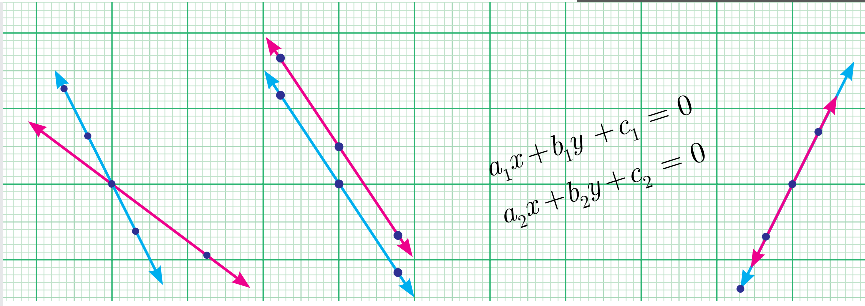
3



இயற்கணிதம்

இயற்கணிதத்தைப் போல் வேறெதுவும் நடைமுறை வாழ்க்கையோடு தொடர்புடையது இல்லை என உறுதியாகக் கூற முடியும். - பிரான் லேபோவிச்

டையோபான்டஸ்

அலெக்ஸாண்டிரியாவின் டையோபான்டஸ் (Diophantus) 84 ஆண்டுகள் வாழ்ந்த கணித மேதையாவார். இவர் கி.பி.(பொ.ஆ) 201 இக்கும் கி.பி. (பொ.ஆ) 215 இக்கும் இடையில் பிறந்தவர். இவர் இயற்கணிதவியல் என்ற தொடர் புத்தகத்தின் ஆசிரியர் ஆவார். இவரது புத்தகங்கள் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு பற்றி அமைந்தனவாகும். மேலும் இயற்கணிதத்தின் தந்தை எனவும் அழைக்கப்படுகிறார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதலைப் புரிந்துகொள்ளுதல் மற்றும் அடிப்படைச் செயல்பாடுகளைச் செய்யும் திறனடைதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காணல் மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- மீதித் தேற்றம் மற்றும் காரணித் தேற்றத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.
- இருபடி மற்றும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- தொகுமுறை வகுத்தல் முறையில் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணுதல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைதல்.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை வரைபட முறை, இயற்கணித முறைகளில் தீர்த்தல்
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மைகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

CRLVD2

3 Algebra_TM_T1.indd 84 26-12-2019 12:14:42

3.1 அறிமுகம்

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஏன் கற்க வேண்டும்?

இயற்கணிதத்தில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பற்றிய அனைத்தையும் இந்த இயல் உள்ளடக்கியது. இதில் உள்ளவை நீங்கள் முன்னரே சந்தித்த, ஆனால் முழுமையாக அறிமுகப்படுத்தப்படாத நண்பர்களே! இதற்குப் பிறகு வரும் அனைத்துக் கணிதப் பயணத்திலும், இவர்கள் உங்கள் நண்பர்களாகப் பயணிக்கத்தக்க வகையில் இவர்களை நாங்கள், உங்களுக்கு முழுமையாக அறிமுகப்படுத்த உள்ளோம்.

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. பார்ப்பதற்குச் சிறப்பு வாய்ந்ததாகத் தோன்றவில்லை. இல்லையா? நாம் முன்பே நிறைய இயற்கணிதக் கோவைகளைப் பார்த்திருக்கிறோம். எனவே, ஏன் இவற்றைப் பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டும்? கணிதத்தில், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏன் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை என்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன.

இப்போது, அவற்றின் பயன்பாட்டை அறிய ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம். நாம் எண் கணிதத்தில் நிறையக் கற்று, அதன்பின் இயற்கணிதத்தில் தெரியாத எண்களைக் கொண்ட மாறிகள் பற்றிச் சிந்தித்தோம் என்பதை நினைவில் கொள்ளுங்கள்.

உண்மையில், நாம் இப்போது எண்களிடம் திரும்பச் சென்று, இயற்கணித மொழியில் அவற்றை எழுத முயல்வோம்.

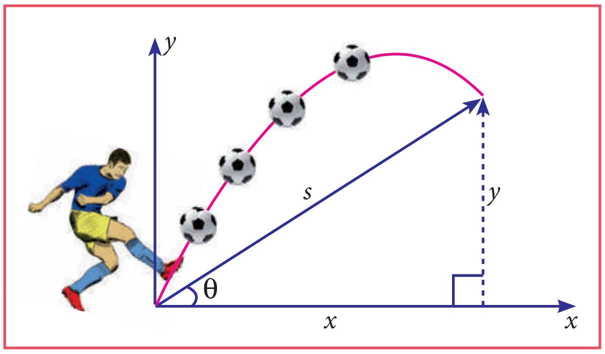
5418 என்ற ஓர் எண்ணைக் கவனியுங்கள். இது உண்மையில் "5" ஆயிரம் "4" நூறு "1" பத்து மற்றும் "8" ஒன்றுகள் .

இதைக் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8$$

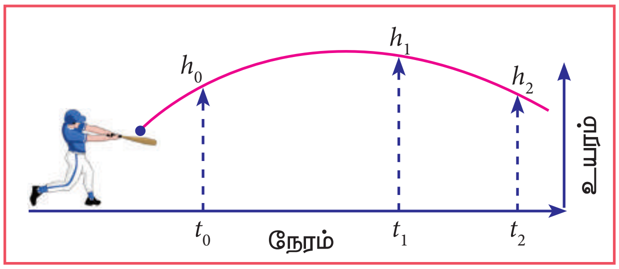
மேலும், இதனை

$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$ என்றவாறும் எழுதலாம்:



படம் 3.1

இது $5x^3 + 4x^2 + x + 8$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது தெளிவு. இந்த வடிவத்தில் எழுதுவது எவ்வாறு பயனளிக்கும்? நாம் எப்போதும் எண்களைத் தசமத்தில் எழுதுகிறோம்தானே. ஆகையால் எப்போதும் $x = 10$. பின் இதில் என்ன வேடிக்கை? வகுத்தல் விதிகள் நினைவுள்ளதா? ஓர் எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 3 ஆல் வகுபட்டால் மட்டுமே, அந்த எண் 3 ஆல் வகுபடும் என்பதை நினைவு கொள்ளுங்கள். x என்பதை 3 ஆல் வகுத்த பிறகு மீதி 1 வருகிறதெனில், x^2, x^3, போன்றவற்றிற்கும் இது பொருந்தும் என்பதைக் கவனியுங்கள். இவை எல்லாம் 3 ஆல் வகுபட்ட பிறகு, 1 ஐ மீதியாகத் தருகின்றன. எனவே ஒவ்வோர் இலக்கத்தையும் 1 ஆல் பெருக்கி அவை அனைத்தையும் கூட்டினால், மொத்த இலக்கங்களின் கூடுதலை நீங்கள் பெறுகிறீர்கள். அது 3 ஆல் வகுபடும் எனில், மொத்த எண்ணிற்கும் அதேதான். 9 ஆல் வகுபடும் விதி, 2 அல்லது 5 ஆல் வகுபடும் விதி போன்றவற்றையும் இதேபோல



படம் 3.2

3 Algebra_TM_T1.indd 85 26-12-2019 12:14:43

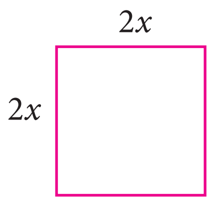
எளிதாக மெய்பிக்க இயலும். நமது நோக்கம் வகுத்தல் விதிகளை நிரூபிப்பது அல்ல. ஆனால் எண்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது அவை பல புதிய எண் அமைப்புகளை நமக்கு அளிக்கின்றன என்பதை வெளிப்படுத்துவதே ஆகும். சொல்லப் போனால் எண்கள் மட்டுமல்லாமல் பலவகை பொருட்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது, அவற்றிலிருந்து நாம் பலவற்றைக் கற்றுக்கொள்ள இயலும்.

இயற்கணிதத்தில் x^2, $5x^2-3$, $2x+7$ போன்றவற்றை x இன் சார்புகளாக நாம் உணரலாம். x மாறும்போது, சார்புகள் எவ்வாறு மாறுகின்றன என்பதைக் காண்பதற்கு நாம் ஒரு வரைபடம் வரைந்தால், அது சார்புகளின் செயல்பாட்டைப் புரிந்து கொள்ள மிகவும் உதவியாக இருக்கும். இப்போது அறிவியல், பொறியியல், வணிக ஆய்வுகள், பொருளாதாரம் மட்டுமல்லாமல் கணிதத்திலும் கூட நாம் சந்திக்கும் நல்ல பல சார்புகள் முழுவதுமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பிரதிபலிக்காவிடினும், அவை தோராயமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக அமைகின்றன. உண்மையில், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தோராயமான சார்புகள் உயர் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருப்பொருளாகப் பயன்படுகின்றன.மேலும் இதே கருத்தின் அடிப்படையில் செயல்பட்டு பலர் தங்கள் வாழ்வியல் முறையை எளிதாக்குகின்றனர்.

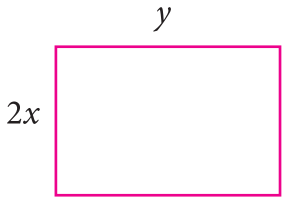
உயிரியல், கணினி அறிவியல், தொடர்பு அமைப்புகள் போன்றவற்றில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இப்பட்டியல் தொடர்ந்துகொண்டே செல்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட படங்கள் (படம் 3.1, 3.2, மற்றும் 3.3) ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறிக்கலாம். நாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்ன என்பதை மட்டும் கற்றுக்கொள்ளப் போவதில்லை. அதற்கு மேலும் எண்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கூட்டல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்றவற்றை கற்றுள்ளோமோ அதே போல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளிலும் கற்றுக்கொள்ள இருக்கிறோம்.

படம் 3.3

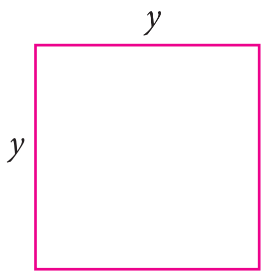
கொடுக்கப்பட்ட படங்களைக் கவனியுங்கள்



படம் 3.4



படம் 3.5



படம் 3.6

மேலே உள்ள 3 படங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு $4x^2 + 2xy + y^2$, இந்தக் கோவையை நாம் இயற்கணிதக் கோவை என்று அழைக்கிறோம். இங்கே x மற்றும் y –க்கு வெவ்வேறான மதிப்புகள் அளிக்கும்போது வெவ்வேறு பரப்பளவு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். x மற்றும் y பக்கங்களின் மதிப்புகள் மாறக்கூடியதாக உள்ளதால், அவை மாறிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறி என்பது வெவ்வேறு எண் மதிப்புகளைக் கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

வழக்கமாக மாறிகள் x, y, z போன்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. மேற்கண்ட இயற்கணிதக் கோவையில் உள்ள 4, 2 என்பவை மாறிலிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறிலி என்பது நிலையான எண் மதிப்பு கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 86 26-12-2019 12:14:45

மாறிலிகள் (Constants)

எந்த மெய்யெண்ணும் மாறிலியே. மாறிலிகள் மற்றும் எண்கணிதச் செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி எண் கோவைகளை அமைக்கலாம்.

மாறிலிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் $1, 5, -32, \frac{3}{7}, -\sqrt{2}, 8.432, 1000000$ இன்னும் பிற.

மாறிகள் (Variables)

கோவைகளில் மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, ஒரு வரம்பிற்கு உட்பட்ட எண்களைக் குறிக்கும் வழிகளில் ஒவ்வொரு மாறிக்கும் ஒரு மதிப்பைப் பெறுகிறோம். நாம் அறிந்த $2\pi r$ ஆனது ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவைக் குறிக்கின்றது. நாம் r இன் மதிப்பை 1 செமீ, 4 செமீ, 9 செமீ … என மாற்றினால் $2\pi, 8\pi, 18\pi$ ... என்ற சுற்றளவுகள் கொண்ட பெரிய வட்டங்கள் நமக்குக் கிடைக்கும்.

இந்த $2\pi r$ கோவையானது அனைத்து வட்டங்களின் சுற்றளவுகளுக்குமான சிறிய மற்றும் துல்லியமான விளக்கமாகும். நாம் எண்கணிதச் செயல்கள் மற்றும் இயற்கணிதக் கோவைகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, சார்புகள் மற்றும் எண்கள் என்ற உயர்தர மொழியைப் பெறுகிறோம். மாறிகள் என அழைக்கப்படும் தெரியாத மெய்யெண்களைக் குறிக்க x, y, a, b மற்றும் பல எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இயற்கணிதக் கோவை (Algebraic Expression)

இயற்கணிதக் கோவை என்பது நான்கு அடிப்படைக் கணிதக் குறியீடுகளின் உதவியுடன் மாறி மற்றும் மாறிலிகளால் இணைக்கப்பட்டு அமையும் கோவை ஆகும்.

இயற்கணிதக் கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

கெழுக்கள் (Coefficients)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள மாறிகளின் பெருக்கல் காரணியே அதன் கெழு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$x^2 + 5x - 24$ என்பது மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாகும். இங்கு x என்பது ஒரு மாறி. x^2 இன் கெழு 1 மற்றும் x இன் கெழு 5 ஆகும். மேலும் -24 மாறிலி ஆகும் (24 அல்ல).

செயல்பாடு 1

கீழ்க்காணும் கோவைகளை மாறி, கெழு மற்றும் மாறிலிகளாகப் பிரித்து எழுதுக.

கோவை	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$
மாறி	x			x, y		
கெழு	1				$-\frac{1}{2}$	
மாறிலி	7					-8

3 Algebra_TM_T1.indd 87 26-12-2019 12:14:46

3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளைக் கொண்டு நான்கு அடிப்படைச் செயல்களால் இணைக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஆகும். இங்கு மாறிகளின் அடுக்குகள் குறையற்ற முழுக்கள் ஆகும்.

ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை (Polynomial in One Variable)

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ என்ற வடிவில் அமைந்த ஓர் இயற்கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். இங்கு x இன் படி 'n' மேலும் $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ ஆகியவை மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பொதுவாக $f(x), g(x), p(t), q(z)$ மற்றும் $r(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு

இயற்கணிதக் கோவையின் மாறி எந்த மெய்யெண் மதிப்பையும் பெறலாம். எனினும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடுக்கு எப்பொழுதும் குறையல்லாத ஒருங்கிணைந்த அடுக்காகும். (non negative integral) அதாவது எப்பொழுதும் முழு எண்களை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். எல்லா a இன் மதிப்பிற்கும் $a^0 = 1$ என்பதை நினைவில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டாக

வ. எண்.	கொடுக்கப்பட்ட கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவை / பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல எனில் காரணம்
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
2	$4x^{-4} + 5x^4$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	x இன் ஓர் அடுக்கு குறை எண் (-4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
4	$\sqrt{5}\,y^2$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	r இன் ஓர் அடுக்கு ஒரு குறை எண் $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	q இன் அடுக்கு பின்ன எண் $(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}})$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	n இன் ஓர் அடுக்குப் பின்ன எண் $\frac{4}{5}$

பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் (Standard Form of a Polynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் x இன் அடுக்கைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையிலோ அல்லது ஏறு வரிசையிலோ எழுத இயலும். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$ (ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 88 26-12-2019 12:14:48

செயல்பாடு 2

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் எழுதுக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (Degree of the Polynomial)

ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில், மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (Degree) எனப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பில் உள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் கண்டறியப்பட்டு, அதில் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியாகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்பது மிகக் குறிப்பிடத்தக்க அடுக்காகக் கருதப்படுகிறது. x^2+5x எனும்போது x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு, x^2 இன் மதிப்பானது $5x$ ஐ விட மிக அதிகமாக இருக்கும். எனவே, x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு $x^2 + 5x$ கிட்டத்தட்ட x^2 ஐ ஒத்திருப்பதாக நாம் சிந்திக்கலாம். ஆகையினால், அடுக்கு உயர்ந்ததாக இருப்பின் அதன் ஆதிக்கமும் அதிகமாக இருக்கும். அதனால்தான், நாம் மிக உயர்ந்த அடுக்கினைப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் முக்கியத் தகவலாகப் பயன்படுத்துவதோடு, அதற்கு ஒரு பெயரையும் வைத்துள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியையும் காண்க. மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் பின்வருமாறு

$6ab^8$ இன் படி $(1+8) = 9$

$5a^2b^3c^2$ இன் படி $(2+3+2) = 7$

$7ab$ இன் படி $(1+1) = 2$

$4b^2c$ இன் படி $(2+1) = 3$

2 இன் படி 0 (மாறிலி உறுப்பின் படி எப்பொழுதும் பூச்சியமாகக் கருதப்படும்).

CRVREP

பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ யின் படி.

= மிக உயர்ந்த படியைக் கொண்ட உறுப்பின் படியாகும்

= 9

3 Algebra_TM_T1.indd 89 26-12-2019 12:14:48

ஒரு சிறப்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (A Very Special Polynomial)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுவானது எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் என நாம் கூறியிருந்தோம். ஒருவேளை கெழு பூச்சியமாக இருப்பின் என்ன நிகழும்? அந்த உறுப்பு பூச்சியமாகிவிடும். எனவே நாம் அதனை எழுதத் தேவையில்லை. சரி, மற்ற அனைத்துக் கெழுக்களும் பூச்சியம் எனில் என்னவாகும்? இப்போது அனைத்துக் கெழுக்களும் பூச்சியம் என்பதை ஏற்றுக்கொண்டு அதற்கு ஒரு பெயரை அளிப்போம்.

இவ்வாறு அனைத்துக் கெழுக்களையும் பூச்சியமாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t$, $h(p) = 0p^2 - 0p + 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியினைப் பற்றி நாம் பேசவில்லை என்பதை உணரலாம். இவை இரண்டும் வெவ்வேறு படிகளைப் பெற்றிருப்பினும் இரண்டுமே பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்தாம்.

பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள் (Types of Polynomials)

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
ஒருறுப்புக் கோவை	ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும் எடுத்துக்காட்டு : 5, 6m, 12ab
ஈருறுப்புக் கோவை	இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5x + 3,\ 4a - 2,\ 10p + 1$
மூவுறுப்புக் கோவை	மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $4x^2 + 8x - 12,\ 3a^2 + 4a + 10$
(ii) "படி" இன் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி பூச்சியம் எனில் அது மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ஒன்று எனில், அது ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $410x - 7$

3 Algebra_TM_T1.indd 90 26-12-2019 12:14:49

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி இரண்டு எனில், அது இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $2\sqrt{5}x^2 + 8x - 4$
முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மூன்று எனில், அது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $12y^3$, $6m^3 - 7m + 4$

எடுத்துக்காட்டு 3.2 கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்பாடு
(i)	$5t^3 + 6t + 8t^2$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(ii)	$y-7$	2 உறுப்புகள்	ஈருறுப்புக் கோவை
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 உறுப்பு	ஒருறுப்புக் கோவை
(iv)	$6y^5 + 3y - 7$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(v)	$8m^2 + 7m^2$	1 (ஒத்த உறுப்புகள். எனவே 15m^2 ஒருறுப்பு)	ஒருறுப்புக் கோவை

எடுத்துக்காட்டு 3.3 கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	படி	வகை
(i)	$\sqrt[3]{4}\,z + 7$	படி ஒன்று	ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(ii)	$z^3 - z^2 + 3$	படி மூன்று	முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iii)	$\sqrt{7}$	படி பூச்சியம்	மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iv)	$y^2 - \sqrt{8}$	படி இரண்டு	இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

3.2.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் எண்கணிதம் (Arithmetic of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றிய அதிகத் தகவல்களை அறிந்ததோடு மட்டுமல்லாமல், அவை பல வழிகளில் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும் நாம் கண்டோம். இப்போது நாம் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வைத்து என்ன செய்யப் போகிறோம்? x இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 91 26-12-2019 12:14:50

நாம் x இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பில் அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையை மதிப்பீடு செய்யலாம். x இன் மதிப்பு மாறும்போது பல்லுறுப்புக் கோவையால் உருவான சார்பு எவ்வாறு மாறுகிறது என நாம் கேட்கலாம். பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை எழுதி $P(x)=0$ எனக் கொண்டு நாம் x இன் தீர்வு காணலாம். இந்த இயலை நாம் கடந்து செல்கையில் இது போன்ற பல செயல்களைச் செய்ய இருக்கிறோம். அவற்றை, நாம் எண்களைப் போன்றே செயல்படுத்த இருக்கிறோம்! இந்த இயலின் தொடக்கத்திலேயே, ஒவ்வொரு மிகை முழு எண்ணையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுத முடியும் எனக் கூறும்போது நாம் இதற்கான ஒரு குறிப்பை அளித்துள்ளோம்.

எண் கணிதத்தைத் தொடர்ந்து, பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுதல், ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழித்தல், பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குதல், ஒன்றினை மற்றொன்றால் வகுத்தல் ஆகியவற்றை முயற்சி செய்ய உள்ளோம். பல்லுறுப்புக் கோவைகள் தொடர்பான ஆர்வமளிக்கும் பல பண்புகளைக் கற்கும்போது, எண்களுக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் இடையே உள்ள ஒப்புமை ஆழமானதாக மாறிவிடும். தற்போது, பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் செயல்பாடுகளை எளிமையாக முயற்சி செய்து வரையறுப்பது வேடிக்கையானதாகவே இருக்கும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல் (Addition of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்ட இயலும். $3x^2+5x^2$ என்பது $8x^2$ ஆகும். ஆனால் மாறுபட்ட உறுப்புகள் $3x^2$ மற்றும் $5x^3$ ஐக் கூட்டினால் $3x^2+5x^3$ என்ற ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 3.4 $p(x)=4x^2-3x+2x^3+5$ மற்றும் $q(x)=x^2+2x+4$ எனில், $p(x)+q(x)$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x)=4x^2-3x+2x^3+5$	$2x^3+4x^2-3x+5$
$q(x)=x^2+2x+4$	x^2+2x+4
$p(x)+q(x)=2x^3+5x^2-x+9$	

$p(x)+q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே, இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் (Subtraction of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்..

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கழிக்க இயலும். $8x^2-5x^2$ என்பதைக் கழித்தால் $3x^2$ கிடைக்கும். ஆனால் $5x^3$ ஐ $3x^2$ இல் கழிக்கக் கிடைக்கும் $3x^2-5x^3$ என்பது ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 92 26-12-2019 12:14:52

எடுத்துக்காட்டு 3.5 $p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ மற்றும் $q(x) = x^2 + 2x + 4$ எனில் $p(x) - q(x)$ காண்க.

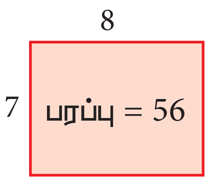
தீர்வு

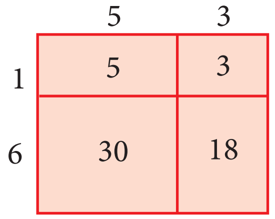
கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

$p(x) - q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வித்தியாசம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

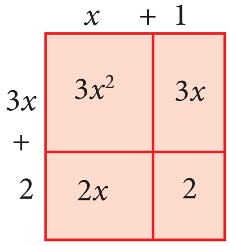
இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Two Polynomials)

8 அலகுகள் நீளமும் 7 அலகுகள் அகலமும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு 4 செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது பரப்பு மாறாமல் உள்ளதை நாம் உணர்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் பெருக்கலைப் படிக்கத் தூண்டுகோலாக அமைகிறது.





$(x+1)$ நீளமும் $(3x+2)$ அகலமும் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பினைப் பின்வருமாறு கண்டறியலாம்.



எனவே செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

$= 3x^2 + 3x + 2x + 2$

$= 3x^2 + 5x + 2$

> x என்பது மாறி மற்றும் m, n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில், $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ஆகும். இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6 பெருக்குக : $(4x - 5)$ மற்றும் $(2x^2 + 3x - 6)$.

தீர்வு

$(4x-5)$ மற்றும் $(2x^2 + 3x - 6)$ ஐப் பெருக்குவதற்கு, முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்புடன் பகிர்ந்து பெருக்குதல் வேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் $4x$ மற்றும் -5 ஐப் பகிர வேண்டியது தேவையாகிறது. பிறகு ஒத்த உறுப்புகளை இணைக்க வேண்டும்.

$$(4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 4x(2x^2 + 3x - 6) - 5(2x^2 + 3x - 6)$$

3 Algebra_TM_T1.indd 93 26-12-2019 12:14:53

$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$

$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

மாற்றுமுறையாக கெழுக்களைப் பிரித்துப் பெருக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

	2	+3	-6
		+4	-5
	−10	−15	+30
8	+12	−24	
8	+2	−39	+30

$\therefore \quad (4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் கோவைகளில் எவை பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்? பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை எனில், அதற்கான காரணம் கூறுக.

   (i) $\frac{1}{x^2} + 3x - 4$ (ii) $x^2(x - 1)$

   (iii) $\frac{1}{x}(x + 5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-1}} + 7$

   (v) $\sqrt{5}\,x^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ (vi) $m^2 - \sqrt[3]{m} + 7m - 10$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலும் x^2 *மற்றும்* x-இன் கெழுக்களைக் காண்க.

   (i) $4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x$ (ii) $6 - 2x^2 + 3x^3 - \sqrt{7}\,x$

   (iii) $\pi x^2 - x + 2$ (iv) $\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 0.5$

   (v) $x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படியைக் காண்க.

   (i) $1 - \sqrt{2}\,y^2 + y^7$ (ii) $\frac{x^3 - x^4 + 6x^6}{x^2}$

   (iii) $x^3(x^2 + x)$ (iv) $3x^4 + 9x^2 + 27x^6$

   (v) $2\sqrt{5}\,p^4 - \frac{8p^3}{\sqrt{3}} + \frac{2p^2}{7}$

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

   (i) $x - 9 + \sqrt{7}\,x^3 + 6x^2$ (ii) $\sqrt{2}\,x^2 - \frac{7}{2}x^4 + x - 5x^3$

   (iii) $7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$ (iv) $y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 11 - \frac{7}{3}y + 9y^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 94 26-12-2019 12:14:55

5. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக. மேலும் கூட்டி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x) = 6x^2 - 7x + 2$; $q(x) = 6x^3 - 7x + 15$

(ii) $h(x) = 7x^3 - 6x + 1$; $f(x) = 7x^2 + 17x - 9$

(iii) $f(x) = 16x^4 - 5x^2 + 9$; $g(x) = -6x^3 + 7x - 15$

6. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கழிக்க. மேலும் கழித்து வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x) = 7x^2 + 6x - 1$; $q(x) = 6x - 9$

(ii) $f(y) = 6y^2 - 7y + 2$; $g(y) = 7y + y^3$

(iii) $h(z) = z^5 - 6z^4 + z$; $f(z) = 6z^2 + 10z - 7$

7. $2x^3 + 6x^2 - 5x + 8$ உடன் எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்ட $3x^3 - 2x^2 + 6x + 15$ கிடைக்கும்?

8. $2x^4 + 4x^2 - 3x + 7$ இலிருந்து எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிக்க $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ கிடைக்கும்?

9. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குக. பெருக்கி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க :

(i) $p(x) = x^2 - 9$; $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$

(ii) $f(x) = 7x + 2$; $g(x) = 15x - 9$

(iii) $h(x) = 6x^2 - 7x + 1$; $f(x) = 5x - 7$

10. ஓர் இனிப்பின் விலை ₹$(x + y)$. அமீர் $(x + y)$ இனிப்புகளை வாங்கினார். எனில் அவர் கொடுத்த மொத்தத் தொகையை x மற்றும் y களில் காண்க. மேலும் $x = 10$, $y = 5$ எனில் அமீர் கொடுத்த தொகை எவ்வளவு?

11. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் $(3x+2)$ அலகுகள் மற்றும் அதன் அகலம் $(3x-2)$ அலகுகள் எனில் x ஐப் பொருத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க. $x = 20$ எனில், அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

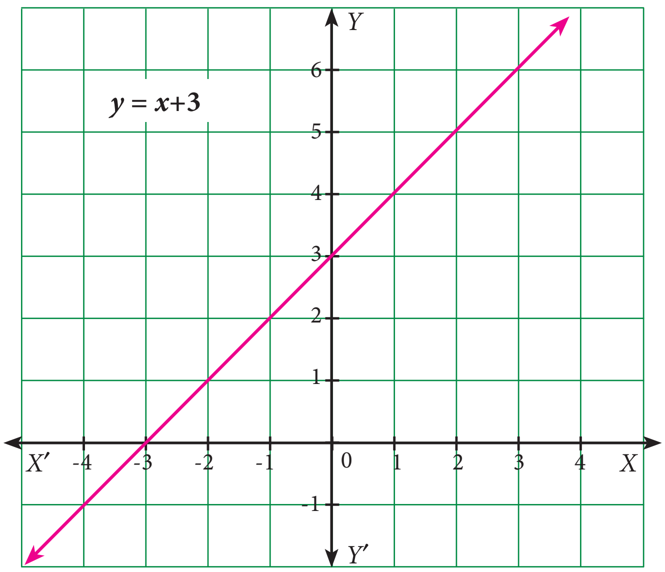
12. $p(x)$ என்பது படி 1ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் $q(x)$ என்பது படி 2 ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x) \times q(x)$ என்பது எவ்வகைப் பல்லுறுப்புக் கோவை?

3.2.2 பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு மற்றும் பூச்சியங்கள் (Value and Zeros of a Polynomial)

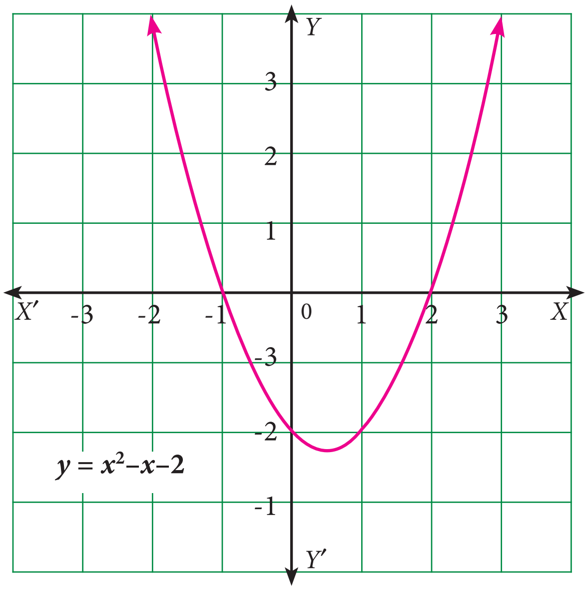
கீழ்க்காணும் இரு வரைபடங்களைப் பார்க்கவும். முதலாவது ஒருபடி மற்றும் இரண்டாவது இருபடி ஆகும். முதல் வரைபடம் x அச்சை $(x = -3)$ ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. மற்றும் இரண்டாம் வரைபடம் $(x = -1$ மற்றும் $x = 2)$ இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவை இரண்டும் y அச்சை ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டுகின்றன. பொதுவாக, ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் ஒரு

3 Algebra_TM_T1.indd 95 26-12-2019 12:14:57

வரைபடம் உண்டு. அந்த வரைபடத்தைப் படமாகக் காட்டலாம். (நமக்குச் சூத்திரங்களை விடப் படங்கள் பிடிக்குமல்லவா?) வரைபடங்கள். அது ஒரு நேர்க்கோடா?, வளைவரையா? அதன் வடிவம் என்ன? எத்தனை இடங்களில் x அச்சை வெட்டுகின்றன? போன்ற பயனுள்ள பல தகவல்களைக் கொண்டுள்ளன.



படம் 3.7



படம் 3.8

பொதுவாக, $x = a$ எனில், பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் குறிக்கப்படும். $p(x)$ இல் x இன் மதிப்பிற்குப் பதிலாக, a எனப் பிரதியிட, $p(\text{a})$ கிடைக்கும். இங்கு, a ஒரு மெய்யெண்.

x இன் பல மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகலாம் என்பதைக் கவனிக்க (படத்தில் உள்ளது போல). x இன் எத்தனை மதிப்புகளுக்கு மற்றும் எந்த மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ பூச்சியம் ஆகும்? என்று ஆர்வமாகக் கேட்கத் தோன்றும். x இன் அந்த மதிப்புகளையே பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் பூச்சியங்கள் என்போம்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்புகள் என்பன வரைபடத்தில் நாம் குறிக்கும் மதிப்புகளே என்பதை நாம் காணலாம். மேலும், நாம் குறிக்கும் புள்ளிகள் x அச்சை வெட்டும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை பூச்சியம் ஆவதை எளிதாகக் காணலாம்.

நேர்க்கோடு அல்லது வளைவரையானது
x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பொருத்தே
அதன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை அமையும்

குறிப்பு

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $\leq$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி.

படம் 3.7 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1

படம் 3.8 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 2

பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு (Value of a Polynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட அதன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் கிடைக்கும். இது x ஐ a என மாற்றுவதால் கிடைக்கும் $(a \in R)$

3 Algebra_TM_T1.indd 96 26-12-2019 12:14:58

எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில்

$x = 2$ எனும்போது

$f(x)$ இன் மதிப்பு $f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9$.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeros of Polynomial)

(i) $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில் x இடத்தில் 1 ஐப் பிரதியிட $p(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14$

$= 4 - 6 + 3 - 14 \quad = -13$

எனவே $x = 1$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -13 எனலாம்.

$x = 0$ எனும் போது $p(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14$

$= 0 - 0 + 0 - 14 \quad = \quad -14$

எனவே $x = 0$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -14 ஆகும்.

(ii) $x = 2$ என $p(x)$ இல் பிரதியிட $p(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14$

$= 32 - 24 + 6 - 14 \quad = 0$

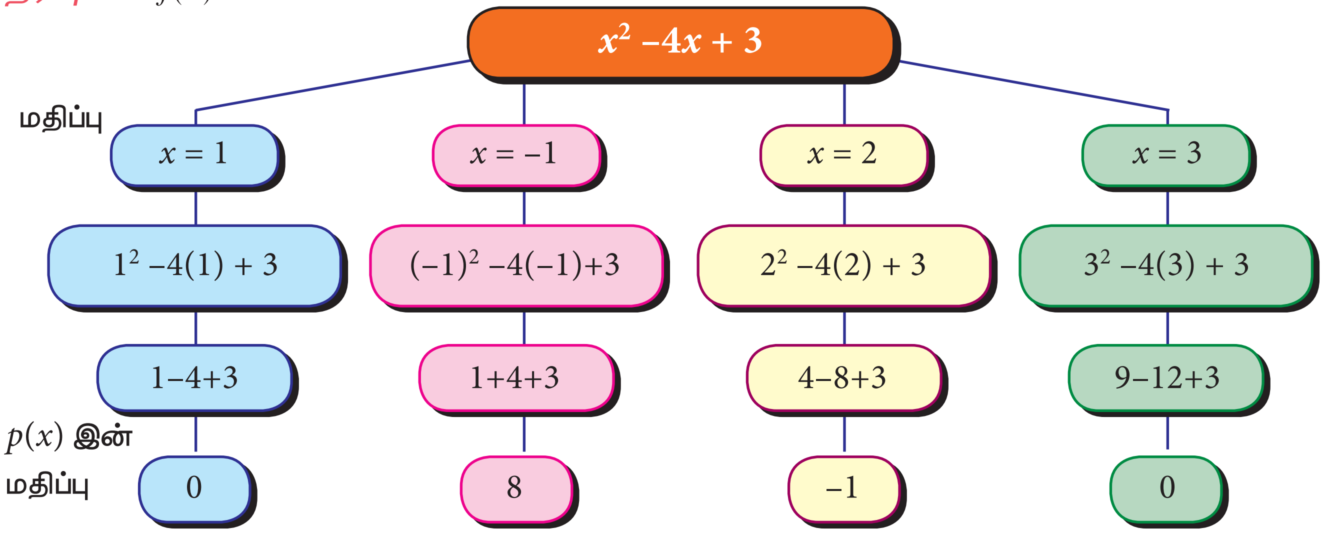
$x = 2$ எனும்போது $p(x)$ இன் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவே நாம் 2 ஐ $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ இன் பூச்சியங்களில் ஒன்று எனக் கூறுகிறோம்.

பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (Roots of a Polynomial Equation)

பொதுவாக, $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியமாகும். அல்லது a என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ எனில், $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$. ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் $f(x)$இன் பூச்சியங்களைக் காண்க.

தீர்வு: $f(x) = x^2 - 4x + 3$



படம் 3.9

3 Algebra_TM_T1.indd 97 26-12-2019 12:14:59

$x = 1$ மற்றும் $x = 3$ எனும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியமாகும், பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் பூச்சியங்கள் 1 மற்றும் 3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - (-\frac{1}{2})\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(0) = 0$$

எனவே, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$$

எனவே, $x = \frac{5}{3}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

தீர்வு

(i) $5x - 3 = 0$

$$5x = 3$$
$$x = \frac{3}{5}$$

(ii) $-7 - 4x = 0$

$$4x = -7$$
$$x = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -3 மற்றும் 3 என்பன பூச்சியங்களா என்று சரிபார்க்கவும்?

தீர்வு

$$f(x) = x^2 - 9$$
$$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$
$$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

ஆகவே, -3 மற்றும் 3 என்பன $x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

குறிப்பு

- ஒருபல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் என்பது பூச்சியமாக மட்டுமே இருக்க வேண்டியதில்லை எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூச்சியங்கள் இல்லை.
- பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் அனைத்து மெய்யெண்களும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 98 26-12-2019 12:15:00

பயிற்சி 3.2

1. $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2. $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ எனில், $p(2\sqrt{2})$ ஐக் காண்க.

3. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

   (i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$

   (iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ இங்கு $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ \ a \neq 0,\ a, b \in R$

4. பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் காண்க.

   (i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$ (iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

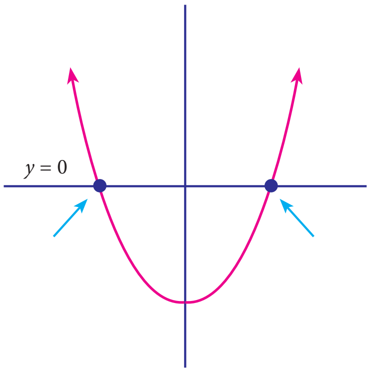
5. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவை பூச்சியங்களா எனச் சரிபார்க்க.

   (i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$

   (iii) $p(x) = ax + b,\ x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

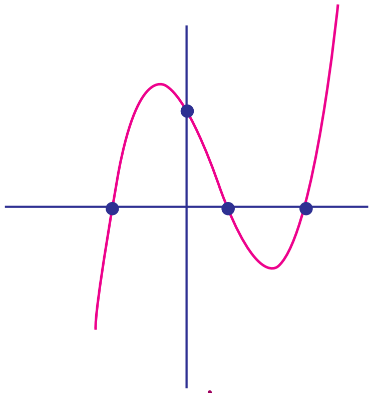
6. பின்வரும் வரைபடங்களால் குறிக்கப்படும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i)



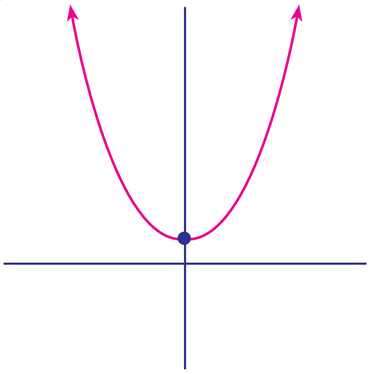
படம். 3.10

(ii)



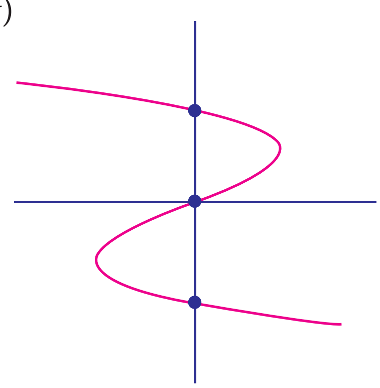
படம். 3.11

(iii)



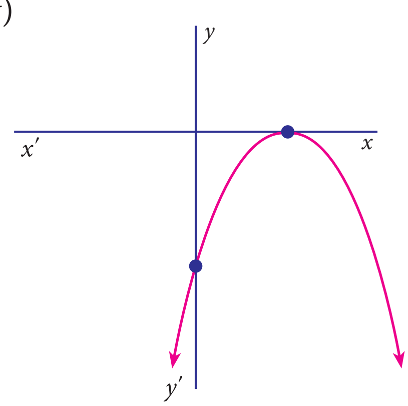
படம். 3.12

(iv)



படம். 3.13

(v)



படம். 3.14

3 Algebra_TM_T1.indd 99 26-12-2019 12:15:01

3.3 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

இப்பகுதியில் மீதியைக் காண எளிய மற்றும் அழகான ஒரு முறையைக் காண்போம் .

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க, மீதித் தேற்றம் என அழைக்கப்படும் மிகவும் பிரபலமான இயற்கணிதத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

> $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 1 ஐ விடப் பெரியதாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருந்து, அதை $(x-a)$ என்ற நேரியக் கோவையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.

மீதித் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம்: இத்தேற்றத்தின் மூலம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிக்கலான நீள்வகுத்தல் முறையில் வகுக்காமலேயே அதன் மீதியைக் காண இயலும். .

குறிப்பு

- $p(x)$ ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.
- $p(x)$ ஐ $(ax-b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(\frac{b}{a})$ ஆகும்.
- $p(x)$ ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(-\frac{b}{a})$ ஆகும்.

CS5HGC

எடுத்துக்காட்டு 3.11

வ. எண்	வினா	தீர்வு	குறிப்பு
1	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ எனவே, தேவையான மீதி 0	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $\Rightarrow x+1 = 0$ $x = -1$
2	$f(x) = x^3 - x + 1$ என்பது $g(x) = 2 - 3x$ இன் மடங்கா என ஆராய்க.	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8-18+27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $\Rightarrow f(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கல்ல.	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ எனச் சமப்படுத்த $x = \frac{2}{3}$ எனக் கிடைக்கிறது.
3	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ எனவே, தேவையான மீதி $5a$	$g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $\Rightarrow x - a = 0$ $x = a$

3 Algebra_TM_T1.indd 100 26-12-2019 12:15:03

4	$2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை k இன் எந்த மதிப்பிற்குப் பல்லுறுப்புக் கோவை $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்?	$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ என்க $f(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆனது மீதியின்றி வகுக்க $f(-2) = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும். அதாவது, $2(-2)^4+3(-2)^3+2k(-2)^2 + 3(-2)+6=0$ $2(16) + 3(-8) + 2k(4) -6 + 6=0$ $32-24 + 8k = 0$ $8k = -8$, $k = -1$ எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில் $k = -1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.	$g(x)=x+2$ $g(x)=0$ $x+2 = 0$ $x = -2$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 -3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் நிரூபி.

தீர்வு $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

$g(x) = x^2 - 3x + 2$ என்க

$= x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x-2) - 1(x-2)$

$= (x-2)(x-1)$

மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$, $(x-2)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$f(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$

$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \quad = 0$

$f(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$

$= 0$

எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$ $(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

அதாவது, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 -3x + 2$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 101 26-12-2019 12:15:04

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-a)$ ஆல் வகுக்க மீதி $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். மீதித் தேற்றம் காரணித் தேற்றத்திற்கு முன்னெடுத்துச் செல்கிறது.

3.3.1 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி $n \geq 1$ மற்றும் 'a' என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில்,

(i) $p(a)=0$ ஆக உள்ளபோது, $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a)=0$ ஆகும்.

நிரூபணம் $p(x)$ என்பது வகுபடும் கோவை மற்றும் $(x-a)$ வகுக்கும் கோவை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் விதியின் படி (division algorithm) $p(x)=(x-a)\,q(x)+p(a)$ இதில், $q(x)$ என்பது ஈவு மற்றும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

(i) $p(a)=0$ எனில், $p(x)=(x-a)\,q(x)$ ஆகும். மேலும், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியானதால்,

$$p(x)=(x-a)g(x)$$

இவ்வாறு,

$$\begin{aligned} p(a) &= (a-a)\,g(a) \\ &= 0\times g(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a)=0$ ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

$a(a\neq 0), b$ என்பன எவையேனும் இரு முழுக்கள் என்க. a என்பது b இன் வகுத்தி எனில், $b = ax$ இங்கு x என்பது ஒரு முழுக்கள் (Integer) ஆகும்

குறிப்பு

- $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x-a=0$, $x=a$)
- $p(-a)=0$ எனில், $(x+a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x+a=0$, $x=-a$)
- $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $ax+b=0, ax=-b, x=-\frac{b}{a}$)
- $p\left(\frac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $ax-b=0, ax=b, x=\frac{b}{a}$)
- $p(a)=0$ மற்றும் $p(b)=0$ எனில், $(x-a)\ (x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  (ஏனெனில் $x-a=0$ or $x-b=0$; $x=a$ or $x=b$)

3 Algebra_TM_T1.indd 102 26-12-2019 12:15:07

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$(x+2)$ என்பது $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(x+2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி $p(-2) = 0$

$$p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2(-2) + 20$$

$$= -8 - 4(4) + 4 + 20$$

$$p(-2) = 0$$

எனவே, $(x+2)$ என்பது $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

> $(x+2)$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $x + 2 = 0$
>
> $x = -2$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$(3x-2)$ என்பது $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ இன் ஒரு காரணியா?

தீர்வு $p(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(3x-2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ ஆகும்.

> $3x-2$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $3x - 2 = 0$
>
> $3x = 2$
>
> $x = \frac{2}{3}$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= 3\left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{120}{9} + \frac{108}{9}$$

$$= \frac{(120-120)}{9}$$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

ஆகவே, $(3x-2)$ என்பது $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- $p(___) = 0$ எனில், $(x+3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(3-x)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(y-3)$ என்பது $p(y)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(-x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(-x+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

3 Algebra_TM_T1.indd 103 26-12-2019 12:15:09

எடுத்துக்காட்டு 3.15 $2x^3-6x^2+mx+4$ இன் ஒரு காரணி $(x-2)$ எனில், m இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$p(x)=2x^3-6x^2+mx+4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, மீதி $p(2)=0$ எனில், $(x-2)$ ஒரு காரணியாகும்.

$$\begin{aligned} p(2) &= 0 \\ 2(2)^3-6(2)^2+m(2)+4 &= 0 \\ 2(8)-6(4)+2m+4 &= 0 \\ -4+2m &= 0 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

> $x-2$ இன் பூச்சியம் காண,
> $x-2=0$
> $x=2$

பயிற்சி 3.3

1. $p(x) = x^3-5x^2+4x-3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x) = x-2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மடங்கா எனச் சரிபார்க்க .

2. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $p(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
   (i) $p(x) = x^3-2x^2-4x-1$; $g(x)=x+1$
   (ii) $p(x) = 4x^3-12x^2+14x-3$; $g(x)=2x-1$
   (iii) $p(x) = x^3-3x^2+4x+50$; $g(x)=x-3$

3. $3x^3-4x^2+7x-5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

4. $x^{2018}+2018$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x-1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

5. $p(x)=2x^3-kx^2+3x+10$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-2)$ஆல் மீதியின்றி வகுத்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க

6. $2x^3+ax^2+4x-12$ மற்றும் x^3+x^2-2x+a என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x-3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதிகள் சமமானால், a இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், அதன் மீதியைக் காண்க.

7. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x-1)$ என்பது காரணியா எனக் காண்க.
   $i)$ $x^3+5x^2-10x+4$ $ii)$ x^4+5x^2-5x+1

8. காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $2x^3-5x^2-28x+15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-5)$ என்பது ஒரு காரணி எனக்காட்டுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 104 26-12-2019 12:15:11

9. $x^3-3x^2-mx+24$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x+3)$ என்பது ஒரு காரணி எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. ax^2+5x+b என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-2)$ மற்றும் $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ஆகியவை காரணிகள் எனில், $a=b$ எனக்காட்டுக.

11. $(x-1)$ என்பது $kx^3-2x^2+25x-26$ ஐ மீதியின்றி வகுக்குமெனில் (வகுத்தி) k இன் மதிப்பைக் காண்க.

12. x^2-2x-8 என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு எனில், $(x+2)$ மற்றும் $(x-4)$ என்பன அவற்றின் பக்கங்களா என்பதைக் காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்க.

3.4 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Identies)

ஒரு சமன்பாடு, அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் பொருந்துமாறு இருக்குமானால் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.

பின்வரும் முற்றொருமைகளை நாம் முன்பே கற்றிருக்கின்றோம்.

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$

குறிப்பு

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
- $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
- $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$
- $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

எடுத்துக்காட்டு 3.16 பின்வருவனவற்றை முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதுக.

(i) $(3x+4y)^2$ (ii) $(2a-3b)^2$ (iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ (iv) $(m+5)(m-8)$

தீர்வு

(i) $(3x+4y)^2$ [ஏனெனில், $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$]

$(3x+4y)^2=(3x)^2+2(3x)(4y)+(4y)^2$ [$a=3x,\ b=4y$ எனப் பிரதியிட]

$=9x^2+24xy+16y^2$

(ii) $(2a-3b)^2$ [ஏனெனில், $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$]

$(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$ [$x=2a,\ y=3b$ எனப் பிரதியிட]

$=4a^2-12ab+9b^2$

3 Algebra_TM_T1.indd 105 26-12-2019 12:15:14

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ [ஏனெனில், $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$]

$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2 - (4y)^2$ [$a = 5x \quad b = 4y$ எனப் பிரதியிட]

$= 25x^2 - 16y^2$

(iv) $(m+5)(m-8)$ [ஏனெனில், $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$]

$(m+5)(m-8) = m^2 + (5-8)m - (5)(8)$

$= m^2 - 3m - 40$ [$x = m,\ a = 5,\ b = 8$ எனப் பிரதியிட]

3.4.1 $(a+b+c)^2$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையின் விரிவாக்கம் (Expansion of Trinomial)

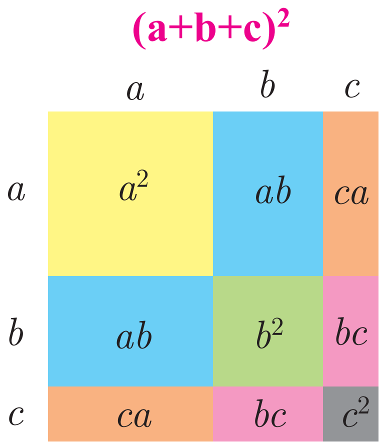
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$x = a+b,\ y = c$ எனப் பிரதியிட,

எனவே, $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c) + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$



எனவே,
$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

எடுத்துக்காட்டு 3.17 $(a-b+c)^2$ இன் விரிவு காண்க.

AJTBDL

தீர்வு

$(a+b+c)^2$ இன் விரிவில் 'b' ஐ '$-b$' எனப் பிரதியிட,

முற்றொருமை $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ இன் படி,

$(a+(-b)+c)^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ca$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் முற்றொருமைகளை விரிவுபடுத்திச் சரிபார்க்க.

$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$

$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$

$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$

$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$

எடுத்துக்காட்டு 3.18 $(2x+3y+4z)^2$ இன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி,

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a = 2x, b = 3y$ மற்றும் $c = 4z$ எனப் பிரதியிட,

3 Algebra_TM_T1.indd 106 26-12-2019 12:15:19

$$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$$
$$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$$

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$3m+2n-4l$ பக்க அளவு கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு காண்க.

தீர்வு

$a = 3m$ $b = 2n$ $c = -4l$ எனப் பிரதியிட,

சதுரத்தின் பரப்பளவு = பக்கம் × பக்கம்

$$= (3m+2n-4l)\times(3m+2n-4l)$$
$$= (3m+2n-4l)^2$$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$[3m+2n+(-4l)]^2 = (3m)^2+(2n)^2+(-4l)^2+2(3m)(2n)+2(2n)(-4l)+2(-4l)(3m)$$
$$= 9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$$

எனவே, சதுரத்தின் பரப்பளவு

$= [9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm]$ சதுர அலகுகள்

3.4.2 மூன்று ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனை உள்ளடக்கிய முற்றொருமைகள் (Identities involving Product of Three Binomials)

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [(x+a)\ (x+b)]\ (x+c)$$
$$= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)$$
$$= x^2(x)+(a+b)(x)(x)+abx+x^2c+(a+b)(x)c+abc$$
$$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

எனவே,

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

கீழ்க்காண்பனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$ (ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

தீர்வு

முற்றொருமை $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ ... (1)

$a = 5$ $b = 6$ $c = 4$ என (1)ல் பிரதியிட,

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$

$$= x^3+(5+6+4)x^2+(30+24+20)x+(5)(6)(4)$$
$$= x^3+15x^2+74x+120$$

3 Algebra_TM_T1.indd 107 26-12-2019 12:15:23

(ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

$$= (3x)^3 + (-1+2-4)(3x)^2 + (-2-8+4)(3x) + (-1)(2)(-4)$$

$$= 27x^3 + (-3)9x^2 + (-6)(3x) + 8$$

$$= 27x^3 - 27x^2 - 18x + 8$$

$x \Rightarrow 3x,\ a \Rightarrow -1$
$b \Rightarrow 2,\quad c \Rightarrow -4$
என (1)ல் பிரதியிட,

3.4.3 $(x+y)^3$ மற்றும் $(x-y)^3$ –ன் விரிவாக்கம்

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

கீழ்க்காணும் முற்றொருமையில், $a = b = c = y$ எனப் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + (y+y+y)x^2 + (yy+yy+yy)x + yyy$$

$$= x^3 + (3y)x^2 + (3y^2)x + y^3$$

எனவே, $(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

அல்லது $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

y –க்கு $-y$, எனப் பிரதியிட,

$(x-y)^3 \equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ அல்லது

$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

எடுத்துக்காட்டு 3.21 $(5a-3b)^3$ ஐ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ என்பது நாம் அறிந்தது.

$$(5a-3b)^3 = (5a)^3 - 3(5a)^2(3b) + 3(5a)(3b)^2 - (3b)^3$$

$$= 125a^3 - 3(25a^2)(3b) + 3(5a)(9b^2) - (3b)^3$$

$$= 125a^3 - 225a^2b + 135ab^2 - 27b^3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

மேற்கண்ட முற்றொருமையை வலப்புறமுள்ள கோவைகளைப் பெருக்கிச் சரிபார்க்கலாம்.

குறிப்பு

- $(x+y+z)=0$ எனில், $x^3+y^3+2^3 = 3xyz$ ஆகும்.
- கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் போன்றவற்றைச் சில முற்றொருமைகளில் பயன்படுத்துதல் (நிரூபணமின்றி).

  (i) $x^3+y^3 \equiv (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ (ii) $x^3-y^3 \equiv (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

3 Algebra_TM_T1.indd 108 26-12-2019 12:15:26

எடுத்துக்காட்டு 3.22 $(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ இன் பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

தீர்வு

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ என்பது நாம் அறிந்ததே!

$$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$$

$$= (2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)$$

$$= 8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23 முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி $10^3-15^3+5^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி , $a+b+c=0$, எனில் $a^3+b^3+c^3=3abc$

இங்கு, $a+b+c = 10-15+5=0$

$10^3+(-15)^3+5^3 = 3(10)(-15)(5)$

$10^3-15^3+5^3 = -2250$

> $a = 10$,
> $b = -15$,
> $c = 5$
> எனப் பிரதியிட

பயிற்சி 3.4

1. கீழ்க்காண்பவற்றை விரிவாக்குக:
   (i) $(x+2y+3z)^2$ (ii) $(-p+2q+3r)^2$
   (iii) $(2p+3)(2p-4)(2p-5)$ (iv) $(3a+1)(3a-2)(3a+4)$

2. முழுவதும் விரிவாக்காமல் x^2 இன் கெழு, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இயற்கணித முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.
   (i) $(x+5)(x+6)(x+7)$ (ii) $(2x+3)(2x-5)(2x-6)$

3. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+14x^2+59x+70$ எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.
   (i) $a+b+c$ (ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (iii) $a^2+b^2+c^2$ (iv) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

4. விரிவுபடுத்துக:
   (i) $(3a-4b)^3$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$

5. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.
   (i) 98^3 (ii) 1001^3

3 Algebra_TM_T1.indd 109 26-12-2019 12:15:29

6. $(x+y+z) = 9$ மற்றும் $(xy+yz+zx) = 26$ எனில், $x^2+y^2+z^2$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

7. $3a+4b=10$ மற்றும் $ab=2$ எனில், $27a^3+64b^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

8. $x-y=5$ மற்றும் $xy=14$ எனில், x^3-y^3 இன் மதிப்பு காண்க.

