गणित

कक्षा 6

सत्र 2019–20

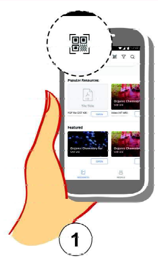
DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉच करे → **App** की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता **Profile** का चयन करें।



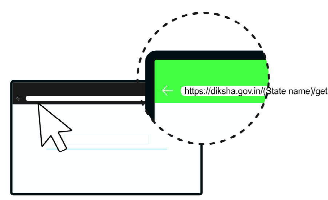
पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

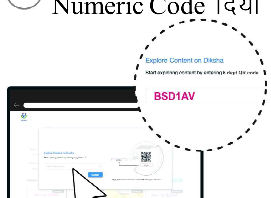
सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।



3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।

4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

नि:शुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष – 2019

3JKEJT

© एस.सी.ई.आर.टी.छ.ग.,रायपुर

सहयोग

हृदय कांत दीवान (विद्या भवन, उदयपुर)

प्रो. परवीन सिंक्लेयर (इग्नू, नई दिल्ली)

विशेष सहयोग

फूल कौल (जामिया मिलिया इस्लामिया वि.वि.,नई दिल्ली)

संपादक मण्डल

एस.डी. शेम्बेकर, यू.के चक्रवर्ती,

मीना श्रीमाली

लेखक दल

एस.डी. शेम्बेकर, यू.के चक्रवर्ती, एम.आर.सावंत.

एम.एम. मेहता, शुभा तिवारी, दीपांकर भौमिक,

जी.पी.पांडेय, के. पी. राव, बी.के. श्रीवास्तव,

मीना श्रीमाली, संजय बोल्या, दीपक मंत्री

संयोजक

यू.के. चक्रवर्ती

आवरण पृष्ठ

हेमन्त अभयंकर, आसिफ–भिलाई

ले–आऊट डिजाइन

रेखराज चौरागड़े

फोटोग्राफ

संस्कृति विभाग, रायपुर के सौजन्य से

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

प्राक्कथन

गणित का उपयोग मात्र एक विषय के रूप में पढ़ने तक ही सीमित नहीं है, परंतु अन्य विषयों को समझने में भी इसकी महत्वपूर्ण भूमिका है। कक्षा छः में गणित पढ़ने का मुख्य उद्देश्य व्यापीकरण को समझने के साथ–साथ ज्यामिति की विभिन्न आकृतियों के गुणों को जानना, ऋणात्मक संख्या की समझ पैदा करना एवं दैनिक जीवन से संबंधित परिस्थितियों में अब तक समझे गए गणित का उपयोग करना है।

गणित कोई बताने या समझाने का विषय नहीं है। गणित सीखने के लिए स्वयं के दिमाग में ढाँचा बनाना पड़ता है। यह ढाँचा स्वंय कई प्रकार की समस्याओं को हल करने से मजबूत होता है।

इस पुस्तक में भी यही प्रयास किया गया है कि गणित की अवधारणाओं को छात्र स्वयं बना सकें तथा इन अवधारणाओं को वातावरण से जोड़कर जीवन के अन्य क्षेत्रों में भी उपयोग कर सकें। इस उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए छात्र पुस्तक को ध्यान से पढ़ने के साथ–साथ दिये गये सभी क्रियाकलापों को स्वयं करके उनसे निष्कर्ष प्राप्त करने का प्रयास करें तथा किए गये क्रियाकलापों का लिखित अभिलेख भी रखें।

गणित हल करने की जिन प्रक्रियाओं का हम उपयोग करते हैं प्रायःउन सभी में एक विशेष पैटर्न होता है इन्हीं पैटर्नो का उपयोग कर गणित हल करने के नए तरीके भी ढूढ़े जा सकते हैं। इसी क्रम में वैदिक गणित की कुछ विधियाँ हम इस पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत कर रहे हैं। आशा है गणित के विद्यार्थी इसका आनंद उठाएँगे। कक्षा–6 में वैदिक गणित की जिन विधियों का हम उपयोग करेंगे उस पर काम करने के पहले कुछ और चीजें सीखनी पड़ेंगी। इन्हें हमने परिशिष्ट में रखा है। इन्हें पहले सीख लेना उपयुक्त होगा।

कोई भी पुस्तक अपने आप में पूर्ण नहीं होती। इस पुस्तक को समझने में जो भी कठिनाइयाँ हों, उसे यदि परिषद् के ध्यान में लाया जाएगा तो आने वाले संस्करणों में उसे सुधारा जा सकेगा, जो प्रदेश के समस्त छात्रों के हित में होगा।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

