मन की गणित से उद्धृत 100 बाजीगर विधियां

1 जोड़ एवं घटाव

जोड़ एवं घटाव की जटिल गणनाओं को हम छोटे और आसान भागों में संख्याओं को तोड़कर हल कर सकते हैं। यहां ध्यान रखना होगा कि घटाव का अर्थ है धनात्मक संख्या से ऋणात्मक संख्या को हटाना। यह कार्य टुकड़ों में सुविधानुसार भी किया जा सकता है देखें कुछ प्रश्न–

$$\begin{array}{r} 945 \\ +96 \\ \hline \end{array}$$

यह गणना मन-मस्तिष्क में ही की जा सकती है यदि 945 में 100 जोड़कर उसमें से 4 घटा दिया जाए इस प्रकार-

$$\begin{array}{r} 945 \\ +100 \\ \hline 1045 \\ -4 \\ \hline 1041 \\ \hline \end{array}$$

ऐसा क्यों होता है? क्योंकि किसी संख्या में 100, 1000 इत्यादि जोड़ना सरल है और मन ही मन ऐसी गणनाएं संभव है। ऐसा ही एक प्रश्न और देखें -

9832 + 1540 – 1142

यहां ऋणात्मक 1142 को दोनों धनात्मक संख्याओं से हटाना है।

1540 में से 1140 हटा दें, शेष बचा = 400

शेष बचे 2 और ऋणात्मक संख्या को 9832 से हटा दें

शेष बचा = 9830

उत्तर = 9830 + 400 = 10230

इस प्रकार

$$\begin{array}{rcrcr} & & 1142 & & \\ 9832 & - & \boxed{2} & = & 9830 \\ +\ 1540 & - & \boxed{1140} & = & 400 \\ \hline & & & & 10230 \end{array}$$

इसी प्रकार

$$\begin{array}{rrrl} & 856 + 938 + 881 & & \\ = & 800 + 50 + 6 & & \\ + & 900 + 30 + 8 & & \\ + & 800 + 80 + 1 & & \\ \hline & 2500 + 160 + 15 & = 2675 & \end{array}$$

2 गुणा

गुणा की क्रियाओं को त्वरित हल करने के लिए अक्सर सुझाया जाता है कि टेबिल या पहाड़ा याद कर लें। अब यदि 6 में 197 से गुणा करना हो तो क्या 6 की टेबिल 197 बार तक याद रखेंगे? तब इनके लिए मन की गणित का इस्तेमाल कैसे करेंगे? सबसे पहले अपनी इस कमजोरी को स्वीकारें कि बड़ी संख्याओं के गुणा में हमें कठिनाई होती है और छोटी संख्याओं के गुणा जैसे $6 \times 4, 3 \times 5$ इत्यादि में हम सहज हैं। इसी प्रकार 10, 100 या 1000 से गुणा हम अत्यंत सरलता से कर लेते हैं क्योंकि इसमें करना ही क्या है? बस जीरो (0) आगे बढ़ा देना होता है। अपनी कमजोरी को ही ताकत में बदलकर हम गुणा के क्रियाओं को आसानी से हल कर सकते हैं, देखें-

$$6 \times 197 = 6 \times 200 - 6 \times 3 \quad (\because 197 = 200 - 3)$$

$$= 1200 - 18 = 1182$$

नोट : 6 का 197 गुना करना है। हमने पहले 6 का 200 गुना किया फिर उसमें से 6 का 3 गुना घटा दिया, हो गया 6 का 197 गुना।

इसी प्रकार

$$25 \times 44 = \underbrace{25 \times 4} \times 11$$

$$= 100 \times 11 = 1100$$

नोट : एक संख्या को 4 गुना और दूसरी संख्या को चौथाई कर दिया जाए तो उत्तर पर कोई प्रभाव

नहीं पड़ेगा।

एक और प्रश्न देखें

$75 \times 84 = ?$

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं-

$\underline{25 \times 3} \times \underline{21 \times 4}$

यदि एक हिस्से को एक गुना बढ़ा दें और दूसरे हिस्से को 1 गुना कम कर दें तो परिणाम पर कोई फर्क नहीं पड़ेगा लेकिन गणना सरल हो जाएगी; इस प्रकार

$$\underset{\displaystyle 100}{\underset{\downarrow}{\underline{25 \times 4}}} \times \underset{\displaystyle 63}{\underset{\downarrow}{\underline{21 \times 3}}} = 6300$$

यह आप पर है कि आप किस विधि को अपना साथी बनाते हैं। यह प्रश्न देखें-

46×48

इसके लिए हम आपको चार तरीके बताएंगे-

(1) **दोनों संख्याओं के औसत का वर्ग करके दोनों के अंतर का वर्ग घटाएं**

$$\frac{46 + 48}{2} = (47)$$

$$\frac{46 - 48}{2} = (-1)$$

$$= 47^2 - 1^2$$

(2) **बीजगणितीय विधि**

$46 = (47 - 1)$

$48 = (47 + 1)$

46×48

$(47 - 1) \times (47 + 1)$

$= (a - b) \times (a + b)$

$= a^2 - b^2$

$= 47^2 - 1^2$

(3) **सूत्र याद रखें**

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x - a)(x - b) = x^2 - ax - bx + ab$

46×48 को इन दोनों ही रूपों में रखा जा सकता है-

(A) $(x + a)$ एवं $(x + b)$ रूप यह है-

$$(40 + 6)(40 + 8) = 40^2 + 40 \times 6 + 40 \times 8 + 8 \times 6$$
$$= 1600 + 240 + 320 + 48$$
$$= 2208$$

(B) $(x - a)(x - b)$ रूप यह है-

$$(50 - 4)(50 - 2) = 50^2 - 50 \times 4 - 50 \times 2 + 4 \times 2$$
$$= 2500 - 200 - 100 + 8$$
$$= 2208$$

(4) **$46 \times 48 = ?$**

46 का 50 गुना करें एवं उसमें से 2 गुना घटाएं-

46 का 50 गुना या 4600 का आधा = 2300

46 का 2 गुना = – 92

2208

⇒ उपर्युक्त उदाहरण में क्रमांक 3 में वर्णित तरीके का प्रयोग नजदीकी संख्याओं के परस्पर गुणा के लिए किया जाता है-

जैसे- $106 \times 109 =$

$$(100+6)(100+9) = 100^2+100 \times 6+100 \times 9+9 \times 6$$
$$= 10000 + 600 + 900 + 54$$
$$= 11554$$

⇒ गुना वाला तरीका सरल है और इसे कहीं भी अमल में ला सकते हैं। देखें-

$73 \times 82 =$

70 का 80 गुना = 5600

\+ 3 का 80 गुना = 240

\+ 70 का 2 गुना = 140

\+ 3 का 2 गुना = 6

5986

सुविधानुसार एक स्टेप कम भी कर सकते हैं -

जैसे- $73 \times 82 =$

70 का 80 गुना = 5600

\+ 3 का 80 गुना = 240

\+ 73 का 2 गुना = 146

5986

3 भाग

गुणा की ही क्रिया की तरह भाग के लिए भी इस तथ्य को ध्यान में रखें कि छोटी संख्याओं से भाग बड़ी

संख्याओं से भाग की तुलना में आसान कार्य होता है। इसलिए भाग की गुणनखंड विधि का प्रयोग लाभदायक हो सकता है।

उदाहरण के लिए

$\frac{1344}{28}$ को इस प्रकार भाग दे सकते हैं-

$\frac{1344}{2}=672; \frac{672}{2}=336; \frac{336}{7}=48$ $\boxed{28 = 2 \times 2 \times 7}$

28 से भाग दिया गया किंतु इसके 3 गुणनखंडों 2 × 2 × 7 से 3 बार में।

इसी प्रकार $\frac{324}{36}$ के लिए $36 = 2 \times 3 \times 3 \times 2$

$$\frac{324}{2} = 162; \quad \frac{162}{3} = 54; \quad \frac{54}{3} = 18; \quad \frac{18}{2} = 9$$

भाग की क्रिया करने के दौरान इस प्रकार से विचार भी महत्त्वपूर्ण साबित हो सकता है कि - 1344, 28 के 50 गुने 1400 से 28 का 2 गुना (28 × 2 = 56) कम है। अतः यह 28 का 48 गुना है। स्पष्ट है कि भागफल 48 होगा।

इसी प्रकार दूसरे प्रश्न में 324 संख्या के अवलोकन से स्पष्ट है कि यह 36 के 10 गुने से 36 का एक गुना अर्थात 36 कम है। अतः भागफल 10 – 1 = 9 होगा।

4 भिन्नों की संक्रियाएं

● भिन्नों का जोड़-घटाव

भिन्नों के जोड़-घटाव के लिए एक बात समझ लेना है कि यदि हर बराबर कर लें तो अंशों को सामान्य जोड़-घटाव की तरह जोड़ते और घटाते हैं। भिन्नों को देखते ही इनके हरों को बराबर करने की युक्ति पर विचार करें। देखें प्रश्न:-

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

इसे लिख सकते हैं - $\frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{17}{20}$

इसे तिर्यक गुणा (Cross multiplication) विधि से भी समझ सकते हैं।

इस प्रकार $\frac{1}{4} \overset{+}{\times} \frac{3}{5}$

अंश के लिए → $5 \times 1 + 4 \times 3 = 17$

हर के लिए → $4 \times 5 = 20$

भिन्न = $\frac{17}{20}$

इसी प्रकार- $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = ?$

तिर्यक गुणा विधि - $\frac{3}{5} \overset{-}{\times} \frac{1}{4}$

अंश के लिए → $4 \times 3 - 5 \times 1 = 7$

हर के लिए → $5 \times 4 = 20$

भिन्न = $\frac{7}{20}$

यहां भी हरों को बराबर करने के लिए 5 एवं 4 का गुणनफल 20 लिया गया। यही ल.स.प. भी है।

● भिन्न का गुणा

भिन्न के गुणा के लिए बस इतना करना है कि अंशों को परस्पर गुणा करके अंश प्राप्त करें एवं हरों को परस्पर गुणा करके हर प्राप्त करें। जैसे-

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{9 \times 5} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$ (संक्षिप्त रूप में)

● भिन्नों का भाग

भिन्नों के भाग के लिए बस इतना कीजिए कि जिस भिन्न से भाग देना है उसे उलट दें अर्थात अंश की जगह हर एवं हर की जगह अंश फिर इसके बाद भिन्न के गुणा की क्रिया संपन्न करें। देखें-

$$\frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

5 वर्ग-वर्गमूल

● वर्ग कैसे जानें?

वर्ग संख्याएं जानने के लिए 2 सरल तथ्य ध्यान में रखें-

(1) 0 एवं 5 इकाई वाली संख्याओं का वर्ग करना अत्यधिक आसान है, और

(2) किसी संख्या के वर्ग में यदि वह संख्या और उसकी अगली संख्या जोड़ दें तो अगली संख्या का वर्ग प्राप्त होगा और यदि वह संख्या और पिछली संख्या घटा दें तो पिछली संख्या का वर्ग प्राप्त हो जाएगा। देखें-

(i) 10 एवं 20 का वर्ग

$$10 \times 10 = 100$$
$$20 \times 20 = 400$$

(संख्याओं को परस्पर गुणा करके उनके आगे उतने ही शून्य रख दें जितने इन संख्याओं में हैं)

(ii) 75, 85, 105 का वर्ग = ?

$75^2 = 5625$

$85^2 = 7225$

$105^2 = 11025$

इकाई का अंक 5 वाली संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने हेतु सदा यह करें-

(i) 5 का वर्ग करके दाहिनी ओर रख दें ($5^2 = 25$)

(ii) इसके बगल में बायीं ओर शेष बची संख्या को उसकी अगली संख्या से गुणा करके रख दें।

जैसे- $(75)^2$ 7 × 8 5^2 = 5625

↓ ↓

56 25

(5 का वर्ग करके 25 रखा गया इसके ठीक पहले 7 में उसकी अगली संख्या 8 से गुणा करके 56 रखा गया)

$(115)^2$ = 132 25 = 13225

↑ ↑

(11 × 12) (5 × 5)

☞ यदि 10 का वर्ग 100 है तो 11 का वर्ग क्या होगा?

100 + 10 + 11 = 121

अर्थात 10 के वर्ग में 10 एवं उसकी अगली संख्या 11 जोड़ दें।

12 का वर्ग क्या होगा?

121 + 11 + 12 = 144

⇓

(11 का वर्ग)

☞ यदि 10 का वर्ग 100 है तो 9 का वर्ग क्या होगा?

100 – 10 – 9 = 81

अर्थात 10 के वर्ग में 10 एवं पिछली संख्या 9 घटा दें।

☞ 114 का वर्ग = ?

115 का वर्ग = 13225

114 का वर्ग = 13225 – (115 + 114)

= 13225 – 229

= 13000 – 4 = 12996

☞ 113 का वर्ग = ?

$(113)^2 = (115)^2 - (115 + 114 + 114 + 113)$

या

$= (115)^2 - (114 \times 4)$

$= 13225 - 456$

$= 12769$

नोट : 113 का वर्ग जानने के लिए 115 के वर्ग में 113 एवं 115 के बीच की संख्या का 4 गुना घटा दें।

कुछ उदाहरण देखें-

☞ 102 का वर्ग = ?

102 का वर्ग $= (100)^2 + (101 \times 4)$

= 10000 + 404

= 10404

☞ 103 का वर्ग = ?

103 का वर्ग $= (105)^2 - (104 \times 4)$

= 11025 – 416

= 10609

> **नोट :** उपर्युक्त संक्षिप्त जानकारियों का प्रयोग कर बड़ी से बड़ी संख्या का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है; आसानी से।

● वर्गमूल

दो दशमलव बिंदुओं तक वर्गमूल का अनुमान–

55 का वर्गमूल = ?

नियम-(1) 55 की नजदीकी संख्या का वर्गमूल जानें; यह है- 49 का वर्गमूल यानी 7

(2) 55 में से 49 घटाएं → 55 – 49 = 6

(3) शेषफल को निकटतम वर्गमूल के 2 गुने से

भाग दें→ $6 \div 7 \times 2 = \frac{6}{14} = .43$

(4) प्राप्त फल को निकटतम वर्गमूल संख्या में जोड़े → $7 + .43$
$= 7.43$

☞ 66 का वर्गमूल = ?

निकटतम वर्गमूल संख्या = $\sqrt{64} = 8$

$$\begin{array}{r} 66 \\ -64 \\ \hline 2 \end{array}$$

पुनः $\frac{2}{8 \times 2} = \frac{2}{16} = .13$

उपर्युक्त चर्चाओं का उद्देश्य आपको यह बताना है कि मानसिक स्तर पर ही हल करने की विधियों का प्रयोग करके सामान्य गणनाओं में लगने वाले समय को बचाया जा सकता है। विधि यदि सरल होगी तो इसमें शुद्धता भी होगी। सदैव सरल और छोटे प्रारूप एवं विधि को चुनें जिससे कागज एवं पेन के कम से कम इस्तेमाल से गणनाएं हो सकें और यह सही भी रहें। ऐसी सभी विधियों को बताया जाना संभव नहीं है। इन्हें आपको स्वयं अपनी सुविधा के अनुरूप '**अपनी मन की गणित**' विधि के रूप में निरंतर अभ्यास से विकसित करना है। ये परीक्षा भवन में कितनी कारगर होंगी, आप सोच भी नहीं सकते।

संख्या पद्धति

6 **प्रश्न :** दो क्रमागत सम संख्याओं का योग 14 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए?

हल : परंपरागत विधि

माना पहली सम संख्या = x

तथा दूसरी क्रमागत सम संख्या = y

प्रश्नानुसार, $x + y = 14$ ....(i)

y दूसरी क्रमागत सम संख्या है। इसलिए $y = x + 2$ होगा क्योंकि क्रमागत समसंख्याओं में उत्तरोत्तर (+2) की वृद्धि होती है।

y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$x + x + 2 = 14 \Rightarrow 2x = 14 - 2 = 12$

$x = 6$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$6 + y = 14$

$y = 14 - 6 = 8$

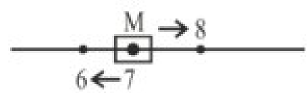
अत: सम संख्याएं 6 व 8 होंगी।

मध्यमान विधि

उपर्युक्त प्रश्न को समीकरण प्रारूप के बजाए एक अन्य अभिनव तरीके से भी हल किया जा सकता है-

यदि हम क्रमागत संख्याओं के योग का मध्यमान ज्ञात कर लें, तो मध्यमान संख्या के ठीक पहले की पूर्णांक संख्या पहली सम संख्या तथा ठीक बाद की पूर्णांक संख्या दूसरी क्रमागत सम संख्या होगी। क्रमागत सम संख्याओं का योग = 14

मध्य की संख्या $(M) = \frac{14}{2} = 7$



मध्य की संख्या 7 के ठीक पहले की सम संख्या = 6

मध्य की संख्या 7 के ठीक बाद की सम संख्या = 8

अत: संख्याएं 6, 8 होंगी।

इस अभिनव तरीके से परीक्षार्थी दी गई संख्याओं के योग का मध्यमान ज्ञात करके विभिन्न प्रकार (क्रमागत सम संख्याएं, विषम संख्याएं, तीन, चार, पांच आदि क्रमागत संख्याओं में छोटी संख्या, बड़ी संख्या एवं बीच की संख्या आदि) के प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

मध्यमान का नियम :

मध्यमान के नियम द्वारा उन संख्याओं को ज्ञात करना अत्यधिक सरल है, जिनका योग और संख्या दिया गया हो।

☞ **क्या करना होगा?**

योग को संख्याओं की संख्या से भाग दें, मध्यमान ज्ञात करें। अभीष्ट संख्याएं इसी मध्यमान संख्या के दोनों तरफ रहेंगी।

☞ **क्या ध्यान रखना होगा?**

देखना यह होगा कि मध्यमान के रूप में जो संख्या प्राप्त हुई है, वह यदि पूछी गई संख्या की संज्ञा (सम, विषम, प्राकृतिक इत्यादि) है, तो एक संख्या एक मध्यमान संख्या होगी और अन्य संख्याएं इसी संख्या के दोनों तरफ प्रसरित होंगी।

☞ **यदि मध्यमान अलग संख्या हो-**

यदि मध्यमान संख्या पूछी गई संख्या की संज्ञा से अलग है, तो मध्यमान संख्या के दोनों ओर निकटतम संख्या ज्ञात कर हम अपने वांछित परिणाम तक पहुंच सकते हैं।

7

प्रश्न : चार क्रमागत संख्याओं का योग 150 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए?