9. $a+\frac{1}{a}=6$ எனில், $a^3+\frac{1}{a^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

10. $x^2+\frac{1}{x^2}=23$ எனில், $x+\frac{1}{x}$ மற்றும் $x^3+\frac{1}{x^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $\left(y-\frac{1}{y}\right)^3=27$ எனில், $y^3-\frac{1}{y^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

12. சுருக்குக. (i) $(2a+3b+4c)(4a^2+9b^2+16c^2-6ab-12bc-8ca)$

(ii) $(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3xz)$

13. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க.

(i) $7^3-10^3+3^3$ (ii) $1+\frac{1}{8}-\frac{27}{8}$

14. $2x-3y-4z=0$ எனில், $8x^3-27y^3-64z^3$ ஐக் காண்க.

3.5 காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation)

பொதுவாகக் காரணிப்படுத்துதல் என்பது பெருக்கலின் திருப்புகைச் (reverse) செயல்பாடே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : (i) 3யையும், 5யையும் பெருக்கும்போது 15 கிடைக்கும்.
15ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது 3, 5 காரணிகளாகக் கிடைக்கும்.

(ii) $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஐப் பெருக்கும்போது, x^2+5x+6 கிடைக்கிறது. x^2+5x+6 ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகியன காரணிகளாகக் கிடைக்கின்றன.

பெருக்குதல் ↓	காரணிப்படுத்துதல் ↑
$(x+3)(x+2)$	$(x+3)(x+2)$
$x(x+2)+3(x+2)$	$x(x+2)+3(x+2)$
$x^2+2x+3x+6$	$x^2+2x+3x+6$
x^2+5x+6	x^2+5x+6

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பெரிய படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிறிய படியுடைய கோவைகளின் பெருக்கற்பலனாக மாற்றி எழுதும் முறையே காரணிப்படுத்துதல் ஆகும். இங்கு மீளக் காரணிப்படுத்த வாய்ப்பில்லாதவாறு சிறிய படியுடைய கோவைகள் அமைதல் வேண்டும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 110 26-12-2019 12:15:32

காரணிப்படுத்துதலில் இரு முக்கிய வழிகள்

(i) பொதுவான காரணிமுறை

$ab + ac$

$a \times b + a \times c$

$a(b+c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) குழுவாக எழுதுதல்

$a + b - pa - pb$

$(a+b) - p(a+b)$ குழுவாக அமைத்தல்

$(a+b)(1-p)$ காரணி அமைப்பு

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்தும்போது, பொதுவான காரணிகளை எடுத்துக் காரணி அமைப்பாக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.24 காரணிப்படுத்துக.

(i) $am + bm + cm$ (ii) $a^3 - a^2b$ (iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$ (iv) $x + y - 1 - xy$

தீர்வு

(i) $am + bm + cm$

$am + bm + cm$

$m(a+b+c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) $a^3 - a^2b$

$a^2 \cdot a - a^2 \cdot b$ குழுவாக அமைத்தல்

$a^2 \times (a-b)$ காரணி அமைப்பு

(iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$

$5a - 10b + 2ac - 4bc$

$5(a-2b) + 2c(a-2b)$

$(a-2b)(5+2c)$

(iv) $x + y - 1 - xy$

$x - 1 + y - xy$

$(x-1) + y(1-x)$

$(x-1) - y(x-1)$

$(x-1)(1-y)$

$(a-b) = -(b-a)$

3.5.4 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Identity)

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2$ (ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a-b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$ (iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a+b+c)^2$

(v) $a^3 + b^3 \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (vi) $a^3 - b^3 \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(vii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

குறிப்பு

- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$; • $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$; • $a^6 - b^6 = (a+b)(a-b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(i) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ என நிரூபி. (ii) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$ என நிரூபி.

எடுத்துக்காட்டு 3.25 காரணிப்படுத்துக.

(i) $9x^2+12xy+4y^2$ (ii) $25a^2-10a+1$ (iii) $36m^2-49n^2$

(iv) x^3-x (v) x^4-16 (vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

தீர்வு

(i) $9x^2+12xy+4y^2 = (3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$

$= (3x+2y)^2$ [ஏனெனில் $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$]

(ii) $25a^2-10a+1 = (5a)^2-2(5a)(1)+1^2$

$= (5a-1)^2$ [ஏனெனில் $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$]

(iii) $36m^2-49n^2 = (6m)^2-(7n)^2$

$= (6m+7n)(6m-7n)$ [ஏனெனில் $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

(iv) $x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x^2-1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4-16 = x^4-2^4$ [ஏனெனில் $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$]

$= (x^2+2^2)(x^2-2^2)$

$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

$= (-x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(-x)(2y)+2(2y)(3z)+2(3z)(-x)$

$= (-x+2y+3z)^2$ (அல்லது) $(x-2y-3z)^2$

எடுத்துக்காட்டு 3.26 பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $27x^3+125y^3$ (ii) $216m^3-343n^3$

(iii) $2x^4-16xy^3$ (iv) $8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$

சிந்தனைக் களம்

பின்வருபவை 15ஆல் வகுபடுமா எனச் சோதிக்க.

(i) 2017^3+2018^3

(ii) 2018^3-1973^3

தீர்வு

(i) $27x^3+125y^3 = (3x)^3+(5y)^3$

$= (3x+5y)\left((3x)^2-(3x)(5y)+(5y)^2\right)$ [ஏனெனில் $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$]

$= (3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$

3 Algebra_TM_T1.indd 112 26-12-2019 12:15:41

(ii) $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3$ [ஏனெனில் $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$]

$$= (6m - 7n)\left((6m)^2 + (6m)(7n) + (7n)^2\right)$$

$$= (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$$

(iii) $2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3)$

$$= 2x\left(x^3 - (2y)^3\right)$$ [ஏனெனில் $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$]

$$= 2x\left((x - 2y)(x^2 + (x)(2y) + (2y)^2)\right)$$

$$= 2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

(iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$$

$$= (2x + 3y + 4z)(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 12yz - 8xz)$$

பயிற்சி 3.5

1. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $2a^2 + 4a^2b + 8a^2c$ (ii) $ab - ac - mb + mc$
2. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $3a^2 - 24ab + 48b^2$ (iii) $x^5 - 16x$
   (iv) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 23$ (v) $6 - 216x^2$ (vi) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$
3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$
   (ii) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30xz$
4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 8y^3$ (iii) $a^6 - 64$
5. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ (ii) $l^3 - 8m^3 - 27n^3 - 18lmn$

3.5.5 $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் (மூவுறுப்புக்கோவை) காரணிப்படுத்தல் (Factorising the Quadratic Polynomial (Trinomial))

$ax^2 + bx + c$ இன் நேரிய காரணிகள் $(kx + m)$ மற்றும் $(lx + n)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n) = klx^2 + (lm + kn)x + mn$

3 Algebra_TM_T1.indd 113 26-12-2019 12:15:45

x^2, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இருபுறமும் ஒப்பீடு செய்யும்போது நமக்கு $a = kl$, $b = (lm + kn)$ மற்றும் $c = mn$ எனக் கிடைக்கின்றன. இதில் ac என்பது kl மற்றும் mn இன் பெருக்கற்பலன் ஆகும். இது x இன் கெழுவான lm மற்றும் kn இன் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம். ஆகவே, $(kl \times mn) = (lm \times kn)$.

$ax^2 + bx + c$ ஐக் காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள்

படி 1 : x^2 இன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும். அதாவது, ac.

படி 2 : ac ஐ இரு எண்களாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும்போது எண்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் முறையே b மற்றும் ac இக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

படி 3 : இவ்வெண்களை இரு சோடிகளாகப் பிரித்துக் காரணிப்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 + 15x + 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ உடன் $2x^2 + 15x + 27$ ஐ சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = 15,\ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times 27 = 54$

மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

6, 9 என்ற காரணிகள் $b = 15$ மற்றும் $ac = 54$ என்பதை நிறைவு செய்வதைக் காண முடிகிறது. மைய உறுப்பை $6x$ மற்றும் $9x$ என மாற்றி அமைக்க.

எண்களின் பெருக்கல் **ac = 54**	எண்களின் கூடுதல் **b = 15**	எண்களின் பெருக்கல் **ac = 54**	எண்களின் கூடுதல் **b = 15**
1 × 54	55	–1 × –54	–55
2 × 27	29	–2 × –27	–29
3 × 18	21	–3 × –18	–21
6 × 9	**15**	–6 × –9	–15

6 மற்றும் 9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்

$$2x^2 + 15x + 27 = 2x^2 + 6x + 9x + 27$$
$$= 2x(x+3) + 9(x+3)$$
$$= (x+3)(2x+9)$$

எனவே, $2x^2 + 15x + 27 = (x+3)\ (2x+9)$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 - 15x + 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ உடன் $2x^2 - 15x + 27$ ஐச் சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = -15,\ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2\times 27 = 54$,

மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

மைய உறுப்பை $-6x$ மற்றும் $-9x$ என மாற்றி அமைக்க,

எண்களின் பெருக்கல் **ac = 54**	எண்களின் கூடுதல் **b = –15**	எண்களின் பெருக்கல் **ac = 54**	எண்களின் கூடுதல் **b =–15**
1 × 54	55	–1 × –54	–55
2 × 27	29	–2 × –27	–29
3 × 18	21	–3 × –18	–21
6 × 9	15	**–6 × –9**	**–15**

–6 மற்றும் –9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்

$$2x^2 - 15x + 27 = 2x^2 - 6x - 9x + 27$$
$$= 2x(x-3) - 9(x-3) = (x-3)(2x-9)$$

எனவே, $2x^2 - 15x + 27$ இன் காரணிகள் $(x-3)$ மற்றும் $(2x-9)$ ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 114 26-12-2019 12:15:48

எடுத்துக்காட்டு 3.29 காரணிப்படுத்துக $2x^2 + 15x - 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ ஐ $2x^2 + 15x - 27$ உடன் சமப்படுத்த,

$a = 2,\ b = 15,\ c = -27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2\times -27 = -54$, மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

மைய உறுப்பை $-3x$ மற்றும் $18x$ என மாற்றி அமைக்க,

எண்களின் பெருக்கல் **ac = –54**	எண்களின் கூடுதல் **b = 15**	எண்களின் பெருக்கல் **ac = –54**	எண்களின் கூடுதல் **b = 15**
–1 × 54	53	1 × –54	–53
–2 × 27	25	2 × –27	–25
–3 × 18	**15**	3 × –18	–15
–6 × 9	3	6 × –9	–3

–3 மற்றும் **18** ஆகியன தேவையான காரணிகள்

$$2x^2 + 15x - 27 = 2x^2 + 18x - 3x - 27$$

$$= 2x(x + 9) - 3(x + 9) \qquad = (x + 9)(2x - 3)$$

எனவே, $2x^2 + 15x - 27$ இன் காரணிகள் $(x + 9)$ மற்றும் $(2x - 3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30 காரணிப்படுத்துக : $2x^2 - 15x - 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ ஐ $2x^2 - 15x - 27$ உடன் சமப்படுத்த

$a = 2,\ b = -15,\ c = -27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2\times -27 = -54$, மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

மைய உறுப்பை $-18x$ மற்றும் $3x$ என மாற்றி அமைக்க,

எண்களின் பெருக்கல் **ac = – 54**	எண்களின் கூடுதல் **b = – 15**	எண்களின் பெருக்கல் **ac = – 54**	எண்களின் கூடுதல் **b = – 15**
–1 × 54	53	1 × –54	–53
–2 × 27	25	2 × –27	–25
–3 × 18	15	**3 × –18**	**–15**
–6 × 9	3	6 × –9	–3

3 மற்றும் –18 ஆகியன தேவையான காரணிகள்

$$2x^2 - 15x - 27 = 2x^2 - 18x + 3x - 27$$

$$= 2x(x - 9) + 3(x - 9) \qquad = (x - 9)(2x + 3)$$

எனவே, $2x^2 - 15x - 27 = (x - 9)\,(2x + 3)$

எடுத்துக்காட்டு 3.31 $(x + y)^2 + 9(x + y) + 20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$x + y = p$, என்க.

$p^2 + 9p + 20$ ஐ

$ax^2 + bx + c$ உடன் சமப்படுத்த,

$a = 1,\ b = 9,\ c = 20$

பெருக்கற்பலன், $ac = 1\times 20 = 20$,

மற்றும் கூடுதல் $b=9$

எண்களின் பெருக்கல் **ac = 20**	எண்களின் கூடுதல் **b = 9**	எண்களின் பெருக்கல் **ac = 20**	எண்களின் கூடுதல் **b = 9**
1 × 20	21	–1 × –20	–21
2 × 10	12	–2 × –10	–12
4 × 5	**9**	–4 × –5	–9

4 மற்றும் **5** ஆகியன தேவையான காரணிகள்

3 Algebra_TM_T1.indd 115 26-12-2019 12:15:51

மைய உறுப்பை $4p$ மற்றும் $5p$ என மாற்றி அமைக்க,

$$\begin{aligned} p^2+9p+20 &= p^2+4p+5p+20 \\ &= p(p+4)+5(p+4) \\ &= (p+4)(p+5) \end{aligned}$$

AK37F9

$p=x+y$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(x+y)^2+9(x+y)+20=(x+y+4)(x+y+5)$$

பயிற்சி 3.6

1. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^2+10x+24$ (ii) $z^2+4z-12$ (iii) $p^2-6p-16$

(iv) $t^2+72-17t$ (v) $y^2-16y-80$ (vi) $a^2+10a-600$

2. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

(i) $2a^2+9a+10$ (ii) $5x^2-29xy-42y^2$ (iii) $9-18x+8x^2$

(iv) $6x^2+16xy+8y^2$ (v) $12x^2+36x^2y+27y^2x^2$ (vi) $\left(a+b\right)^2+9\left(a+b\right)+18$

3. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

(i) $(p-q)^2-6(p-q)-16$ (ii) $m^2+2mn-24n^2$ (iii) $\sqrt{5}a^2+2a-3\sqrt{5}$

(iv) a^4-3a^2+2 (v) $8m^3-2m^2n-15mn^2$ (vi) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}$

3.6 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் (Division of Polynomials)

13 மற்றும் 5 என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம். 13 ஐ 5 ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு மற்றும் மீதி என்ன?

ஈவு 2 மற்றும் மீதி3. இதையே 13 என்பதை $(5\times2)+3$ என எழுதலாம்.

தற்போது முயன்று பார்ப்போம்.

வகுக்க	கிடைக்கும் வடிவம்	மீதி	வகுப்பான்
11 ஐ 4 ஆல்	$(4\times2)+3$	3	4
22 ஐ 11 ஆல்	$(11\times2)+0$	0	11

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, மீதியானது வகுத்தியை விடக் குறைவானது என்பது தெளிவாகிறது. மீதி பூச்சியமெனில் வகுபடும் எண்ணானது வகுத்தியின் மடங்காகும் எனக் கூற இயலும்.

> வகுபடும் எண் = (வகுத்தி × ஈவு) + மீதி.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க இயலுமா?

இயலும் வழக்கமான எண் வகுத்தலைப் போல வகுக்கலாம்.

பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தலை ஓருறுப்புக் கோவை வகுத்தலிலிருந்து தொடங்குவோம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 116 26-12-2019 12:15:54

3.6.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கான வகுத்தல் விதியின் வடிவம் (Division Algorithm for Polynomials)

பொதுவாக, $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் $p(x)$ இன் படி $\geq$ $g(x)$ இன் படி மற்றும் $g(x) \neq 0$ எனில், $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ என்ற இரு தனித்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x) \qquad \ldots (1)$$

என்ற வடிவத்தில் கிடைக்கும்.

இங்கு $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ இன் படி $<$ $g(x)$ இன் படி.

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்பது வகுபடும் எண், $g(x)$ என்பது வகுத்தி, $q(x)$ என்பது ஈவு $r(x)$ என்பது மீதி. எனவே, சமன்பாடு (1) யைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

வகுபடும் கோவை = (வகுக்கும் கோவை × ஈவு) + மீதி.

> $r(x)$ பூச்சியம் எனில், $p(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கு. அதாவது $g(x)$ என்பது $p(x)$ ஐ வகுக்கும்.

இது சற்றுக் கடினமாகத் தோன்றினால் கவலை வேண்டாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுப்பது எப்படி என்று தெரிந்துகொண்டு பயிற்சி செய்தால் எளிதாகும். இதற்குக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் உதவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.32 $x^3 - 4x^2 + 6x$ ஐ x ஆல் வகுக்க. இங்கு $x \neq 0$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, \quad x \neq 0$$

$$= x^2 - 4x + 6$$

எடுத்துக்காட்டு 3.33 $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$ இன் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 5x-2 \\ \hline x-1 & 5x^2 - 7x + 2 \\ & 5x^2 - 5x \\ & (-) \quad (+) \\ \hline & \quad\quad -2x + 2 \\ & \quad\quad -2x + 2 \\ & \quad\quad (+) \quad (-) \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \\ \hline \end{array}$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2-5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

$\therefore$ ஈவு $= 5x-2$ மீதி $= 0$

3 Algebra_TM_T1.indd 117 26-12-2019 12:15:57

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1$. (ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7,\ g(x) = x^2+x+1$

தீர்வு

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 5x + 10 \\ \hline
2x+1 & 8x^3 - 6x^2 + 15x - 7 \\
 & 8x^3 + 4x^2 \\
 & (-)\quad (-) \\ \hline
 & -10x^2 + 15x \\
 & -10x^2 - 5x \\
 & (+)\quad (+) \\ \hline
 & 20x - 7 \\
 & 20x + 10 \\
 & (-)\quad (-) \\ \hline
 & -17
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= 4x^2 - 5x + 10$, மீதி $= -17$

(ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7,\ g(x) = x^2+x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 8 \\ \hline
x^2+x+1 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 0x - 7 \\
 & x^4 + x^3 + x^2 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\ \hline
 & -4x^3 + 4x^2 + 0x \\
 & -4x^3 - 4x^2 - 4x \\
 & (+)\quad (+)\quad (+) \\ \hline
 & 8x^2 + 4x - 7 \\
 & 8x^2 + 8x + 8 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\ \hline
 & -4x - 15
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= x^2 - 4x + 8$, மீதி $= -4x - 15$

3.6.2 தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுப்பதற்குத் தொகுமுறை வகுத்தல் என்பது ஒரு சுருக்கமான முறையாகும். இதில் மாறிகளைப் பயன்படுத்தாமல் இருப்பதால் அது கணக்கீட்டிற்கு எளிமையாகவும், நீள்வகுத்தலை விடக் குறைவான இடத்தையும் எடுத்துக்கொள்கிறது. இதுவே இதன் முக்கியப் பயனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.35

$p(x) = (3x^3 - 2x^2 - 5 + 7x)$ ஐ $d(x) = x + 3$ ஆல் வகுத்து ஈவு $q(x)$ மற்றும் மீதி காண்க.