इस पुस्तक के लेखन में हमें विभिन्न शासकीय और अशासकीय विद्यालयों के शिक्षकों, जिला प्रशिक्षण संस्थानों, महाविद्यालयों के आचार्यों, स्वयं सेवी संस्थाओं तथा प्रमुख नागरिकों का मार्गदर्शन एवं सहयोग मिला है। हम उनके प्रति अपना हार्दिक आभार व्यक्त करते हैं।

हम पुनः राज्य के प्रबुद्ध वर्ग से निवेदन करते है कि इस संस्करण को स्थायी रूप देने के पूर्व वे इसमें आवश्यक संशोधन के सुझाव परिषद् को अवश्य भेजें जिससे इस पुस्तक में सुधार किया जा सके।

संचालक

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

छत्तीसगढ़, रायपुर

शिक्षक के लिए

गणित क्या है?

गणित अध्ययन की वह शाखा है, जिसके अन्तर्गत मोटे तौर पर संख्याओं, उनके गुणों व पारस्परिक संबंधों के साथ–साथ, आस–पास के स्थान की समझ को व्यवस्थित कर उसमें सर्वांगसमता, कोण व अंकन, परिमाण तथा अन्य इसी प्रकार के मापों का अध्ययन किया जाता है। इसका उपयोग न केवल अध्ययन–अध्यापन के सभी क्षेत्रों के अध्ययन में अनिवार्य तथा महत्वपूर्ण अंग होता है, वरन् सामान्य जीवन में भी इनकी अहम भूमिका है। इसलिए गणित अध्ययन–अध्यापन में प्राथमिक स्तर से ही अध्ययन का अनिवार्य अंग रहा है। सामान्य तौर पर गणित सीखने के लिए ठोस वस्तुओं व अनुभवों से शुरू करके अमूर्त विचारों को समझकर उनके साथ आगे बढ़ना होता है। गणित विषय चरण दर चरण बढ़ता है और इसे बढ़ने में प्रत्येक स्तर पर अवधारणाओं का और ज्यादा व्यापीकरण होता रहता है।

भाषा व गणित सीखने का सम्बन्ध/तर्क/सिद्ध करने का अर्थ

गणित सीखने की प्रक्रिया में भाषा का उपयोग बहुत महत्वपूर्ण है। गणितीय तर्कों व धारणाओं को समझने व व्यक्त करने के लिए भाषा आधार है। भाषा गणितीय अवधारणाओं को कुछ हद तक मूर्त बनाने में भी योगदान करती है। क्रमबद्ध तार्किकता विकसित करना व उसके उपयोग का आधार भी भाषा है और यह गणित सीखने व उसके उपयोग के लिए अत्यंत आवश्यक हे। गणित का सबसे प्रमुख पहलू है मान्यताओं व धारणाओं के आधार पर सिद्ध किए जा सकने वाले कथनों का एक ढाँचा खड़ा करना व उनका उपयोग करना। इस प्रकार गणित को संरचित करने का आधार तार्किकता है। बच्चों को इसकी प्रक्रिया से जो गणित की प्रकृति का अहम हिस्सा है, रूबरू करवाना आवश्यक है।

गणित की प्रकृति के अनुरूप कक्षा–6 से 8 के दौरान हम ज्यादा व्यापक और अपेक्षाकृत ज्यादा अमूर्त विचारों का अध्ययन शुरू करेंगे।

समूह में वस्तुओं की संख्या, प्राकृत संख्याओं की समझ व उन पर हुई सामान्य संक्रियाओं से आगे बढ़कर हम संख्याओं का सामान्य प्रतिरूपण व नियम, चर की अवधारणा, सिद्ध करने की धारणा, व्यापीकृत नियमों, व्यवहारिक गणित, आदि के बारे में सीखेंगे। इसके साथ–साथ हम आकृतियों की रचना, प्रकार व आकार के बारे में समझेंगे और अपने ही आस–पास ढूंढ़ने का प्रयास करेंगे। इन कक्षाओं के दौरान हम आंकड़ों को व्यवस्थित करके प्रस्तुत करना व उनसे निष्कर्ष निकालना भी शुरू करेंगे।

गणित सिखाने के बारे में प्रमुख बात यह है कि इसमें बच्चों को स्वयं समस्याएं हल करने का पर्याप्त मौका मिले। गणित बताने व समझाने से नहीं सीखा जाता वरन् समझने से व अपने दिमाग में ढांचे बनाने से आगे बढ़ता है। अतः हमें बच्चों को समझने व अपने दिमाग में उसका ढांचा बना लेने के मौके देने व इसका कौशल विकसित करने पर जोर देना चाहिए।