हल : मध्यमान $= \frac{150}{4} = 37.5$

(जो कि पूर्णांक नहीं है।)

अत: संख्याएं 36, 37, 38 व 39 होंगी। ⇒ **उत्तर**

8

प्रश्न : तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 357 हो, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल : तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग $= 357$

बीच की संख्या अर्थात मध्य की संख्या $= \frac{357}{3}$

$= 119$

अत: विषम संख्याएं = 117, 119, 121 ⇒ **उत्तर**

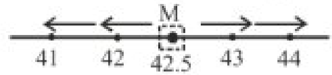
9

प्रश्न : चार क्रमागत संख्याओं का योग 170 हो, तो सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : चार क्रमागत संख्याओं का योग $= 170$

मध्य की संख्या $= \frac{170}{4} = 42.5$

(जो कि पूर्णांक नहीं है)



अत: चारो क्रमागत संख्याएं 41, 42, 43 व 44 होंगी।

⇒ **उत्तर**

10 प्राकृतिक संख्याओं के औसत एवं योग पर प्रश्न

प्रश्न : 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल : **सूत्र विधि से**

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 99 + 100$

सूत्र : n प्राकृतिक संख्या का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

n प्राकृतिक संख्या का औसत

$= \frac{\text{n प्राकृतिक संख्या का योग}}{\text{कुल संख्या}}$

1 से 100 तक प्राकृतिक संख्याओं का योग

$= \frac{100\ (100 + 1)}{2} = 50 \times 101$

$= 5050$

औसत $= \frac{5050}{100} = 50.50$ ⇒ **उत्तर**

सूत्र विधि से

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 99 + 100$

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}\ [2a + (n-1)d]$

जहां n = पदों की संख्या, a= पहला पद,

S_n = n पदों का योग

d = सर्वांतर

यहां n = 100, a = 1 तथा d = 1 है।

$1+2+3+ \dots\dots\dots +99+100$

$$S_{100} = \frac{100}{2}[(2\times 1+(100-1)1]$$

$$= 50(2+99) = 50\times 101 = 5050$$

$\therefore$ औसत $= \frac{5050}{100} = 50.50 \Rightarrow$ **उत्तर**

औसत विधि-

प्राय: देखा गया है कि इस प्रकार के प्रश्नों को हल करते समय परीक्षार्थी परीक्षा भवन में जूझते रहते हैं और विभिन्न प्रकार के नियमों व समीकरणों का प्रयोग करके हल करने का प्रयास करते हैं जिससे उनका काफी समय ऐसे प्रश्नों को हल करने के प्रयास में ही नष्ट हो जाता है। ऐसे प्रश्नों को एक निश्चित नियम का प्रयोग करके कम समय एवं सरलतम ढंग से हल किया जा सकता है।

औसत के लिए $= \frac{\text{प्रथम संख्या + अंतिम संख्या}}{2}$

योग के लिए = औसत × जितनी बार संख्या हो अर्थात जितनी संख्या हो-

औसत विधि से

औसत $= \frac{1+100}{2} = \frac{101}{2} = 50.5 \Rightarrow$ **उत्तर**

11

प्रश्न : 1 से 100 तक की प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

योग = औसत × संख्या

$= 50.5 \times 100$

$= 5050 \Rightarrow$ **उत्तर**

(1 से 100 तक की संख्याओं का औसत = 50.5 तथा 1 से 100 तक में कुल संख्या = 100)

12

प्रश्न : 1 से 100 तक की सम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

1 से 100 तक में प्रथम सम संख्या = 2 तथा अंतिम सम संख्या = 100 होगी

औसत $= \frac{2+100}{2} = \frac{102}{2} = 51 \Rightarrow$ **उत्तर**

13

प्रश्न : 1 से 100 तक की विषम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

औसत विधि से

1 से 100 तक में प्रथम विषम संख्या = 1 तथा अंतिम विषम संख्या = 99 होगी।

औसत $= \frac{1+99}{2} = \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow$ **उत्तर**

14 संख्याओं के जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग पर आधारित प्रश्न

☞ **नोट :**

(1) यदि संख्याओं का योग तथा अंतर दिया गया हो, तब

बड़ी संख्या $= \frac{\text{योग + अंतर}}{2}$

छोटी संख्या $= \frac{\text{योग − अंतर}}{2}$

(2) संख्याओं का गुणनफल

$$= \frac{(\text{योग + अंतर})(\text{योग − अंतर})}{4}$$

= बड़ी संख्या × छोटी संख्या

(3) यदि संख्याओं के योग तथा अंतर का अनुपात $x : y$ हो,

तो संख्याओं का अनुपात $= \frac{x+y}{x-y}$ होगा।

प्रश्न : दो संख्याओं का योग 8 है तथा उनका अंतर 4 है, तो बड़ी एवं तथा छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना बड़ी संख्या x तथा छोटी संख्या y है, तो

प्रश्नानुसार, $x + y = 8$ ......(1)

$x - y = 4$ ......(2)

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर

$2x = 12$

$x = 6$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$6 + y = 8$

$y = 8 - 6 = 2$

अत: बड़ी संख्या = 6

तथा छोटी संख्या = 2 $\Rightarrow$ **उत्तर**

सूत्र विधि-

(1) बड़ी संख्या =

$$\frac{\text{दोनों संख्याओं का योग} + \text{दोनों संख्याओं का अंतर}}{2}$$

(2) छोटी संख्या =

$$\frac{\text{दोनों संख्याओं का योग} - \text{दोनों संख्याओं का अंतर}}{2}$$

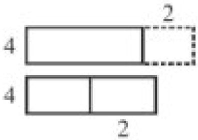
बड़ी संख्या $= \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

तथा छोटी संख्या $= \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ **उत्तर**

मध्यमान विधि-

संख्याओं का मध्यमान $= \frac{\text{योग}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

अंतर का मध्यमान $= \frac{4}{2} = 2$



बड़ी संख्या = 4 + 2 = 6

छोटी संख्या = 4 – 2 = 2

15

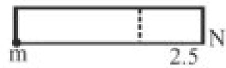
प्रश्न : दो संख्याओं का अंतर 5 है, यदि बड़ी संख्या 23 हो तो छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मध्यमान विधि-

अंतर का मध्यमान $= \frac{5}{2} = 2.5$

बड़ी संख्या = 23

M = 23–2.5 = 20.5



छोटी संख्या=20.5–2.5=18

$\Rightarrow$ **उत्तर**

16

प्रश्न : दो संख्याओं का योग 5 तथा अंतर 3 हो, तो इनका गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि-

संख्याओं का गुणनफल

$$= \frac{(\text{योग} + \text{अंतर})\ (\text{योग} - \text{अंतर})}{4}$$

संख्याओं का योग = 5 तथा अंतर = 3 है।

संख्याओं का गुणनफल $= \frac{(5+3)\ (5-3)}{4}$

$= \frac{8 \times 2}{4} = 4 \Rightarrow$ **उत्तर**

17

पैरों एवं सिरों की संख्या के आधार पर प्रश्न

प्रश्न : मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की कुल संख्या 37 है तथा उनके पैरों की संख्या 98 है, तो मोहन के फार्म में मुर्गियों एवं सुअरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना सुअरों की संख्या x है तथा मुर्गियों की संख्या y है, तो

प्रश्नानुसार, $x + y = 37$

या $2x + 2y = 74$ ....(i)

सुअरों के पैरों की संख्या $= 4x$

तथा मुर्गियों की पैरों की संख्या = 2y होगी।

प्रश्नानुसार, $4x + 2y = 98$ ......(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) को हल करने पर

$$2x + 2y = 74$$
$$4x + 2y = 98$$
$$-2x = -24$$
$$x = 12$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$y = \frac{50}{2} = 25$$

अतः सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25 ⇒ **उत्तर**

समीकरण विधि

यदि सुअरों की संख्या x एवं मुर्गियों की संख्या $(37 - x)$ हो, तो पैरों की संख्या = $4 \times x$ तथा $2 \times (37 - x)$ होगी।

प्रश्नानुसार, $4x + 74 - 2x = 98$

$$2x = 98 - 74 = 24$$

$x = \frac{24}{2} = 12$ (जो कि सुअरों की संख्या है)

तथा $37 - x = 37 - 12 = 25$ (जो कि मुर्गियों की संख्या है)

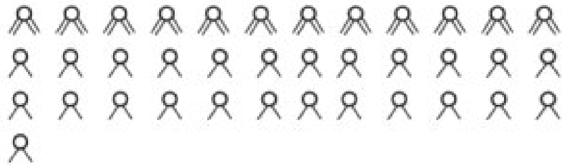
अतः सुअरों की संख्या = 12

तथा मुर्गियों की संख्या = 25 ⇒ **उत्तर**

अभिनव कल्पना विधि

उपर्युक्त समीकरण की बजाय इस प्रश्न को एक अन्य अभिनव तरीके से भी हल किया जा सकता है-

प्रश्न के हल हेतु हम एक रेखाचित्र खींचते हैं। हम सभी 37 जानवरों के सिरों के लिए 37 गोले खींचे और पैरों के लिए सभी गोलों के नीचे 2 लाइनें खींचे। अब चार (4) पैरों वाले सुअर के लिए 2 अतिरिक्त लाइनें खींचना शुरू करें। कितने गोलों में 2 अतिरिक्त लाइनें खींचनी होगी? स्पष्ट है कि 37 गोलों में 2 लाइनों की दर से 74 लाइनें पैरों के लिए हो जाएगी किंतु 98 पैर पूर्ण करने के लिए कुल 24 पैर बनाने हेतु 12 गोले में 2–2 लाइनें और खींचनी होगी। यही 12 सुअरों की संख्या होगी और शेष 25 मुर्गियों की इस प्रकार -



इस तरह की समस्या को सरल शब्दों में इस प्रकार समझ सकते हैं। यदि सभी सुअर अर्थात चार पैर वाले जानवर 2 पैर पर खड़े हो जाएं, तो 37 जानवरों के कुल 74 पैर होंगे लेकिन पैर 74 नहीं बल्कि 98 हैं अर्थात 24 पैर ज्यादा। एक चार पैर वाला जानवर अर्थात सुअर अपने चारों पैर जमीन पर रख दे, तो पैरों की संख्या में 2 की वृद्धि होगी। सभी चार पैर वाले जानवर अर्थात सुअरों के पैरों के जमीन पर रख देने से 24 पैर बढ़ेंगे अर्थात सुअरों की संख्या = $\frac{24}{2}$

= 12

यदि सुअरों की संख्या 12 है, तो मुर्गियों की संख्या होगी = $37 - 12 = 25$

सरलीकरण

18 **उदाहरणार्थ प्रश्न-**

प्रश्न : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80} = ?$

हल : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80}$

$$= \frac{63}{99} + \frac{37}{99} + \frac{80}{99}$$

$$= \frac{63 + 37 + 80}{99} = \frac{180}{99}$$

$$= 1\frac{81}{99} = 1.\overline{81}$$

☞ **एक और उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न : $0.34\overline{67} + 0.1\overline{333} = ?$

हल : $0.34\overline{67} + 0.13\overline{33}$

$$= \frac{3467-34}{9900} + \frac{1333-13}{9900}$$

$$= \frac{3433}{9900} + \frac{1320}{9900}$$

$$= \frac{4753}{9900}$$

या $= \frac{4753+48-48}{9900}$

[अंश में संख्या 48 जोड़ा गया फिर घटाया गया]

$$= \frac{4801-48}{9900} = 0.48\overline{01}$$

19

प्रश्न : $[5\times3+\{49\div7\times6-(28\div7)\}]$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए।

हल : $[5\times3+\{49\div7\times6-(28\div7)\}]$

$$=[5\times3+\{49\div7\times6-4\}]$$

[छोटा कोष्ठक $(28\div7=4)$ हल किया गया]

$$=\left[5\times3+\left\{\frac{49}{7}\times6-4\right\}\right]$$

[मझोला कोष्ठक में $49\div7$ को $\frac{49}{7}$ लिखा गया]

$$=[15+\{7\times6-4\}]$$

[मझोला कोष्ठक में BODMAS नियम का प्रयोग करके हल किया गया]

$$=[15+\{42-4\}]$$

$$=15+38$$

$$=53 \quad \Rightarrow \text{उत्तर}$$

20

प्रश्न : $\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{8-\dfrac{10}{11}}}$ को सरल कीजिए।

हल : $\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{8-\dfrac{10}{11}}} = \dfrac{5}{8+\dfrac{6}{\dfrac{88-10}{11}}}$

$$=\frac{5}{8+\dfrac{6}{\dfrac{78}{11}}}$$

$$=\frac{5}{8+6\times\dfrac{11}{78}}$$

[इस प्रकार के प्रश्नों में सबसे नीचे दी गई संख्या से हल करना प्रारंभ करते हैं अर्थात् सबसे नीचे $8-\frac{10}{11}$ है। अतः सबसे पहले इसे हल किया गया]

$$=\frac{5}{8+\dfrac{11}{13}}$$

[अब $8+\frac{11}{13}$ को पहले हल करेंगे]

$$=\frac{5}{\dfrac{8\times13+11}{13}}$$

$$=\frac{5}{\dfrac{104+11}{13}} = \frac{5}{\dfrac{115}{13}}$$

$\left[\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} = a\times\dfrac{c}{b}\right.$ के रूप में $\dfrac{5}{\dfrac{115}{13}}$ को लिखा गया$\left.\right]$

$$=5\times\frac{13}{115} = \frac{13}{23} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

21

प्रश्न : यदि $a+b+1=0$ हो, तो $(a^3+b^3+1-3ab)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $a+b+1=0$

$a + b = -1$ ....(1)

अब दोनों पक्षों का घन करने पर

$(a+b)^3 = (-1)^3$

$a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b) = -1$

$a^3 + b^3 + 3ab\,(-1) = -1$

[समीकरण (1) से $a + b = -1$ रखने पर]

$a^3 + b^3 - 3ab = -1$

$a^3 + b^3 + 1 - 3ab = 0$

[पक्षांतर किया गया]

अतः $a^3 + b^3 + 1 - 3ab = 0$ होगा। ⇒ **उत्तर**

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य

22 **महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य में संबंध**

दो संख्याओं और उनके म.स. तथा ल.स. में संबंध बहुत ही महत्त्वपूर्ण है। प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले प्रश्नों की दृष्टि से इस संबंध की जानकारी अत्यधिक उपयोगी है, जो इस प्रकार है–

पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

उपर्युक्त सूत्र का विस्तार इस प्रकार है–

मान लीजिए दो संख्याएं क्रमशः 24 व 36 हैं

(i) 24 एवं 36 का म.स.

$24 = \underline{1 \times 2 \times 2} \times 2 \times \underline{3}$

$36 = \underline{1 \times 2 \times 2} \times 3 \times \underline{3}$

इनका म.स. = 1 × 2 × 2 × 3 [क्योंकि ये ही दोनों गुणनखंड समूहों में (Common Factors) = 12 उभयनिष्ठ हैं।]

(ii) 24 एवं 36 का ल.स.

$24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

इनका ल.स. = 1 × 2 × 2 × 3× 2 × 3 = 72

(ल.स. में म.स. के गुणनखंडों के अतिरिक्त दोनों संख्याओं के सभी गुणनखंड शामिल होते हैं)

सूत्र है–

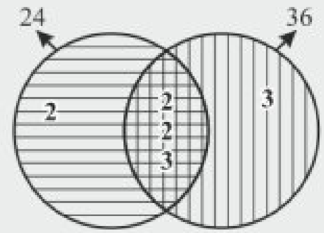
पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

24 × 36 = 12 × 72

864 = 864

अतः पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स. × ल. स.

HINT



म.स. = दोनों में उभयनिष्ठ संख्याओं का गुणनफल
= 2 × 2 × 3 = 12

ल.स. = उभयनिष्ठ का गुणनफल × शेष संख्याओं के गुणनफल
= (2 × 2 × 3) × (2 × 3) = 12 × 6 = 72

नोट : अतः दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान इनके म.स. एवं ल.स. के गुणनफल के बराबर होगा।

23 **प्रश्न :** भिन्न $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}$ का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : भिन्न का ल.स. = $\frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$

अंशों का ल.स. अर्थात 2, 3, 4 का ल.स. ज्ञात करना है।

2	2, 3, 4
2	1, 3, 2
3	1, 3, 1
	1, 1, 1

ल.स. = 2 × 2 × 3 = 12

हरों का म.स. अर्थात 5, 8, 9 का म.स. ज्ञात करना है।

$5 = \underline{1} \times 5$

$8 = \underline{1} \times 2 \times 2 \times 2$

$9 = \underline{1} \times 3 \times 3$

म.स. = 1 **(क्योंकि ये ही Common Factors है)**

अतः दी गई भिन्नों का ल.स. = $\frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$

$= \frac{12}{1} = 12$ ⇒ **उत्तर**

वर्गमूल तथा घनमूल

24 **प्रश्न :** $\frac{0.342 \times 0.684}{0.000342 \times 0.000171}$ का वर्गमूल क्या है?