தீர்வு படி 1: வகுபடும் கோவை மற்றும் வகுக்கும் கோவை இரண்டையும் திட்ட வடிவிற்கு மாற்றுக.

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (திட்ட வடிவம்)

$x + 3$ (திட்ட வடிவம்)

வகுபடும் கோவையின் கெழுக்களை முதல் வரிசையில் எழுதவும். விடுபட்ட (இல்லாத) உறுப்பின் கெழுவுக்கு '0' எனப் பிரதியிட,

$3 \quad -2 \quad 7 \quad -5$

படி 2: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

$x + 3 = 0$ எனவே $x = -3$

3 Algebra_TM_T1.indd 118 26-12-2019 12:15:58

படி 3: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தை முதல் வரிசைக்கு முன்னால் எழுதுக. இரண்டாம் வரிசையில் பூச்சியத்தை முதல் உறுப்புக்குக் கீழே எழுதுக.

–3	3	–2	7	–5	முதல் வரிசை
	0				இரண்டாம் வரிசை

படி 4: இரண்டாம், மூன்றாம் வரிசையைக் கீழ்க்காணுமாறு பூர்த்தி செய்க.

–3	3		–2		7		–5	முதல் வரிசை
	0	–3×3 →	–9	–3×–11 →	33	–3×40 →	–120	இரண்டாம் வரிசை
	3		–11		40		–125	மூன்றாம் வரிசை

மூன்றாவது வரிசையில் உள்ள கடைசி உறுப்பைத் தவிர ஏனைய உறுப்புகள் அனைத்தும் ஈவின் கெழுக்களாகும்.

ஈவு $3x^2 - 11x + 40$ மற்றும் மீதி -125.

எடுத்துக்காட்டு 3.36

தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி $(3x^3 - 4x^2 - 5)$ ஐ $(3x+1)$ ஆல் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க.

$3x+1$ இன் பூச்சியம் காண,

$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

தீர்வு

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5,\ d(x) = (3x+1)$ என்க.

திட்ட வடிவம் $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 0x - 5$ மற்றும் $d(x) = 3x + 1$

$-\frac{1}{3}$	3	–4	0	–5	
	0	–1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$	
	3	–5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$	மீதி

$$3x^3 - 4x^2 - 5 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 5x + \frac{5}{3}\right) - \frac{50}{9}$$

$$= \frac{(3x+1)}{3} \times 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \frac{50}{9}$$

$$3x^3 - 4x^2 - 5 = (3x+1)\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{50}{9}\right)$$

[குறிப்பு: ($p(x) = d(x)q(x) + r$]

எனவே, ஈவு $\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right)$ மற்றும் மீதி $\frac{-50}{9}$

3 Algebra_TM_T1.indd 119 26-12-2019 12:16:00

எடுத்துக்காட்டு 3.37 $x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ ஐ $(x+4)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு x^3-ax^2+bx+6, எனில், a, b இன் மதிப்பு மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$x+4$ இன் பூச்சியம் காண,

$x+4=0$

$x=-4$

$p(x)=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ என்க.

திட்ட வடிவம் $=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$

கெழுக்கள் 1 10 35 50 29

–4	1	10	35	50	29	
	0	–4	–24	–44	–24	
	1	6	11	6	5	மீதி

ஈவு $x^3+6x^2+11x+6$ ஐ x^3-ax^2+bx+6 உடன் ஒப்பிட,

x^2 இன் கெழு $6=-a$ x இன் கெழு $11=b$

ஆகவே, $a=-6$, $b=11$ மற்றும் மீதி $=5$.

பயிற்சி 3.7

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுத்து ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.
   (i) $(4x^3+6x^2-23x+18)\div(x+3)$ (ii) $(8y^3-16y^2+16y-15)\div(2y-1)$
   (iii) $(8x^3-1)\div(2x-1)$ (iv) $(-18z+14z^2+24z^3+18)\div(3z+4)$
2. செவ்வகத்தின் பரப்பு $x^2+7x+12$. அதன் அகலம் $(x+3)$ எனில், அதன் நீளம் காண்க.
3. இணைகரத்தின் பரப்பு $25x^2-16$. அதன் அடிப்பக்கம் $(5x+4)$ எனில், அதன் உயரம் காண்க.
4. $(x+5)$ விவரங்களின் கூடுதல் (x^3+125) எனில், விவரங்களின் சராசரியைக் காண்க.
5. தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி ஈவு மற்றும் மீதி காண்க:
   (i) $(x^3+x^2-7x-3)\div(x-3)$ (ii) $(x^3+2x^2-x-4)\div(x+2)$
   (iv) $(3x^3-2x^2+7x-5)\div(x+3)$ (vi) $(8x^4-2x^2+6x+5)\div(4x+1)$
6. $(8x^4-2x^2+6x-7)$ ஐ $(2x+1)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $(4x^3+px^2-qx+3)$ எனில், p, q மற்றும் மீதியைக் காண்க.
7. $3x^3+11x^2+34x+106$ ஐ $x-3$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $3x^2+ax+b$ எனில், a, b மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

3.6.3 தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Synthetic Division)

ஒரு முப்படிக் கோவையைத் தொகுமுறை வகுத்தலின் உதவியால் எவ்வாறு ஒருபடிக் கோவைகளாகக் காரணிப்படுத்த இயலும் என்பதை இப்பகுதியில் நாம் கற்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ –க்கு ஒருபடிக் காரணி ஒன்றைத் தெரிந்து

3 Algebra_TM_T1.indd 120 26-12-2019 12:16:03

கொண்ட பிறகு, தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி $p(x)$ இன் இருபடிக் காரணியைக் காணலாம். மேலும், அந்த இருபடிக் கோவையை இயலுமெனில் ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

- மாறிலிக் கோவை அல்லாத ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ –க்கு $p(a) = 0$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = a$ என்பது அதன் பூச்சியமாகும்.
- $x-a$ ஆனது $p(x)$ –க்கு ஒரு காரணி என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும். (காரணித் தேற்றம்)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x - 1)$ மற்றும் $(x + 1)$ ஆகியன காரணிகளாகுமா என்பதை அடையாளம் காணுதல்:

- $p(x)$ இன் அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்பின் கூடுதல் பூச்சியம் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $p(x)$ –க்கு $(x-1)$ ஒரு காரணியாகும்.
- $p(x)$ இன் இரட்டைப் படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளின் கூடுதலானது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $(x+1)$ ஆனது $p(x)$ –க்கு ஒரு காரணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.38

(i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ –க்கு $(x - 1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

(ii) $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ –க்கு $(x + 1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

தீர்வு (i) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ என்க.

கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

எனவே, $(x - 1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ என்க.

இரட்டைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 7 + 7 = 14$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 = 14$

எனவே, $(x + 1)$ என்பது $q(x)$ இன் ஒரு காரணி.

எடுத்துக்காட்டு 3.39

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ ஐ நேரிய காரணிகளாகக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ என்க.

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 + 32 + 20 = 66 \neq 0$

எனவே, $(x - 1)$ என்பது ஒரு காரணியல்ல.

இரட்டைப்படை அடுக்கு கொண்ட உறுப்பின் கெழு மற்றும் மாறிலியின் கூடுதல் $= 13 + 20 = 33$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 32 = 33$

ஆகவே, $(x + 1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

3 Algebra_TM_T1.indd 121 26-12-2019 12:16:04

மற்ற நேரிய காரணிகளைக் காணத் தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

முறை I

-1	1	13	32	20	
	0	-1	-12	-20	
-2	1	12	20	0	(மீதி)
	0	-2	-20		
	1	10	0	(மீதி)	

$$p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$$

எனவே,

$$x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x+1)(x+2)(x+10)$$

முறை II

-1	1	13	32	20	
	0	-1	-12	-20	
	1	12	20	0	(மீதி)

பிறகு, $p(x) = (x+1)(x^2 + 12x + 20)$

இப்போது, $x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$

$= x(x+10) + 2(x+10)$

$= (x+2)(x+10)$

எனவே, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x+1)(x+2)(x+10)$

எடுத்துக்காட்டு 3.40 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ என்க.

$x = 1$ எனில் $p(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0$ $\quad (x-1)$ ஒரு காரணியல்ல.

$x = -1$ எனில் $p(-1) = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0$ $\quad (x+1)$ ஒரு காரணியல்ல.

ஆகவே, மற்ற x இன் காரணிகளைக் காண முயன்று தவறிக் கற்றல் (trial and error method) முறையைப் பயன்படுத்தவும்.

$x = 2$ எனில்,

$p(2) = 2^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 24$

$= 8 - 20 - 4 + 24$

$= 8 \neq 0$

ஆகவே, $(x-2)$ ஒரு காரணியல்ல

$x = -2$ எனில்,

$p(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$

$= -8 - 20 + 4 + 24$

$p(-2) = 0$

ஆகவே, $(x+2)$ ஒரு காரணியாகும்

குறிப்பு

$x^2 - 7x + 12$ –க்கு 3 ஆனது ஒரு பூச்சியமா என சோதிக்கும்போது, 3 ஒரு பூச்சியமில்லை எனில், -3 அல்லது 4 அல்லது, -4 … பூச்சியமா எனச் சோதிக்க.

3 Algebra_TM_T1.indd 122 26-12-2019 12:16:07

–2	1	–5	–2	24
	0	–2	+14	–24
3	1	–7	12	0 (மீதி)
	0	3	–12	
	1	–4	0 (மீதி)	

எனவே, $(x+2)(x-3)(x-4)$ ஆகியன காரணிகள்.

ஆகவே, $x^3-5x^2-2x^2+24=(x+2)(x-3)(x-4)$

பயிற்சி 3.8

1. தொகுமுறை வகுத்தல் முறையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^3-3x^2-10x+24$ (ii) $2x^3-3x^2-3x+2$

(iii) $-7x+3+4x^3$ (iv) $x^3+x^2-14x-24$

(v) x^3-7x+6 (vi) x^3-10x^2-x+10

3.7 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) [Greatest Common Divisor (GCD)]

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியானது (சுருக்கமாக மீ.பொ.வ) அதன் பொதுக் காரணிகளுள் அதிகபட்சப் பொதுப்படியைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இதுவே மீப்பெரு பொதுக்காரணி (மீ.பொ.கா) [Highest Common Factor (HCF)] என்பது தெரிந்ததே.

எடுத்துக்காட்டாக, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ என்ற கோவைகளைக் கருதுவோம். 14 மற்றும் 42இன் பொது வகுத்திகள் $2, 7$ மற்றும் 14 ஆகும். இவற்றின் மீ.பொ.வ 14 ஆகும். xy^2 மற்றும் xy இன் பொது வகுத்திகளாவன x, y மற்றும் xy இவற்றின் மீ.பொ.வ xy ஆகும்.

$$14xy^2 = 1\times 2\times 7\times \ x\times y\times y$$

$$42xy = 1\times 2\times 3\times 7\times x\times y$$

எனவே, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ இன் மீ.பொ.வ $14xy$ ஆகும்.

காரணிப்படுத்துதல் முறையில் மீ.பொ.வ. காணுதல் (To find the GCD by Factorisation)

(i) கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோவையையும், காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

(ii) வகுக்கும் கோவைகளின் பொதுவான உயர் படி கொண்ட கோவையே மீ.பொ.வ ஆகும்.

(iii) கோவைகளில் கெழுக்கள் எண்களாக இருப்பின், அவற்றின் மீ.பொ.வ கண்டறிந்து அதைக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ.வுடன் பெருக்க வேண்டும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 123 26-12-2019 12:16:08

எடுத்துக்காட்டு 3.41

கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ. காண்க.

(i) $16x^3y^2, 24xy^3z$ (ii) (y^3+1) மற்றும் (y^2-1)

(iii) $2x^2-18$ மற்றும் x^2-2x-3 (iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

தீர்வு

(i) $16x^3y^2 = 2\times2\times2\times2\times x^3y^2 = 2^4\times x^3\times y^2 = 2^3\times2\times x^2\times x\times y^2$

$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= (y+1)$

(iii) $2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x^2-3^2) = 2(x+3)(x-3)$

$x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3)$

$= (x-3)(x+1)$

ஆகவே, மீ.பொ.வ $= (x-3)$

(iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

1ஐத் தவிர, பொதுவான காரணி இல்லை. எனவே, மீ.பொ.வ $= 1$.

பயிற்சி 3.9

1. கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்க.

(i) p^5, p^{11}, p^9 (ii) $4x^3, y^3, z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3, 15a^3b^2c^4$ (iv) $64x^8, 240x^6$

(v) $ab^2c^3, a^2b^3c, a^3bc^2$ (vi) $35x^5y^3z^4, 49x^2yz^3, 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c, 100a^2bc, 125ab$ (viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2. கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்க.

(i) $(2x+5), (5x+2)$ (ii) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$ (iii) $2a^2+a, 4a^2-1$

(iv) $3a^2, 5b^3, 7c^4$ (v) x^4-1, x^2-1 (vi) $a^3-9ax^2, (a-3x)^2$

3 Algebra_TM_T1.indd 124 26-12-2019 12:16:14

3.8 இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு (Linear Equation in Two Variables)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + c = 0$ ஆகும். இதில், a, b, c ஆகியன மெய்யெண்கள், a மற்றும் b ஆகிய இரண்டும் பூச்சியமற்றவை (x, y என்பன இரண்டு மாறிகள், c என்பது மாறிலி).

எடுத்துக்காட்டுகள்

இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு	இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடல்லாதவை
$2x + y = 4$	$xy + 2x = 5$ (ஏன்?)
$-5x + \frac{1}{2} = y$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (ஏன்?)
$5x = 35y$	$x(x+1) = y$ (ஏன்?)

ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் அந்த இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடாகும். (இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு சமன்பாட்டின் படி 1 எனில் அச்சமன்பாடு இரு மாறியில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு எனப்படும்).

உதாரணமாக $2x + y = 4$ என்பது நேரியச் சமன்பாடாகுமா? நீங்கள் நினைப்பது சரிதான். ஏனென்றால் இச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும். அதனைச் சரிபார்ப்போமா ?

$2x + y = 4$ என்ற வரைபடம் வரைய சில புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை நாம் இணைக்க வேண்டி இருக்கிறது. (அப்புள்ளிகளே சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வரிசைச் சோடிகள் ஆகும்). கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடிப் புள்ளிகளைக் கொண்டு $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்க

$y = 4 - 2x$ என்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். (ஏன்? எப்படி?)

$x = -4$ எனில், $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

$x = -2$ எனில், $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

$x = 0$ எனில், $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

$x = +1$ எனில், $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

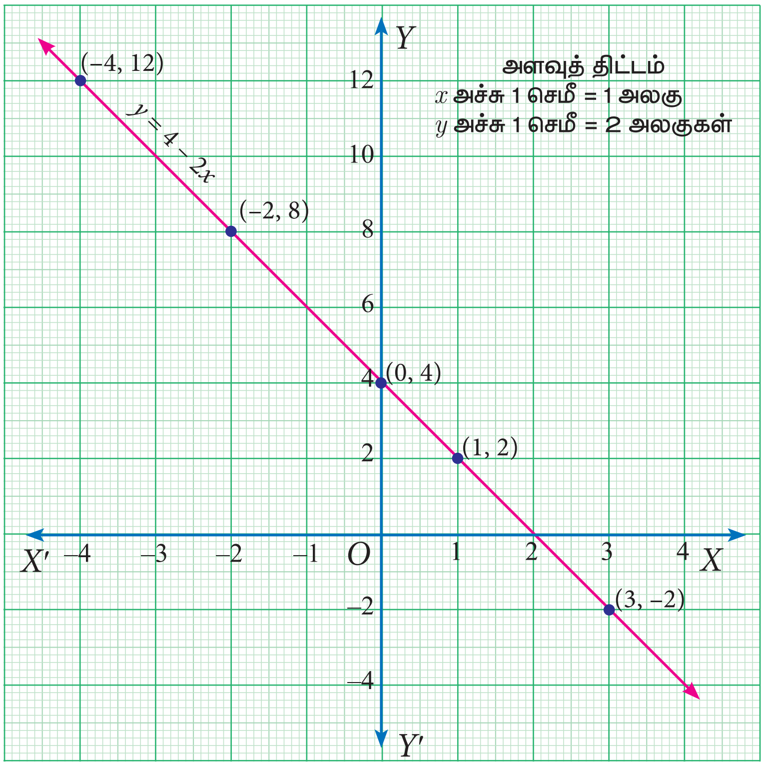
$x = +3$ எனில், $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

இந்த மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்:

x-இன் மதிப்பு	-4	-2	0	1	3
y-இன் மதிப்பு	12	8	4	2	-2

(ஒரு கோட்டினை அமைக்க, நமக்குப் பல புள்ளிகள் தேவைப்படுகிறதா? ஒரு கோட்டினை அமைக்க இரண்டு புள்ளிகள் போதுமானது. இதைச் சரிபார்ப்பதற்காகக் கூடுதலாக ஒரு புள்ளியினை எடுத்துக்கொள்ளலாம்).

3 Algebra_TM_T1.indd 125 26-12-2019 12:16:14



படம் 3.15

$(-4,12)$, $(-2,8)$, $(0,4)$, $(1,2)$ மற்றும் $(3,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது அவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். இதிலிருந்து $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோடாக அமைகிறது என்பது தெளிவாகின்றது. (ஆகவே இது ஒரு நேரிய சமன்பாடு எனப்படுகிறது).

கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளும் இந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்வதால் கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளும் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

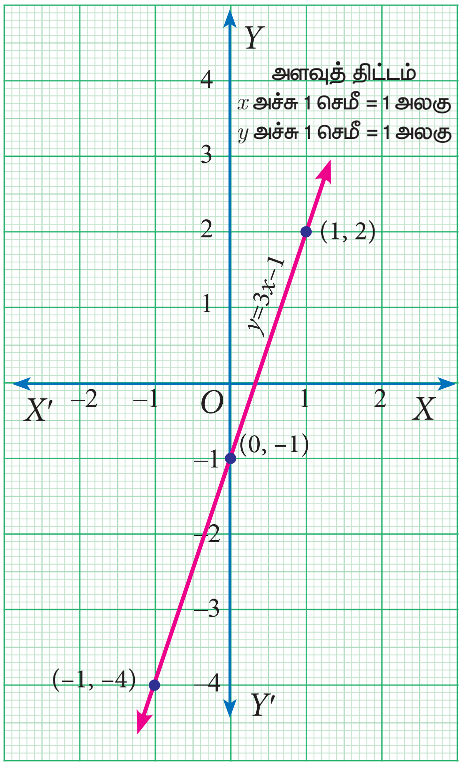
எடுத்துக்காட்டு 3.42 பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

தீர்வு

(i) $y = 3x - 1$ என்ற கோட்டிற்கான புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளைக் காண்பதற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

x-இன் மதிப்பாக எந்த மதிப்பை வேண்டுமென்றாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம், இங்கு -1, 0 மற்றும் 1 ஐ மட்டுமே எடுத்துக்கொள்வோம் .



