

६. भाग देना (भाजन) : भाग ?



पुनरावर्तन

(१) २० चॉकलेटें पाँच बच्चों में समान-समान बाँटें तो प्रत्येक को कितनी चॉकलेटें मिलेंगी ?



हम भाग $20 \div 5$ करेंगे ।

$$\begin{array}{r} 8 \\ 5 \overline{) 20} \\ \underline{20} \rightarrow 5 \times 8 \\ 00 \end{array}$$

प्रत्येक को ४ चॉकलेटें मिलेंगी ।

(२) २१ फूल सात बच्चों में समान-समान बाँटने पर प्रत्येक बच्चे को कितने फूल मिलेंगे ?



हम भाग $21 \div 7$ करेंगे

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 7 \overline{) 21} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

प्रत्येक बच्चे को $\boxed{}$ फूल मिलेंगे ।

(३) हम भाग $15 \div 5$ को बिंदियाँ बनाकर करेंगे । भाजक पाँच है । अतः एक कतार में पाँच बिंदियाँ बनाएँगे और यह देखेंगे कि १५ बिंदियाँ कितनी कतारों में समाती हैं ।

• • • • •	पहली कतार	तीन कतारें तैयार हुई । अतः $15 \div 5 = 3$
• • • • •	दूसरी कतार	
• • • • •	तीसरी कतार	

इसी प्रकार बिंदियों का विन्यास करके नीचे दिए गए भाग पूर्ण करो ।

(१) $8 \div 2$	(२) $16 \div 4$	(३) $12 \div 6$	(४) $24 \div 8$

गुणा (गुणन) तथा भाग (भाजन) का परस्पर संबंध

शोभा : रोहित, आओ हम लोग डिब्बे में रखे गए छल्लों को स्टैंड पर अटकाते हैं ! परंतु ध्यान रखो कि प्रत्येक स्टैंड पर समान छल्ले ही अटकाए जाने चाहिए ।

रोहित : डिब्बे में कुल बारह छल्ले हैं ।

शोभा : कुल तीन स्टैंड हैं ।

रोहित : प्रत्येक स्टैंड पर क्रमशः एक-एक छल्ला अटकाते हैं ।



शोभा : कुल १२ छल्लों को तीन स्टैंड पर समान संख्या में अटकाएँ तो प्रत्येक स्टैंड पर कितने छल्ले होंगे ? गिनकर देखो ।

रोहित : अरे, तुम तो भागफल पूछ रही हो । $१२ \div ३ = ४$ । प्रत्येक स्टैंड पर ४ छल्ले । ठीक है । तुम मुझे बताओ कि प्रत्येक स्टैंड पर ४ छल्ले अटकाने पर १२ छल्ले कितने स्टैंड पर अटकाए गए ?

शोभा : अरे, यह भी भाग (भाजन) ही है ! $१२ \div ४ = ३$ अर्थात् तीन स्टैंड पर अटकाए गए ।

शिक्षिका : ऐसा क्यों ? मैं वही बताती हूँ क्योंकि गुणन $३ \times ४ = १२$ और $४ \times ३ = १२$ इसलिए $१२ \div ३ = ४$ और $१२ \div ४ = ३$ आता है ।

रोहित : अतः हमें एक गुणन द्वारा दो भाजन प्राप्त होते हैं । अतः हम गुणा को भाग के रूप में दो प्रकार से लिख सकते हैं ।

जैसे, $८ \times ४ = ३२$ इस आधार पर $३२ \div ८ = ४$ और $३२ \div ४ = ८$ ऐसा ही न ?

शिक्षिका : बहुत अच्छे ! बिल्कुल सही । इसे ही ध्यान में रखकर नीचे दिए गए प्रश्न हल करो ।

$\begin{array}{c} ७ \times ५ = ३५ \\ \swarrow \quad \searrow \\ ३५ \div \square = ५ \quad ३५ \div \square = ७ \end{array}$	$\begin{array}{c} ६ \times ७ = ४२ \\ \swarrow \quad \searrow \\ ४२ \div ७ = \square \quad ४२ \div ६ = \square \end{array}$
$\begin{array}{c} ५ \times ९ = ४५ \\ \swarrow \quad \searrow \\ ४५ \div \square = ९ \quad ४५ \div \square = ५ \end{array}$	$\begin{array}{c} ८ \times \square = ५६ \\ \swarrow \quad \searrow \\ ५६ \div ८ = \square \quad ५६ \div \square = \square \end{array}$

दो अंकवाली संख्या में एक अंकवाली संख्या से भाग देना

- ◆ चार किसानों ने मिलकर खाद की ८४ बोरियाँ खरीदीं और वे इस पर विचार करने लगे कि इन्हें चारों में समान-समान कैसे बाँटा जाना चाहिए।