हल :

अभीष्ट वर्गमूल $= \sqrt{\frac{0.342 \times 0.684}{0.000342 \times 0.000171}}$

(दशमलव चिह्न हटाने के लिए 1000000 से अंश और हर की प्रत्येक संख्या में गुणा किया)

$= \sqrt{\frac{342000 \times 684000}{342 \times 171}}$

$= \sqrt{1000 \times 4000} = \sqrt{100 \times 10 \times 4000}$

(1000 को 100 × 10 लिखा गया)

$= \sqrt{100 \times 40000} = 10 \times 200 = 2000 \Rightarrow$ **उत्तर**

(100 का वर्गमूल = 10 तथा 40000 का वर्गमूल 200 होगा)

25 **प्रश्न :** यदि एक अनंत श्रेणी $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+..}}}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+..}}}}$

दोनों ओर का वर्ग करने पर

$x^2 = 6 + \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}$

[समीकरण 1 में $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ + ...∞ = x रखने पर]

$x^2 = 6 + x$

$x^2 - x - 6 = 0$ **(पक्षांतर करने पर)**

[- x को -3x + 2x लिख सकते हैं क्योंकि -3x + 2x = -x है]

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

$x(x-3) + 2(x-3) = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

यदि $x - 3 = 0$ यदि $x + 2 = 0$

$x = 3$ $x = -2$

अत: $x = 3$ एवं (–)2 होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

नोट : x का मान ऋणात्मक भी हो सकता है। परंतु विकल्पों में सामान्यतया धनात्मक मान ही उत्तर के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

दूसरी विधि–इस तरह की अनंत श्रेणी के प्रश्नों के हल हेतु करणी में दी गई संख्या में जितना जोड़ा जाए जोड़ने के बाद बनी संख्या का वर्गमूल भी उतना ही आये तो जोड़ी गयी संख्या ही उत्तर है। देखें हल-

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.....}}}}$

6 में 3 जोड़ने पर संख्या 9 प्राप्त होगी और 9 का वर्गमूल भी 3 है अत: $x = 3$ ही अभीष्ट उत्तर होगा।

इसी प्रकार जितना घटाने पर वर्गमूल वही संख्या आये उत्तर होगा। 6 में 2 घटाने पर वर्गमूल 2 प्राप्त होगा। अत: $x = -2$ होगा।

तृतीय विधि : इस प्रकार के प्रश्नों में यदि संख्या दो क्रमिक संख्याओं का गुणनफल है तो बड़ी संख्या धनात्मक एवं छोटी संख्या ऋणात्मक रूप में अभीष्ट उत्तर होती है अर्थात

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.....+\infty}}}}$ में संख्या $6 = 2 \times 3$ संख्या 3 बड़ी संख्या है। अत: अभीष्ट उत्तर +3 एवं –2 है।

सामान्य समझ पर

इस प्रकार के प्रश्नों में यदि संख्या दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल हो तो छोटी संख्या अभीष्ट उत्तर होती है अर्थात $6 = 2 \times 3$, बड़ी संख्या (–) के साथ अर्थात (–) 3 उत्तर होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

घातक एवं करणी

26 **प्रश्न :** $\frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^{2}} \div \frac{5a^{-3}b^{2}c^{-1}}{3ab^{-2}c^{3}}$ को घातांक में बदलिए।

हल :

$$\frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^{2}} \div \frac{5a^{-3}b^{2}c^{-1}}{3ab^{-2}c^{3}} = \frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^{2}} \times \frac{3ab^{-2}c^{3}}{5a^{-3}b^{2}c^{-1}}$$

[∵ भाजक भिन्न है। अतः इसे उलट कर गुणा कर दिया]

$$= \frac{6\times3}{4\times5} \times \frac{a^{-1}\times b^{-1}\times c^{0}}{a^{-2}\times b^{-1}\times c^{1}}$$

[अंश और हर दोनों में सूत्र $a^m.a^n=a^{(m+n)}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{9}{10}\times a^{(-1+2)}.\ b^{(-1+1)}.\ C^{(0-1)}$$

[$a^m \div a^n=a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{9}{10}\times a^{1}.b^{0}.c^{-1} = \frac{9}{10}a.1.\frac{1}{c}$$

[$b^0=1$ तथा $c^{-1}=\frac{1}{c^1}$ किया गया]

$$= \frac{9a}{10c}$$ ⇒ **उत्तर**

27 **प्रश्न :** $\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b}.\left(\frac{x}{y}\right)^{b-c}.\left(\frac{x}{y}\right)^{c-a}$ को सरल कीजिए?

हल :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b}.\left(\frac{x}{y}\right)^{b-c}.\left(\frac{x}{y}\right)^{c-a} = \left(\frac{x}{y}\right)^{(a-b+b-c+c-a)}$$

[$a^m\times a^n\times a^l = a^{(m+n+l)}$ के रूप में लिखा गया]

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^{0} = 1$$ ⇒ **उत्तर**

[$a^0=1$ का प्रयोग किया गया]

28 **प्रश्न :** $(1397)^{512}$ का इकाई अंक क्या होगा?

हल : चूंकि संख्या 1397 में इकाई अंक 7 विषम है तथा घात 512 चार (4) से विभाजित है इसलिए इकाई का अंक 1 होगा।

29 **प्रश्न :** $(243)^{246}$ का इकाई अंक क्या होगा?

हल : नोट–घात को चार से भाग देने पर जो शेष बचता है, दी गई संख्या की इकाई के अंक का उतनी बार गुणा कर देते हैं, तो उस संख्या का इकाई अंक प्राप्त हो जाता है।

घात 246 को चार से भाग देने पर शेषफल 2 बचेगा इसलिए 243 के इकाई के अंक 3 को 2 बार गुणा करना पड़ेगा अर्थात् $3\times3=9$ अतः $(243)^{246}$ में इकाई का अंक 9 होगा।

30 **प्रश्न :** $19^{19}+6$ को 8 से विभाजित करने पर शेष है-

हल : सामान्य समझ पर

सर्वप्रथम 9^{19} में इकाई का अंक ज्ञात करेंगे। घात की संख्या 19 में 4 से भाग देने पर शेषफल = 3, संख्या 9 की घात होगी।

∴ 9^{19} में इकाई का अंक $= 9^3$

= 729 (इकाई का अंक 9)

अब इकाई के अंक 9 में 6 जोड़ने पर प्राप्त संख्या = 15 तथा संख्या 15 में 8 से भाग देने पर शेषफल 7 प्राप्त होगा जो अभीष्ट है।

31 **प्रश्न :** यदि $(2^x)(2^y) = 8$ तथा $(9^x)(3^y) = 81$ हो, तो (x, y) क्या होगा?

हल : विकल्प विधि

विकल्प (a) से

$(2^x)(2^y) = 8$ को संतुष्ट करने पर

$(2^1)(2^2) = 8$

या $8 = 8$

पुन: विकल्प (a) से

$(9^x)(3^y) = 81$ को संतुष्ट करने पर

$9^1 \times 3^2 = 81$

$9 \times 9 = 81$

$81 = 81$

अत: स्पष्ट है कि x एवं y के मान 1 व 2 होंगे। अत: विकल्प (a) सही है।

परंपरागत विधि

$(2^x)(2^y) = 8$ तथा $(9^x)(3^y) = 81$

$2^{x+y} = 2^3$ तथा $(3^{2x})(3^y) = 81$

$2^{x+y} = 2^3$ तथा $3^{2x+y} = 3^4$

घातांकों की तुलना करने पर

$x + y = 3$.......... (i) तथा $2x + y = 4$ .... (ii)

समी. (i) और समी. (ii) को हल करने पर

$x = 1, y = 2$

अत: स्पष्ट है कि x और y के मान (1, 2) है।

भिन्न

32 **प्रश्न :** भिन्न $\frac{1}{4}, \frac{8}{11}, \frac{14}{17}$ में सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई भिन्न $\frac{1}{4}, \frac{8}{11}, \frac{14}{17}$ हैं।

सभी भिन्नों के अंश एवं हर में समान अंतर (3) है। इसलिए सबसे बड़ी संख्या वाली भिन्न सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या वाली भिन्न सबसे छोटी होगी।

अत: भिन्न $\frac{14}{17}$ सबसे बड़ी तथा भिन्न $\frac{1}{4}$ सबसे छोटी होगी।

देखें- $\frac{1}{4} = .25$

$\frac{8}{11} = .7272$

$\frac{14}{17} = .8235$

अत: भिन्न $\frac{14}{17}$ सबसे बड़ी तथा भिन्न $\frac{1}{4}$ सबसे छोटी होगी।

$\Rightarrow$ **उत्तर**

33 **प्रश्न :** 85 मीटर लंबी एक छड़ को दो भागों में बांटा गया है। यदि एक भाग दूसरे भाग का $\frac{2}{3}$ है, तो लंबे भाग की लंबाई क्या होगी ?

अनुपात विधि

एक भाग दूसरे भाग का $\frac{2}{3}$ है

अत: एक भाग 1 है तो दूसरा भाग $\frac{2}{3}$ है।

दोनों भागों में अनुपात $= 1 : \frac{2}{3} = 3 : 2$

85 मीटर को 2 : 3 में विभाजित करने पर

लंबा भाग $= 85 \times \frac{2}{3} = 17 \times 3 = 51$ मीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

34 **प्रश्न :** एक व्यक्ति अपनी आय का $\frac{1}{3}$ भोजन पर, अपनी आय का $\frac{2}{5}$ मकान पर तथा अपनी आय का $\frac{1}{5}$ कपड़ों पर व्यय करता है। यदि उसके पास अभी भी 400 रु. शेष रहते हैं, तो उसकी आय क्या होगी?

अंकगणितीय विधि

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=400$$

$$1-\left(\frac{5}{15}+\frac{6}{15}+\frac{3}{15}\right)=400$$

$$1-\frac{14}{15}=400$$

आय $= 400 \times 15 = 6000 \Rightarrow$ **उत्तर**

35 **प्रश्न :** भिन्न $\frac{12}{13}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}, \frac{33}{34}$ में सबसे छोटी भिन्न एवं सबसे बड़ी भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल 8. सामान्य समझ पर

दी गई भिन्न $\frac{12}{13}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}, \frac{33}{34}$ हैं जिसके अंश एवं हर में समान अंतर (1) है।

अतः सबसे बड़ी भिन्न (सबसे बड़ी संख्या वाली भिन्न होगी) $\frac{33}{34}$ एवं सबसे छोटी भिन्न (सबसे छोटी संख्या वाली भिन्न होगी) $= \frac{12}{13} \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रतिशत

36 **प्रश्न :** चीनी के मूल्य में 25% की वृद्धि हो जाए, तो उसकी खपत में कितने प्रतिशत कमी की जानी चाहिए ताकि व्यय न बढ़े?

सूत्र विधि

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने का सूत्र है-

$$\text{खपत में प्रतिशत कमी} = \frac{100 \times \text{ प्रतिशत वृद्धि}}{100 + \text{ प्रतिशत वृद्धि}}$$

प्रतिशत वृद्धि = 25%

$\therefore$ खपत में प्रतिशत कमी

$$= \frac{100 \times 25}{100+25} = \frac{100 \times 25}{125} = 20\% \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

सूक्ष्म विधि

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने की एक सूक्ष्म विधि भी हो सकती है, इसे वस्तुनिष्ठ विधि भी कह सकते हैं क्योंकि इसमें हल विकल्पों के माध्यम से निकाला जाता है।

विधि-

जिस विकल्प में दी गई राशि का दिया गया वृद्धि प्रतिशत जोड़ने पर वृद्धि प्रतिशत में दिया गया अंक प्राप्त हो जाए, वही अभीष्ट उत्तर है।

मान लीजिए प्रथम प्रश्न हेतु 4 विकल्प क्रमशः

(a) 20% (b) $16\frac{2}{3}\%$ (c) 18% (d) 25% दिया गया हो।

तब आप देखें-

(a) 20% में 20 का 25% $\left(20 \times \frac{25}{100} = 5\%\right)$ जोड़ने पर 25% प्राप्त होता है। अतः यही अभीष्ट है।

(b) $16\frac{2}{3}\%$ में $16\frac{2}{3}$ का 25% जोड़ने पर 25% नहीं होता है। अतः यह अभीष्ट उत्तर नहीं है।

गुणा-भाग विधि

मान लीजिए आप 10 रु. किलो के भाव से 10 किलो चीनी की खपत करते हैं। तब इस चीनी के लिए दुकानदार आपसे पैसा लेगा $= 10 \times 10 = 100$ रु.। यही 100 रु. आपका व्यय-भार होगा। जब चीनी का भाव 25% बढ़ जाए यानी 10 रु. से बढ़कर 12.5 रु. हो जाए, तो उतने ही रुपये यानी 100 रु. में आप कितनी चीनी खरीद पाएंगे?

स्पष्ट है- $\frac{100}{12.5} = 8$ किग्रा.।

खपत में कितनी कमी करनी होगी 10 – 8 = 2 किग्रा. की, चूंकि यह कमी 10 किग्रा. पर है,

अतः प्रतिशत कमी यानी 100 किग्रा. पर कमी 2 का 10 गुना अर्थात 20 किग्रा.। यही खपत में प्रतिशत कमी है।

☞ **इसके लिए आपको क्या करना होगा?**

मूल्य × खपत = कुल व्यय-भार

↓ ↓ ↓

पूर्व भाव पर → 10 × 10 किग्रा. = 100 रु.

भाव बढ़ने पर → 12.5 × ? = 100 रु.

खपत जानने के लिए व्यय-भार में बढ़े मूल्य से भाग देना होगा,

अर्थात $\frac{100}{12.5} = 8$ किग्रा.

स्पष्ट है यदि पहले खपत 10 किग्रा. थी, तो अब 8 किग्रा. होगी और यदि पहले खपत 100 किग्रा. थी, तो अब 80 किग्रा. हो जाएगी। खपत में 100 किग्रा. पर 20 किग्रा. की कमी अर्थात 20% कमी होगी। ⇒ **उत्तर**

37 **प्रश्न :** चीनी के मूल्य में 50% की वृद्धि कर दी गई है। खपत में कितने प्रतिशत की कमी की जाए कि व्यय केवल 20% बढ़े?

गुणा-भाग विधि

मूल्य × खपत की मात्रा = कुल व्यय-भार

↓ ↓ ↓

पूर्व भाव पर → 10 × 10 = 100 रु.

भाव बढ़ने पर → 15 × ? = 120 रु.

खपत में कमी जानने के लिए कुल व्यय भार में बढ़े हुये मूल्य से भाग देना होगा अर्थात $\frac{120}{15} = 8$ किग्रा.

स्पष्ट है यदि पहले खपत की मात्रा 10 किग्रा. थी तो अब यह मात्रा 8 किग्रा. हो जाती है और यदि पहले खपत 100 किग्रा. थी, तो अब 80 किग्रा. हो जाएगी। खपत में 100 किग्रा. पर 20 किग्रा. की कमी अर्थात 20% की कमी होगी।

38 **प्रश्न :** यदि किसी वस्तु की खपत में 20% कमी करने पर व्यय में 12% की वृद्धि हो जाए तो इसके मूल्य में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

गुणा-भाग विधि

मूल्य × खपत की मात्रा = कुल व्यय-भार

↓ ↓ ↓

पूर्व भाव पर → 10 × 10 = 100 रु.

भाव बढ़ने पर → ? × 8 = 112 रु.

मूल्य में वृद्धि जानने के लिए कुल व्यय भार में खपत की मात्रा से भाग देना होगा अर्थात $\frac{112}{8} = 14$ रु.

स्पष्ट है वस्तु का मूल्य 10 रु. से बढ़कर 14 रु. हो गया अर्थात वृद्धि = 14 – 10 = 4 रु.

$\because$ 10 रु. पर वृद्धि है = 4 रु.

$\therefore$ 100 रु. पर प्रतिशत वृद्धि = $\left(\frac{4}{10} \times 100\right)\%$ = 40%

⇒ **उत्तर**

39 **प्रश्न-** यदि वस्तु के मूल्य में 30% की वृद्धि हो जाए, तो व्यय में 20% की कमी हो जाती है, ज्ञात कीजिए इसकी खपत में कितनी कमी या वृद्धि प्रतिशत में हुई?

गुणा-भाग विधि

मूल्य × खपत की मात्रा = कुल व्यय-भार

↓ ↓ ↓

पूर्व भाव पर → 10 × 100 = 1000 रु.

परिवर्तित भाव पर → 13 × ? = 800 रु.

खपत की मात्रा जानने के लिए कुल व्यय में मूल्य से भाग देना होगा अर्थात $\frac{800}{13} = 61\frac{7}{13}$ वस्तु

यहां ध्यान यह रखना होगा कि कहीं त्रुटिवश $61\frac{7}{13}$ को उत्तर के रूप में न ग्रहण कर लें वास्तव में $61\frac{7}{13}\%$ खपत की मात्रा 100 से घटकर हो गई है। खपत में कमी का प्रतिशत है

$= 100 - 61\frac{7}{13} = 38\frac{6}{13}$% यही अभीष्ट उत्तर है।

40

प्रश्न– चीनी के मूल्य में $33\frac{1}{3}$% की वृद्धि कर दी जाए, तो खपत में प्रतिशत कमी ज्ञात कीजिए।

गुणा-भाग विधि

	मूल्य	×	खपत की मात्रा	=	कुल व्यय मूल्य
	↓		↓		↓
पूर्व भाव पर →	3	×	100	=	300 रु.
भाव बढ़ने पर →	4	×	?	=	300 रु.

स्पष्ट है खपत की मात्रा जानने के लिए कुल व्यय मूल्य में वृद्धि मूल्य से भाग देना होगा अर्थात $\frac{300}{4} = 75$ किग्रा.