गणित शिक्षण

हम जानते हैं कि गणित अध्ययन के समस्त क्षेत्रों तथा जिन्दगी के सभी क्रिया–कलापों में उपयोग में आता है। परन्तु यह उस उपयोग तक सीमित नहीं है। यद्यपि ठोस अनुभवों व ठोस वस्तुओं का इसके शुरू में बहुत महत्व है। इसमें सीखने वाले को क्रमशः अमूर्त विचारों को समझकर आगे बढ़ना होता है। इससे यह स्पष्ट है कि गणित शिक्षण का केन्द्र बिन्दु गणितीय अवधारणाओं को शिक्षार्थी को स्वयं बनाने में मदद देना है न कि उन्हें अवधारणाएं बताना अथवा रटाना। हमें गणित शिक्षण में प्रमुख बात सवाल समझाना नहीं वरन् बच्चों को सवालो को हल करने का बेहिचक प्रयास करने का मौका देना चाहिए।

इसलिए उच्च प्राथमिक स्तर के गणित शिक्षण में हमें ठोस वस्तुओं व अनुभवों के माध्यम से सीखे गए गणित का उपयोग करते हुए व्यापकीकृत गणितीय अवधारणा को बनाने में शिक्षार्थी को मदद देनी चाहिए। अतः सभी अध्यायों के शिक्षण में इस बात को रेखांकित कर लेना चाहिए कि आप अध्याय में कौन से गणितीय नियम व उसकी व्यापकीकृत अवधारणा को बनाना चाहते हैं। इसी गणितीय नियम व अवधारणा को शिक्षार्थी अपने आप से बना सके, इस बात को ध्यान में रखकर अभ्यास का ढाँचा व सवाल बनाना चाहिए। अभ्यास के प्रश्नों में शिक्षार्थी को स्वयं समस्याएँ हल करने का पर्याप्त मौका मिलना चाहिए।

उच्च प्राथमिक शाला में गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य

1. प्राथमिक स्तर के ज्ञान का सुदृढ़ीकरण हो सकेगा।
2. बच्चों में वाणिज्य गणित, क्षेत्रमिति, प्रारम्भिक सांख्यिकी की अवधारणाएं विकसित करना।
3. दैनिक जीवन में गणित के आधार की समझ व उसका उपयोग करने की क्षमता।
4. वाणिज्य, गणित, क्षेत्रमिति, प्रारम्भिक सांख्यिकी संबंधी सरल समस्याओं को हल करने की क्षमता का विकास।

5. रेखगणितीय प्रश्नों को हल करने की दक्षता विकसित करना, प्रश्न के विभिन्न चरणों के आपसी संबंधों एवं तार्किक अनुमान लगाने व गणितीय अवधारणा को समझना।

6. प्रारम्भिक बीज गणित के आधार को समझना।

7. सांख्यिकी, ग्राफ, चित्र, चार्ट, मॉडल की समझ, उनके प्रयोग की दक्षता प्राप्त करना।

8. तर्क क्षमता, उपपत्ति व सिद्ध करने का तरीका, पैटर्न पहचानना।

9. समस्याएं समझना व हल करने के साथ–साथ अवधारणाओं के आधार पर नए सवाल और समस्याएं बनाना।

10. राष्ट्रीय एकता, एकरूपता, पर्यावरण सुरक्षा, छोटे परिवार का आदर्श, सामाजिक बुराईयों को दूर करना, समानता संबंधी जागरूकता विकसित करना। इन उद्देश्यों को भी ध्यान में रखते हुए गणित का पाठ्यक्रम बनाया गया है।

11. कक्षा 6 में ऋणात्मक संख्याएँ, चर की अवधारणा व उनका उपयोग, समीकरण, संख्या समूहों की धारणा व उनके गुण तथा भिन्न संख्याओं पर समय लगाने की आवश्यता है, क्योंकि यह आगे के गणित का आधार हैं। इसी प्रकार रेखागणित की धारणा का सुदृढ़ परिचय इसी कक्षा में शुरू होता है। इन सभी के लिए पर्याप्त अभ्यास व मौके चाहिए होंगे।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

