس طرح ایک پارے میں اس کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کی اوسط 47 ہے۔

غور کیجیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

مندرجہ بالا مثالوں میں دیئے گئے آنکڑوں پر غور کیجیے اور بتائیے۔

کیا اوسط (Mean) ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہے؟

اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔ اسی طرح کی اور مثال بنائیے اور اس سوال کا جواب دیجیے۔

آپ پائیں گے کہ اوسط (Mean) سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدوں کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔ مخصوص حالت میں دو اعداد کا اوسط ہمیشہ ان کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 6 اور 10 کا اوسط

$$\text{(Mean)} = \frac{6+10}{2} = 8 \text{ ہے جو 6 اور 10 کے بیچ میں واقع ہے۔}$$

خود کر کے دیکھیے:

1- آپ پڑھائی میں گزارے ہوئے اپنے وقت (گھنٹوں میں) کا پورے ہفتہ کا اوسط معلوم کیجیے۔

2- آپ ایک دن میں اوسطاً کتنے گھنٹے کھیلتے ہیں؟ چار دن کے اعداد و شمار لیں اور بتائیں۔

3- 5 اور 11 کا اوسط (Mean) کہاں واقع ہوگا؟

4.5.1 - حدود یا پھیلاؤ (Range)

آنکڑوں یا مشاہدوں کے سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمتوں کے فرق سے ہمیں مشاہدوں کے پھیلاؤ

(Range) کا ایک اندازہ ہو جاتا ہے۔ اسے سب سے بڑے مشاہدے میں سب سے چھوٹے مشاہدہ کو گھٹا کر معلوم

کیا جاسکتا ہے۔ ہم اس نتیجے کو آنکڑوں کا پھیلاؤ یا حدود (Range) کہتے ہیں۔
اس لیے مشاہدوں کا حدود = مشاہدوں کی سب سے اونچی قیمت - مشاہدوں کی سب سے نیچی قیمت
مثال: 3 ایک اسکول کے دس اساتذہ کی عمر سالوں میں اس طرح ہے:

38, 40, 32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33

(i) سب سے بڑی عمر والے استاد کی عمر کیا ہے؟ اور سب سے چھوٹی عمر والے استاد کی عمر کیا ہے؟

(ii) اساتذہ کی عمر کا حدود کیا ہے؟

(iii) ان اساتذہ کی اوسط عمر کیا ہے؟

حل: عمر کی بڑھتی ترتیب = 23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

(i) ظاہر ہے کہ سب سے بڑی عمر = 54 سال

اور سب سے چھوٹی عمر = 23 سال

(ii) اساتذہ کی عمر کا حدود (Range) = (54 - 23) سال = 31 سال

(iii) اساتذہ کی اوسط عمر = $\frac{54 + 41 + 40 + 38 + 35 + 33 + 32 + 28 + 26 + 23}{10}$

$$= \frac{350}{10} = 35 \text{ سال}$$

سوالنامہ : 4.1

- 1- اپنی جماعت کے کسی 10 طلباء کے وزن کا آنکڑا جمع کیجیے اور اس کا حدود معلوم کیجیے۔
- 2- پہلے 7 مکمل اعداد کا اوسط (Mean) معلوم کیجیے۔
- 3- جماعت کی ایک جانچ میں حاصل کیے گئے مندرجہ ذیل نمبروں کو ایک جدول میں ترتیب دیجیے۔
4, 6, 7, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 7

(i) سب سے بڑا نمبر کون سا ہے؟

(ii) سب سے چھوٹا نمبر کون سا ہے؟

(iii) ان نمبروں کے حدود کیا ہیں؟

(iv) ریاضی اوسط معلوم کیجیے۔

-4 ایک کرکٹ کھلاڑی نے 6 پاروں میں مندرجہ ذیل رن بنائے۔

45, 40, 35, 50, 0, 100

ان کا اوسط معلوم کیجیے۔

-5 ذیل کی جدول میں ہر ایک کھلاڑی کے ذریعہ چار کھیلوں میں حاصل کیے گئے نمبروں کو دکھایا گیا ہے۔

کھلاڑی	کھیل-1	کھیل-2	کھیل-3	کھیل-4
A	10	10	10	14
B	6	8	4	0
C	8	کھیلا نہیں	11	13

اب مندرجہ سوالوں کے جواب دیجیے:

- ہر ایک کھیل میں A کے ذریعہ حاصل شدہ اوسط نمبر معلوم کرنے کے لیے اوسط معلوم کیجیے۔
- ہر ایک کھیل میں C کے ذریعہ حاصل شدہ اوسط نمبر معلوم کرنے کے لیے آپ کل اعداد کو 3 سے تقسیم دیں گے یا 4 سے۔ کیوں؟
- B نے بھی کھیلوں میں حصہ لیا ہے۔ آپ اس کے نمبر کا اوسط (Mean) کیسے معلوم کریں گے؟
لکھئے۔

(iv) کس کھلاڑی کے کھیل کا مظاہرہ سب سے اچھا ہے؟

-6 پچھلے چار سالوں میں ایک اسکول میں طلباء کی تعداد حسب ذیل تھی:

1670, 1750, 2540, 2820

موجودہ سال میں طلباء کی اوسط عدد معلوم کیجیے۔

-7 ریاضی کے ایک امتحان میں بچوں کے ایک گروپ کے ذریعہ (100 میں سے) حاصل کیے گئے نمبر، 49،

84، 92، 66، 90، 85، 50 اور 75 ہے تو معلوم کیجیے۔

(i) بچوں کے ذریعہ حاصل سب سے کم نمبر اور سب سے زیادہ نمبر

(ii) حاصل نمبر کا حدود

(iii) گروپ کے ذریعہ حاصل اوسط نمبر

8- ایک شہر میں کسی خاص ہفتہ کے 7 دنوں میں ہوئی بارش (ملی میٹر میں) مندرجہ ذیل صورتوں میں درج کی گئی۔

دن	اتوار	سوموار	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	سنچر
بارش (ملی میٹر)	12.2	0.0	20.5	2.1	5.5	1.0	0.0

مندرجہ بالا آنکڑوں سے

(i) بارش کا حدود (Range) معلوم کیجیے۔

(ii) ہفتہ کی اوسط (Mean) بارش نکالے۔

(iii) اوسط (Mean) بارش سے کم بارش کون کون سے دن رہی؟

9- اگر 4, 7, X, 5, 8, 6 اور 8 کا اوسط 7 ہے تو X کی قیمت معلوم کیجیے۔

10- اگر 10 نمبر کا اوسط 20 ہے تو ہر ایک عدد سے 2 گھٹانے پر نیا اوسط کیا ہوگا؟

11- پانچ اعداد کی اوسط 16 ہے۔ اگر گروہ میں ایک عدد اور ملایا جائے تو 6 اعداد کی اوسط 21 ہو جاتا ہے تو

چھٹی عدد کی قیمت معلوم کیجیے۔

4.6 - وسطانیہ (Median)

ہم نے دیکھا کہ اوسط یا ریاضی اوسط آنکڑوں کی ایک نمائندہ قیمت ہے۔ لیکن یہ سب ہمیشہ مناسب ہو، ضروری نہیں ہے۔ جیسے: 11 طلباء کی ایک جماعت، جس کی اونچائی سینٹی میٹر میں نیچے دی گئی ہے:

120, 106, 115, 102, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110

کھیل استانی جماعت کو ایسی دو گروہ میں بانٹنا چاہتی ہے جو ایک بڑی اونچائی کا گروہ ہو اور ایک نیچی کا اونچائی گروہ۔ وہ منظم (Arrange) کس طرح کرے گی؟

$$\frac{120+106+115+102+123+125+117+120+112+115+110}{11}$$

$$= \frac{1247}{11} = 113.36$$

اس طرح وسطی اونچائی سے کم اونچائی والے حصے میں 4 بچے اور وسطی اونچائی سے زیادہ اونچائی والے حصے میں 7 ہوں گے۔ یعنی دونوں گروہ (جماعت) میں بچے برابر نہیں ہوں گے۔ اس لیے ایسی حالتوں کے لیے ایک دوسری نمائندہ قیمت کی ضرورت ہوگی۔ آئیے وسطانیہ کے بارے میں سوچیں۔

وسطانیہ، دیئے گئے آنکڑوں میں وہ قیمت ہوتا ہے جو اسے ٹھیک ٹھیک دو حصوں میں منقسم کر دیتا ہے۔
آدھے مشاہدے اس سے زیادہ قیمت والے ہوتے ہیں اور آدھے مشاہدے اس سے کم قیمت والے ہوتے ہیں۔

دیئے گئے آنکڑوں کا وسطانیہ نکالنے کے لیے آنکڑوں کو بڑھتی ترتیب یا گھٹتی ترتیب میں سجاتے ہیں۔ جب مشاہدہ کی تعداد (n) جو طاق عدد ہوتا ہے۔ وسطانیہ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں مشاہدہ کی قیمت ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر

$n=11$ ہے تو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں یعنی $\frac{12}{2} = \frac{11+1}{2} = 6$ ویں مشاہدہ کی قیمت وسطانیہ ہوگی یعنی 102, 106, 110, 112, 115, 117, 120, 120, 123, 125
وسطانیہ ہوگا۔

اس طرح وسطانیہ (جب مشاہدہ کی تعداد) = طاق ہو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ

جب مشاہدوں کی تعداد (n) جفت عدد ہو تو وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ کا اوسط ہوتا

ہے۔ مثال کے لیے اگر $n=10$ ہے تو $\left(\frac{10}{2}\right)$ ویں اور $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ کی قیمت کا اوسط یعنی پانچویں اور چھٹی مشاہدہ کی قیمت کا اوسط ہی وسطانیہ (Median) ہوگا۔

اس طرح وسطانیہ (جب مشاہدہ کی تعداد = جفت) = $\frac{1}{2} \left(\left(\frac{n}{2}\right) \text{ ویں مشاہدہ} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ ویں مشاہدہ} \right)$

مثال: 4 ایک جماعت کے 9 طلبہ کی (سینٹی میٹر میں) لمبائی حسب ذیل ہے:

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148

ان آنکڑوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ہم ان آنکڑوں کو بڑھتی ترتیب (یا گھٹتی ترتیب) میں اس طرح لکھتے ہیں:

144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160

یہاں طلبہ کی تعداد 9 یعنی طاق ہے۔ اس لیے ہم $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں = $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ ویں = 5 ویں طلبہ کی

لمبائی جو کہ 149 سینٹی میٹر ہے، معلوم کر کے وسطانیہ حاصل کر لیتے ہیں۔ اس لیے وسطانیہ لمبائی 149 سینٹی میٹر ہے۔

مثال: 5 کبڑی کی ایک ٹیم (Team) کے ذریعہ بہت سارے مقابلوں میں حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے اعداد کا وسطانیہ (Median) معلوم کیجیے۔

حل: ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے اعداد کی بڑھتی ترتیب:

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

یہاں 16 آئٹمز جو جفت عدد ہیں۔ اس لیے یہاں دو وسطی آئٹمز ہیں۔

یہ $\left(\frac{16}{2} + 1\right)$ ویں اور $\left(\frac{16}{2}\right)$ ویں یعنی 8 ویں اور 9 ویں آئٹمز ہیں۔

اس لیے 8 ویں اور 9 ویں آئٹمز کا اوسط ہی وسطانیہ ہوگا۔

$$12 = \frac{10+14}{2} = \text{اس لیے وسطانیہ}$$

اس لیے کبڑی ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے وسطانیہ عدد 12 ہیں۔

4.7 - وسطی (Mode)

ہم نے دیکھا کہ اوسط اور وسطانیہ مرکزی رجحانات کی ناپ یا نمائندہ ناپ ہے۔ لیکن کیا یہ ہماری ساری ضرورتوں کے لیے موزوں ہے۔ آؤ ایک مثال کو دیکھیں۔

ایک دکاندار کی قمیصوں کے فروخت کا ریکارڈ (Record) اس طرح ہیں:

ناپ cm میں	90	95	100	105	110
فروخت کی گئی قمیصوں کی تعداد	8	22	32	37	6

اب دکاندار قمیصوں کے اسٹاک (Stock) کے لیے رجحان کے مقدار کا اندازہ کرے کہ وہ اپنے خریدار کی

ضرورتوں کو پورا کر پائے۔

دیکھیں کہ وسطی اور وسطانیہ کے ذریعہ کیا مقدار آتے ہیں۔

$$21 = \frac{105}{5} = \frac{8+22+32+37+6}{5} \text{ فروخت کی گئی قمیصوں کا اوسط}$$

یعنی وہ ہر ایک ناپ کی 21 قمیصوں کو اسٹاک میں رکھیں۔

فروخت کی گئی قمیصوں کا وسطانیہ (Median) = 6, 8, 22, 32, 37 کا $\frac{5+1}{2}$ ویں قیمت = تیسری قیمت = 22 ہے۔

اس لیے وہ ہر ایک ناپ کی 22 قمیص اسٹاک میں رکھے۔ ظاہر ہے کہ ریڈی میڈ (Ready made) کپڑوں کے دکاندار کے لیے وسطی اور وسطانیہ جیسے تعداد مناسب نہیں ہیں۔ یہاں دکاندار قمیص کے اس ناپ کو دیکھے گا۔ جو سب سے زیادہ فروخت ہوتی ہے۔ یہ آنکڑوں کا ایک الگ نمائندہ قیمت ہے۔ سب سے زیادہ فروخت 105 سینٹی میٹر ناپ کی قمیصوں کی 37 ہیں۔ یہ نمائندہ قیمت 105 اعداد کا وسطی (Mode) کہلاتا ہے۔ اس طرح وسطی وہ مشاہدہ ہوتی ہے جو سب سے زیادہ بار رونما ہوتا ہے۔

مثال: 6 مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی (Mode) معلوم کیجیے:

1, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 4

حل: یکساں قیمت والے اعداد کو ایک ساتھ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4

ان اعداد کا وسطی (Mode) 2 ہے۔ کیوں کہ وہ دوسرے مشاہدے کے مقابلہ میں زیادہ بار آتا ہے۔