यहां ध्यान यह रखना होगा कि कहीं त्रुटिवश 75 किग्रा. को उत्तर के रूप में न ग्रहण कर लें, वास्तव में 75 किग्रा. खपत की मात्रा 100 किग्रा. से घटकर हो गयी है। खपत में प्रतिशत कमी 100 – 75 = 25% यही अभीष्ट उत्तर है।

41

प्रश्न– एक श्रमिक की मजदूरी 40% घटाकर पुन: 40% बढ़ा दी जाती है। श्रमिक की मजदूरी में कितने प्रतिशत परिवर्तन हुआ?

☞ **इस प्रश्न का हल इस तरह से देखें-**

	श्रमिक की मजदूरी में प्रथम परिवर्तन	×	श्रमिक की मजदूरी में द्वितीय परिवर्तन	=	वास्तविक परिवर्तन
	↓		↓		↓
पूर्व मजदूरी →	10	×	10	=	100 रु.
परिवर्तित मजदूरी →	6	×	14	=	84 रु.

स्पष्ट है कुल मजदूरी में वास्तविक परिवर्तन 100 रु. से घटकर 84 रु. हो गया यानी कि प्रतिशत कमी = 100 – 84 = 16%

अत: श्रमिक की मजदूरी में 16% कमी हो जाएगी।

42

प्रश्न– यदि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई में 10% वृद्धि कर दिया जाए, तो क्षेत्रफल में क्या प्रतिशत परिवर्तन होगा?

गुणा-भाग विधि

	लंबाई	×	चौड़ाई	=	क्षेत्रफल
	↓		↓		↓
पूर्व →	10	×	10	=	100 वर्ग मीटर
परिवर्तित →	11	×	11	=	121 वर्ग मीटर

नोट- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

स्पष्ट है आयत का क्षेत्रफल 100 वर्ग मीटर से बढ़कर 121 वर्ग मीटर हो गया अर्थात प्रतिशत वृद्धि = 121 – 100 = 21%

☞ **इस तरह से देखें-**

निष्कर्ष 1. मान लीजिए आयत की लंबाई 10 मीटर तथा चौड़ाई 10 मीटर है, तो क्षेत्रफल = 10 × 10 = 100 वर्ग मीटर (आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई)

निष्कर्ष 2. आयत की लंबाई एवं चौड़ाई में 10% वृद्धि करने पर अर्थात 10 मीटर पर 10% वृद्धि = 11मीटर (10 + 10 का 10%)

निष्कर्ष 3. आयत का क्षेत्रफल = 11 × 11 = 121 वर्ग मीटर

निष्कर्ष 4. स्पष्ट है आयत का क्षेत्रफल 100 वर्ग मीटर से बढ़कर 121 वर्ग मीटर हो गया अर्थात प्रतिशत वृद्धि = 121 – 100 = 21%

43

प्रश्न– एक आयत की लंबाई एवं चौड़ाई में $83\frac{1}{3}$% की कमी कर दिया जाए, तो नए आयत के क्षेत्रफल में प्रतिशत कमी ज्ञात करें।

हल : गुणा-भाग विधि

लंबाई एवं चौड़ाई में $83\frac{1}{3}$% कमी है। अत: पूर्व मान 6

मीटर लेना ठीक रहेगा क्योंकि 6 मीटर का $83\frac{1}{3}\% = 5$ मीटर पूर्णांक में प्राप्त होगा।

	लंबाई	×	चौड़ाई	=	क्षेत्रफल
	↓		↓		↓
पूर्व →	6	×	6	=	36 वर्ग मीटर
परिवर्तित →	1	×	1	=	1 वर्ग मीटर

स्पष्ट है आयत का क्षेत्रफल 36 वर्ग मीटर से घटकर 1 वर्ग मीटर हो गया अर्थात कमी = 36 – 1 = 35 वर्ग मीटर

$\because$ 36 वर्ग मीटर पर कमी है = 35 वर्ग मीटर

$\therefore$ 100 वर्ग मीटर पर प्रतिशत कमी $= \left(\frac{35}{36} \times 100\right)\%$

$= 97\frac{2}{9}\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

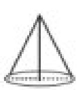
44

प्रश्न– एक शंकु की त्रिज्या एवं ऊंचाई में 20% की वृद्धि होती है। उसके आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

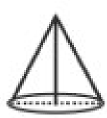
हल : गुणा-भाग विधि

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

	त्रिज्या (r)	×	त्रिज्या (r)	×	ऊंचाई (h)	=	आयतन
	↓		↓		↓		↓
पूर्व →	10	×	10	×	10	=	1000 मीटर^3
परिवर्तित →	12	×	12	×	12	=	1728 मीटर^3



शंकु-I



शंकु-II

शंकु-I	शंकु-II
आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$	आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \frac{1}{3}\pi \times 10 \times 10 \times 10$	$= \frac{1}{3}\pi \times 12 \times 12 \times 12$
$= \frac{1}{3}\pi \times 1000$	$= \frac{1}{3}\pi \times 1728$

स्पष्ट है शंकु का प्रभावी प्रारंभिक आयतन 1000 मीटर^3 से बढ़कर 1728 मीटर^3 हो गया अर्थात वृद्धि = 1728 – 1000 = 728 मीटर^3

$\because$ 1000 मीटर^3 पर वृद्धि है = 728 मीटर^3

$\therefore$ 100 मीटर^3 पर वृद्धि या प्रतिशत वृद्धि

$= \left(\frac{728}{1000} \times 100\right)\% = 72.8\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

45

प्रश्न– एक व्यक्ति अपनी मासिक आय का 40% भोजन पर, शेष का 30% कपड़े पर तथा शेष का $\frac{1}{4}$ मकान किराए पर खर्च करता है। यदि उसके पास शेष 504 रु. बचते हों, तो उसकी मासिक आय कितनी थी?

हल : भिन्न के नियम से

$\frac{1}{4}$ प्रतिशत में है $= \frac{100}{4}\% = 25\%$

मासिक आय में कमी हो रही है। अत: गणना के अंक होंगे-

(i) 100 एवं 60 (ii) 100 एवं 70 (iii) 100 एवं 75

प्रश्न में प्रारंभ की राशि या मासिक आय पूछी जा रही है, इसलिए पहले अर्थात अंश का मान 100 होगा।

व्यक्ति की मासिक आय

$= 504 \times \frac{100}{60} \times \frac{100}{70} \times \frac{100}{75}$

= 1600 रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: व्यक्ति की मासिक आय 1600 रु. थी।

लाभ–हानि

46 **प्रश्न**– एक वस्तु को 352 रु. 88 पैसे में बेचने पर राम को 12% की हानि हुई। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : भिन्न के नियम से-

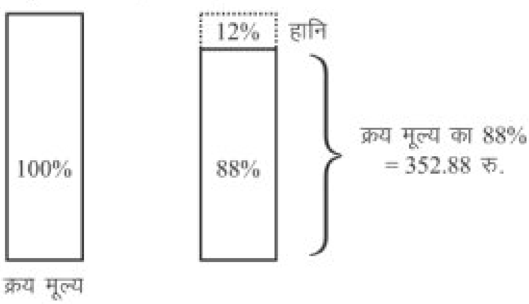
हमारी गणना के अंक होंगे 100 एवं 100 – 12 अर्थात 100 एवं 88 क्योंकि हानि % है।

चूंकि ज्ञात की जाने वाली राशि क्रय मूल्य अर्थात पूर्व की राशि है जिसके लिए पूर्व में या अंश के रूप में 100 होगा।

अत: क्रय मूल्य $= 352.88 \times \frac{100}{88} = 401$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रतिशत व्यवहार पर

निष्कर्ष 1. वस्तु को 352.88 रु. में बेचने पर 12% हानि अर्थात क्रय मूल्य का 88 (100-12)% = 352.88 रु. है।



निष्कर्ष 2. चूंकि वस्तु के क्रय मूल्य का 88% = 352.88 रु. है, तो वस्तु के क्रय मूल्य का 100% अर्थात क्रय मूल्य

$= \frac{352.88}{88} \times 100 = 401$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: वस्तु का क्रय मूल्य 401 रु. होगा।

47 **प्रश्न**–एक व्यक्ति दो घोड़े 1350 रु. में खरीदता है। एक पर उसे 6% हानि एवं दूसरे पर उसे $7\frac{1}{2}\%$ लाभ होता है। संपूर्ण सौदे में उसे न लाभ हुआ न हानि। प्रत्येक घोड़े की लागत बताइए।

हल : सामान्य समझ पर

1350 रु.

प्रथम घोड़े के क्र.मू. का 6% = द्वितीय घोड़े के क्र.मू. का $7\frac{1}{2}\%$

(6% हानि की राशि एवं 7.5% लाभ की राशि बराबर है)

निष्कर्ष 1. स्पष्ट है एक घोड़े के क्रय मूल्य का 6% दूसरे घोड़े के क्रय मूल्य के $7\frac{1}{2}\%$ के बराबर है (क्योंकि व्यक्ति को इस सौदे में न लाभ हुआ न ही हानि)

पहले घोड़े पर 6% हानि = दूसरे घोड़े पर $7\frac{1}{2}\%$ लाभ अत:

$$\frac{\text{पहले घोड़े का क्रय मूल्य}}{\text{दूसरे घोड़े का क्रय मूल्य}} = \frac{7\frac{1}{2}}{6} = \frac{15}{12}$$

अर्थात 15 : 12 = 5 : 4

निष्कर्ष 2. चूंकि दोनों घोड़ों के क्रय मूल्य में अनुपात 5 : 4 है।

इसलिए आनुपातिक योग = 5 + 4 = 9

निष्कर्ष 3. 6% हानि पर बेचा गया घोड़ा $= 1350 \times \frac{5}{9}$

= 750 रु.

$7\frac{1}{2}\%$ लाभ पर बेचा गया घोड़ा $1350 \times \frac{4}{9}$

= 600 रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

48 **प्रश्न**– एक दुकानदार को 1 रु. के 36 संतरे बेचने पर 4% की हानि होती है। 8% का लाभ प्राप्त करने के लिए उसे संतरे किस दर से बेचना चाहिए?

हल : सूत्र विधि :

$$\frac{\text{प्रथम विक्रय मूल्य}}{100 + \text{प्रथम लाभ \%} - \text{प्रथम हानि \%}} = \frac{\text{द्वितीय विक्रय मूल्य}}{100 + \text{द्वितीय लाभ \%} - \text{द्वितीय हानि \%}}$$

$$\text{द्वितीय विक्रय मूल्य} = \frac{\text{प्रथम विक्रय मूल्य}}{100 + \text{प्रथम लाभ \%} - \text{प्रथम हानि \%}} \times (100 + \text{द्वितीय लाभ} - \text{द्वितीय हानि \%})$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{100-4} \times (100+8)$$

$$= \frac{1}{36 \times 96} \times 108 = \frac{1}{32}$$

अर्थात 1 रु. के 32 संतरे बेचने चहिए।

भिन्न के नियम से

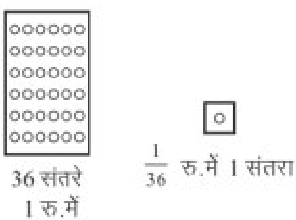
गणना के अंक होंगे - 100 एवं 96 घटाना है

तथा 100 एवं 108 बढ़ाना है।

विक्रय मूल्य $= \frac{1}{36} \times \frac{100}{96} \times \frac{108}{100} = \frac{1}{32}$

अर्थात एक रु. के 32 संतरे बेचने चाहिए। ⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर :



निष्कर्ष 1. $\frac{1}{36}$ रु. में 1 संतरा बेचने पर 4% हानि अर्थात क्रय मूल्य का 96% $= \frac{1}{36}$ होगा

निष्कर्ष 2. 8% लाभ पर संतरे की दर अर्थात 108%

$$= \frac{1}{36} \times \frac{108}{96} \text{ होगा।}$$

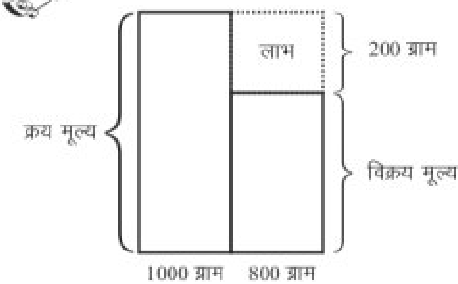
$$= \frac{1}{32}$$

अर्थात 1 रु. के 32 संतरे बेचने चाहिए। ⇒ **उत्तर**

49

प्रश्न– एक पंसारी अपना माल क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है परंतु वह 1 किलोग्राम बाट के स्थान पर 800 ग्राम के झूठे बाट का प्रयोग करता है। बताइए उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है?

हल : सामान्य समझ पर



निष्कर्ष 1. चूंकि 800 ग्राम विक्रय पर लाभ है = 200 ग्राम

निष्कर्ष 2. तो 100 ग्राम विक्रय पर प्रतिशत लाभ

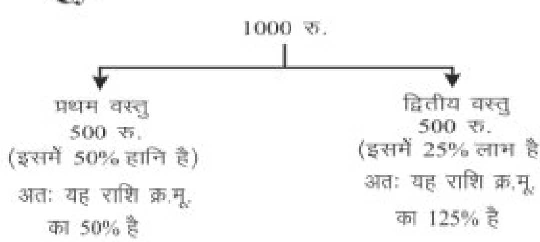
$$= \frac{200}{800} \times 100 = 25\%$$

⇒ **उत्तर**

50

प्रश्न– एक व्यक्ति दो वस्तुएं समान मूल्य पर 1000 रु. में बेचता है। एक पर उसे 50% हानि तथा दूसरे पर उसे 25% लाभ होता है। प्रत्येक वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : सामान्य समझ पर



निष्कर्ष 1. समान मूल्य पर बेचने का अर्थ है प्रत्येक वस्तु 500 रु. में बेचा।

निष्कर्ष 2. एक 500 रु. के विक्रय मूल्य में 50% हानि तथा एक 500 रु. के विक्रय मूल्य में 25% लाभ शामिल है।

निष्कर्ष 3. 500 रु. विक्रय मूल्य में 50% हानि पर क्रय मूल्य

$$= 500 \times \frac{100}{100-50} = 500 \times \frac{100}{50} = 1000 \text{ रु.}$$

तथा 500 रु. विक्रय मूल्य में 25% लाभ पर क्रय मूल्य

$$= 500 \times \frac{100}{100+25} = 500 \times \frac{100}{125} = 400 \text{ रु.}$$

अतः प्रत्येक वस्तु का क्रय मूल्य क्रमशः 1000 रु. एवं 400 रु. है। ⇒ **उत्तर**

औसत

51

प्रश्न– व्यक्तियों के एक समूह में 30 सदस्य हैं, जिनकी औसत आयु 30 वर्ष है। उनमें 61 वर्ष की आयु के एक सदस्य को और सम्मिलित कर दिया जाए तो नया औसत क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि

30 व्यक्तियों की कुल आयु = 30 × 30 = 900 वर्ष

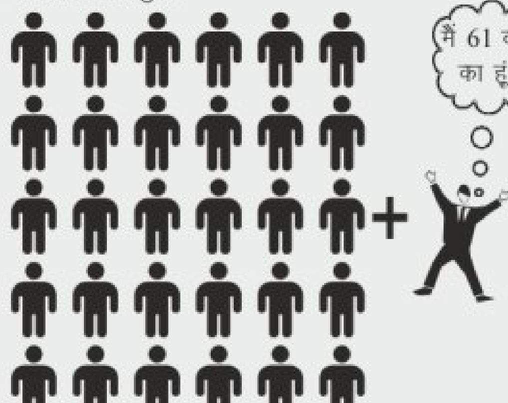
1 नए व्यक्ति की आयु के साथ कुल आयु = 900 + 61 = 961 वर्ष

$$\text{नया औसत} = \frac{961}{31} = 31 \text{ वर्ष}$$ ⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

नए व्यक्ति की औसत से जितनी ज्यादा आयु हैं। वह आयु सभी 31 सदस्यों में विभाजित कर बांट देने से नया औसत प्राप्त हो जाएगा। नए व्यक्ति की आयु औसत से 61 – 30 = 31 वर्ष ज्यादा है। यह 31 वर्ष सभी 31 सदस्यों में बराबर बांटने पर 1 वर्ष औसत आयु बढ़ जाएगी अर्थात नया औसत 30 + 1 = 31 वर्ष होगा।

चित्रात्मक प्रस्तुति



औसत आयु से 61 – 30 = 31 वर्ष ज्यादा नया व्यक्ति है। यह 31 वर्ष सभी 31 सदस्यों में बराबर बांटने पर औसत आयु 30 से बढ़कर 31 हो जाएगी।

52

प्रश्न– सात संख्याओं का योग 235 है। पहली तीन संख्याओं का औसत 23 है और अंतिम तीन संख्याओं का औसत 42 है, तो चौथी संख्या क्या होगी?

हल : परंपरागत विधि

माना चौथी संख्या = x

प्रथम तीन संख्याओं का औसत = 23

प्रथम तीन संख्याओं का कुल योग = 23 × 3 = 69

∴ अंतिम तीन संख्याओं का औसत = 42

अंतिम तीन संख्याओं का कुल योग = 42×3 = 126

सातों संख्याओं का योग = 235

$$69 + x + 126 = 235$$

$$x = 235 - 195 = 40$$

अतः चौथी संख्या 40 होगी ⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

पहली तीन संख्याओं का औसत तथा अंतिम तीन संख्याओं का औसत दिया है। इस जानकारी के आधार पर पहली तीन (23 × 3 = 69) और अंतिम तीन संख्याओं का योग (42

$\times 3 = 126$) निकाल लेंगे तथा दोनों को जोड़कर 7 संख्याओं के जोड़ में से घटाने पर चौथी संख्या प्राप्त हो जायेगी।

अतः चौथी संख्या $= 235 - (69 + 126)$

$= 235 - 195 = 40 \Rightarrow$ **उत्तर**

53

प्रश्न– 30 परिणामों का औसत 20 है और अन्य 20 परिणामों का औसत 30 है। इन सभी परिणामों का औसत क्या है?