विषय–सूची

1	प्राकृत संख्याएँ	1–3
2	पूर्ण संख्याएँ एवं पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ	4–18
3	रेखाखण्ड	19–30
4	पूर्णांक	31–49
5	वृत्त	50–53
6	गुणनखण्ड एवं गुणज	54–72
7	भिन्न	73–88
8	कोण	89–105
9	त्रिभुज एवं चतुर्भुज	106–127
10	अनुपात	128–140
11	चर संख्या	141–143
12	बीजीय व्यंजक	144–147
13	प्रतिशतता	148–156
14	समीकरण	157–167
15	रेखा गणितीय रचनाएँ	168–177
16	क्षेत्रमिति–1 (क्षेत्रफल)	178–184
17	क्षेत्रमिति–2 (परिमाप)	185–195
18	सममिति	196–208
19	सांख्यिकी	209–217
	उत्तरमाला	218–226
	परिशिष्ट–वैदिक गणित की विधियाँ	i-viii

27MH11

गणित के क्षेत्र में भारत का गौरवशाली योगदान

अब तक आपने भाषा एवं गणित को मुख्य विषय के रुप में पढ़ा है। गणित पढ़ाते समय आपके मन में यह जिज्ञासा अवश्य ही उत्पन्न हुई होगी कि इस महत्वपूर्ण विषय का उत्थान कैसे हुआ ? इसके अभ्युत्थान में भारतवासियों का क्या योगदान है ?

भारत वर्ष में गणित के विकास का इतिहास अत्यन्त गौरवशाली है। आज सम्पूर्ण विश्व में शून्य पर आधारित दाशमिक स्थानमान अंक पद्धति का विकास भारत में ही हुआ था। सिन्धु सभ्यता की लिपि को आज पर्यन्त पढ़ा नहीं जा सका, परन्तु हड़प्पा संस्कृति के पुरातात्विक अवशेषों से यह पता चलता है कि उनका गणित ज्ञान विशेषकर क्षेत्रमिति का ज्ञान अत्यन्त उन्नत था। सिन्धु सभ्यता के क्षेत्रमिति के ज्ञान को आर्य भाषियों ने यज्ञ के लिए वेदियों के निर्माण में किया था।

जब यूरोप में गणित के शोध के क्षेत्र में अंधकार का एक दौर चल रहा था, उस समय भारत में **आर्यभट्ट, ब्रह्मागुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य,** जैसे कई महान गणितज्ञ भारत में गणित की गौरवशाली परम्परा को आगे बढ़ा रहे थे।

आर्यभट्ट ने वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल, वर्गक्षेत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल, वृत्त का क्षेत्रफल, गोले का धनफल आदि का अनुमान लगाने का नियम बनाया। उन्होंने वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात जिसे हम π (पाई) के नाम से जानते हैं, चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध प्राप्त किया।

ब्रह्मगुप्त ने आर्यभट्ट की परम्परा को आगे गढ़ाते हुए गणित को और अधिक समृद्ध बनाया। ब्रह्मगुप्त पहले भारतीय गणितज्ञ हैं जिन्होंने, पाटीगणित (अंकगणित) और बीजगणित के रुप में गणित को दो भागों में बांटा एवं बीज गणित में शून्य का उपयोग करने वाले वे प्रथम भारतीय गणितज्ञ थे।

भारतीय गणित की गौरवशाली परम्परा को आगे बढ़ाने में महावीराचार्य का बहुत बड़ा योगदान है। उन्होंने भिन्नों को जोड़ने तथा घटाने के लिए कई नियम दिए तथा भिन्नों से संबंधित कई मनोरंजक एंव रोचक उदाहरण दिए।

भास्कराचार्य प्रथम गणितज्ञ थे जिन्होंने शून्य को एक परमाल्प (अत्यन्त छोटी) संख्या माना तथा यह कहा कि किसी संख्या को शून्य से भाग देने पर अनन्त प्राप्त होता है।

इस प्रकार अनेकानेक भारतीय गणितज्ञों ने गणित के विकास के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण योगदान दिया जिनके कार्यों की सराहना सम्पूर्ण विश्व करता है।

1

ik—r la[;k

दैनिक जीवन में वस्तुओं को गिनने की आवश्यकता पड़ती ही है।

आइये, गिनने के कुछ उदाहरणों को देखें –

1. सुधा के माता पिता तेन्दू पत्ता तोड़ते हैं तथा सुधा 50–50 तेन्दू पत्तों की गड्डियाँ बनाने में उनकी सहायता करती है।
2. राधा छुट्टी के दिन सब्जी बेचने में अपने माँ की सहायता करती है तथा हिसाब किताब रखती है।
3. सुरेश के पिता का डेयरी फार्म है। वह रोज़ाना सुबह–शाम जानवरों की गिनती करता है तथा दूध का हिसाब रखता है।