படம் 3.16

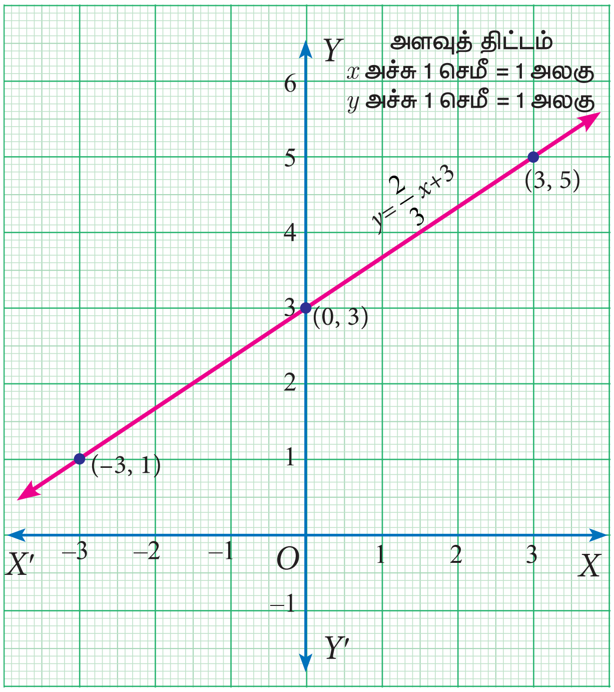
3 Algebra_TM_T1.indd 126 26-12-2019 12:16:16

$x = -1$ எனில், $y = 3(-1)-1 = -4$
$x = 0$ எனில், $y = 3(0)-1 = -1$
$x = 1$ எனில், $y = 3(1)-1 = 2$

x	-1	0	1
y	-4	-1	2

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-1,-4), (0,-1), (1,2)$.



படம் 3.17

(ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$ என்ற கோட்டின் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளைக் காண்பதற்கான அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

x இன் மதிப்புகளை $-3, 0, 3$ என எடுத்துக்கொள்கிறோம். (ஏன்?)

$x = -3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(-3)+3 = 1$

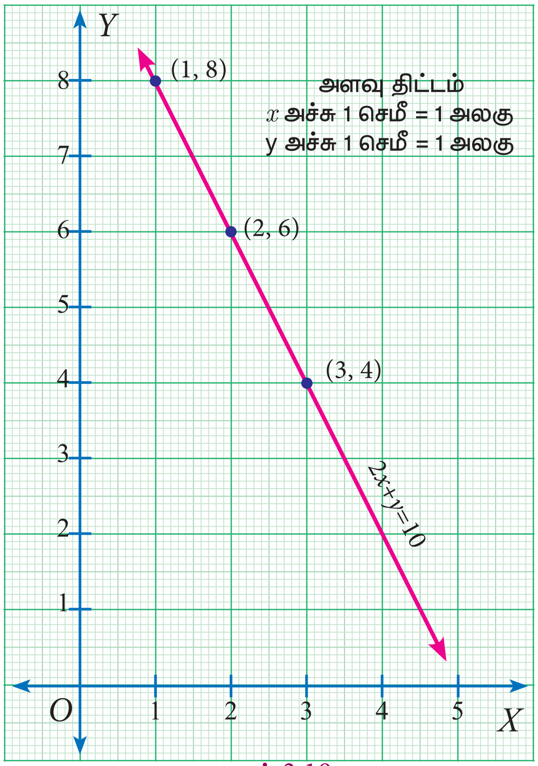
$x = 0$ எனில், $y = \frac{2}{3}(0)+3 = 3$

$x = 3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(3)+3 = 5$

x	-3	0	3
y	1	3	5

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-3,1), (0,3), (3,5)$.



படம் 3.18

3.8.1 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் (Simultaneous Linear Equations)

சமன்பாடுகளை வரைபடத்தில் குறிப்பது பற்றி ஏற்கனவே அறிந்த நாம், தற்போது சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு குறித்தும், குறிப்பாக இரண்டு ஒருங்கமைந்த நேரியச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி கற்க இருக்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்றால் என்ன? இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே வகையான மாறிகளைக் கொண்டிருந்தால் அவை **ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்** ஆகும்.

இவை ஏன் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன? $2x + y = 10$ ஐப் போன்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு. $(1,8), (2,6), (3,4)$ மற்றும் மேலும் சில புள்ளிகளும் வரைபடத்தில் உள்ள கோட்டின் மீது அமையும் முடிவுறாத தீர்வுகளாகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 127 26-12-2019 12:16:19

இது போன்ற ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு, இதனுடன் சேர்த்து மற்றொரு சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தினால் மட்டுமே ஒரே நேரத்தில் இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கும் ஒரு வரிசைச் சோடியைத் தீர்வாகப் பெற முடியும். இதுபோன்று இரண்டு சமன்பாடுகளை ஒருங்கிணைத்துத் தீர்க்கக் கிடைக்கும் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலைகளை ஏற்படுத்தும் சமன்பாடுகளை ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையின் மூலம் புரிந்துகொள்ளுதல்.

அனிதா இரண்டு அழிப்பான்களையும் ஒரு கரி எழுதுகோலையும் ₹10 இக்கு வாங்கினாள் என்று கருதுக. அவற்றின் தனிப்பட்ட விலை பற்றி அனிதாவிற்குத் தெரியவில்லை. ஓர் அழிப்பானின் விலையை x எனவும், ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையை y எனவும் கொண்டு இதற்கு ஒரு சமன்பாட்டினை நாம் அமைப்போம்.

அதாவது, $2x + y = 10$ ...(1)

இப்பொழுது, ஓர் அழிப்பான் மற்றும் ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையைத் தனித்தனியாக அறிந்துகொள்ள அனிதா விரும்புகிறாள்.

அதற்காக அவள் x மற்றும் y இக்குப் பல மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடு (1) இக்கு தீர்வு காண முயற்சி செய்கிறாள்.

2 × ஓர் அழிப்பானின் விலை + ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை = ₹10

$2(1)+8=10$
$2(1.5)+7=10$
$2(2)+6=10$
$2(2.5)+5=10$
$2(3)+4=10$
⋮ ⋮

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...

F6786R

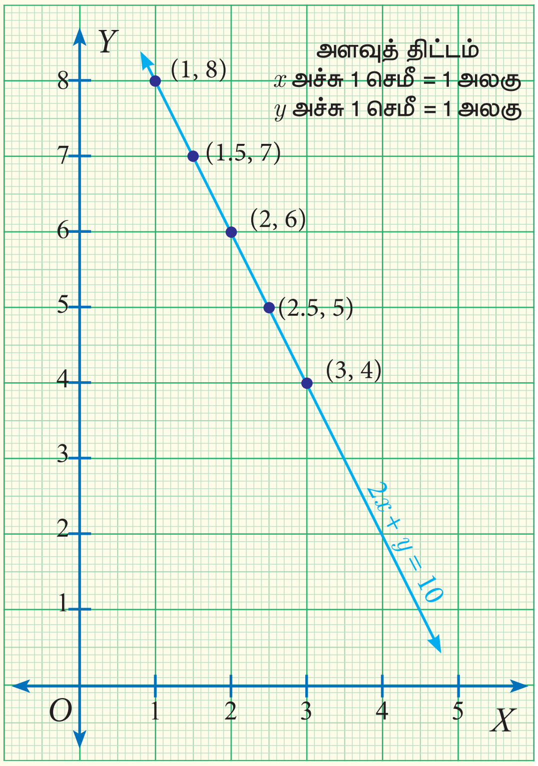
அவள் எண்ணற்ற விடைகளைப் பெறுகிறாள். ஆகையால் அவள் இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கொண்டு விலையை அறிய முயற்சிக்கிறாள்.

அனிதாவிற்கு மேலும் சில கரி எழுதுகோல்கள் மற்றும் அழிப்பான்கள் தேவைப்படுகிறது. இப்பொழுது அவர் வாங்கிய 3 அழிப்பான்கள் மற்றும் 4 கரி எழுதுகோல்களுக்காகக் கடைக்காரர் மொத்தத் தொகையாக ₹30 ஐப் பெற்றுக்கொள்கிறார். இதற்கு முன்பு அமைத்ததைப் போலவே நாம் மற்றொரு சமன்பாட்டை அமைக்கலாம்.

$3x + 4y = 30$ ...(2)

இப்பொழுதும் அவள் கீழ்க்கண்டவாறு எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெறுகிறாள்.

3 × ஓர் அழிப்பானின் விலை + 4 (ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை) = ₹30



படம் 3.19

3 Algebra_TM_T1.indd 128 26-12-2019 12:16:20

$3(2)+4\,(6) = 30$

$3(4)+4\,(4.5) = 30$

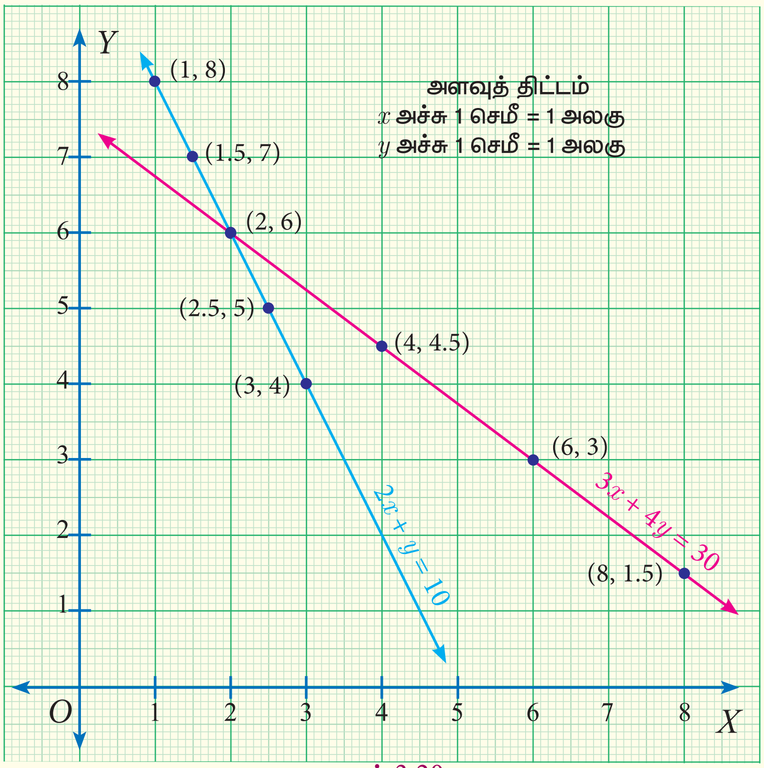
$3(6)+4\,(3) = 30$

$3(8)+4\,(1.5) = 30$

$\vdots \qquad \vdots$

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...



படம் 3.20

இதனை அவளது ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடும்போது அதற்கு அவர் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே அமைத்துத் தீர்க்கும்போது ஒரே ஒரு தீர்வுதான் கிடைக்கும் என்று கூறினார்.

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க, ஓர் அழிப்பானின் விலை ₹2 என்றும் ஒரு எழுதுகோலின் விலை ₹6 என்றும் பெறுகிறோம். இதனை வரைபடத்தில் (படம் 3.20) காண முடியும்.

இது போன்ற நிகழ்வில் ஓர் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலையை உருவாக்க நம்மால் இணைத்துக் கருதப்படும் சமன்பாடுகளே ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

ஆகவே, ஒரே வகையான மாறிகளில் அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை **ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்** அல்லது **நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு** அல்லது **நேரிய சமன்பாடுகளின் சோடி என அழைக்கப்படுகின்றன.**

எடுத்துக்காட்டு 3.43

$x - 2y = 7$ மற்றும் $2x + 3y = 7$ என்ற ஒருங்கமைந்த சமன்பாடுகளுக்கு $(5, -1)$ என்பது தீர்வாகுமா என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $x - 2y = 7$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

$x = 5,\ y = -1$ எனில், நமக்குக் கிடைப்பது,

(1) இலிருந்து $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ (வலது பக்கம்)

(2) இலிருந்து $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10-3 = 7$ (வலது பக்கம்)

ஆகவே, $x = 5,\ y = -1$ என்ற மதிப்புகளானது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒரே நேரத்தில் நிறைவு செய்கிறது. ஆகவே, $(5,-1)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

$2x - 5y - 2 = 0$ மற்றும் $x + y - 6 = 0$ ஆகிய ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு $(3, 3)$ என்பது ஒரு தீர்வாகுமா என்பதை வரைபடம் மூலம் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 129 26-12-2019 12:16:20

3.8.2 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் (Methods of solving simultaneous linear equations)

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கப் பல வழிமுறைகள் உள்ளன. அவற்றைப் பெரும்பாலும் வடிவியல் முறை மற்றும் இயற்கணித முறை என வகைப்படுத்தலாம்.

வடிவியல் முறை	இயற்கணித முறை
1. வரைபட முறை	1. பிரதியிடல் முறை 2. நீக்கல் முறை 3. குறுக்குப் பெருக்கல் முறை

வரைபட முறையின் மூலம் தீர்வு காணுதல் (Solving by Graphical Method)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டை எவ்வாறு வரைபடம் வரைந்து விளக்கலாம் என்பதை முன்னரே கண்டுள்ளோம். இங்கு நாம் இரு மாறிகளில் அமைந்த இரு நேரிய சமன்பாடுளின் வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வை காண முடியும் என்பதைப் பற்றிக் கற்கப்போகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.44 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க. $x + y = 5;\ 2x - y = 4.$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $x + y = 5$ ...(1)

$2x - y = 4$ ...(2)

சமன்பாடு (1) இக்கு வரைபடம் வரைதல் எளிது.
முதற்கோட்டின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் x மற்றும் y மதிப்புகளை பின்வருமாறு காணலாம்.

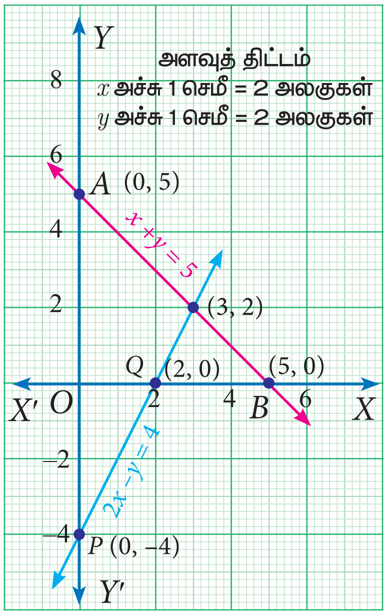
$x = 0$ எனில், (1) இலிருந்து $y = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $A(0,5)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$y = 0$ எனில், (1) இலிருந்து $x = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $B(5,0)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளியாகும்.

வரைபடத்தில் A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைத்துக் கோடு (1) வரைக.



படம் 3.21

இதே முறையைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு (2) இக்கும் வரைபடம் வரையலாம்.

$x = 0$ எனில், (2) இலிருந்து $y = -4$ எனக் கிடைக்கும்.
எனவே $(0,-4)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

$y = 0$ எனில், (2) இலிருந்து $x = 2$ எனக் கிடைக்கும்.
எனவே $Q(2,0)$ என்பது அந்தக் கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளி ஆகும்.

வரைபடத்தில் P மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து

குறிப்பு

கிடைக்கப்பெற்ற தீர்வானது இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வாக அமைகிறதா (நிறைவு செய்கிறதா) என்று சரிபார்த்தல் நலம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 130 26-12-2019 12:16:21

இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்துக் கோடு (2) வரைக.

இந்த இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான (3,2) என்பது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) இன் தீர்வாகும். இரு கோடுகளுக்கும் ஒரே ஒரு புள்ளி தீர்வாக அமைகிறது. ஆகவே, தீர்வு $x = 3$, $y = 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.45 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $3x + 2y = 6$; $6x + 4y = 8$

தீர்வு ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$3x + 2y = 6$ இன் வரைபடம்

x	-2	0	2
y	6	3	0

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2,6)$, $(0,3)$, $(2,0)$

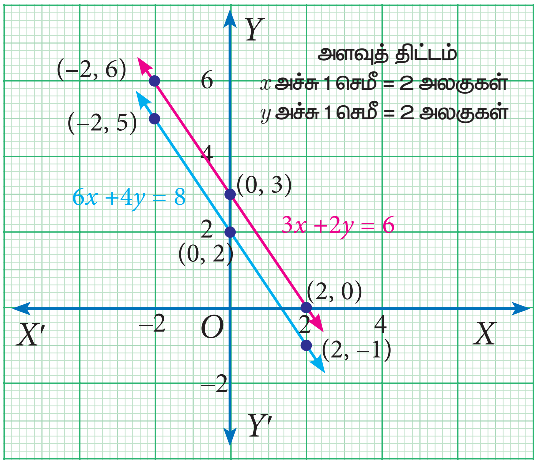
$6x + 4y = 8$ இன் வரைபடம்

x	-2	0	2
y	5	2	-1

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள்:

$(-2,5)$, $(0,2)$, $(2,-1)$

இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் வரைபடம் வரைந்தால், இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமைந்து நமக்கு வெட்டும்புள்ளியைக் கொடுக்காததைக் காணலாம். இதன் மூலமாக இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவான வெட்டும்புள்ளி தீர்வாக அமையாததைக் காணலாம். எனவே, இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கிடையாது.



படம் 3.22

எடுத்துக்காட்டு 3.46 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $y = 2x + 1$; $-4x + 2y = 2$

தீர்வு ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$y = 2x + 1$ இன் வரைபடம்

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(2, 5)$

$-4x + 2y = 2$ இன் வரைபடம்

$2y = 4x + 2$

$y = 2x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

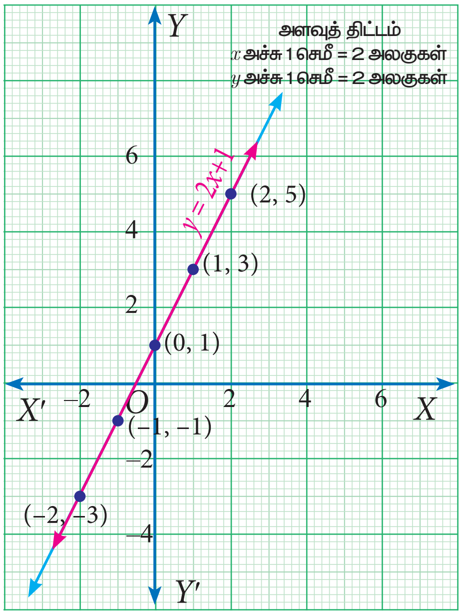
குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$

3 Algebra_TM_T1.indd 131 26-12-2019 12:16:21

இங்கு, இரு சமன்பாடுகளும் ஒன்றே; ஆனால் இரண்டும் வெவ்வேறு வடிவில் அமைந்துள்ளன. சமன்பாடுகள் இரண்டும் ஒன்றே என்பதால் தீர்வுகளும் ஒரே மாதிரியானவை. இங்கு ஒரு கோட்டின் மீதமைந்த அனைத்துப் புள்ளிகளும் மற்றொரு கோட்டின் மீதே உள்ளன.