- एक किसान द्वारा बताई गई विधि -

चरण १

प्रत्येक को १० बोरियाँ दे दी गईं

$$\boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} = 40$$

$$4 \times 10 = 40 \text{ बोरियाँ बाँटी।}$$

$$84 - 40 = 44 \text{ बोरियाँ बचीं।}$$

चरण २

बची हुई ४४ बोरियों में से प्रत्येक को १० बोरियाँ और दे दी गईं।

$$\boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} = 40$$

$$4 \times 10 = 40 \text{ बोरियाँ बाँट दी।}$$

$$44 - 40 = 4 \text{ बोरियाँ बचीं।}$$

चरण ३

बची हुई ४ बोरियों में से प्रत्येक को १ बोरी दे दी।

$$\boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} = 4$$

$$4 \times 1 = 4 \text{ बोरियाँ बाँटीं।}$$

$$4 - 4 = 0 \text{ बोरियाँ बचीं।}$$

इस प्रकार प्रत्येक किसान को उसके हिस्से की $\boxed{10} + \boxed{10} + \boxed{1} = 21$ बोरियाँ मिलेगी।

- अब दूसरे किसान द्वारा बताई गई विधि -

चरण १

पहले प्रत्येक को २० बोरियाँ दीं।

$$\boxed{20} \boxed{20} \boxed{20} \boxed{20} = 80$$

$$4 \times 20 = 80 \text{ बोरियाँ बाँट दी गईं।}$$

$$84 - 80 = 4 \text{ बोरियाँ बचीं।}$$

चरण २

बची हुई ४ बोरियों में से

प्रत्येक को १ बोरी दी गई।

$$\boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} = 4$$

$$4 \times 1 = 4 \text{ बोरियाँ बाँट दी गईं।}$$

$$4 - 4 = 0 \text{ बोरियाँ बचीं।}$$

इस प्रकार प्रत्येक किसान को उसके हिस्से की $\boxed{20} + \boxed{1} = 21$ बोरियाँ मिलेंगी।

- ◆ यह समान बाँटवारा भाग क्रिया द्वारा निम्नानुसार किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 84} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 8 \overline{) 84} \\ \underline{- 16} \\ 04 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 8 \overline{) 84} \\ \underline{- 16} \\ 04 \\ \underline{- 8} \\ 00 \end{array}$$

भाज्य ८४ अर्थात् ८ द तथा ४ इ और भाजक ४ है।

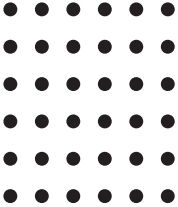
हम सर्वप्रथम दहाई का बाँटवारा करेंगे। ८ दहाई को चारों में बाँटने के लिए हम यह देखेंगे कि क्या ८ द में ४ से भाग जाता है। ४ का पहाड़ा बोलेंगे। ४ दूनी ८ अर्थात् दो-दो दहाई बाँटे जा सकते हैं। उसे घटाएँगे। प्रत्येक को २ दहाई बोरियाँ मिलीं। भागफल में आड़ी पाई के ऊपर दहाई के स्थान पर २ लिखेंगे। ८ दहाई में से ८ दहाई घटाया। शून्य दहाई बची।

अब आगे वाली ४ इकाई को बाँटेंगे। ४ एकम ४ अर्थात् ४ में से ४ का केवल एक गुना घटाया जा सकता है। प्रत्येक को १ इकाई मिला। भागफल में आड़ी पाई के ऊपर इकाई में १ लिखेंगे।

४ इकाई घटाने पर शेषफल शून्य आता है। भागफल २१ आया।

- ◆ शिक्षिका ने रोहित, शोभा तथा माधवी से कागज पर ३० टिकुलियाँ चिपकाने के लिए कहा । उन्होंने सूचना दी कि प्रत्येक कतार में समान टिकुलियाँ चिपकाओ और देखो कि कितनी कतारें बनती हैं ।

रोहित द्वारा चिपकाई गई टिकुलियाँ



$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{) 36} \\ \underline{- 36} \rightarrow 6 \times 6 \\ 00 \end{array}$$

रोहित ने कहा, “मैंने प्रत्येक कतार में छह टिकुलियाँ चिपकाई तो ६ कतारें तैयार हुई अर्थात् $36 \div 6 = 6$ ” ।

शोभा द्वारा चिपकाई गई टिकुलियाँ



$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \overline{) 36} \\ \underline{- 36} \rightarrow 8 \times 9 \\ 00 \end{array}$$

शोभा बोली, “मैंने प्रत्येक कतार में ४ टिकुलियाँ चिपकाई तो ९ कतारें तैयार हुई । अर्थात् $36 \div 4 = 9$ ” ।