4.7.1 - بڑے آنکڑوں کا وسطی

اگر مشاہدوں کا عدد بڑا ہو تو ان کو یکساں قیمت والے مشاہدوں کی صورت میں ترتیب دینا اور پھر ان کو گننا اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ ایسی حالت میں ہم اعداد کو جدول نما کرتے ہیں۔ جیسا کہ آپ پچھلی جماعت میں کر چکے ہیں۔ آنکڑوں کا جدول بنانے کا کام میلان نشان (Tally marks) سے شروع کرتے ہوئے مشاہدوں کی آمد (Frequencies) بنا کر پورا کیا جاسکتا ہے۔ یعنی کسی آنکڑے کی آمد وہ عدد ہے، جتنی بار وہ آنکڑا یا مشاہدہ اس مجموعے میں آتا ہے۔

مثال: ایک اسکول کی ساتویں جماعت کے 22 طلبہ کے ذریعہ (100 عدد میں سے) حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں:

10, 20, 36, 50, 50, 56, 60, 60, 70, 70, 36, 60, 40, 50,

50, 56, 60, 70, 60, 60

ان آنکڑوں کا وسطی معلوم کیجیے۔

طلبہ کی تعداد (Frequency)	ملائن علامت یا نشان	عدد
1	I	10
1	I	20
3	III	36
2	II	40
4	IIII	50
2	II	56
6	NI I	60
3	III	70

حل: ان اعداد کو ایک جدول کی صورت میں رکھنے پر

اس جدول کو دیکھ کر فوراً ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ 60 وسطی (Mode) ہے۔ کیوں کہ 60 سب سے زیادہ بار آیا ہے۔ اس طرح بہت سارے طلبہ نے 60 عدد حاصل کیے ہیں۔ ایک مقررہ نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کی تعداد کو اس عدد کی آمد (Frequency) کہتے ہیں۔ سب سے بڑے آمد والے مشاہدے کو عمومی اوسط (Mode) کہتے ہیں۔ کیا اعداد کے ایک مجموعے میں دو وسطی (Mode) ہو سکتے ہیں؟ سوچئے اور بحث کیجئے۔

مثال: 8 مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی معلوم کیجئے۔

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

حل: یہاں 2 اور 5 دونوں ہی تین بار آئے ہیں۔ اس لیے یہ دونوں ہی اعداد کے اوسطی (Mode) ہیں۔

خود کر کے دیکھئے:

1- آپ اپنی جماعت کے دوستوں کی عمر سالوں میں ریکارڈ (Record) کیجئے اور پھر ان کا عمومی وسطی (Mode) معلوم کیجئے۔

2- مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی (Mode) معلوم کیجئے:

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

3- 25 بچوں کی اونچائی (cm میں) نیچے دی گئی ہے:

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163
160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

ان کی لمبائیوں کا وسطی (Mode) کیا ہے؟ یہاں وسطی (Mode) سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

مثال: 9 ایک کارخانہ میں 5 آدمی کام کرتے ہیں۔ جس میں ایک سپروائزر ہے اور چار مزدور۔ ہر ایک مزدور کو ہر ماہ 5000 روپے تنخواہ ملتی ہے۔ جب کہ سپروائزر کو ہر ماہ 15000 روپے۔ ان کی تنخواہوں اوسط، وسطانیہ اور وسطی معلوم کیجیے۔

$$\text{حل:} \quad \frac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$$

اس لیے اوسط تنخواہ 7000 روپے فی ماہ ہے۔
وسطانیہ (Median) معلوم کرنے کے لیے ہم تنخواہ کے اعداد کو اس طرح بڑھتی ترتیب میں رکھتے ہیں: 5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000

کیوں کہ فیکٹری میں کام کرنے والے لوگوں کی تعداد 5 ہے۔ اس لیے وسطانیہ مشاہدہ

$$\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ واں} = \text{تیسرا مشاہدہ ہوگا۔ اس لیے وسطانیہ تیسرے مشاہدے کی قیمت، یعنی}$$

5000 روپے فی ماہ ہوگی۔

تنخواہوں کا وسطی 5000 روپے (کیوں کہ سب سے زیادہ آدمیوں کی تنخواہ 5000 روپے ہے) فی ماہ۔

یہاں اعداد کا اوسط 7000 روپے ہے۔ جو آنکڑوں کی آخری قیمت سے متاثر ہے۔ یہ اوسط کی کمزوری ہے۔ اگر کچھ اعداد میں فرق بہت زیادہ ہو جیسے (1, 7, 8, 9, 9) تو اس حالت میں اوسط ان آنکڑوں کی اچھی نمائندگی (Represent) نہیں کرتی ہے۔ وسطانیہ اور وسطی آنکڑوں میں واقع آخری قیمتوں سے متاثر نہیں ہوتے ہیں۔ ریڈی میڈ گارمنٹس (Ready made Garments) (تیار شدہ کپڑے) کے کارخانے اور جوتا کارخانے مرکزی رجحانات کے وسطی کے مقدار کا استعمال کرتے ہیں اور فیصلہ لیتے ہیں کہ کس سائز یا ناپ کا مال زیادہ سے زیادہ تیار کیا جانا چاہیے۔

سوچئے اور بحث کیجیے: کون سی مرکزی رجحان (نمائندہ قیمت) مناسب ہوگا۔

(i) آپ کو ایک پکنک (Picnic) میں 10 ساتھیوں کے لیے ضروری پوزیوں کے بارے میں فیصلہ لینا ہے۔

(ii) ایک پکنک پر جاتے وقت ہر ایک ساتھی کے لیے صرف ایک ہی پھل خریدا جانا ہے، تب ہم کون سا پھل خریدیں گے؟

مثال: 10 مینا اور منٹو کو ان کے امتحان کی کاپیاں دی گئی ہیں۔ امتحان میں 10-10 نمبر کے پانچ سوال تھے۔ اس امتحان میں ان کے حاصل شدہ نمبر حسب ذیل تھے:

سوالوں کے بالترتیب اعداد	1	2	3	4	5
مینا کا حاصل شدہ نمبر	10	8	9	8	7
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	10	10	10

امتحان کی کاپیاں حاصل ہونے پر مینا اور منٹو دونوں اپنے اپنے نمبروں پر تذکرہ شروع کیا۔ مینا نے کہا میرا اوسط حاصل شدہ نمبر $8.4 = \frac{42}{5}$ ہے۔ منٹو نے کہا میرا اوسط حاصل شدہ نمبر $8.2 = \frac{41}{5}$ ہے۔ کیوں کہ مینا کی اوسط حاصل شدہ نمبر سے زیادہ تھا۔ اس لیے مینا کا کہنا تھا کہ امتحان میں منٹو کے مقابلے میں اس کا مظاہرہ اچھا رہا ہے۔ لیکن منٹو اس سے راضی نہیں تھا۔ اُس نے دونوں کا حاصل شدہ نمبر سیدھی ترتیب میں رکھا اور اوسط نمبر اس طرح حاصل کیا:

مینا کا حاصل شدہ نمبر	7	8	(8)	9	10
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	(10)	10	10

منٹو کا کہنا تھا کہ اس کا بیچوں بیچ کا حاصل شدہ نمبر 10 ہے۔ جو کہ مینا کے بیچوں بیچ حاصل شدہ نمبر یعنی 8 سے زائد ہے۔ اس لیے امتحان میں اس کی کارکردگی کو سب سے اچھی مانی جانی چاہیے۔ لیکن مینا اس کی دلیل سے مطمئن نہیں تھی۔ مینا کو اپنی بات سے مطمئن کرانے کے لیے منٹو نے ایک دوسرا طریقہ اپنایا، جو حسب ذیل تھا:

مینا کا حاصل شدہ نمبر	7	8	(8)	9	10
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	(10)	(10)	(10)

منٹو نے کہا کہ میں نے 10 عدد زیادہ بار (3 بار) حاصل کیے ہیں۔ جب کہ مینا نے 8 عدد زیادہ بار (2 بار) حاصل کیے ہیں۔ اس لیے امتحان میں اس کا مظاہرہ اچھا رہا ہے۔ پہلی حالت میں مینا جو اوسط حاصل عدولائی تھی، وہ ہے اوسط (Mean)

میچ حاصل عدد جس کو منٹوں نے اپنی دلیل میں استعمال کیا تھا، وہ ہے وسطانیہ (Median) اپنے دوسرے قول میں منٹوں نے زاید بار زیادہ حاصل عدد حاصل کرنے کی بات کہی تھی، اور وہ ہے عمومی وسطی یعنی (Mode) تینوں آنکڑوں کے ایک مجموعے کی مرکزی رجحان کا پیمانہ (Measure) ہیں۔

4.2 : سوالنامہ

- 1- ایک کرکٹ میچ میں کھلاڑیوں کے ذریعہ بنائے گئے رن اس طرح ہیں:
6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15
ان کے رن کی اوسط، وسطانیہ اور وسطی (Mode) معلوم کیجئے۔ کیا یہ تینوں برابر ہیں؟
- 2- ریاضی کے ایک امتحان میں 15 طلبہ کے ذریعہ (25 نمبروں میں سے) حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں:
19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20
ان اعداد کی وسطی اور وسطانیہ معلوم کیجئے:
- 3- کیا اس کے ایک سے زیادہ وسطی (Mode) ہیں۔
38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47
- 4- ایک فٹ بال ٹیم نے فٹ بال کے 10 مقابلوں میں حسب ذیل گول کیے:
2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3
ان کا اوسط، وسطانیہ اور وسطی (Mode) معلوم کیجئے۔
- 5- بتائیے کہ مندرجہ ذیل اقوال صحیح ہیں یا غلط؟
(i) اوسط ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہوتا ہے۔
(ii) اوسط ہر ایک مشاہدہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔
(iii) اوسط سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے میچ میں واقع ہوتا ہے۔
(iv) دو اعداد کی اوسط ہمیشہ ان کے میچ میں واقع ہوتا ہے۔
(v) اوسط دیئے ہوئے اعداد میں سے ایک عدد ہو سکتا ہے۔
(vi) وسطی (Mode) ہمیشہ آنکڑوں میں سے ایک ہی عدد ہوتا ہے۔

(vii) وسطانیہ آنکڑوں میں سے ہمیشہ ایک آنکڑہ ہوتا ہے۔

(viii) آنکڑے 5, 3, 4 کا اوسط 4 ہے۔

4.8 - گراف (Graph)

اب ہم آنکڑوں کے گرافیکل پیش کش کی جانب اپنا دھیان مرکوز کریں گے۔ گراف جمع کیے گئے آنکڑوں کا تصویروں کے ذریعہ مظاہرہ ہے۔ گراف کے ذریعہ پیش کش کو سمجھنے میں بہت آسانی ہوتی ہے۔ ہم نے پچھلی جماعتوں میں بھی مختلف طرح کے گرافوں کے بارے میں کچھ تذکرہ کیا تھا۔

جدول : 4.6

0 = 500 پنسل کی بکری

0 0	جنوری
0 0 0	فروری
0	مارچ
0 0 0 0 0	اپریل
0 0 0	مئی

-1 تصویری علامت (Pictograph)

علامتوں کا استعمال کرتے ہوئے آنکڑوں کی تصویری پیشکش :

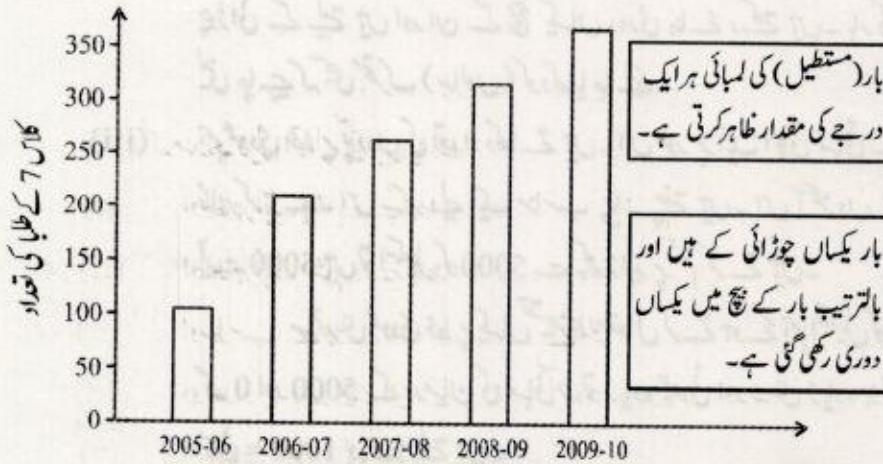
(i) مارچ کے مہینے میں کتنی پنسل کی بکری ہوئی تھی؟

(ii) کس مہینے میں پنسل کی فروخت زیادہ ہوئی تھی؟

(iii) کن کن مہینوں میں پنسل کی بکری برابر ہوئی؟

-2 ایک بار گراف (Bar Graph)

ہم جانتے ہیں کہ بار گراف یکساں چوڑائی کے باروں کے ذریعہ آنکڑوں کا مظاہرہ (پیشکش) ہے۔ جس میں باروں کی اونچائی بالترتیب ان کی قیمتوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔



تعلیمی سال →

خاکہ : 4.3

درج ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

- (i) اس بارگراف کے ذریعہ خبر دی گئی ہے؟
- (ii) کس سال طلبا کی تعداد بہت زیادہ ہے؟
- (iii) کس سال میں طلبا کی تعداد میں زیادہ اضافہ ہوا؟
- (iv) کس سال طلبا کی تعداد سب سے کم ہے؟

4.8.1 - بارگراف (Construction of Bar Graph)

آئیے اب ہم ایک مثال لے کر دیکھیں کہ ایک بارگراف کاغذ پر کس طرح بنایا جاتا ہے؟
مثال: 11 ایک باغ میں مختلف سالوں میں لگائے گئے پودوں کی تعداد حسب ذیل ہے:

سال	2006	2007	2008	2009
پودوں کی تعداد	3000	2000	4,000	5000

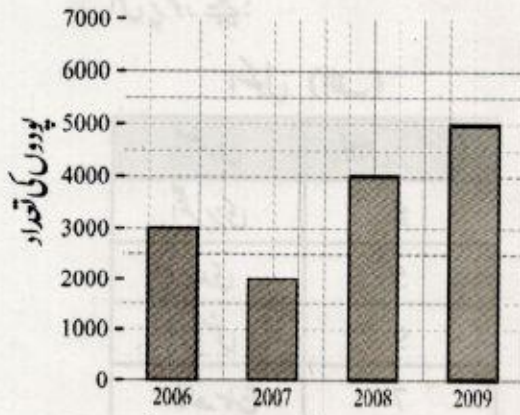
ان اعداد سے بارگراف بنائیے:

حل: ہم ان اعداد کا بارگراف مندرجہ ذیل مرحلوں میں بناتے ہیں۔

- (i) ایک گراف کاغذ پر ہم دو باہم عمودی خط کھینچتے ہیں۔ جن میں ایک پڑی اور دوسری کھڑی ہو۔
- (ii) ہم افقی خط پر سالوں (متحرک) کو دکھاتے ہیں۔ صاف ظاہر کرنے کے لیے ہم سبھی بار یکساں چوڑائی کے لیتے ہیں اور ان کے بیچ یکساں دوری بنائے رکھتے ہیں۔ ہر کی چوڑائی اس طرح لینی چاہیے کہ سبھی متحرک (سالوں) کو دکھایا جاسکے۔
- (iii) ہم عمودی خط پر پودوں کی تعداد دکھاتے ہیں۔ اس طور پر ایک اکائی لمبائی سے کتنے مشاہدوں کو ظاہر کرنا ہے۔ اس کے لیے ایک مناسب پیمانہ چنتے ہیں۔ اس آنکڑوں میں سب سے بڑی قیمت 5000 ہیں تو اسکیل کو 5000 سے کچھ زائد پر ختم کرتے ہیں۔
- ساتھ ہی عمودی خط پر یکساں تقسیم کا استعمال کرتے ہوئے ہم اسکیل کو اس طرح چنیں گے کہ 0 اور 5000 کے درمیان کی لمبائی نہ تو زیادہ چھوٹی اور نہ ہی زیادہ بڑی ہو۔ یہاں ہم 1 اکائی = 1000 پودے لیتے ہیں۔
- (iv) اب ہم چنے گئے اسکیل (1 اکائی = 1000 پودے) کے مطابق مختلف بار (ستون) کی اونچائی

معلوم کرتے ہیں۔

اس طرح گراف کاغذ پر یکساں چوڑائی کے 4 بار (Bar) حسب ذیل طریقے سے بنتے ہیں:



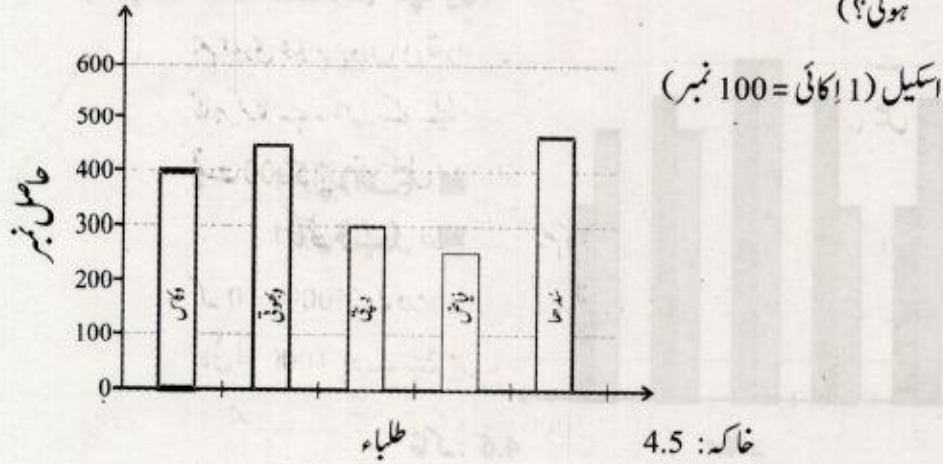
گراف کی اونچائی	سال
$\frac{1}{1000} \times 3000 = 3$ اکائی	2006
$\frac{1}{1000} \times 2000 = 2$ اکائی	2007
$\frac{1}{1000} \times 4000 = 4$ اکائی	2008
$\frac{1}{1000} \times 5000 = 5$ اکائی	2009

خاکہ: 4.4 سال

مثال: 12 مندرجہ ذیل آٹکڑے ایک جماعت کے پانچ طلباء کے ذریعہ (500 میں سے) حاصل کیے گئے نمبروں کو دکھاتے ہیں۔ انھیں ایک بار گراف کے ذریعہ ظاہر کیجیے۔

طلباء	وکاس	وبھوتی	دیپتی	فیاض	سُدها
حاصل شدہ نمبر	400	450	300	250	460

حل: ہم 1 اکائی = 100 عدد لیتے ہیں۔ (اگر ہم 1 اکائی سے 10 عدد کو ظاہر کریں، تو کیا پریشانی ہوگی؟)



اسکیل (1 اکائی = 100 نمبر)

خاکہ: 4.5

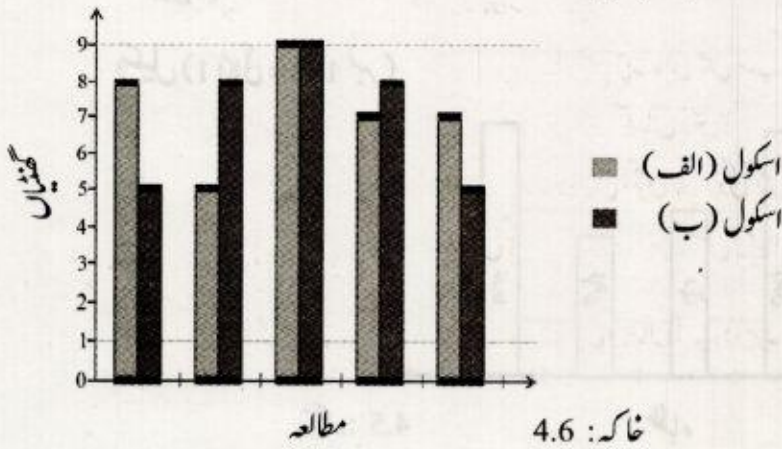
4.8.2 - دوہرے بارگراف کھینچنا

نیچے دو اسکولوں میں مختلف مضامین کے دیئے جانے والے کلاسوں (گھنٹیوں) کے آنکڑے دیئے گئے ہیں۔
اس پر غور کیجیے:

اسکول (الف)		اسکول (ب)	
مضمون	کلاس (گھنٹی)	مضمون	کلاس (گھنٹی)
انگریزی	8	انگریزی	5
ہندی	5	ہندی	8
ریاضی	9	ریاضی	9
مطالعہ سماج	7	مطالعہ سماج	8
سائنس	7	سائنس	5

ان کے الگ الگ بارگراف کھینچ کر ہم کئی معلومات فراہم کر سکتے ہیں۔ جیسے دونوں اسکولوں میں سب سے زیادہ کلاس کس مضمون کو دیئے جاتے ہیں۔ یا ہر اسکول میں کس مضمون کو سب سے کم کلاس دیئے جاتے ہیں وغیرہ۔ لیکن ایک خاص مضمون میں کس اسکول میں کلاس زیادہ ہوئے ہیں، جیسے سوالوں کا جواب دینے کے لیے ہم دوہرا بارگراف کھینچیں گے۔