हल : परंपरागत विधि

30 परिणामों का औसत $= 20$

30 परिणामों का कुल मान $= 30 \times 20 = 600$

$\therefore$ 20 परिणामों का कुल मान $= 20 \times 30 \Rightarrow 600$

कुल परिणामों की संख्या $= 30 + 20 = 50$

कुल परिणामों का मान $= 600 + 600 = 1200$

कुल परिणामों का औसत $= \frac{1200}{50} = 24$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

सामान्य समझ पर :

30 परिणामों का औसत 20 है तथा एक अन्य 20 परिणामों का औसत 30 है। यदि इस 20 परिणामों का औसत 20 हो तब सभी 50 परिणामों का औसत 20 हो जाएगा लेकिन इस 20 परिणामों के औसत 10 अधिक है। इन 10 परिणामों का कुल मान $10 \times 20 = 200$ होगा। 200 का सभी 50 परिणामों में बराबर बांट दें, यानी सभी को 20 के अलावा $\frac{200}{50} = 4$ और प्राप्त हो जाएगा।

अतः अभीष्ट औसत $20 + 4 = 24$ हो जाएगा।

54

प्रश्न– एक लाइब्रेरियन ने अपने पुस्तकालय के लिए 50 कहानी की पुस्तकें खरीदी। किंतु उसने देखा कि रु.76 और खर्च करने से उसे 14 पुस्तकें और मिल सकती थीं और प्रति पुस्तक औसत कीमत भी रु. 1 कम हो जाएगी। उसके द्वारा खरीदी गई प्रत्येक पुस्तक की औसत कीमत (रु. में) क्या थी?

हल : परंपरागत विधि

माना प्रत्येक पुस्तक की औसत कीमत x रु. थी।

प्रश्नानुसार

$$50 \times x + 76 = (50 + 14)(x - 1)$$

$$50x + 76 = 64(x - 1)$$

$$50x + 76 = 64x - 64$$

$$64x - 50x = 76 + 64$$

$$14x = 140$$

$$x = 10 \text{ रु.}$$

सामान्य समझ पर

14 पुस्तकों की औसत कीमत $= \frac{76 + 50}{14} = 9$ रु.

पूर्व औसत $= 9 + 1 = 10$ रु.

55

प्रश्न–12 संख्याओं का औसत 15 है और पहली दो संख्याओं का औसत 14 है। शेष संख्याओं का औसत क्या है?

हल : परंपरागत विधि

2 संख्याओं का औसत $= 14$

2 संख्याओं का कुल योग $= 14 \times 2 = 28$

12 संख्याओं का औसत $= 15$

$\therefore$ 12 संख्याओं का कुल योग $= 12 \times 15 = 180$

2 संख्याओं का कुल योग + शेष 10 संख्याओं का कुल योग $= 180$

शेष 10 संख्याओं का कुल योग $= 180 - 28 \Rightarrow 152$

$\therefore$ शेष 10 संख्याओं का औसत $= \frac{152}{10} \Rightarrow 15\frac{1}{5}$

सामान्य समझ पर

पहली दो संख्याओं का औसत 14 है जो कुल 12 संख्याओं के औसत 14 से 1 कम है। इसलिए शेष 10 संख्याओं का औसत 15 तो रहेगा ही साथ ही इनके कुल मान में 2 की वृद्धि (पहली तथा दूसरी में कमी) है।

$\therefore$ शेष 10 संख्याओं का औसत $= \frac{15 \times 10 + 2}{10}$

$= \frac{152}{10} \Rightarrow 15\frac{1}{5}$

अनुपात तथा समानुपात

56 **प्रश्न**– 1440 रु. को 7 पुरुषों, 13 स्त्रियों एवं 5 बच्चों में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि प्रत्येक स्त्री को बच्चे को 3 गुना और प्रत्येक पुरुष को एक बच्चे और एक स्त्री के बराबर धन प्राप्त हो।

सामान्य समझ पर

स्पष्ट है पुरुष, स्त्री एवं बच्चों की मजदूरी में अनुपात = 4 : 3 :1 है।

तथा इनकी संख्या में अनुपात = 7 : 13 : 5 है

तब इनका वास्तविक अनुपात = 28 : 39 : 5 होगा

आनुपातिक योग = 28 + 39 + 5 = 72

अत: 7 पुरुषों का भाग = $1440 \times \frac{28}{72} = 560$ रु.

13 स्त्रियों का भाग = $1440 \times \frac{39}{72} = 780$ रु.

तथा 5 बच्चों का भाग = $1440 \times \frac{5}{72} = 100$ रु. ⇒ **उत्तर**

57 **प्रश्न**– एक व्यक्ति के पास 1 रु., 5 रु. तथा 10 रु. के नोट हैं,जिसमें प्रत्येक की संख्या बराबर है तथा उनका मूल्य 160 रु. है, व्यक्ति के पास नोटों की कुल संख्या कितनी है?

सामान्य समझ पर

मान लीजिए व्यक्ति के पास तीनों प्रकार के नोटों की संख्या 1-1 हो तो इनका कुल मूल्य 16 रु. (1 + 5 + 10) होगा जबकि वास्तविक मूल्य 160 रु. है। यानी वास्तविक मूल्य 10 गुना है, तो नोटों की संख्या भी 10 गुनी होगी। अत: तीनों प्रकार के नोटों की कुल वास्तविक संख्या = 3 × 10 = 30 होगी। ⇒ **उत्तर**

58 **प्रश्न**– यदि A : B = 3 : 4 तथा B : C = 8 : 9 हो, तो A : B : C तथा A : C ज्ञात कीजिए।

हल : A : B = 3 : 4

अर्थात $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$ या $\frac{6}{8}$

A : B = 6 : 8

B : C = 8 : 9

स्पष्ट है A : B : C = 6 : 8 : 9 होगा

∴ A : C = 6 : 9 या 2 : 3 ⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने का एक बहुत ही सरल एवं स्पष्ट नियम है-

सबसे पहले A : B = 3 : 4

B : C = 8 : 9 को भिन्न के रूप में लिख लें

अर्थात $\frac{3}{4}, \frac{8}{9}$

इस भिन्न में 2 प्रकार की राशियां है- (1) अंश, (2) हर

$$\frac{3N_1}{4D_1}, \frac{8N_2}{9D_2}$$

अब प्रथम अनुपात (A) = $(N_1 \times N_2) = 3 \times 8 \Rightarrow 24$

द्वितीय अनुपात (B) = $(D_1 \times N_2) = 4 \times 8 \Rightarrow 32$

तृतीय अनुपात (C) = $(D_1 \times D_2) = 4 \times 9 \Rightarrow 36$

अत: A : B : C = 24 : 32 : 36

= 6 : 8 : 9

अत: A : C = 6 : 9 या 2 : 3 ⇒ **उत्तर**

59 **प्रश्न**– मेरे खर्च और बचत के बीच अनुपात 3 : 4 है, यदि यह अनुपात 4 : 3 करना हो, तब खर्च में कितने प्रतिशत वृद्धि करनी होगी?

हल : सामान्य समझ पर

माना कुल आय 700 रुपये है।

खर्च की राशि = 300 रुपये, बचत की राशि = 400 रुपये

दूसरी स्थिति में-

खर्च की राशि = 400 रुपये, बचत की राशि = 300 रुपये

खर्च की राशि में वृद्धि = 400 – 300 ⇒ 100

प्रतिशत वृद्धि = $\frac{100 \times 100}{300} \Rightarrow 33.33\%$

सूत्र विधि-

खर्च की राशि में % वृद्धि = $\frac{\text{नया खर्च} - \text{पुराना खर्च}}{\text{पुराना खर्च}} \times 100$

$= \frac{4-3}{3} \times 100$

$= \frac{1}{3} \times 100 \Rightarrow 33.33\%$

60 **प्रश्न**– एक विद्यालय में 1554 विद्यार्थी थे और लड़कों और लड़कियों की संख्या का अनुपात 4 : 3 था। कुछ दिनों बाद 30 लड़कियों ने उस विद्यालय में प्रवेश ले लिया, कुछ लड़कों ने विद्यालय छोड़ दिया, परिणामस्वरूप लड़कों और लड़कियों का अनुपात 7 : 6 हो गया। विद्यालय छोड़ने वाले लड़कों की संख्या कितनी है?

हल : परंपरागत विधि

माना विद्यालय में लड़के एवं लड़कियों की संख्या क्रमशः $4x$ एवं $3x$ है।

$\therefore 4x + 3x = 1554$

$7x = 1554$

$x = \frac{1554}{7} \Rightarrow 222$

इस प्रकार लड़कों की संख्या = 4 × 222 ⇒ 888

तथा लड़कियों की संख्या = 3 × 222 ⇒ 666

माना B लड़के विद्यालय छोड़ दिए।

प्रश्नानुसार

$\frac{888 - B}{666 + 30} = \frac{7}{6}$

$5328 - 6B = 4662 + 210$

$6B = 5328 - 4872$

$B = \frac{456}{6} \Rightarrow 76$

अतः विद्यालय छोड़ने वाले लड़कों की संख्या = 76

चार्ट विधि

```
          1552
       ┌────┴────┐
       ↓         ↓
       B         G
       4    :    3
      888       666
      812       +30
       ↑        696
       7    :    6
```

विद्यालय छोड़ने वाले लड़के = 888 – 812 = 76

आयु संबंधी प्रश्न

61 **प्रश्न**–3 वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र की आयु से 7 गुनी थी। वर्तमान में पिता की आयु पुत्र से 5 गुनी है। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु कितनी है?

सूत्र विधि

इस प्रश्न में वर्तमान आयु एवं 3 वर्ष पूर्व की आयु का संबंध दर्शाया गया है।

अतः सूत्र = $\frac{T_1 \times (x-1)}{(x-y)}$ होगा।

अतः पुत्र की वर्तमान आयु

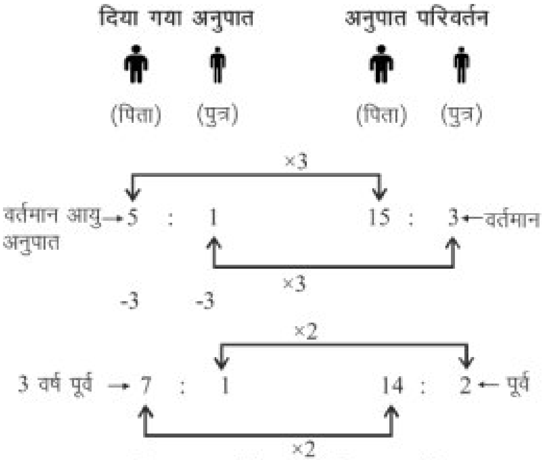
$= \frac{3 \times (7-1)}{(7-5)}$

$= \frac{3 \times 6}{2} \Rightarrow 9$ वर्ष

तथा पिता की वर्तमान आयु = 9 × 5 = 45 वर्ष

⇒ उत्तर

अनुपात समझ पर



यहां पर वर्तमान एवं पूर्व के आनुपातिक मान में 1का अंतर = 3 वर्ष है।

इस प्रकार चूंकि 1 आनुपातिक मान (15-14 या 3-2) = 3 वर्ष है, तो पिता की वर्तमान आयु = 15 × 3 = 45 वर्ष

तथा पुत्र की वर्तमान आयु = 3 × 3 = 9 वर्ष

⇒ उत्तर

विकल्प विधि

यदि उपर्युक्त प्रश्न का विकल्प

(a) 7 वर्ष एवं 35 वर्ष

(b) 9 वर्ष एवं 45 वर्ष

(c) 10 वर्ष एवं 50 वर्ष

(d) 5 वर्ष एवं 35 वर्ष हो

अब विकल्प (a) से,

जांच-

	पिता की आयु		पुत्र की आयु
वर्तमान में →	35		7
	5	:	1
	-3		-3
3 वर्ष पूर्व में →	32		4
	8	:	1

अत: विकल्प (a) प्रश्न को संतुष्ट नहीं कर रहा है क्योंकि 3 वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र की आयु से 7 गुनी थी।

अब विकल्प (b) से,

जांच-

	पिता की आयु		पुत्र की आयु
वर्तमान में →	45		9
	5	:	1
	–3		–3
3 वर्ष पूर्व में →	42		6
	7	:	1

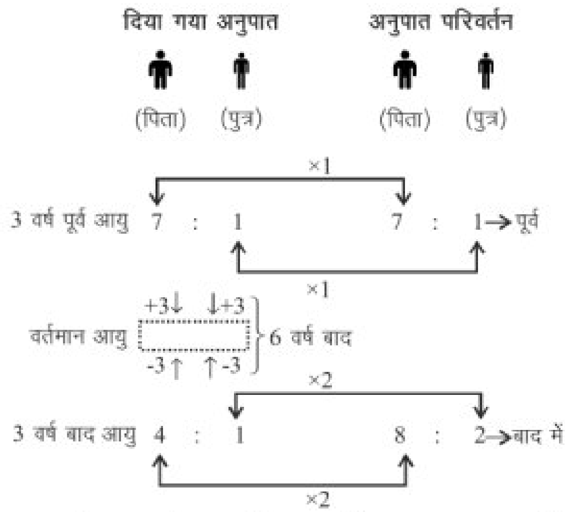
इस प्रकार विकल्प (b) प्रश्न को संतुष्ट करता है।

अत: पुत्र की वर्तमान आयु = 9 वर्ष

तथा पिता की वर्तमान आयु = 45 वर्ष है।

62 **प्रश्न**– वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र से 7 गुनी थी तथा 3 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र से 4 गुनी होगी। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु कितनी है?

अनुपात समझ पर



पूर्व एवं बाद के आनुपातिक मान में 1 का अंतर = 6 वर्ष है

चूंकि 1 आनुपातिक मान = 6 वर्ष

तो 3 वर्ष पूर्व पिता की आयु = (7 × 6) वर्ष = 42 वर्ष

तथा 3 वर्ष पूर्व पुत्र की आयु = (1 × 6) वर्ष = 6 वर्ष थी

अत: वर्तमान में पिता की आयु = 42 + 3 = 45 वर्ष

तथा वर्तमान में पुत्र की आयु = 6 + 3 = 9 वर्ष ⇒ उत्तर

☞ **अभ्यास हेतु कुछ और प्रश्न एवं 'अनुपात समझ पर' उनका हल देखें-**

63 **प्रश्न**– वर्तमान में एक व्यक्ति की आयु उसके पुत्र की आयु से 4 गुनी है। 5 वर्ष पूर्व उसकी आयु अपने पुत्र की आयु की 9 गुनी थी। उसके पुत्र की वर्तमान आयु क्या है?

हल : अनुपात समझ पर

दिया गया अनुपात **अनुपात परिवर्तन**

(पिता की आयु) (पुत्र की आयु) (पिता) (पुत्र)

×8

वर्तमान आयु 4 : 1 32 : 8 → वर्तमान

×8

-5 -5

×3

5 वर्ष पूर्व 9 : 1 27 : 3 → पूर्व

×3

वर्तमान एवं पूर्व के आनुपातिक मान में 5 का अंतर = 5 वर्ष

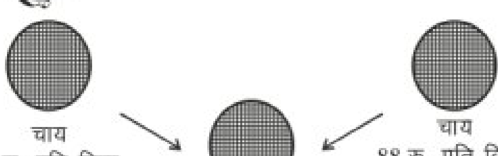
तो 1 आनुपातिक मान = 1 वर्ष

अतः पुत्र की वर्तमान आयु = 1 × 8 = 8 वर्ष ⇒ **उत्तर**

मिश्रण

64 **प्रश्न**–60 रु. प्रति किग्रा. वाली चाय और 88 रु. प्रति किग्रा. वाली चाय किस अनुपात में मिलायी जाए ताकि मिश्रण का मूल्य 68 रु. प्रति किग्रा. हो जाए?

सामान्य समझ पर



स्पष्ट है, 60 रु. प्रति किग्रा. की चाय 68 रु. प्रति किग्रा. की दर से बेची जा रही है। यानी प्रति किग्रा. पर 8 रु. का लाभ हो रहा है तथा 88 रु. प्रति किग्रा. की चाय 68 रु. प्रति किग्रा. की दर से बेची जा रही है। यानी प्रति किग्रा. पर 20 रु. की हानि हो रही है।

इस प्रकार 2.5 किग्रा. (क्योंकि $8 \times 2.5 = 20, \frac{20}{8} = 2.5$) सस्ती (60 रु.) दर वाली चाय बेचने पर 20 रु. का लाभ हो रहा है तथा 1 किग्रा. महंगी (88 रु.) दर वाली चाय बेचने पर 20 रु. की हानि हो रही है।

अर्थात मिश्रण में 2.5 किग्रा. सस्ती दर वाली चाय : 1 किग्रा. महंगी दर वाली चाय है

या 2.5 : 1

या 5 : 2 का अनुपात है। ⇒ **उत्तर**

अतः मिश्रण में सस्ती दर वाली चाय : महंगी दर वाली चाय का अनुपात 5 : 2 होगा।

65 **प्रश्न**– एक पंसारी 8 रु. प्रति किग्रा. वाले चावल और 6.50 रु. प्रति किग्रा. वाले चावल को किस अनुपात में मिलाएं कि मिश्रित चावल का मूल्य 7.50 रु. प्रति किग्रा. हो जाए?

तिर्यक घटाव विधि

महंगा भाव **सस्ता भाव**

(8 रु. प्रति किग्रा.) (6.50 रु. प्रति किग्रा.)

मिश्रण का भाव

7.50

1 .50

अतः मिश्रण में महंगा चावल : सस्ता चावल = 1 : .50

= 2 : 1 ⇒ **उत्तर**

66 **प्रश्न**– A किसी काम को 25 दिन में कर सकता है और B उसी काम को 30 दिन में कर सकता है। उन्होंने मिलकर 5 दिन काम किया, तो कितना काम शेष रह गया?