माधवी द्वारा चिपकाई गई टिकुलियाँ



$$\begin{array}{r} 7 \\ 5 \overline{) 36} \\ \underline{- 35} \rightarrow 5 \times 7 \\ 01 \end{array}$$

माधवी ने कहा, “मैंने एक कतार में ५ टिकुलियाँ चिपकाई तो ७ कतारें बनी तथा १ टिकुली बची ।”

अब तुम स्वयं एक कतार में ८ टिकुलियाँ इस प्रकार ३६ टिकुलियाँ चिपकाने का प्रयास करो ।

- ◆ दादा जी गोलियों का एक पुड़ा लाए और रसिका, रोहन तथा रश्मि से कहा, “गोलियाँ समान-समान संख्या में बाँट लो ।”

रोहन : सबसे पहले मैं गोलियों को गिनता हूँ । १, २, ..., ५७, ५८ । कुल अट्ठावन गोलियाँ हैं ।

रसिका : समान बाँटवारा करना है । अतः दादा जी, आप हम लोगों से भाग क्रिया करने के लिए कह रहे हैं न !

रश्मि : इनमें से क्या १-१ गोली बाँटें ?

रसिका : इसमें तो अधिक समय लगेगा । अतः पहले १०-१० गोलियाँ बाँटते हैं । हम तीनों में १०-१० अर्थात् ३० गोलियाँ बाँट दी गई । $58 - 30 = 28$ गोलियाँ बचीं ।

रोहन : २८ में से पुनः प्रत्येक को नौ-नौ गोलियाँ देते हैं । नौ तियाँ सत्ताईस । $28 - 27 = 1$ गोली बची ।

रश्मि : अतः प्रत्येक को $10 + 9 = 19$ गोलियाँ मिलीं परंतु १ गोली बच गई ।

रसिका : दादा जी, यह बची हुई गोली आप ले लीजिए ! जिससे हम लोगों में कोई टंटा न हो सके ।
दादा जी : सही कहा ! तुम लोगों ने सही भाग क्रिया की है परंतु बड़ी संख्याओं में भाग देते समय भाग शीघ्र पूरा करने के लिए निम्नानुसार विन्यास करके भाजन करते हैं ।



$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 50} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 50} \\ - 3 \downarrow \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 3 \overline{) 50} \\ - 3 \downarrow \\ \hline 20 \\ - 19 \\ \hline 01 \end{array}$$

प्रश्न में ५८ भाज्य तथा ३ भाजक है ।

तीनों में ५ दहाई का बँटवारा करने के लिए ३ का पहाड़ा बोलो ।
तीन एकम तीन । तीन दुनी छह $6 > 5$ । अतः एक का भाग जाएगा । अतः प्रत्येक को एक दहाई गोलियाँ मिलेंगी । ५ दहाई में से ३ दहाई घटाया । २ दहाई बचीं । अतः उनकी इकाई बनाकर बँटवारा करेंगे । २ दहाइयों की २० इकाई तथा पहले की ८ इकाई ऐसी २८ इकाई का बँटवारा करेंगे । ३ नवाँ २७, ३ दहाँ ३०, $30 > 28$ । अतः तीनों लोगों में २८ इकाई का बँटवारा करते समय प्रत्येक के हिस्से में अधिक-से-अधिक ९ इकाई आएँगी । अतः २८ में २७ घटाएँगे । शेषफल मिला १ इकाई और भागफल १९ आया ।

रोहन : दादा जी, आपके द्वारा बताई गई विधि बहुत ही अच्छी है । इस विधि द्वारा भाजन क्रिया अत्यंत शीघ्र हो गई !

स्वाध्याय

भाग दो । भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल लिखो ।

(१) $5 \overline{) 75}$ (२) $8 \overline{) 52}$ (३) $3 \overline{) 88}$ (४) $4 \overline{) 92}$ (५) $6 \overline{) 45}$ (६) $7 \overline{) 92}$

ध्यान दो : भाजन करते समय भाजक का अधिक-से-अधिक गुना, भाज्य संख्या में से घटाते हैं । इसलिए प्रत्येक बार प्राप्त होने वाला शेषफल, भाजक से छोटा ही होता है ।
बड़ी संख्या में भाग देते समय जब भाजक का दस तक का पहाड़ा पूरा नहीं पड़ता है तब यह विधि उपयोगी सिद्ध होती है ।

- ◆ बंटी को अपने चार पड़ोसियों के घर पर लड्डू देना है। बरनी में २१ लड्डू हैं। बंटी ने चार तश्तरियाँ लीं। प्रत्येक तश्तरी में एक-एक लड्डू रखता गया। प्रत्येक तश्तरी में अधिक-से-अधिक ५ लड्डू रखे गए तथा बरनी में एक लड्डू बचा।