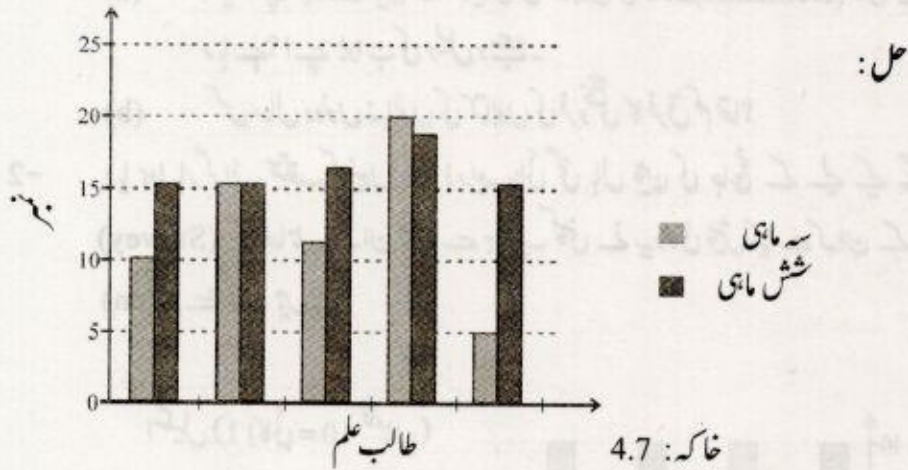
یعنی جب ہمیں آنکڑوں کے دو گروپ کا موازنہ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تو دوہرے بارگراف (Double Bar Graphs) کھینچتے ہیں۔



مثال: 13 حساب کی استانی نے 5 کمزور بچوں کے ذریعہ سہ ماہی امتحان اور شش ماہی امتحان میں 25 میں سے حاصل کیے گئے نمبرات کو حسب ذیل صورت میں دکھایا ہے:

طلباء	اشوک	ارون	زاہد	وہبا	ریتا
سہ ماہی	10	15	12	20	5
شش ماہی	15	15	16	18	15

ان آنکڑوں سے دوہرے بارگراف کھینچئے۔



بار کو دیکھ کر اب آپ درج ذیل سوالوں کا جواب دیجیے:

- کس طلبہ کی کارکردگی سہ ماہی کے مقابلے میں چھ ماہی میں سب سے اچھی رہی؟
- کس طلبہ کا پروگریس سہ ماہی اور چھ ماہی میں یکساں رہی؟
- کس طلبہ نے سہ ماہی کے بدلے چھ ماہی میں اچھی کارکردگی نہیں دکھائی؟
- کتنے طلبہ نے چھ ماہی امتحان میں 15 سے زیادہ نمبر حاصل کیے؟

کیا آپ کچھ دوسری حالتوں کے بارے میں بتا سکتے ہیں، جہاں آپ دوہرے بارگراف کا استعمال کر سکتے ہیں؟

خود کر کے دیکھئے:

-1 سال 2006 سے 2010 میں انگریزی اور ہندی کی کتابوں کی فروخت نیچے دی گئی ہے۔

سال	2006	2007	2008	2009	2010
انگریزی	250	300	350	520	620
ہندی	400	425	500	550	600

ایک دوہرا بار گراف کھینچئے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے:

(a) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ انگریزی کی کتابوں کی مانگ (Demands) میں تیزی سے اضافہ ہو

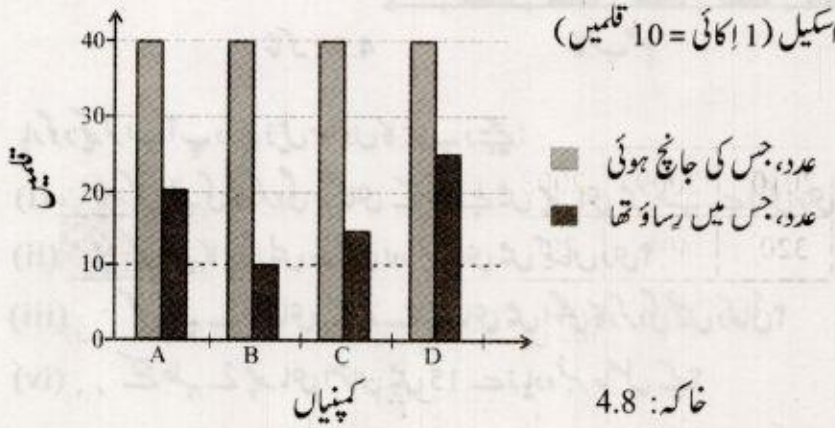
رہا ہے؟ اپنے جواب کی دلیل دیجئے۔

(b) کس سال دونوں زبانوں کی کتابوں کی فروختگی کا فرق کم تھا؟

-2 دیا ہوا بار گراف مختلف کمپنیوں کے ذریعہ بنائی گئی بال پین کی جانچ کے لیے کیے گئے ایک جائزے

(Survey) کو دکھاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک کمپنی نے یہ دعویٰ پیش کیا ہے کہ ان کے بال پین (Ball-Pen)

Pen رستے نہیں ہیں۔



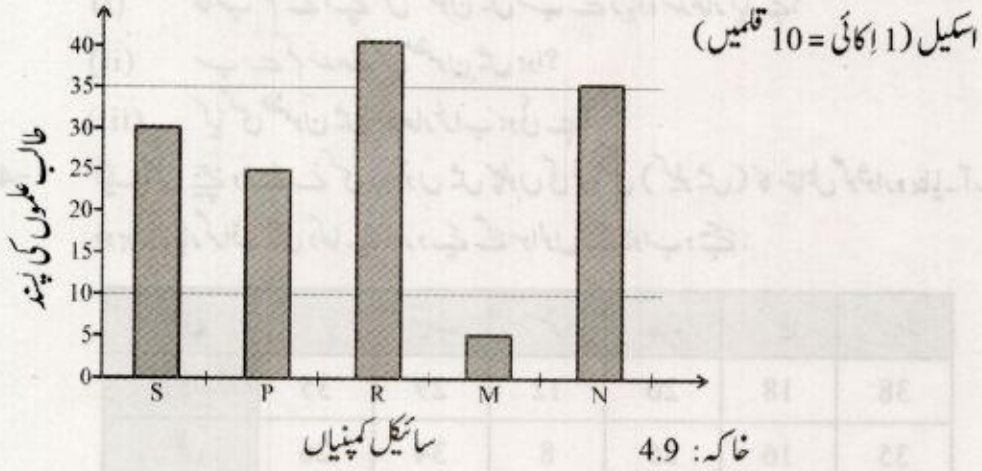
(a) ہر ایک کمپنی کے لیے رساؤ والے قلم کی تعداد، کل قلم کی تعداد کا کون سا حصہ تھا؟

(b) کس کمپنی کے قلم بہتر ہیں؟

سوالنامہ : 4.3

1- خاکہ: 4.9 میں دیئے بارگراف کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے:

- (a) کس کمپنی کی سائیکل زیادہ لوگوں کی پسند ہیں؟
 (b) کتنے طلباء کی پسند "P" کمپنی کی سائیکل ہے؟
 (c) کس کمپنی کی سائیکل سب سے کم لوگوں کی پسند ہے؟



2- درج ذیل جدول میں ایک اسکول کے 2006 سے 2010 تک ہر سال سالانہ کھیلوں میں حصہ لینے والے کھلاڑیوں کی تعداد دی گئی ہے۔ ان اعداد کو ایک بارگراف کے ذریعہ ظاہر کیجیے:

سال	2006	2007	2008	2009	2010
کھلاڑیوں کی تعداد	160	280	200	400	320

- (a) بارگراف بنانے کے لیے آپ کیا پیمانہ لیں گے؟
 (b) مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے:
 (i) کس سال میں کھلاڑیوں کی تعداد زیادہ ہے اور کس سال میں کم ہے؟
 (ii) سال 2006 کے کھلاڑیوں کی تعداد کا سال 2010 کے کھلاڑیوں کی تعداد کا تناسب معلوم کیجیے۔