எனவே, இங்கு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள அனைத்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளும் எண்ணற்ற தீர்வுகளாக அமைகின்றன.



படம் 3.23

எடுத்துக்காட்டு 3.47 ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 36 மீட்டர் மற்றும் நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீட்டர் அதிகமெனில், செவ்வகத்தின் பக்க அளவுகளை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளுக்கு நாம் சமன்பாடுகளை அமைப்போம்.

செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தை முறையே l மற்றும் b என்க.

முதல் கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல்

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு = 36 மீ

$$2(l+b)=36$$

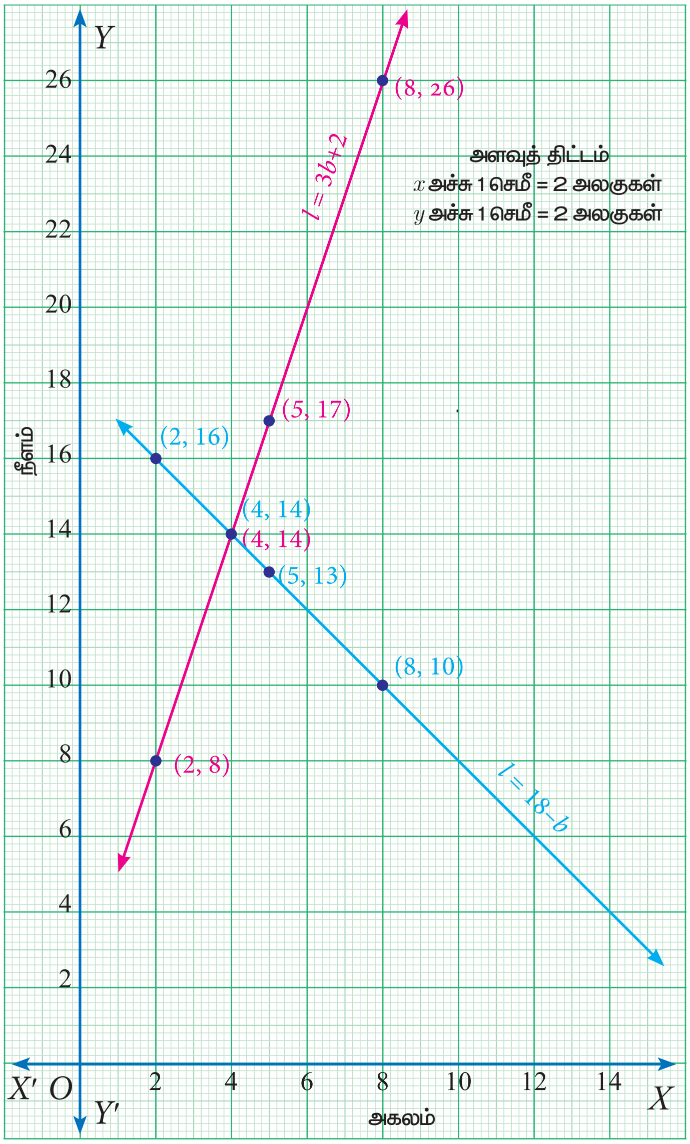
$$l+b=\frac{36}{2}$$

$$l=18-b \qquad \ldots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
−b	−2	−4	−5	−8
l = 18−b	16	14	13	10

புள்ளிகள்: (2,16), (4,14), (5,13), (8,10)

இரண்டாவது கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல் :



படம் 3.24

3 Algebra_TM_T1.indd 132 26-12-2019 12:16:23

இரண்டாவது கூற்றின்படி, நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீ அதிகம் எனவே $l = 3b + 2$ ... (2)

சமன்பாடு (2) இக்கு அட்டவணை அமைப்போம்

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l = 3b + 2$	8	14	17	26

புள்ளிகள் : (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)

இரண்டு கோடுகளுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளியே தீர்வாக அமையும். இங்கு (4,14) என்பதே தீர்வாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே தீர்வானது $b = 4$, $l = 14$.

சரிபார்த்தல் :

$2(l+b) = 36$ ...(1)	$l = 3b + 2$ ...(2)
$2(14+4) = 36$	$14 = 3(4) + 2$
$2 \times 18 = 36$	$14 = 12 + 2$
$36 = 36$ மெய்	$14 = 14$ மெய்

பயிற்சி 3.10

1. கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக

   (i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

2. வரைபட முறையில் தீர்க்க

   (i) $x + y = 7;\ x - y = 3$ (ii) $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$

   (iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$ (iv) $x - y = 0;\ y + 3 = 0$

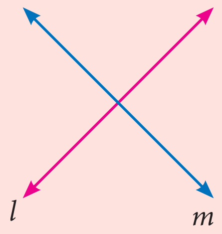
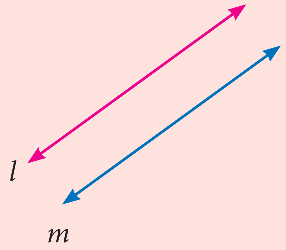
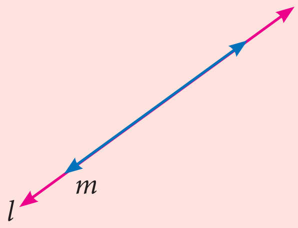
   (v) $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$ (vi) $x = -3;\ y = 3$

3. இரண்டு மகிழுந்துகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 100 மைல்கள். இரண்டும் ஒன்றையொன்று நோக்கிப் பயணித்தால் ஒரு மணி நேரத்தில் சந்தித்துக்கொள்ளும். இரண்டும் ஒரே திசையில் செல்லும்போது 2 மணி நேரத்தில் ஓரிடத்தில் சந்தித்து ஒன்றாகப் பயணிக்குமெனில், இரண்டு மகிழுந்துகளின் வேகங்களைக் (வரைபட முறையில்) கணக்கிடுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 133 26-12-2019 12:16:28

சில சிறப்புப் பண்புகள் (Some special terminology)

வரைபடங்களின் மூலம் ஒருங்கமைந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும் என்பதைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களின் மூலம் நாம் காணலாம்.

வெட்டும் கோடுகள்	இணைகோடுகள்	ஒன்றிய கோடுகள் (ஒன்றின் மீது ஒன்று)
		
ஒரே ஒரு தீர்வு	தீர்வு இல்லை	எண்ணற்ற தீர்வுகள்

- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு, ஒரே ஒரு தீர்வினைப் பெற்றிருக்கும்போது (வரைபடத்தில் கோடுகள் ஒரேயொரு இடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும்), அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் (consistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.

- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை எனில் (வரைபடத்தில் கோடுகள் எந்த இடத்திலும் வெட்டிக்கொள்ளாது) அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்ற (inconsistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.

- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்போது அவை இரண்டும் ஒரே கோடுகள் ஆகும். (வரைபடத்தில் கோடுகள், அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் ஒன்றின் மீது ஒன்றாகப் பொருந்தும்) அந்தத் தொகுப்பும் ஒருங்கமைவுடையது (consistent) ஆகும்.

பிரதியிடல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிட்டு, இரு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாட்டை ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடாக மாற்றித் தீர்வு (ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பதிலாக) காண்கிறோம். ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிடுவதால் இதை நாம் பிரதியிடல் முறை என்று அழைக்கிறோம்.

இதற்கான வழிமுறைகள் பின்வருமாறு:

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து, ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கொண்டு காணவும்.

படி 2: படி 1 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்க்க ஒரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

படி 3: படி 2 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பைப் படி 1 இல் பிரதியிட மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்..

3 Algebra_TM_T1.indd 134 26-12-2019 12:16:28

எடுத்துக்காட்டு 3.48 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைப் பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க: $x+3y=16$ மற்றும் $2x-y=4$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $x+3y=16$ ... (1)

$2x - y = 4$ ... (2)

படி 1	படி 2	படி 3	தீர்வு
சமன்பாடு (2) இலிருந்து $2x-y=4$ $-y=4-2x$ $y=2x-4$ ...(3)	(3) ஐ (1) இல் பிரதியிட $x+3y=16$ $x+3(2x-4)=16$ $x+6x-12=16$ $7x=28$ $x=4$	$x = 4$ என (3) இல் பிரதியிட $y=2x-4$ $y=2(4)-4$ $y=4$	$x=4$ மற்றும் $y=4$

எடுத்துக்காட்டு 3.49 ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 5. அதன் இலக்கங்கள் இடமாற்றப்பட்டால் கிடைக்கும் புதிய எண்ணானது கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை விட 27 குறைவு எனில் அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

x என்பது பத்தாம் இலக்க எண் என்றும் y என்பது ஒன்றாம் இலக்க எண் என்றும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $x+y=5$ ... (1)

	பத்தாம் இலக்கம்	ஒன்றாம் இலக்கம்	மதிப்பு
கொடுக்கப்பட்ட எண்	x	y	$10x + y$
புதிய எண் (இலக்கங்களை இடமாற்றிய பின்பு)	y	x	$10y+x$

கொடுக்கப்பட்ட எண் – இடமாற்றபட்ட எண் $=27$

$$(10x+y)-(10y+x)=27$$

$$10x-x+y-10y=27$$

$$9x-9y=27$$

$$\Rightarrow \quad x-y=3 \quad \text{... (2)}$$

$x+y=5$ ... (1) இலிருந்து, $y = 5 - x$ ... (3)

(3) ஐ (2) இல் பிரதியிட $x-(5-x)=3$

$$x-5+x=3$$

3 Algebra_TM_T1.indd 135 26-12-2019 12:16:34

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ என (3) இல் பிரதியிட $y = 5 - x \;= 5 - 4$

$$y = 1$$

ஆகவே, $10x + y = 10 \times 4 + 1 = 40 + 1 \;= 41$.

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண் = 41 ஆகும்.

> **சரிபார்த்தல் :**
>
> இலக்கங்களின் கூடுதல் = 5
>
> $x + y = 5$
>
> $4 + 1 = 5$
>
> $5 = 5$ மெய்
>
> கொடுக்கப்பட்ட எண் − இடமாற்றப்பட்ட எண் = 27
>
> 41 - 14 = 27
>
> 27 = 27 மெய்

பயிற்சி 3.11

1. பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க.

   (i) $2x - 3y = 7; \;\; 5x + y = 9$

   (ii) $1.5x + 0.1y = 6.2; \; 3x - 0.4y = 11.2$

   (iii) x-இன் 10% + y-இன் 20%; $3x - y = 20$

   (iv) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 1; \; \sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

2. இராமனின் வயது அவருடைய இரு மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் மூன்று மடங்காகும். ஐந்தாண்டுகள் கழித்து அவரின் வயது தனது மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் இரு மடங்காகும் எனில், இராமனின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

3. 100 மற்றும் 1000 இக்கு இடையே அமையும் ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின் நடு இலக்கம் பூச்சியமாகவும் மற்ற இரு இலக்கங்களின் கூடுதல் 13 ஆகவும் இருக்கின்றன. இலக்கங்களை இடம் மாற்றி அமைக்கும்போது கிடைக்கும் எண்ணானது, அந்த எண்ணை விட 495 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Elimination Method)

இம்முறையானது ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் மற்றோர் இயற்கணித முறையாகும். இந்த முறையானது பிரதியிடல் முறையை விடச் சிறந்த முறையாகும். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளிலுள்ள இரண்டு மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நீக்கக் கிடைக்கும் ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறையாகும்.

இதன் பல்வேறு படிநிலைகள் பின்வருமாறு:

படி 1: இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மாறியின் கெழுக்கள் சமமாக அமையுமாறு ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியால் (மாறிலிகளால்) ஒரு சமன்பாட்டினையோ அல்லது இரண்டையுமே பெருக்க வேண்டும்.

படி 2: படி 1 இல் கிடைத்த சமன்பாடுகளைக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ சமமான கெழுக்களைக் கொண்ட மாறியை நீக்க வேண்டும்.

படி 3: படி 2 இன் மூலம் கிடைத்த ஒரு மாறியில் அமைந்த சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் வாயிலாகத் தெரியாத மாறியின் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

படி 4: படி 3 இல் கிடைத்த ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் பிரதியிட்டுத் தெரியாத மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் காணலாம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 136 26-12-2019 12:16:37

எடுத்துக்காட்டு 3.50

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க: $4a+3b=65$ மற்றும் $a+2b=35$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $4a+3b=65$ .....(1)

$a+2b=35$ .....(2)

(2) ஐ 4 ஆல் பெருக்க $4a + 8b = 140$

(1) இலிருந்து $4a + 3b = 65$

$(-) \quad (-) \quad (-)$

$5b = 75$ இதிலிருந்து $b = 15$

$b = 15$ என (2) இல் பிரதியிட,

$a + 2(15) = 35$ இதிலிருந்து $a = 5$

ஆகவே, தீர்வு $a = 5, b = 15$.

சரிபார்த்தல் :

$4a+3b = 65$ ...(1)

$4(5)+3(15) = 65$

$20 + 45 = 65$

$65 = 65$ மெய்

$a + 2b = 35$ ...(2)

$5 + 2(15) = 35$

$5+30 = 35$

$35 = 35$ மெய்

எடுத்துக்காட்டு 3.51

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க: $8x-3y=5xy$ மற்றும் $6x-5y=-2xy$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $8x-3y=5xy$ ...(1)

$6x-5y=-2xy$ ...(2)

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில் xy என்ற உறுப்பு உள்ளதால் இது ஒரு நேரிய சமன்பாட்டில் அமைந்த தொகுப்பு அல்ல. மேலும், $x = 0$ எனில், $y = 0$ இதே போல் $y = 0$ எனில், $x = 0$ என்பதையும் கவனிக்க. ஆகவே, $(0,0)$ என்பது தொகுப்பின் ஒரு தீர்வாகும். மேலும் $x \neq 0$ மற்றும் $y \neq 0$ என்றவாறு வேறொரு தீர்வும் இருக்க இயலும்.

$x \neq 0,\ y \neq 0$ என்பனவற்றைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் xy ஆல் வகுக்க,

(1) இலிருந்து $\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5$ ...(3)

(2) இலிருந்து $\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2$ ...(4)

$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y}$ என்க.

(3) மற்றும் (4) ஆனது, $8b-3a=5$ ...(5)

$6b-5a=-2$ ...(6) என ஆகும்.

இவை a மற்றும் b ஆல் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஆகும்.

a ஐ நீக்குவதற்காக, $(5)\times 5 \Rightarrow \quad 40b-15a=25$ .....(7)

$(6)\times 3 \Rightarrow \quad 18b-15a=-6$ .....(8)

3 Algebra_TM_T1.indd 137 26-12-2019 12:16:44

கடந்த எடுத்துக்காட்டுகளைப் போலவே இதைத் தொடர $\left(\frac{11}{23}, \frac{22}{31}\right)$ என்ற தீர்வைப் பெறலாம்.

ஆகவே, இந்தத் தொகுப்பானது $\left(\frac{11}{23}, \frac{22}{31}\right)$ மற்றும் $(0,0)$ ஆகிய இரு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

பயிற்சி 3.12

1. நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க

   (i) $2x - y = 3; \quad 3x + y = 7$ (ii) $x - y = 5; \quad 3x + 2y = 25$

   (iii) $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 14; \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15$ (iv) $3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

   (v) $\frac{4}{x} + 5y = 7; \quad \frac{3}{x} + 4y = 5$ (vi) $13x + 11y = 70; \quad 11x + 13y = 74$

2. A மற்றும் B ஆகியோரது மாத வருமானங்களின் விகிதம் $3:4$ ஆகவும் அவர்களுடைய செலவுகளின் விகிதம் $5:7$ ஆகவும் இருக்கின்றன. ஒவ்வொருவரும் மாதம் ₹5,000 சேமிக்கிறார்கள் எனில், அவர்களுடைய மாத வருமானத்தைக் காண்க.

3. 5 வருடங்களுக்கு முன்பு, ஒருவருடைய வயதானது அவருடைய மகனின் வயதைப் போல் 7 மடங்காகும். 5 வருடங்கள் கழித்து அவருடைய வயதானது மகனின் வயதைப் போல் 4 மடங்காக இருக்கும் எனில், அவர்களுடைய தற்போதைய வயது என்ன?

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Cross Multiplication Method)

பிரதியிடல் மற்றும் நீக்கல் முறைகளானது பல்வேறு கணிதச் செயல்களை உள்ளடக்கியது. ஆனால் குறுக்குப் பெருக்கல் முறையானது கெழுக்களைச் சீரிய முறையில் பயன்படுத்தி வழிமுறையை எளிமையாக்கித் தீர்வினைப் பெற வழி செய்கிறது. இந்த முறையில் எண்களுக்கு இடையில் குறுக்குக் கோடுகள் அமைத்துப் பெருக்குவதால் இது குறுக்குப் பெருக்கல் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த முறையைப் பின்வருமாறு விவாதிப்போம்.

நமக்கு $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு சோடி நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad ...(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad ...(2)$$

நாம் அவற்றைப் பின்வருமாறு தீர்க்கலாம் :

$(1) \times b_2 - (2) \times b_1$ என்பதிலிருந்து $b_2(a_1x + b_1y + c_1) - b_1(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2 - a_2b_1) = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$(1) \times a_2 - (2) \times a_1$ என்பதிலிருந்து

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$ எனப் பெறலாம்.