हल : परंपरागत विधि

A का एक दिन का काम $= \frac{1}{25}$ भाग

और B का एक दिन का काम $= \frac{1}{30}$ भाग

A और B का 5 दिन का काम $= 5\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{30}\right)$

$$= 5\left(\frac{6+5}{150}\right)$$

$$= 5 \times \frac{11}{150} \Rightarrow \frac{11}{30} \text{ भाग}$$

अत: शेष भाग भाग

पूर्णांक विधि

माना कुल 150 कार्य है

$\therefore$ A एक दिन में करेगा $= \frac{150}{25} \Rightarrow 6$ कार्य

तथा B 1 दिन में करेगा $= \frac{150}{30} \Rightarrow 5$ कार्य

इस प्रकार दोनों द्वारा 5 दिन में किया गया कुल कार्य
$= 5 \times (6 + 5) = 55$

अब शेष कार्य $= 150 - 55 = 95$

अत: शेष कार्य का भाग $= \frac{95}{150} \Rightarrow \frac{19}{30}$

कार्य एवं समय

67 **प्रश्न**–दो महिलाएं, गंगा एवं सरस्वती एक खेत को क्रमश: 8 और 12 घंटे में काट सकती हैं। यदि वे क्रमश: 1-1 घंटे के अंतराल पर 9 बजे प्रात: से खेत काटना प्रारंभ करें, तो पूरा खेत कितने बजे तक कट जाएगा?

पूर्णांक विधि

मान लीजिए कुल 24 एकड़ खेत काटने हैं

गंगा 8 घंटे में काटती है = 24 एकड़ खेत

तो 1 घंटे में काटेगी $= \frac{24}{8} \Rightarrow 3$ एकड़ खेत

सरस्वती 12 घंटे में काटती है = 24 एकड़ खेत

तो 1 घंटे में काटेगी $= \frac{24}{12} \Rightarrow 2$ एकड़ खेत

चूंकि गंगा एवं सरस्वती 1-1 घंटे के अंतराल पर खेत काटती हैं, तो 2 घंटे में दोनों के द्वारा काटा गया खेत $= 3 + 2 \Rightarrow 5$ एकड़

यानी 8 घंटे में दोनों के द्वारा कटा खेत $= 5 \times 4$

$= 20$ एकड़ होगा

9वें घंटे में गंगा को खेत काटना है जो कि एक घंटे में काटती है = 3 एकड़

9 घंटे में कटा खेत $= 20+3 \Rightarrow 23$ एकड़।

अत: शेष एक एकड़ $(24 - 23)$ खेत काटना है जो सरस्वती के द्वारा कटेगा। यानी 10वें घंटे में खेत काटने की सरस्वती की बारी है जो 2 एकड़ खेत काटती है = 1 घंटे में

तो 1 एकड़ खेत काटेगी $= \frac{1}{2} \times 1 \Rightarrow \frac{1}{2}$ घंटे में

अर्थात पूरा खेत काटने में लगा कुल समय

$$= 9 + \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2} \text{ घंटे}$$

चूंकि खेत 9 बजे प्रात: काटना शुरू हुआ

तो पूरा खेत कटेगा $= 9$ बजे $+ 9\frac{1}{2} \Rightarrow 18\frac{1}{2}$ बजे

अर्थात शाम $6\frac{1}{2}$ बजे तक। $\Rightarrow$ **उत्तर**

68 **प्रश्न**–A और B एक साथ किसी कार्य को 12 दिन में तथा B और C एक साथ उसी कार्य को 16 दिन में कर सकते हैं। यदि इस कार्य को A, 5 दिनों तक करता है, तत्पश्चात B, 7 दिनों तक करता है तथा C अंततः 13 दिन कार्य करके इसे समाप्त करता है। प्रत्येक अकेले कार्य को कितने दिनों में समाप्त करेंगे?

पूर्णांक विधि

मान लीजिए कुल 48 कार्य है

A और B, 12 दिन में करते हैं = 48 कार्य

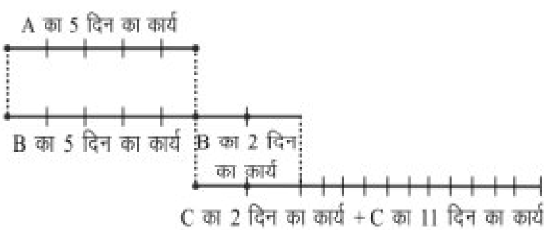
तो 1 दिन में करेंगे $= \frac{48}{12} \Rightarrow 4$ कार्य

अर्थात A और B, 5 दिन में करेंगे $= 4 \times 5 \Rightarrow 20$ कार्य

B और C, 16 दिन में करते हैं = 48 कार्य

तो 1 दिन में करेंगे $= \frac{48}{12} \Rightarrow 3$ कार्य

अर्थात B और C, 2 दिन में करेंगे $= 3 \times 2 \Rightarrow 6$ कार्य



अब शेष कार्य $= 48 - (20+6) \Rightarrow 22$ जो C,11 दिनों में करता है यानी C का 1 दिन का कार्य $= \frac{22}{11} \Rightarrow 2$ कार्य

$\because$ C 2 कार्य करता है = 1 दिन में

$\therefore$ कुल 48 कार्य करेगा $= \frac{1}{2} \times 48 \Rightarrow 24$ दिनों में

स्पष्ट है B और C, एक दिन में करते हैं = 3 कार्य जिसमें से 2 कार्य C का है, तो B एक दिन में करेगा $= 3 - 2 \Rightarrow$ 1 कार्य।

इस प्रकार B 1 कार्य करता है = 1 दिन में

तो कुल 48 कार्य करेगा $= \frac{1}{1} \times 48 \Rightarrow 48$ दिनों में

तथा A और B, 1 दिन में 4 कार्य करते हैं जिसमें से B का कार्य = 1 कार्य है, तो A एक दिन में करेगा $= 4 - 1 \Rightarrow$ 3 कार्य।

इस प्रकार A, 3 कार्य करता है = 1 दिन में

तो कुल 48 कार्य करेगा $= \frac{1}{3} \times 48 \Rightarrow 16$ दिनों में

अतः A, B एवं C क्रमशः 16, 48 एवं 24 दिनों में कार्य पूरा करेंगे। $\Rightarrow$ **उत्तर**

69 **प्रश्न**–किसी कार्य को करने के लिए B, A एवं C द्वारा एक साथ कार्य करके लिए गए समय से 3 गुना अधिक समय लेता है। इसी कार्य को C, A एवं B द्वारा एक साथ कार्य करके लिए गए समय से दोगुना समय लेता है। यदि A, B एवं C तीनों एक साथ कार्य करें, तो 10 दिन का समय लगता है। प्रत्येक अलग-अलग कितने दिनों में कार्य पूरा करेंगे?

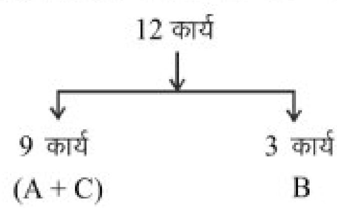
पूर्णांक विधि

मान लीजिए कुल 120 कार्य है

तीनों मिलकर 10 दिन में करते हैं = 120 कार्य

तो 1 दिन में करेंगे $= \frac{120}{10} \Rightarrow 12$ कार्य

अब इस 12 कार्य में A और C का कार्य B का 3 गुना है अर्थात A और C द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य = 9 तथा B द्वारा एक दिन में किया गया कार्य = 3



इसी तरह 12 कार्य में A और B का कार्य C के कार्य का दोगुना है यानी A और B का एक दिन का कार्य = 8 तथा

C का एक दिन का कार्य = 4

12 कार्य
↓
8 कार्य (A + B) | 4 कार्य C

स्पष्ट है कि तीनों द्वारा एक दिन में किया गया कुल 12 कार्य में B तथा C का कार्य क्रमशः 3 तथा 4 कार्य है तब

A का एक दिन का कार्य $= 12 - (3 + 4)$

$= 12 - 7 \Rightarrow 5$ कार्य

चूंकि A, 5 कार्य करता है = 1 दिन में

तो कुल 120 कार्य करेगा $= \frac{1}{5} \times 120 \Rightarrow 24$ दिनों में

चूंकि B, 3 कार्य करता है = 1 दिन में

तो कुल 120 कार्य करेगा $= \frac{1}{3} \times 120 \Rightarrow 40$ दिनों में

चूंकि C, 4 कार्य करता है = 1 दिन में

तो कुल 120 कार्य करेगा $= \frac{1}{4} \times 120 \Rightarrow 30$ दिनों में

अतः A, B एवं C तीनों अलग-अलग क्रमशः 24, 40 एवं 30 दिनों में कार्य पूरा करेंगे। ⇒ **उत्तर**

70 **प्रश्न**–आदमी या 4 औरतें किसी कार्य को 43 दिन में कर सकते हैं। इसी कार्य को 7 आदमी और 5 औरतें कितने दिन में करेंगी?

सामान्य समझ पर

3 आदमी ≡ 4 औरतें

1 आदमी $\equiv \frac{4}{3}$ औरतें

7 आदमी $\equiv \frac{4}{3} \times 7 = \frac{28}{3}$ औरतें

7 आदमी + 5 औरतें $\equiv \left(\frac{28}{3} + 5\right)$ औरतें

$\equiv \frac{43}{3}$ औरतें

अब प्रश्न इस प्रकार बना कि-

4 औरतें किसी कार्य को 43 दिनों में कर सकती हैं तो $\frac{43}{3}$ औरतें इस कार्य को कितने दिनों में करेंगी?

$\because$ 4 औरतें किसी कार्य को करती हैं = 43 दिनों में

$\therefore \frac{43}{3}$ औरतें इसी कार्य को करेंगी $= \frac{\frac{4}{43} \times 43}{3}$

$= \frac{4}{43} \times 43 \times 3$

= 12 दिन में ⇒ **उत्तर**

सूत्र विधि

अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{1}{\frac{7}{43 \times 3} + \frac{5}{43 \times 4}}$

$= \frac{1}{\frac{28 + 15}{516}} = \frac{516}{43}$

= 12 दिन ⇒ **उत्तर**

पूर्णांक विधि

माना कुल कार्य = 516 (43 × 12)

3 आदमी 43 दिनों में करते हैं = 516 कार्य

3 आदमी 1 दिन में करेंगे $= \frac{516}{43} = 12$ कार्य

1 आदमी 1 दिन में करेंगे $= \frac{12}{3} = 4$ कार्य

इसी प्रकार

4 औरतें 43 दिनों में करती हैं = 516 कार्य

4 औरतें 1 दिन में करेंगी $= \frac{516}{43} = 12$ कार्य

1 औरत 1 दिन में करेगी = $\frac{12}{4} = 3$ कार्य

7 आदमी और 4 औरतें 1 दिन में करेंगी = $7 \times 4 + 5 \times 3 =$ $28 + 15 = 43$ कार्य

$\therefore$ 7 आदमी और 5 औरतें पूरा कार्य 516 करेंगी

$$= \frac{516}{43} = 12 \text{ दिन में} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

71 प्रश्न– A, 6 दिन में 100 रु. कमाता है तथा B, 6 दिन में 50 रु. कमाता है, तो 100 रु. कमाने में दोनों एक साथ मिलकर कितने दिन कार्य करेंगे?

सामान्य समझ पर

स्पष्ट है A और B दोनों 6 दिन में कुल 100 + 50 =150 रु. प्राप्त करते हैं।

$\because$ A और B को 150 रु. कमाने में लगा समय = 6 दिन

$\therefore$ A और B को 100 रु. कमाने में लगा समय

$$= \frac{6}{150} \times 100 = 4 \text{ दिन} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

72 प्रश्न–एक मजदूर 25 दिनों के लिए इन शर्तों के अनुसार कार्यरत था कि यदि वह प्रतिदिन कार्य पर उपस्थित होगा, तो उसे 2 रु. प्राप्त होगा और यदि वह प्रतिदिन कार्य पर अनुपस्थित होगा, तो 50 पैसे का दंड शुल्क देगा। यदि वह मात्र 37.50 रु. प्राप्त करता है, तो उसके अनुपस्थित दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

सामान्य समझ पर

यदि मजदूर 25 दिन उपस्थित होता तो उसकी मजदूरी होती $25 \times 2 = 50$ रु. लेकिन यहां पर उसकी मजदूरी है 37.50 रु.।

यानी उसकी मजदूरी में $50 - 37.50 = 12.50$ रु. की कमी है। स्पष्ट है यदि मजदूर एक दिन अनुपस्थित रहता है, तो उसकी मजदूरी में $2 + .50 = 2.50$ रु. की कमी होगी। चूंकि मजदूरी में 2.50 रु. की कमी होती है एक दिन की अनुपस्थिति में, तो मजदूरी में 12.50 रु. की कमी होगी

$= \frac{1}{2.50} \times 12.50$

= 5 दिन की अनुपस्थिति में

अतः मजदूर 5 दिन अनुपस्थित था।

$\Rightarrow$ **उत्तर**

पाइप एवं टंकी

73 प्रश्न–यदि नल A किसी टंकी को 6 घंटे में तथा नल भी उसी टंकी को 6 घंटे में भरता है और नल C उसे 12 घंटे में खाली करता है तो, तीनों नलों को एक साथ खोल देने पर टंकी कितने समय में भरेगी?

हल : परंपरागत विधि

नल A द्वारा 1 घंटे में टंकी का भरा भाग = $\frac{1}{6}$

नल B द्वारा 1 घंटे में टंकी का भरा भाग = $\frac{1}{6}$

नल C द्वारा 1 घंटे में टंकी का खाली किया गया भाग = $\frac{1}{12}$

तीनों नलों को एक साथ खोल देने पर 1 घंटे में टंकी का भरा गया भाग

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{2+2-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

अतः टंकी को भरने में लगा समय = $\frac{4}{1} = 4$ घंटा

$\Rightarrow$ **उत्तर**

सूत्र विधि

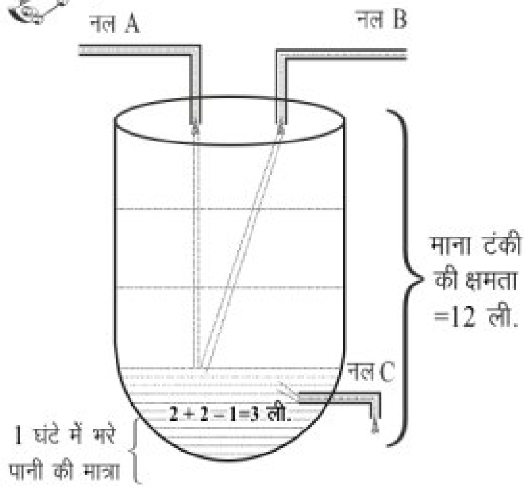
टंकी को भरने में लगा कुल समय $= \dfrac{xyz}{yz + xz - xy}$

$$= \frac{6 \times 6 \times 12}{6 \times 12 + 6 \times 12 - 6 \times 6}$$

$$= \frac{6 \times 6 \times 12}{72 + 72 - 36}$$

$$= \frac{6 \times 6 \times 12}{108} = 4 \text{ घंटा} \Rightarrow$$ **उत्तर**

पूर्णांक विधि



मान लीजिए टंकी की क्षमता 12 ली. है

नल A, 6 घंटे में भरता है = 12 ली.

तो 1 घंटे में भरेगा $= \dfrac{12}{6} = 2$ ली.

नल B भी 6 घंटे में भरता है = 12 ली.

तो 1 घंटे में भरेगा $= \dfrac{12}{6} = 2$ ली.

नल C, 12 घंटे में खाली करता है = 12 ली.

तो 1 घंटे में खाली करेगा $= \dfrac{12}{12} = 1$ ली.

स्पष्ट है नल A और B, 1 घंटे में 2 + 2 = 4 ली. पानी टंकी में भरते हैं जबकि नल C, 1 घंटे में टंकी से 1 ली. पानी निकालता है, यानी तीनों नलों को एक साथ खोल देने पर 1 घंटे में टंकी में पानी की मात्रा = 2 + 2 – 1 = 3 ली.

∵ 3 ली. पानी भरने में लगा समय = 1 घंटा

∴ टंकी पूरा भरने अर्थात 12 ली. भरने में लगा समय = $\dfrac{12}{3} = 4$ घंटा ⇒ **उत्तर**

74

प्रश्न–यदि नल A किसी टंकी को 6 घंटे में भरता है परंतु उसकी तली में छेद होने के कारण यह टंकी 8 घंटे में भरती है। यदि टंकी पूरी तरह से भरी हुई है तो, छिद्र उसे खाली करने में कितना समय लेगा?

हल : परंपरागत विधि

छिद्र द्वारा एक घंटा में खाली किया गया भाग

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{4 - 3}{24} = \frac{1}{24}$$

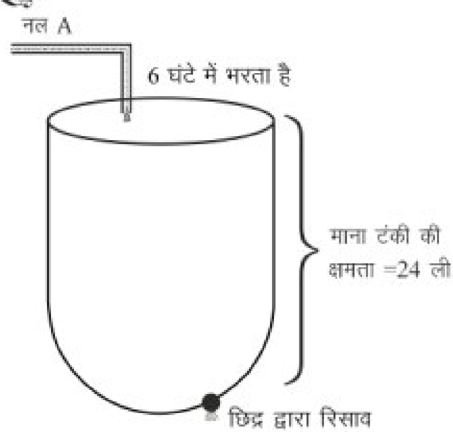
अतः छिद्र द्वारा टंकी को खाली होने में लगा समय = 24 घंटा ⇒ **उत्तर**

सूत्र विधि

अभीष्ट समय $= \dfrac{x \times y}{y - x}$

$$= \frac{8 \times 6}{8 - 6} = \frac{48}{2} = 24 \text{ घंटा} \Rightarrow$$ **उत्तर**

पूर्णांक विधि



मान लीजिए टंकी की क्षमता 24 ली. है

नल A, 6 घंटे में भरता है = 24 ली.

तो 1 घंटे में भरेगा = $\frac{24}{6}$ = 4 ली.