- 2 ایک طالب علم کے پہلے سال اور دوسرے سال کی کارکردگی دی گئی ہے (100 میں سے) ان اعداد کا ایک دوہرا بارگراف کھینچئے اور دیئے گئے سوالوں کا جواب دیجئے:

مضمون	ہندی	انگریزی	حساب	سماج سائنس	سائنس
پہلا سال	60	70	80	84	76
دوسرا سال	80	65	95	85	80

- (i) طالب علم نے اپنے کس مضمون میں سب سے زیادہ سدھار کیا ہے؟
(ii) سب سے کم سدھار کس مضمون میں ہوا؟
(iii) کیا کسی مضمون میں سدھار خراب ہوئی ہے؟
- 4 ایک پھل بیچنے والے نے کسی دو دنوں میں پھلوں کی فروختگی (کیلو میں) کا مقابل گوشوارہ بنایا۔ آپ انھیں دوہرے بارگراف میں دکھائیے اور دیئے گئے سوالوں کے جواب دیجئے:

پھل	آم	سیب	سنترہ	پیتا	کیلا	تربوز
سوموار	35	29	12	20	18	38
منگل	26	34	8	25	16	35

- (i) کون سا پھل عام لوگوں کا زیادہ پسندیدہ ہے؟
(ii) اس بارگراف سے آپ کیا نتیجہ نکالتے ہیں؟
- 5 ایک کالونی میں لگاتار (دو سالوں میں مختلف مددوں Item) پر خرچ حسب ذیل ہے:

مد (Item)	2008 (ہزار روپے میں)	2009 (ہزار روپے میں)
پانی سپلائی	25	30
علاج	30	35
تحفظ	50	70
سڑک	40	20
بجلی	35	35

- ایک مناسب اسکیل چن کر ایک دوہرا بار گراف کھینچئے اور سوالوں کا جواب دیجئے:
- (i) کس مد میں پچھلے سال کے مقابلے سب سے زیادہ خرچ کیا گیا؟
 - (ii) کس مد میں دونوں سالوں میں برابر خرچ ہوئے؟
 - (iii) 2008 میں بجلی اور روڈ پر کل کتنا خرچ ہوا؟
 - (iv) کس سال کا خرچ زیادہ رہا؟
- 6- اس باب کے شروع میں دیئے گئے مختلف شہروں کے سب سے کم اور سب سے زیادہ درجہ حرارت کے اعداد (جدول 4.1) کو لیجئے۔ ان آنکڑوں کا ایک دوہرا بار گراف کھینچ کر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجئے۔
- (i) کس شہر کا سب سے کم اور سب سے زیادہ درجہ حرارت کا فرق سب سے زیادہ ہے؟
 - (ii) کون سا شہر سب سے زیادہ گرم ہے اور کون سا شہر سب سے زیادہ ٹھنڈا ہے؟
 - (iii) ایسے دو شہروں کے نام لکھئے، جس میں سے ایک کا سب سے زیادہ درجہ حرارت دوسرے سب سے کم درجہ حرارت سے کم ہے۔
 - (iv) اُس شہر کا نام لکھئے، جس کا سب سے کم اور سب سے زیادہ درجہ حرارت کا فرق سب سے کم ہے۔

4.9 - اتفاق اور امکان

4.9 ہمیں اپنے روزمرہ کی زندگی میں حسب ذیل اقوال سننے کو ملتے رہتے ہیں:

- (i) آج بارش ہونے کا امکان نہیں ہے۔
 - (ii) بھارت ورلڈ کپ جیتے گا۔
 - (iii) سورج پچھتم سے نکلتا ہے۔
 - (iv) ایک پاسہ کو پھینکنے پر 8 آئے گا۔
 - (v) ایک کیلو گرام کے مقابلے دو کیلو گرام سبزی زیادہ ہوگی۔
 - (vi) چھوٹے پتھر کی جگہ بڑا پتھر زیادہ جگہ گھیرے گا۔
 - (vii) بھارت اگلی ٹیسٹ سیریز جیتے گا۔
 - (viii) دھوتی امتحان میں ٹاپ کرے گا۔
- مندرجہ بالا اقوال کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہاں پچھتم سے سورج نکلنا ناممکن ہے۔ اک پاسے کو پھینکنے پر 8 آنا بھی ممکن نہیں ہے۔ اس کے مخالف قول (iii) اور (iv) کا ہونا یقینی (Certain) ہے۔ دوسری طرف قول

(v) اور (vi) ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا ہے۔ دونوں ہی ممکن نہیں ہے۔ ہونا اور نہ ہونا اتفاق (Chance) ہے۔

4.9.1 - اتفاق

جب آپ ایک سکہ کو اچھالتے ہیں تو کیا آپ ہمیشہ اس کی صحیح پیشین گوئی کر سکتے ہیں کہ چٹ (Head) ہوگا یا پٹ (Tail)؟ آپ دس بار ایک سکہ کو اچھال کر اس سے حاصل ہونے والے نتیجے اور اپنی پیشین گوئی کو ذیل کے جدول میں لکھئے :

خاکہ : 4.7

اچھال نمبر	پیشین گوئی	نتیجہ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

کیا آپ اس میں کوئی پیٹرن (Pattern) دیکھتے ہیں۔ ہر ایک اچھال کے بعد آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟ آپ دیکھیں گے کہ یہ مشاہدے کوئی صاف صاف پیٹرن (Pattern) ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ ذیل کے جدول کو دیکھئے :

جدول : 4.8

اچھال نمبر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
نتیجہ	H	T	H	H	H	T	T	T	T	T	T
اچھال نمبر	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
نتیجہ	H	H	T	T	H	H	H	H	H	T	H

مندرجہ بالا جدول ناہیدہ اور نچٹا کے 22 اچھالوں سے حاصل مشاہدہ کا ہے۔ یہاں $H = \text{Head}$ (چٹ) $T = \text{Tail}$ (پٹ) ہے۔ ظاہر ہے یہاں چٹ اور پٹ کے آنے کا کوئی طے شدہ Pattern نہیں ہے۔ یہ اتفاق کی بات ہے کہ ایک خاص اچھال میں چٹ اور پٹ میں سے کوئی ایک ہو سکتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

- 1- ایک سٹے کو 125 بار اچھالیے اور معلوم کیجیے کہ کتنی بار چٹ اور کتنی بار پٹ؟
- 2- ایک پاسے کو 100 بار پھینکنے اور نتائج کو ریکارڈ (Record) کیجیے۔ معلوم کیجیے کہ 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 کتنی بار آئے ہیں؟
- 3- وبھوتی نے ایک پاسے کو 250 بار پھینکا اور حسب ذیل گوشوارہ حاصل کیا:

جدول: 4.9

پاسے کی تعداد	ملاں کی علامت	کتنی دفعہ
1		33
2		40
3		47
4		52
5		40
6		38

ان اعداد کے لیے ایک بار گراف کھینچیے۔ ان نتائج سے حاصل نتیجہ کیا ہے؟

4.9.2 - امکان و گمان (Probability)