अतः २१ लड्डू के ४ समान भाग करने का प्रयत्न करने पर प्रत्येक भाग में ५ लड्डू आते हैं और १ लड्डू बचेगा।

संख्याओं का खड़ा विन्यास करके इस भाजन को निम्नानुसार दिखाया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 8 \overline{) 21} \\ \underline{- 0} \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 05 \\ 8 \overline{) 21} \\ \underline{- 0} \\ 21 \\ \underline{- 20} \\ 01 \end{array}$$

भाज्य २१ में २ दहाई तथा १ इकाई हैं। २ दहाई को चार लोगों में उसी रूप में बाँटना संभव नहीं है।

अतः प्रत्येक को शून्य दहाई लड्डू देंगे। भागफल में दहाई के स्थान शून्य (०) लिखेंगे।

अब २ दहाई की २० इकाई तथा पहले की १ इकाई मिलाकर कुल २१ इकाई हो गई। इन २१ इकाइयों में ४ से भाग देंगे।

४ पँचे २०, ४ छक २४, $२४ > २१$ अतः प्रत्येक को अधिक-से-अधिक ५ इकाई लड्डू मिलेंगे।

२१ में से २० घटाएँगे। $२१ - २० = १$

१ इकाई शेषफल बचेगा तथा भागफल ५ इकाई आया।

स्वाध्याय

भाग दो।

(१) $३३ \div ५$

(२) $४१ \div ८$

(३) $५१ \div ७$

(४) $८० \div ९$

शून्य में शून्येतर संख्या से भाग देना

भरत, सरला तथा जूली अमरूद के किसी वृक्ष के पास थे। वृक्ष पर अमरूद के फल लगे थे। भरत ने कहा, “मैं गले में थैली लटकाकर वृक्ष पर चढ़ता हूँ और पके हुए अमरूद तोड़कर लाता हूँ। हम तीनों आपस में बाँट लेंगे।” वह वृक्ष पर चढ़ गया और सरला तथा जूली वृक्ष के नीचे खड़ी रहीं।

जूली : भरत को ६ अमरूद मिलें तो प्रत्येक को २ मिलेंगे।

सरला : उसे १० अमरूद मिले तो प्रत्येक को ३ मिलेंगे और एक बच जाएगा। वह उसे ही दे देंगे।

(भरत पौधे पर से उतरा। उसका चेहरा उतरा हुआ था।)

जूली : कितने अमरूद मिले ?

भरत : खाने के योग्य एक भी अमरूद नहीं मिला । थैली खाली है ।

सरला : शून्य अमरूद मिले अर्थात् प्रत्येक के हिस्से में शून्य अमरूद आए । जाने दो ! इससे हमें यह तो समझ में आ गया कि शून्य भागे तीन का अर्थ शून्य होता है ।

जूली : मानो कि यही शून्य अमरूद हमें ७ या ८ लोगों में बाँटना होता तो भी प्रत्येक को शून्य अमरूद ही मिले होते ।



शून्य में, शून्य के अतिरिक्त किसी भी अन्य संख्या अर्थात् शून्येतर संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव शून्य ही आता है ।

◆ यदि तशतरी में शून्य लड्डू हों तो उनका कितने भी बच्चों में बँटवारा करने पर प्रत्येक को शून्य लड्डू ही मिलते हैं ।

$$\begin{array}{r} 0 \\ 9 \overline{) 0} \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 7 \overline{) 0} \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$



◆ $20 \div 4$ यह भाग पूर्ण करो ।

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4 \overline{) 20} \\ - 8 \\ \hline 00 \\ - 0 \\ \hline 00 \end{array}$$

सर्वप्रथम दहाइयों का समान बँटवारा करेंगे । समान बँटवारा करने पर प्रत्येक को २ दहाई मिलेंगे । बची ० दहाई ।

अब ० इकाई को ४ लोगों में बाँटना है । शून्य में किसी भी शून्येतर भाग देने पर भागफल शून्य ही आता है । अतः भागफल में इकाई के स्थान पर ० लिखना पड़ेगा । अतः भागफल २० आएगा ।

भागफल की इकाई के स्थान पर शून्य न लिखने पर, भागफल को २० के स्थान पर गलती से २ पढ़ा जाएगा ।

८० वस्तुएँ ४ लोगों में समान-समान बाँटें तो प्रत्येक को २० वस्तुएँ मिलती हैं ।

स्वाध्याय

भाग दो ।

(१) $50 \div 5$

(२) $90 \div 9$

(३) $60 \div 3$

(४) $80 \div 2$