तथा तली में छेद होने पर 8 घंटे में टंकी में भरता है = 24 ली.

तो 1 घंटे में टंकी में भरी जल की मात्रा = $\frac{24}{8}$ =3 ली.

स्पष्ट है तली में छेद होने के कारण 3 ली. प्रति घंटे की दर से टंकी में पानी भर रहा है। यदि टंकी में छेद नहीं होता तो, 4 ली. प्रति घंटे की दर से टंकी में पानी भरता, यानी छिद्र के कारण 1 ली. प्रति घंटा की दर से पानी बाहर निकल रहा है।

∵ 1 ली. पानी खाली होने में लगा समय = 1 घंटा

∴ कुल 24 ली. अर्थात टंकी भरी होने पर खाली होने में लगा समय = 24 घंटा ⇒ **उत्तर**

चाल, समय एवं दूरी

75

प्रश्न–एक व्यक्ति अपने कार्यालय 30 किमी./घंटे की गति से चलता है, तो 10 मिनट पूर्व पहुंचता है और यदि 40 किमी./घंटे की गति से चलता है, तो 25 मिनट पूर्व पहुंचता है। व्यक्ति के घर से कार्यालय की दूरी कितनी है?

अनुपात समझ पर

चाल → 30 : 40

समय → 40 : 30   4x–3x = 15

x = 15

40 → 4x, 30 → 3x

वास्तविक समय = 4 × 15   3×15

= 60 मिनट   = 45 मिनट

वास्तविक दूरी = $\frac{30}{60}\times 60$ या $\frac{40}{60}\times 45$

= 30 किमी.   = 30 किमी.

(30 किमी./घंटा = $\frac{30 \text{ कि.मी.}}{60 \text{ मिनट}}$)

अत: घर से कार्यालय की दूरी = 30 किमी.

⇒ **उत्तर**

76

प्रश्न– एक व्यक्ति स्थान P से 6 बजे चलता है और स्थान Q पर 10 बजे पहुंचता है। दूसरा व्यक्ति Q से 8 बजे चलता है और स्थान P पर 12 बजे पहुंचता है। दोनों कितने बजे मिलेंगे?

सामान्य समझ पर

इस प्रश्न को सामान्य समझ के आधार पर भी हल किया जा सकता है, जैसे-दोनों व्यक्ति 4 घंटे अर्थात बराबर का समय लेते हैं। अत: दोनों की चाल समान होगी इसलिए दोनों के मिलने का समय 6 और 12 बजे के मध्य का अर्थात 9 बजे होगा।

77

प्रश्न– एक व्यक्ति अपनी सामान्य गति के $\frac{3}{4}$ की दर से अपने कार्यालय 90 मिनट देर से पहुंचता है। कार्यालय पहुंचने का सामान्य समय क्या है?

अनुपात विधि

सामान्य गति धीमी गति

गति अनुपात { 1 : $\frac{3}{4}$ या 4 : 3 }

समयानुपात 3 : 4

समय→ 3x : 4x

प्रश्नानुसार 4x – 3x = 90 मिनट

x = 90 मिनट

अत: सामान्य गति से समय 3x = 90 × 3 = 270 मिनट

या 4 घंटा 30 मिनट ⇒ **उत्तर**

रेलगाड़ी संबंधी प्रश्न

78 **प्रश्न**– 50 किमी. प्रति घंटा की चाल से जा रही रेलगाड़ी द्वारा सफर कर रहा एक व्यक्ति यह अनुभव करता है कि उसकी विपरीत दिशा से आ रही एक मालगाड़ी उसे 9 सेकंड में पार कर जाती है। यदि मालगाड़ी 180 मीटर लंबी हो, तो उसकी चाल ज्ञात कीजिए?

हल : दोनों रेलगाड़ियों की सापेक्ष गति = $\frac{180}{9}$ मी./से.

$= \frac{180}{9} \times \frac{18}{5} = 72$ किमी. प्रति घंटा

[$\frac{18}{5}$ से गुणा करके सापेक्ष गति किमी. प्रति घंटा ज्ञात कर ली गई है।

चूंकि सापेक्ष गति विपरीत दिशाओं में जा रही रेलगाड़ी का है यानी दोनों रेलगाड़ियों की गतियों का योग = 72 किमी. प्रति घंटा है।

अत: मालगाड़ी की गति = 72 – रेलगाड़ी की गति

$= 72 - 50 = 22$ किमी. प्रति घंटा

⇒ **उत्तर**

79 **प्रश्न**– 54 किमी. प्रति घंटा की चाल से जा रही एक रेलगाड़ी एक प्लेटफार्म को 20 सेकंड में पार कर सकती है। यही रेलगाड़ी अपनी ही दिशा में 6 किमी. प्रति घंटा की चाल से भागे जा रहे व्यक्ति को 12 सेकंड में पार कर जाती है। गाड़ी की लंबाई तथा प्लेटफार्म की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : सामान्य समझ पर

रेलगाड़ी की चाल = 54 किमी. प्रति घंटा

$= 54 \times \frac{5}{18} = 15$ मी./सेकंड

[$\frac{5}{18}$ से गुणा करके रेलगाड़ी की चाल मीटर प्रति सेकंड ज्ञात कर ली गई है।

∵ 1 सेकंड में रेलगाड़ी तय करती है = 15 मीटर की दूरी

∴ 20 सेकंड में तय करेगी = $15 \times 20 = 300$ मीटर की दूरी

यह दूरी प्लेटफार्म एवं रेलगाड़ी दोनों की लंबाई का योग है। अब रेलगाड़ी अपनी ही दिशा में 6 किमी. प्रति घंटा की चाल से भागे जा रहे व्यक्ति को 12 सेकंड में पार करती है। यानी रेलगाड़ी की सापेक्ष गति = $54 - 6 = 48$ किमी. प्रति घंटा

इस सापेक्ष गति से व्यक्ति को पार करने में लगा समय 12 सेकंड है।

अत: रेलगाड़ी की लंबाई = चाल × समय

= 48 किमी. प्रति घंटा × 12

$= 48 \times \frac{5}{18} \times 12 = 160$ मीटर

[$\frac{5}{18}$ से गुणा करके चाल मीटर प्रति सेकंड कर ली गई है।

इस प्रकार रेलगाड़ी की लंबाई 160 मीटर है। यानी प्लेटफार्म की लंबाई $300 - 160 = 140$ मीटर होगी। ⇒ **उत्तर**

80 **प्रश्न**– एक रेलगाड़ी स्टेशन P से प्रात: 8 बजे 20 किमी. प्रति घंटा की चाल से स्टेशन Q के लिए चली। एक दूसरी रेलगाड़ी स्टेशन P से ही प्रात: 9 बजे 25 किमी. प्रति घंटा की चाल से चली। दोनों रेलगाड़ियां स्टेशन से कितनी दूरी पर और कितने बजे एक-दूसरे से मिलेंगी?

सामान्य समझ पर

प्रश्न से स्पष्ट है कि दूसरी रेलगाड़ी स्टेशन P से जब यात्रा प्रारंभ करेगी तब तक पहली रेलगाड़ी 1 घंटे की यात्रा यानी 20 किमी. की यात्रा पूरी कर चुकी होगी। दूसरी रेलगाड़ी को प्रथम रेलगाड़ी से मिलने के लिए यह दूरी तय करनी होगी और यह दूरी तय करने के लिए उस रेलगाड़ी की बढ़ी हुई गति कार्य करेगी अर्थात दूसरी रेलगाड़ी को पहली रेलगाड़ी से मिलने में लगा समय = $\frac{20}{5}$

[बढ़ी हुई गति = 25 – 20 = 5 किमी./घंटा]

$= 4$ घंटा

तथा दूरी $= 20$ किमी.

इस प्रकार दूसरी रेलगाड़ी पहली रेलगाड़ी को 4 घंटे में अर्थात $9 + 4 = 13$ बजे या 1:00 बजे दोपहर में पकड़ लेगी। इस 4 घंटे में दूसरी रेलगाड़ी द्वारा चली गई दूरी

$= 25 \times 4 = 100$ किमी.

अत: स्टेशन P से 100 किमी. की दूरी पर दोपहर 1 बजे दोनों रेलगाड़ियां मिलेंगी। ⇒ **उत्तर**

धारा तथा नाव संबंधी प्रश्न

81 **प्रश्न**–एक नाव 30 किमी., बहाव के विपरीत तथा 44 किमी., बहाव के अनुकूल 10 घंटे में जाती है। यह नाव 40 किमी. बहाव के विपरीत तथा 55 किमी. बहाव के अनुकूल 13 घंटे में जाती है। शांत जल में नाव का वेग तथा नदी की चाल ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ विधि (गुणा-विधि)

दी गई सूचनाओं को निम्नानुसार व्यवस्थित करने पर

धारा के विपरीत	धारा की दिशा	समय
30	44	10
40	55	13

(30 → 55, 44 → 40, 44 → 13, 10 → 55)

धारा की विपरीत दिशा में गति

$$= \frac{30 \times 55 - 40 \times 44}{55 \times 10 - 44 \times 13}$$

$$= \frac{11(150-160)}{11(50-52)} = \frac{-10}{-2} = 5 \text{ किमी. प्रति घंटा}$$

धारा की दिशा में गति

$$= \frac{30 \times 55 - 44 \times 40}{30 \times 13 - 40 \times 10}$$

$$= \frac{10(165-176)}{10(39-40)} = \frac{-11}{-1} = 11 \text{ किमी. प्रति घंटा}$$

$\therefore$ शांत जल में नाव की चाल $= \frac{11+5}{2} = \frac{16}{2}$

$= 8$ किमी. प्रति घंटा

तथा नदी की चाल $= \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2}$

$= 3$ किमी. प्रति घंटा ⇒ **उत्तर**

82 **प्रश्न**– एक नाविक शांत जल में 9 किमी. प्रति घंटा की रफ्तार से नाव चला सकता है। यदि धारा की गति 3 किमी. प्रति घंटा हो, तो उसे गंतव्य तक पहुंचकर वापस लौटने में 4.5 घंटे लग जाते हैं। गंतव्य कितनी दूर स्थित है?

सूत्र विधि

दूरी $= \frac{z(x^2 - y^2)}{2x}$

जहां $z =$ आने-जाने का समय $= 4.5$ घंटा

$x =$ शांत जल में नाविक की चाल $= 9$ किमी. प्रति घंटा

$y =$ धारा की चाल $= 3$ किमी. प्रति घंटा

अत: दूरी $= \frac{4.5 \times (9^2 - 3^2)}{2 \times 9}$

$$= \frac{(9+3)(9-3)}{4}$$

$$= \frac{12 \times 6}{4} = 3 \times 6$$

$= 18$ किमी. ⇒ **उत्तर**

औसत समझ पर

धारा की दिशा में नाविक की चाल

$= 9 + 3 = 12$ किमी. प्रति घंटा

धारा की विपरीत दिशा में नाविक की चाल

$= 9 - 3 = 6$ किमी. प्रति घंटा

औसत चाल $= \frac{2 \times 12 \times 6}{12 + 6}$

$$= \frac{2 \times 12 \times 6}{18} = 8 \text{ किमी. प्रति घंटा}$$

∴ आने-जाने में तय की गई कुल दूरी

$$= \text{औसत चाल} \times \text{समय}$$
$$= 8 \times 4.5 = 36 \text{ किमी.}$$

अत: एक तरफ की दूरी अर्थात गंतव्य स्थान से दूरी = $\frac{36}{2} = 18$ किमी. ⇒ **उत्तर**

साधारण ब्याज

83 **प्रश्न**– साधारण ब्याज की एक निश्चित दर से कोई धन 5 वर्ष में अपने से $\frac{8}{5}$ गुना हो जाता है। ब्याज की दर क्या है?

सामान्य समझ पर

5 वर्ष में $\frac{8}{5}$ गुना का अर्थ है, 5 वर्ष में 5 रु. ब्याज सहित 8 रु. हो जाता है अर्थात 5 रु. पर 5 वर्ष में ब्याज $8 - 5 = 3$ रु. है।

इसी आधार पर 100 रु. पर 5 वर्ष में ब्याज $= 3 \times 20 = 60$ रुपये होगा।

∴ ब्याज की वार्षिक दर $\frac{60}{5} = 12$ रुपये होगा।

अर्थात 12% होगा। ⇒ **उत्तर**

84 **प्रश्न**– कोई धन 3 वर्षों में 472 रु. हो जाता है। ब्याज दर का 25% बढ़ा देने पर उतने ही समय में धन 490 रु. हो जाता है। ब्याज दर क्या है?

हल : सामान्य समझ पर

धन 3 वर्षों में 472 रु. हो जाता है। यदि ब्याज दर 25% बढ़ा दी जाए, तो धन 490 रु. हो जाता है। यानी $490 - 472 = 18$ रु. ब्याज में जो वृद्धि हुई है, वह ब्याज दर में 25% वृद्धि के कारण है। एक बात यह भी स्पष्ट जान लें कि जिस अनुपात में ब्याज दर वृद्धि होती है, उसी अनुपात में ब्याज में भी वृद्धि होती है। अत: ब्याज दर में 25% वृद्धि होने पर ब्याज में जो वृद्धि हुई है वह कुल ब्याज का 25% है। स्पष्ट है कि ब्याज का 25% = 18 रु.

इसलिए ब्याज का 100% या ब्याज $= \frac{100}{25} \times 18$
$= 72$ रु.

3 वर्षों में ब्याज सहित धन = 472 रु.

ब्याज = 72 रु.

मूलधन = 400 रु.

∵ 400 रु. का 3 वर्ष का ब्याज है = 72 रु.

∴ 400 रु. का 1 वर्ष का ब्याज है $= \frac{72}{3} = 24$ रु.

∴ 100 रु. का 1 वर्ष का ब्याज है $= \frac{24}{400} \times 100$
$= 6$

अत: ब्याज की दर = 6% है। ⇒ **उत्तर**

85 **प्रश्न**–एक व्यक्ति का कुछ धन बैंक में जमा है। बैंक ब्याज की दर 5% से घटाकर 4% कर देती है। वह व्यक्ति बैंक में 2,000 रु. और जमा कर देता है, जिससे उसकी आय में कोई अंतर नहीं पड़ता है। उसने कितना धन 5% की दर से बैंक में जमा किया था?

सामान्य समझ पर

स्पष्ट है ब्याज दर में 1% की कमी आने पर व्यक्ति बैंक में 2,000 रु. और जमा करता है जिस पर 4% ब्याज प्राप्त कर लेने पर पूर्व धन में 1% की आई कमी दूर हो जाती है। अत:

2000 का 4% = पूर्व धन का 1%

$$2000 \times \frac{4}{100} = \text{पूर्व धन} \times \frac{1}{100}$$

∴ पूर्व धन = 8,000 रु. ⇒ **उत्तर**

86 **प्रश्न**–एक धनराशि का साधारण ब्याज 4% प्रतिवर्ष की दर से 4 वर्षों में, उसी धनराशि के 5% प्रतिवर्ष की दर से 3 वर्षों के साधारण ब्याज से 80 रु. ज्यादा है। धनराशि कितनी है?

हल : परंपरागत विधि

माना धनराशि $= x$ रु.

तब 4% प्रतिवर्ष की दर से 4 वर्षों का साधारण ब्याज =

$\frac{x \times 4 \times 4}{100} = \frac{16x}{100}$

तथा 5% प्रतिवर्ष की दर से 3 वर्षों का साधारण ब्याज =

$\frac{x \times 5 \times 3}{100} = \frac{15x}{100}$

अब प्रश्नानुसार

$\frac{16x}{100} - \frac{15x}{100} = 80$

$\frac{16x - 15x}{100} = 80$

$\frac{x}{100} = 80$

$x = 80 \times 100 = 8,000$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

4% वार्षिक दर से 4 वर्षों में ब्याज होगा मूलधन का 16% इसी प्रकार 5% की वार्षिक दर से 3 वर्षों में ब्याज होगा मूलधन का 15%

अत: मूलधन का 16% – मूलधन का 15% = 80 रु. होगा

अर्थात मूलधन का 1% = 80 रु.

$\therefore$ मूलधन का 100% या मूलधन $= 80 \times 100$

$= 8,000$ रु. होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

87 **प्रश्न**– 500 रु. पर 2 वर्ष में 2 अलग-अलग बैंकों से प्राप्त साधारण ब्याज में अंतर 2.50 रु. है। दोनों बैंकों के ब्याज दरों में अंतर बताइए।

हल : परंपरागत विधि

माना दोनों दरें क्रमश: R_1 एवं R_2 हैं।

प्रथम ब्याज $= \frac{500 \times 2 \times R_1}{100} = 10R_1$

द्वितीय ब्याज $= \frac{500 \times 2 \times R_2}{100} = 10R_2$

प्रश्नानुसार

प्रथम ब्याज - द्वितीय ब्याज = 2.50 रु.

$10R_1 - 10R_2 = 2.50$

$10(R_1 - R_2) = 2.50$

$R_1 - R_2 = \frac{2.50}{10} = 0.25\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

सूत्र विधि

दोनों ब्याज दरों में अंतर $= \frac{\text{ब्याज में अंतर} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$

$= \frac{2.50 \times 100}{500 \times 2}$

$= \frac{2.50}{10} = 0.25\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

दर में परिवर्तन होने पर 500 रु. पर 2 वर्ष में अंतर 2.50 रु. है।

$\therefore$ 500 रु. पर 1 वर्ष में अंतर $= \frac{2.50}{2} = 1.25$ रु. होगा।

$\therefore$ 100 रु. पर 1 वर्ष में अंतर $= \frac{1.25}{5} = 0.25$ रु. का

अत: दोनों बैंकों के ब्याज दरों में यही अंतर है।

चक्रवृद्धि ब्याज

88 **प्रश्न**– यदि 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष का मिश्रधन 2028 रु. हो, तो ब्याज की राशि ज्ञात कीजिए।

हल : भिन्न के नियम से

चूंकि यहां ब्याज की दर 4% प्रतिवर्ष है तथा समय दो वर्ष है इसलिए हमारी संबद्ध भिन्न होगी $= \frac{676}{625}$ इसका अर्थ है 4% प्रतिवर्ष की दर से 625 रु. पर 2 वर्षों में मिश्रधन

676 रु. हो जाता है तथा चक्रवृद्धि ब्याज = 676 – 625 = 51 रु. होगा।

चूंकि मिश्रधन 676 रु. पर 2 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज = 51 रु. है, तो मिश्रधन 2028 रु. पर 2 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज

होगा = $\frac{2028}{676} \times 51 = 3 \times 51 = 153$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न : 5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष में कौन-सी राशि 2205 रु. हो जाएगी?