جب ایک سٹے کو اچھالا جاتا ہے تو آپ کو کیا ممکن نتائج حاصل ہوتے ہیں؟ بغیر شک و شبہ کے چٹ (Head) یا پٹ (Tail)۔ اس طرح چٹ اور پٹ سٹے اچھالنے کے دو نتائج (Outcomes) ہیں اور نتائج کے آنے کا اتفاق (Chance) ایک ہی ہے۔ یعنی دونوں ہی نتائج کے امکان برابر تھے۔ اس لیے یہ امکان و گمان (Equally Likely) یکساں اتفاق ہے۔ ایک چٹ حاصل کرنے کا امکان دو نتائج میں سے ایک ہے یعنی $\frac{1}{2}$ ہے۔

اب اگر آپ ایک پاسے (Die) کو پھینکیں تو کیا آپ حاصل ہونے والے عدد کی پیشین گوئی کر سکتے ہیں؟ لوڈو (Ludu) یا سانپ اور سیڑھی کا کھیل کھیلتے وقت آپ نے ضرور سوچا ہوگا کہ دل پسند عدد حاصل ہو۔ لیکن کیا ہمیشہ آپ کی خواہش پوری ہوتی ہے؟
اب ایک پاسا لیجئے، اُسے 150 بار پھینکنے اور حاصل نتائج کو ذیل کے جدول میں بھریئے:

جدول: 4.10

پاسے پر لکھے اعداد	ملان کی علامت	عدد جتنی بار حاصل ہوئی
1		
2		
3		
4		
5		
6		

پھینک کر ہر ایک نتیجہ کے لیے مناسب خانے میں ملان نشان جیسے 3 آنے پر 3 کے سامنے لگاتے رہئے۔
اس عمل کو 150 بار کیجیے اور ہر ایک نتیجہ کی کثرت (Frequency) (کل تعداد) معلوم کیجیے۔

(i) نتیجہ 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے کون سب سے زیادہ بار ہے؟

(ii) سب سے بڑے نتیجہ اور سب سے چھوٹے نتیجہ کا فرق کیا ہے؟

اب ایک پاسے (Die) کو ایک بار پھینکنے پر 1, 2, 3, 4, 5 یا 6 کا نتیجہ حاصل ہوگا۔ اس طرح چھ یکساں ممکن نتیجے

ہیں۔ تو ہم کہتے ہیں کہ 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے ہر ایک کے آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ہے۔

جیسے: (i) 5 آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ← امکانی نتیجوں کی تعداد

8 دینے والے نتیجہ کی تعداد

(ii) 8 آنے کا امکان $\frac{0}{6}$ ← امکانی نتیجوں کی تعداد

ظاہر ہے کہ کئی ممکنات والے واقعات کا امکان 0 اور 1 کے درمیان ہوتی ہے۔ جس واقعہ کے ہونے کا کوئی اتفاق یا امکان نہیں ہے۔ ان کا امکان 0 ہوتا ہے اور جس واقعہ کو یقینی صورت میں واقع ہونا ہوتا ہے۔ اس کا امکان 1 ہوتا ہے۔

سوالنامہ : 4.4

1- بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کس کا ہونا یقینی ہے۔ کس کا ہونا ناممکن ہے۔ اور کون ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا ہے۔

- (i) مثلث بنانے پر تین راس بنیں گے۔
- (ii) ایک سکے کو اچھالنے پر پٹ آئے گا۔
- (iii) ایک سکے کو اچھالنے پر چٹ اور پٹ دونوں آئے گا۔
- (iv) ایک پاسے کو پھینکنے پر 7 آئے گا۔
- (v) کل بادل گھرے ہوں گے۔
- (vi) یہ بیچ بھارت جیتے گا۔

2- ایک ایک پرچی پر اسے 8 تک اعداد لکھے ہوئے ہیں۔ انھیں ایک باکس میں لکھ کر اچھی طرح ملا دیا جاتا ہے۔ باکس کے اندر سے بغیر دیکھے ایک پرچی نکالی جاتی ہے تو درج ذیل کا امکان کیا ہے؟

- (i) عدد 5 حاصل کرنا۔
- (ii) 1 عدد کی ایک عدد حاصل کرنا۔
- (iii) 5 سے چھوٹی ایک عدد حاصل کرنا۔
- (iv) 5 سے بڑی ایک عدد حاصل کرنا۔

3- رانی اور ریل میں کون پہلے گانا گائے گی۔ اس کا فیصلہ کرنے کے لیے ایک سکہ اچھالا جاتا ہے۔ ریل کے پہلے گانے کا امکان کیا ہے؟

ہم نے سیکھا

- 1- آنکڑوں (Data) کو اکٹھا کرنے سے پہلے ہمیں یہ جان لینا چاہیے کہ ہم ان کا استعمال کس کام میں کریں گے۔
- 2- اکٹھا کیے گئے آنکڑوں کو ایک مناسب جدول کی صورت میں منظم کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ یہ آسانی سے سمجھنے کے لائق ہو اور ان کی تشریح کی جاسکے۔
- 3- نمائندہ قیمت ایک ایسا عدد ہے۔ جو دیئے گئے مشاہدے کے مجموعے (آنکڑوں) کی بہت ہی اہم خصوصیت (مرکزی رجحانات) کو ظاہر کرتا ہے۔
- 4- اوسط ایک ایسا عدد ہے جو مشاہدوں (Observation) یا آنکڑوں (Data) کے ایک مجموعہ کے مرکزی رجحان کو دکھاتا ہے۔ یہ سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت (Value) کے اعداد کے بیچ میں ہوتا ہے۔
- 5- مشاہدوں کے سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمتوں (Value) کے فرق سے، ہمیں مشاہدوں کے حدود (Range) کا ایک اندازہ لگ جاتا ہے۔
- 6- وسطانیہ بھی ایک طرح کی نمائندہ قیمت (Representative Value) ہے۔ یہ اس قیمت کو ظاہر کرتا ہے جو مشاہدہ کے وسط (بیچ) میں ہوتا ہے۔ (انہیں بڑھتی ترتیب یا گھٹتی ترتیب میں منظم کرنے کے بعد) یعنی آدھے مشاہدے اس کے اوپر ہوتے ہیں اور آدھے مشاہدے اس کے نیچے ہوتے ہیں۔
- 7- وسطی (Mode) مشاہدوں (Observation) کے ایک مجموعہ میں وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آتا ہے۔
- 8- گراف جمع کیے گئے آنکڑوں کا خطی تصویروں کے ذریعہ پیشکش (Representation) ہے۔ بار گراف (Bar Graph) آنکڑوں کی یکساں چوڑائی والے باروں (مسطیلوں) کے ذریعہ ایک تصویری پیشکش ہے۔
- 9- دوہرا بار گراف مشاہدوں کے دو مجموعوں کے موازنہ میں معاون ہے۔
- 10- ہمیں اپنے روزمرہ کی زندگی میں ایسی حالت پیش آتی ہے (i) جس کا ہونا طے ہے (ii) جس کا ہونا ممکن نہیں ہے (iii) جو ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔ جس کے واقع ہونے کا کوئی اتفاق (Chance) نہیں ہے۔ اس کا امکان 0 ہوتا ہے۔ جس کا واقع ہونا طے ہے، اس کا امکان 1 ہوتا ہے۔ کئی ممکنات والے واقعہ کا امکان 0 اور 1 کے بیچ ہوتا ہے۔