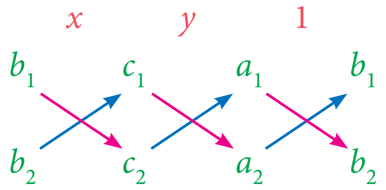
ஆகவே தொகுப்பின் தீர்வானது

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

இதைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

இதனைப் பின்வருமாறு நினைவில் கொள்ளலாம்



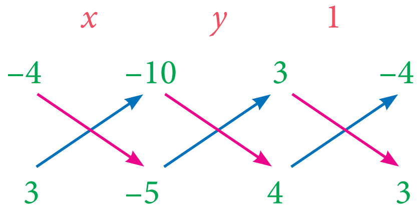
எடுத்துக்காட்டு 3.52 குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க:

$3x - 4y = 10$ மற்றும் $4x + 3y = 5$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y - 10 = 0 \quad .....(1)$$
$$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y - 5 = 0 \quad .....(2)$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவதற்காகக் கெழுக்களை நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.



$$\frac{x}{(-4)(-5)-(3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4)-(-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(4)(-4)}$$

$$\frac{x}{(20)-(-30)} = \frac{y}{(-40)-(-15)} = \frac{1}{(9)-(-16)}$$

$$\frac{x}{20+30} = \frac{y}{-40+15} = \frac{1}{9+16}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

ஆகவே நாம் பெறுவது $x = \frac{50}{25}$; $y = \frac{-25}{25}$

$x = 2$; $y = -1$

எனவே தீர்வானது $x = 2,\ y = -1$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

$3x-4y$	=	10	...(1)
$3(2)-4(-1)$	=	10	
$6+4$	=	10	
10	=	10	மெய்
$4x+3y$	=	5	...(2)
$4(2)+3(-1)$	=	5	
$8-3$	=	5	
5	=	5	மெய்

3 Algebra_TM_T1.indd 139 26-12-2019 12:16:56

எடுத்துக்காட்டு 3.53

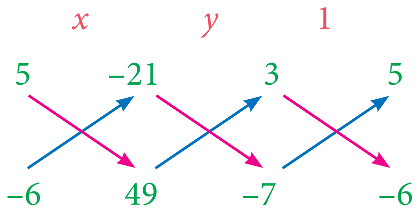
குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க :

$3x+5y=21$ மற்றும் $-7x-6y=-49$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு $3x+5y-21=0;\quad -7x-6y+49=0$

கெழுக்களைக் குறுக்குப் பெருக்கல் முறைக்காக எழுத நாம் பெறுவது,



$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)}=\frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)}=\frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119}=\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{119}=\frac{1}{17}, \quad \frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{119}{17}, \quad y=\frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x=7, \quad y=0$$

சரிபார்த்தல் :

$3x+5y$	=	21	...(1)
$3(7)+5(0)$	=	21	
$21+0$	=	21	
21	=	21	மெய்
$-7x-6y$	=	-49	...(2)
$-7(7)-6(0)$	=	-49	
$-49+0$	=	-49	
-49	=	-49	மெய்

குறிப்பு

இங்கே $\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$ என்பது $y=\frac{0}{17}$ ஆகும். ஆகவே இங்கு $\frac{y}{0}$ என்பது ஒரு குறியீடே அன்றி, அதனை 0 ஆல் வகுத்தல் எனப் பொருள் கொள்ளக்கூடாது. பூச்சியத்தால் ஓர் எண்ணை வகுத்தல் என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்ற கூற்று எப்பொழுதும் மெய்யாகும்.

பயிற்சி 3.13

1. குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

   (i) $8x-3y=12;\ 5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0;\ 5x+2y=13$

   (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5;\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$

2. அட்சயா தனது பணப்பையில் (purse) இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களையும், ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களையும் வைத்திருந்தாள். அவள் மொத்தமாக ₹ 220 மதிப்புடைய 80 நாணயங்களை வைத்திருந்தாள் எனில், ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை நாணயங்கள் வைத்திருந்தாள்.

3 Algebra_TM_T1.indd 140 26-12-2019 12:17:01

3. இரு வெவ்வேறு அளவு விட்டமுடைய குழாய்கள் மூலம் ஒரு நீச்சல் குளத்தில் முழுமையாக நீர் நிரப்ப 24 மணி நேரம் ஆகும். அதிக விட்டமுடைய குழாயை 8 மணி நேரமும் குறைந்த விட்டமுடைய குழாயை 18 மணி நேரமும் பயன்படுத்தி நீர் நிரப்பினால் நீச்சல் குளத்தில் பாதி அளவு நீர் நிரம்பும் எனில், தனித்தனியாக அந்தக் குழாய்களைக் கொண்டு நீச்சல் குளம் முழுவதிலும் நீர் நிரப்ப ஆகும் கால அளவுகளைக் காண்க.

3.8.3 இரு மாறிகளாலான நேரியச் சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மை (Consistency and Inconsistency of Linear Equations in Two Variables)

கீழ்க்காணும் இரு மாறிகளாலான ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad ...(2)$$

இங்கு $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ஆகியன மெய்யெண்கள் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் கீழ்க்காணுமாறு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ எனில் ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் பெற்றிருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது).

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனில் எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது)

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ எனில் தீர்வு இல்லை. (ஒருங்கமைவற்றது).

எடுத்துக்காட்டு 3.54 கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா அல்லது ஒருங்கமைவற்றதா என்பதைச் சோதிக்கவும். அவை ஒருங்கமைவுடையது எனில் எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும்?

(i) $2x - 4y = 7$, $x - 3y = -2$

(ii) $4x + y = 3$, $8x + 2y = 6$

(iii) $4x + 7 = 2y$, $2x + 9 = y$

தீர்வு

வ. எண்	சோடிக் கோடுகள்	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	விகிதங்களை ஒப்பிடுதல்	வரைபடக் குறியீடு	இயற்கணித விளக்கம்
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	வெட்டும் கோடுகள்	ஒரேயொரு தீர்வு

3 Algebra_TM_T1.indd 141 26-12-2019 12:17:06

(ii)	$4x+y=3$ $8x+2y=6$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	ஒன்றிணைந்த கோடுகள்	எண்ணற்ற தீர்வுகள்
(iii)	$4x+7=2y$ $2x+9=y$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	இணை கோடுகள்	தீர்வு இல்லை

எடுத்துக்காட்டு 3.55

$kx+2y=3;\ 2x-3y=1$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் உண்டெனில் k இன் மதிப்பை ஆராய்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{matrix} kx+2y=3 \ .....(1) \\ 2x-3y=1 \ .....(2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1=k,\ b_1=2,\ a_2=2,\ b_2=-3;$

ஒரேயொரு தீர்வு உண்டெனில் $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ எனக் கருதுவோம். எனவே $\frac{k}{2}\neq\frac{2}{-3}$; ஆகவே $k\neq\frac{4}{-3}$

எடுத்துக்காட்டு 3.56

$2x-3y=7;\quad (k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1)$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் k இன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{matrix} 2x-3y=7 \\ (k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1=2,\ b_1=-3,\ a_2=(k+2),\ b_2=-(2k+1),\ c_1=7,\ c_2=3(2k-1)$

எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில், $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ எனக் கருதுவோம்.

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}$$
$$2(2k+1)=3(k+2)$$
$$4k+2=3k+6$$
$$k=4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$
$$9(2k-1)=7(2k+1)$$
$$18k-9=14k+7$$
$$4k=16$$
$$k=4$$

எடுத்துக்காட்டு 3.57 $8x+5y=9;\ kx+10y=15$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வுகள் இல்லையெனில் k இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} 8x+5y&=9 \\ kx+10y&=15 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1=8,\ b_1=5,\ c_1=9,\ a_2=k, b_2=10, c_2=15$

தீர்வுகள் இல்லையெனில் $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ ஆகவே, $\dfrac{8}{k}=\dfrac{5}{10}\neq\dfrac{9}{15}$

$$80=5k$$

$$k=16$$

செயல்பாடு - 3

1. கொடுக்கப்பட்ட நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் பின்வருமாறு இருந்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க:
   (i) $2x+ky=1;\ 3x-5y=7$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரேயொரு தீர்வு உண்டு.
   (ii) $kx+3y=3;\ 12x+ky=6$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு இல்லை.
   (iii) $(k-3)x+3y=k;\ kx+ky=12$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.
2. கொடுக்கப்பட்ட $3x-(a+1)y=2b-1$, $5x+(1-2a)y=3b$ நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் a மற்றும் b இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

செயல்பாடு - 4

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில், கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமான மற்றொரு நேரிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடு	மற்றொரு நேரிய சமன்பாடு		
	ஒரேயொரு தீர்வு	எண்ணற்ற தீர்வுகள்	தீர்வு இல்லை
$2x+3y=7$	$3x+4y=8$	$4x+6y=14$	$6x+9y=15$
$3x-4y=5$			
$y-4x=2$			
$5y-2x=8$			

பயிற்சி 3.14

ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

1. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணையும் அதன் இலக்கங்களை மாற்றுவதால் கிடைக்கும் எண்ணையும்

3 Algebra_TM_T1.indd 143 26-12-2019 12:17:20

கூட்டினால் 110 கிடைக்கும். கொடுக்கப்பட்ட அந்த ஈரிலக்க எண்ணிலிருந்து 10 ஐக் கழித்தால் அது கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலின் 5 மடங்கை விட 4 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

2. ஒரு பின்னத்தின் பகுதி மற்றும் தொகுதியின் கூடுதல் 12. அப்பின்னத்தின் பகுதியுடன் 3 ஐக் கூட்டினால் அதன் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும் எனில், அப்பின்னத்தைக் காண்க.

3. ABCD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $\angle A = (4y + 20)^\circ$, $\angle B = (3y - 5)^\circ$, $\angle C = (4x)^\circ$ மற்றும் $\angle D = (7x + 5)^\circ$ எனில், நான்கு கோணங்களையும் காண்க.

4. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 5% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும் விற்பதால் கடைக்காரருக்கு நிகர இலாபம் ₹2,000 கிடைக்கிறது. ஆனால் அவர் ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 5% நட்டத்திற்கும் விற்பதால் அவரின் நிகர இலாபம் ₹1,500 கிடைக்கிறது எனில், தொலைக்காட்சிப் பெட்டி மற்றும் குளிர்சாதனப் பெட்டியின் சரியான விலைகளைக் காண்க.

5. இரு எண்கள் 5 : 6 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் முறையே 8 ஐக் கழித்தால் அவற்றின் விகிதம் 4 : 5 என மாறும் எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

6. 4 இந்தியர்கள் மற்றும் 4 சீனர்கள் சேர்ந்து 3 நாள்களில் ஒரு வேலையை முடிக்கிறார்கள். 2 இந்தியர்கள் மற்றும் 5 சீனர்கள் சேர்ந்து அதே வேலையை 4 நாள்களில் முடிக்கிறார்கள் எனில், இப்பணியைத் தனியாக ஒரு இந்தியர் எத்தனை நாள்களில் செய்வார்? ஒரு சீனர் தனியாக எத்தனை நாள்களில் செய்வார்?

பயிற்சி 3.15

F6AUUN

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ என்பது $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனில், k இன் மதிப்பு என்ன?
   (1) –6 (2) –7 (3) –8 (4) 11

2. $2x + 3 = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்
   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}$

3. $4-3x^3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகை
   (1) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை (2) ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை
   (3) இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (4) முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை.

4. $x^{51} + 51$ என்பது $x + 1$, ஆல் வகுக்கப்பட்டால் கிடைக்கும் மீதி
   (1) 0 (2) 1 (3) 49 (4) 50

5. $2x+5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
   (1) $\frac{5}{2}$ (2) $-\frac{5}{2}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

3 Algebra_TM_T1.indd 144 26-12-2019 12:17:21

6. $p(x) = x^3 - x^2 - 2$, $q(x) = x^2 - 3x + 1$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல்

(1) $x^3 - 3x - 1$ (2) $x^3 + 2x^2 - 1$ (3) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (4) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

7. $(y^3 - 2)(y^3 + 1)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி

(1) 9 (2) 2 (3) 3 (4) 6

8. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படிகளின் ஏறு வரிசை

(A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

(C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (D) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

(1) A,B,D,C (2) A,B,C,D (3) B,C,D,A (4) B,A,C,D

9. $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு ___________

(1) வகுத்தி (2) ஈவு (3) மீதி (4) காரணி

10. $(2 - 3x)$இன் பூச்சியம் ___________

(1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

11. $x - 1$ என்பது ____________ இன் ஒரு காரணி.

(1) $2x - 1$ (2) $3x - 3$ (3) $4x - 3$ (4) $3x - 4$

12. $x - 3$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி ______

(1) 3 (2) -3 (3) $p(3)$ (4) $p(-3)$

13. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ = ______

(1) $(x + y)^3$ (2) $(x - y)^3$ (3) $x^3 + y^3$ (4) $x^3 - y^3$

14. $(a + b - c)^2$ = ___________

(1) $(a - b + c)^2$ (2) $(-a - b + c)^2$ (3) $(a + b + c)^2$ (4) $(a - b - c)^2$

15. $ax^2 + bx + c$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் காரணிகள் $(x + 5)$ மற்றும் $(x - 3)$ எனில், a, b மற்றும் c இன் மதிப்புகள் _________

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, -15 (4) 1, -2,15

16. முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சம் _____ நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம்.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. மாறிலிக் கோவையின் படி

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

19. $2x + 3y = m$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x = 2$, $y = -2$ என்பது ஒரு தீர்வு எனில், mஇன் மதிப்பு...

(1) 2 (2) -2 (3) 10 (4) 0

3 Algebra_TM_T1.indd 145 26-12-2019 12:17:25

20. கீழ்க்காண்பவற்றுள் எது நேரிய சமன்பாடு

(1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

21. கீழ்க்காண்பனவற்றில் $2x-y=6$ இன் தீர்வு எது?

(1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, −1) (4) (0,6)

22. $2x+3y=k$ என்பதன் தீர்வு (2,3) எனில், k இன் மதிப்பைக் காண்க.

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

23. $ax+by+c=0$ என்ற சமன்பாட்டினை எந்த நிபந்தனை நிறைவு செய்யாது?

(1) $a\neq 0$, $b=0$ (2) $a=0$, $b\neq 0$ (3) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$ (4) $a\neq 0$, $b\neq 0$

24. கீழ்க்காண்பனவற்றில் எது நேரிய சமன்பாடு அல்ல

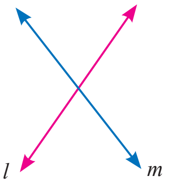
(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

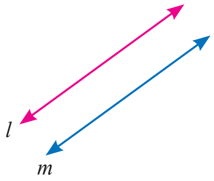
(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

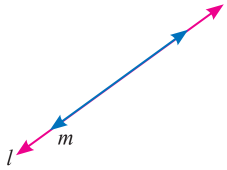
25. $4x+6y-1=0$ மற்றும் $2x+ky-7=0$ ஆகியவை இணை கோடுகளாக அமையும் எனில், k இன் மதிப்பு காண்க

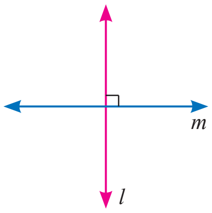
(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

26. கீழ்க்காணும் நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடங்களில் எதற்குத் தீர்வு இல்லை?

(1)


(2)


(3)


(4)


27. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ எனில், இங்கு $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

28. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ எனில், $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

29. இரண்டு பகா எண்களின் மீ.பொ. வ

(1) −1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

30. x^4-y^4 மற்றும் x^2-y^2 இன் மீ.பொ.வ

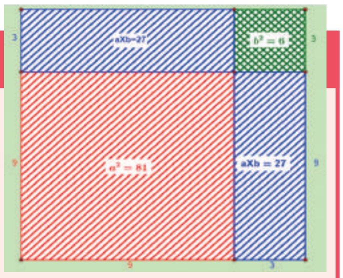
(1) x^4-y^4 (2) x^2-y^2 (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 146 26-12-2019 12:17:33

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ என்ற இயற்கணிதக் கோவை x மாறியில் அமைந்த படி n கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இங்கு $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ என்பன மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்க. $p(a) = 0$ எனில் 'a' என்பது $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.
- $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது எனில், $x = a$ ஆனது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும்.
- **மீதித்தேற்றம்**: பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$இன் படி ஒன்றோ அல்லது அதற்கு மேலாகவோ இருக்கும். மேலும் $p(x)$ ஆனது நேரிய கோவை $(x–a)$ ஆல் வகுபடும் எனில் அதன் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.
- **காரணித் தேற்றம்**: $p(x)$ஐ $(x - a)$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதி $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$இன் ஒரு காரணியாகும்.
- ஒரு சமன்பாட்டின் மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்படும் அனைத்து மதிப்புகளும் அந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்தால் அம்மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.
- ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடாகும் $(ax+by+c = 0,\ a\neq 0$ மற்றும் $b\neq 0)$.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய வரைபடம் என்பது ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.
- ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே மாதிரியான மாறிகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட அமைப்பாகும்.

இணையச் செயல்பாடு – 1



செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

படி – 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Algebraic Identities" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் இயற்கணிதம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முதல் செயல்பாட்டில் $(a+b)^2$ இன் வரைபட அணுகுமுறை அளிக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்தி, பரப்பினை முற்றொருமைகளுடன் ஒப்பிடுக.

படி - 2: அதேபோன்று a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்திப் பரப்பினையும் மீதமுள்ள முற்றொருமைகளையும் ஒப்பிடுக.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

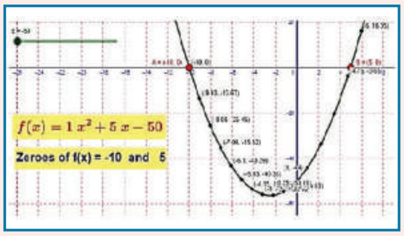
Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

3 Algebra_TM_T1.indd 147 26-12-2019 12:17:35

இணையச் செயல்பாடு–2

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரிதத் துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“Polynomials and Quadratic Equations” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும். இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். அவற்றில் “Zeros: Quadratic Polynomial” என்பதைத் தெரிவு செய்யவும்.

படி – 3

இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களை மாற்றி அமைக்க திரையில் தெரியும் a, b மற்றும் c எனும் நழுவல்களை இழுக்கவும். A மற்றும் B புள்ளிகள் x-axis. அச்சில் வெட்டிக்கொள்ளும். இப்புள்ளிகளே பல்லுருப்புக்கோவைகளின் பூச்சியமாகும்.

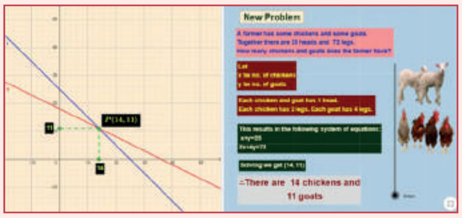
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்: https://ggbm.at/tgu3PpWm

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–3

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. Solving by rule of cross multiplication, Graphical method மற்றும் Chick–Goat puzzle ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி - 2

நழுவல்களை நகர்த்தி அல்லது உரிய மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்து சமன்பாடுகளை மாற்றி, தீர்வுகளைக் கண்டறியவும். மூன்றாம் தலைப்பில் உள்ள "new problem" என்பதைச் சொடுக்கிக் கணக்குகளைச் செய்யவும். நழுவல்களை நகர்த்திப் படிநிலைகளைப் பார்க்கவும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இயற்கணிதம் : https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

3 Algebra_TM_T1.indd 148 26-12-2019 12:17:35