हल : भिन्न के नियम से

चूंकि यहां ब्याज की दर 5% वार्षिक है तथा समय 2 वर्ष है

इसलिए हमारी संबद्ध भिन्न होगी = $\frac{441}{400}$ इसका अर्थ है

5% प्रतिवर्ष की दर से मूलधन 400 रु. पर 2 वर्षों में मिश्रधन 441 रु. हो जाता है।

$\because$ 441 रु. मिश्रधन 2 वर्षों में 5% प्रतिवर्ष की दर से मूलधन 400 रु. पर होता है।

$\therefore$ 2205 रु. मिश्रधन होगा मूलधन = $\frac{2205}{441} \times 400$

$= 5 \times 400 = 2000$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

89

प्रश्न– 6000 रु. 5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्ष में कितना होगा?

हल : भिन्न के नियम से

चूंकि यहां ब्याज की दर 5% प्रतिवर्ष है तथा समय 3 वर्ष है

इसलिए हमारी संबद्ध भिन्न होगी = $\frac{9261}{8000}$

$\because$ 8000 रु. मूलधन 5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्ष में 9261 रु. हो जाता है

$\therefore$ 6000 रु. मूलधन 5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्ष में = $\frac{6000}{8000} \times 9261 = 6945.75$ रु. हो जाएगा।

$\Rightarrow$ **उत्तर**

90

प्रश्न– 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्ष का मिश्रधन यदि 2662 रु. हो, तो मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल : भिन्न के नियम से

चूंकि यहां ब्याज की दर 10% प्रतिवर्ष तथा समय 3 वर्ष है

इसलिए हमारी संबद्ध भिन्न होगी = $\frac{1331}{1000}$

$\because$ मिश्रधन 1331 रु. 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में मूलधन 1000 रु. पर है

$\therefore$ मिश्रधन 2662 रु. होने के लिए मूलधन होगा

$= \frac{2662}{1331} \times 1000 = 2 \times 1000 = 2000$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

91

प्रश्न– प्रथम वर्ष 10%, द्वितीय वर्ष 20% एवं तृतीय वर्ष x% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से यदि 12000 रु. 3 वर्षों में 19800 रु. हो जाता है, तो x का मान क्या है?

हल : भिन्न के नियम से

प्रथम वर्ष के लिए भिन्न होगी = $\frac{110}{100}$

द्वितीय वर्ष के लिए भिन्न होगी = $\frac{120}{100}$

एवं तृतीय वर्ष के लिए भिन्न होगी = $\left(\frac{100+x}{100}\right)$

अब प्रश्नानुसार,

$$12000 \times \frac{110}{100} \times \frac{120}{100} \times \left(\frac{100+x}{100}\right) = 19800$$

$$\frac{100+x}{100}=\frac{19800}{120\times11\times12}$$

$$100+x=\frac{19800\times100}{120\times11\times12}$$

$$100+x=125$$

$$x=125-100$$

$$x=25$$

अत: x का मान = 25% होगा। ⇒ **उत्तर**

92 **प्रश्न**– 2 वर्ष के साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज में 5% की दर से अंतर 25 रु. हो, तो धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि

5% की दर से 2 वर्ष का साधारण ब्याज होगा-

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{तथा चक्रवृद्धि ब्याज} = \text{मू.}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मू.}$$

चक्रवृद्धि ब्याज – साधारण ब्याज =

$$\text{मू.}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मू.} - \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$=\text{मू.}\left[\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \frac{\text{समय}\times\text{दर}}{100} - 1\right]$$

$$=\text{मू.}\left[\left(\frac{100+\text{दर}}{100}\right)^{2} - \frac{\text{समय}\times\text{दर}}{100} - 1\right]$$

$$=\text{मू.}\left[\frac{(100)^2+(\text{दर})^2+2\times100\times\text{दर}}{(100)^2} - \frac{2\times\text{दर}}{100} - 1\right]$$

[क्योकि समय = 2 वर्ष]

$$=\text{मू.}\left[\frac{(100)^2+(\text{दर})^2+2\times100\times\text{दर}-100\times2\times\text{दर}-(100)^2}{(100)^2}\right]$$

$$=\text{मूलधन}\times\frac{(\text{दर})^2}{(100)^2}$$

$$\therefore \text{चक्रवृद्धि ब्याज} - \text{साधारण ब्याज} = \text{मूलधन}\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)^2$$

.....यही सूत्र है।

नोट- इस प्रकार साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज के दो वर्षों के अंतर पर आधारित प्रश्नों को इसी सूत्र द्वारा हल किया जा सकता है।

अब उपर्युक्त प्रश्न का हल देखें-

सूत्र विधि

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} - \text{साधारण ब्याज} = \text{मूलधन}\times\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)^2$$

प्रश्नानुसार,

$$25=\text{मूलधन}\times\left(\frac{5}{100}\right)^2$$

$$25=\text{मूलधन}\times\left(\frac{1}{20}\right)^2$$

मूलधन = 25 × 20 × 20 = 10000 रु. ⇒ **उत्तर**

उपर्युक्त प्रश्न को सामान्य समझ पर भी आसानी से अति न्यून समय में हल किया जा सकता है। **देखें-**

सामान्य समझ पर

2 वर्ष में साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर क्या है? इस पर विचार करें-

चक्रवृद्धि ब्याज की दशा में दूसरे वर्ष प्रथम वर्ष के ब्याज पर भी ब्याज लगता है। यही ब्याज 2 वर्षों में चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर होता है। स्पष्ट है कि 25 रु., 5% की से दर एक वर्ष का ब्याज पर ब्याज है।

अर्थात 1 वर्ष के साधारण ब्याज का 5% = 25 रु.

$$1\% = \frac{25}{5} = 5 \text{ रु.}$$

$\therefore$ 100% = 5 × 100 = 500 रु.

अब यह 500 रु., मूलधन का 5% है

$\because$ मूलधन का 5% = 500 रु.

$\therefore$ मूलधन या मूलधन का 100% $= \frac{500}{5} \times 100$

= 10000 रु. होगा। ⇒ **उत्तर**

☞ **उपर्युक्त प्रश्न को इस प्रकार भी हल कर सकते हैं।**

देखें-

माना मूलधन 100 रु. है।

तब मूलधन 100 रु. का 5% वार्षिक दर से

	प्रथम वर्ष	द्वितीय वर्ष	दो वर्षों में प्राप्त
सा. ब्याज	= 5 रु.	5 रु.	= 10 रु.
च. ब्याज	= 5 रु.	5.25 रु.	= 10.25 रु.

चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज का अंतर = 0.25 रु.

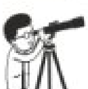
$\because$ चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर 0.25 रु. का है तो मूलधन है = 100 रु.

$\therefore$ दोनों ब्याजों का अंतर 25 रु. होगा तो मूलधन होगा

$$= \frac{25}{.25} \times 100$$

= 100 × 100 = 10000 रु. ⇒ **उत्तर**

93 **प्रश्न**– 600 रु. का 2 वर्ष का 5% की दर से चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज में अंतर कितना होगा?



हल : सूत्र विधि

$$\text{च. ब्याज} - \text{सा. ब्याज} = \text{मूलधन} \times \left(\frac{\text{दर}}{100}\right)^2$$

$$= 600 \times \left(\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 600 \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{600}{400} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ रु.}$$

⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

मूलधन 600 रु. का एक वर्ष का 5% की दर से साधारण ब्याज होगा $= \frac{600 \times 5 \times 1}{100} = 30$ रु.

अगले वर्ष साधारण ब्याज की दशा में तो 30 रु. ही लिया जाएगा परंतु चक्रवृद्धि ब्याज की दशा में 30 रु. के साथ-साथ 30 रु. पर भी 5% की दर से लिया जाएगा। अत: इसी 30 रु. का 5% अर्थात $30 \times \frac{5}{100} = 1.5$ रु. दोनों ब्याजों का अंतर होगा। ⇒ **उत्तर**

94 **प्रश्न**–कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 16 वर्ष में तीन गुना हो जाता है। वह उसी दर से कितने वर्षों में 9 गुना हो जाएगा?

हल : सामान्य समझ पर

प्रश्नानुसार, 1 रु. 16 वर्षों में 3 रु. हो जाएगा। यह 3 रु. अगले 16 वर्षों में 9 रु. हो जाएगा। इस प्रकार 1 रु. को 9 रु. (9 गुना) होने में लगा कुल समय = 16 + 16 = 32 वर्ष।

इसे इस तरह समझें-

16 वर्ष में धनराशि = 3^1 गुना

$\therefore$ (16 + 16) वर्ष में धनराशि = 3^2 गुना

अर्थात समय समांतर क्रम में तथा गुना गुणोत्तर क्रम में बढ़ता है। इस प्रकार धन को 9 गुना होने में लगा समय = 32 वर्ष ⇒ **उत्तर**

क्षेत्रफल एवं परिमाप

प्रश्न. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 4 सेमी. हो, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4$

$= 4\sqrt{3}$ वर्ग सेमी.

$(\because \sqrt{3} = 1.732)$

$= 4 \times 1.732$

$= 6.928$ वर्ग सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

यदि प्रश्न परिवर्तित हो-

प्रश्न- एक समबाहु Δ का क्षेत्रफल $4\sqrt{3}$ वर्ग सेमी. हो, तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी?

हल : सूत्र विधि

$4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \Rightarrow \text{भुजा}^2 = 4 \times 4$

$\therefore$ भुजा = 4 सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

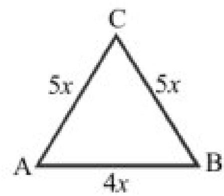
95 **प्रश्न**–यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं को तीन गुना कर दिया जाए, तो उसकी ऊंचाई कितनी गुना हो जाएगी?

हल : सामान्य समझ पर

त्रिभुज के तीनों भुजाओं में समान परिवर्तन पर उसके ऊंचाई में भी समान परिवर्तन होगा अर्थात नए त्रिभुज की ऊंचाई पहले त्रिभुज की ऊंचाई का तीन गुना हो जाएगी।

96 **प्रश्न**–एक समद्विबाहु त्रिभुज की परिमिति 14 सेमी. है तथा बराबर भुजाओं में से एक भुजा तथा तीसरी भुजा का अनुपात 5 : 4 है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : सामान्य समझ पर



निष्कर्ष 1. त्रिभुज ABC की परिमिति = 14 सेमी. है

अर्थात $5x + 5x + 4x = 14$

$14x = 14 \Rightarrow x = 1$

निष्कर्ष 2. समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः $5x$, $5x$ तथा $4x$ हैं।

$\therefore$ भुजाएं क्रमशः $= 5 \times 1, 5 \times 1$ तथा 4×1

= 5 सेमी., 5 सेमी., 4 सेमी. होंगी।

निष्कर्ष 3. अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\left(\mathbf{s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+4}{2} \Rightarrow 7}\right)$

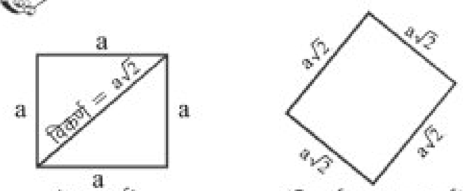
$= \sqrt{7(7-5)(7-5)(7-4)}$

$= \sqrt{7 \times 2 \times 2 \times 3}$

$= 2\sqrt{21}$ वर्ग सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

97 **प्रश्न**–किसी वर्ग के विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल एवं मूल वर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात क्या होगा?

सामान्य समझ पर



(मूल वर्ग) (विकर्ण पर बना वर्ग)

निष्कर्ष 1. मूल वर्ग का क्षेत्रफल $= a \times a \Rightarrow a^2$ होगा

निष्कर्ष 2. विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल $= a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2a^2$ होगा

निष्कर्ष 3.

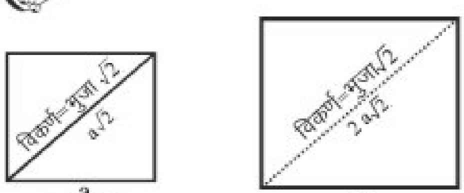
अतः $\dfrac{\text{विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल}}{\text{मूल वर्ग का क्षेत्रफल}} = \dfrac{2a^2}{a^2} \Rightarrow 2:1$

विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल : मूल वर्ग का क्षेत्रफल $= 2:1$

$\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 13. यदि किसी वर्ग की भुजा दोगुनी कर दी जाए, तो नए वर्ग और मूल वर्ग के विकर्णों का अनुपात क्या होगा?

सामान्य समझ पर

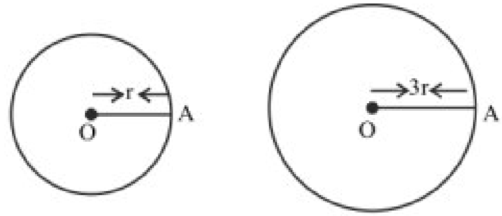


(मूल वर्ग) (भुजा दोगुनी करने पर बना वर्ग)

आयतन

98 **प्रश्न–** एक गोले की त्रिज्या तिगुनी कर देने पर पृष्ठ के क्षेत्रफल में कितनी प्रतिशत वृद्धि होगी?

हल : परंपरागत विधि



माना गोले की त्रिज्या r इकाई है, तो दूसरे गोले की त्रिज्या 3r इकाई होगी।

पुराने गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

तथा नए गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi(3r)^2$

$= 36\pi r^2$

गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि $= 36\pi r^2 - 4\pi r^2$

$= 32\pi r^2$

$\therefore$ गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि

$= \left(\dfrac{32\pi r^2}{4\pi r^2} \times 100\right)\%$

$= 800\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

गुणा-भाग विधि

		त्रिज्या	×	त्रिज्या	=	आयतन
		↓		↓		↓
पूर्व में	→	10	×	10	=	100
वर्तमान में	→	30	×	30	=	900

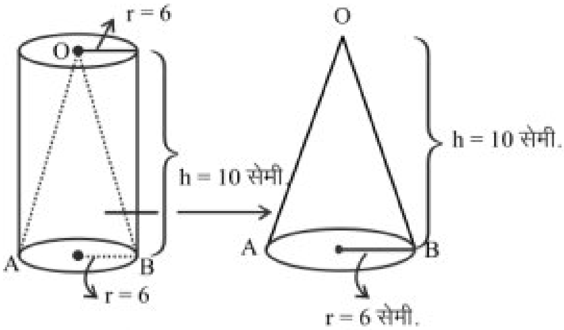
वृद्धि $= 900 - 100 = 800$ वर्ग इकाई

$\because$ प्रतिशत वृद्धि $= \dfrac{800}{100} \times 100 = 800\%$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

नोट- प्रतिशत अध्याय में इस विधि का विस्तृत उल्लेख है।

99 **प्रश्न–** 10 सेमी. ऊंचाई और 6 सेमी. त्रिज्या के आधार वाले एक ठोस बेलन से उसी ऊंचाई और उसी जैसा आधार वाला एक शंकु निकाल लिया गया है। तद्नुसार शेष बचे ठोस का आयतन कितना रह गया है?

हल : परंपरागत विधि



बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi(6)^2 \times 10$

$= 360\pi$ घन सेमी.

शंकु OAB का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 10$

$= 120\pi$ घन सेमी.

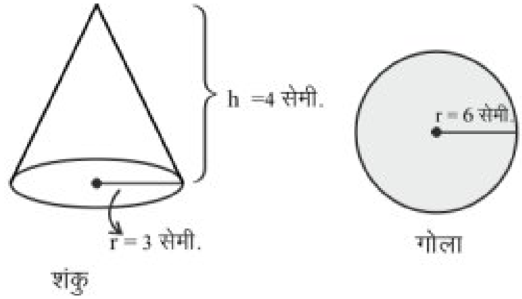
शेष बचे ठोस का आयतन = बेलन का आयतन – शंकु OAB का आयतन

$= (360\pi - 120\pi)$ घन सेमी.

$= 240\,\pi$ घन सेमी.

$= 240 \times \frac{22}{7} \approx 754.28$ घन सेमी.

$\Rightarrow$ **उत्तर**



एक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times (3)^2 \times 4$

$= 12\pi$ घन सेमी.

तथा परिणामी ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (6)^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 6$

$= 288\,\pi$ घन सेमी.

$\therefore$ अभीष्ट शंकुओं की संख्या =

$\frac{\text{परिणामी ठोस गोले का आयतन}}{\text{एक शंकु का आयतन}}$

$= \frac{288\pi}{12\pi} = 24 \Rightarrow$ **उत्तर**

100 **प्रश्न**–धातु के कुछ ठोस लंब वृत्तीय शंकुओं जिनमें से प्रत्येक के आधार की त्रिज्या 3 सेमी. और ऊंचाई 4 सेमी. है, को पिघलाकर 6 सेमी. त्रिज्या का एक ठोस गोला बनाया जाता है। लंब वृत्तीय शंकुओं की संख्या क्या होगी?

हल : परंपरागत विधि

सहज एवं सरल ढंग से
गणित सीखने की अद्‌भुत पुस्तक
मन की गणित
का अध्ययन करें......
Best of Luck