इस प्रकार आप भी प्रतिदिन कई बार गिनने का कार्य करते हैं। नीचे कुछ चित्रों के समूह दिए गए हैं। उन चित्रों के समूह को आप क्या नाम देंगे? उन नामों को चित्रों के नीचे दिये गये बाक्स में लिखिए। एक का नाम हमने लिख दिया है।

fØ;kdyki 1-

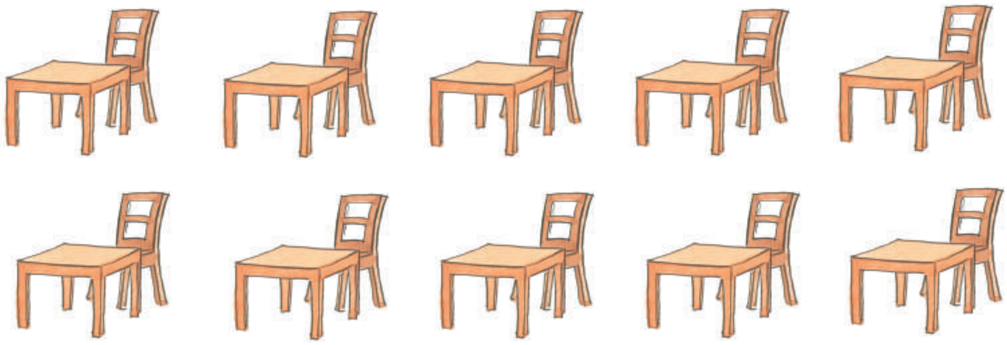
पाँच फूल

उपरोक्त चित्र समूह के नाम पाँच फूल, पाँच गेंदें, पाँच पत्तियाँ एवं पाँच चश्में हो सकते हैं। इस प्रकार गिनती से प्राप्त संख्या किसी खास वस्तु से जुड़ी नहीं है। वह तो एक विचार या सोच है। इसी सोच को अलग–अलग भाषाओं में लिखित रूप से भिन्न–भिन्न संकेतों द्वारा दर्शाया जाता है। जैसे पाँच को हिन्दी में ५, अंग्रेजी में 5 तथा रोमन में V से दर्शाया जाता है। प्रत्येक संख्या प्रणाली में प्रत्येक संख्या के लिए एक निश्चित संकेत होता है।

प्राचीन काल में जब मनुष्य के पास गिनती के संकेत नहीं थे तब भी गिनती का कार्य विभिन्न तरीकों से होता था। जैसे, पत्थर रखकर, बीज रखकर, रस्सी पर गांठ बांध कर इत्यादि। इसी प्रकार कई तरीकों

से गिनने का कार्य किया जाता था। जब वस्तुओं को गिना जाता था तो प्रत्येक वस्तु के बदले एक पत्थर या एक बीज अलग रखा जाता था अथवा एक गांठ लगाई जाती थी। इसे ही एक–एक संगतता कहते हैं।

यदि किसी कक्षा में 10 मेज़ हैं तथा 10 मेज़ों के लिए 10 कुर्सियाँ निर्धारित हैं तो मेज़ तथा कुर्सियों के बीच एक–एक संगतता है।



प्रत्येक मेज़ के लिए एक कुर्सी की आवश्यकता है। कुर्सी और मेज़ में एक–एक संगति है।

क्या आप शाला में बस्तों को गिन कर उपस्थित छात्रों की संख्या बता सकते हैं ?

चूंकि प्रत्येक छात्र से एक बस्ता संबंधित है अतः छात्र एवं बस्ते के बीच एक–एक संगतता है। इस प्रकार किसी कक्षा में रखे 32 बस्तों से यह सोच बनती है कि कक्षा में 32 छात्र उपस्थित हैं।

आपको गणना करते समय किन–किन अंकों की आवश्यकता होती है ? गणना के अंक कहाँ से प्रारंभ होते हैं ? आइये, इन प्रश्नों का उत्तर ढूंढ़ें :

गणना करते समय 10 संकेतों 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 का उपयोग किया जाता है तथा गणना का कार्य 1 से प्रारंभ होता है। इन्हीं अंकों को मिलाकर संख्याएँ लिखी जाती हैं।

गणना के लिए जिन संख्याओं का उपयोग किया जाता है उन्हें **ikd`r l[;k¼Natural Number½** कहते हैं। प्राकृत संख्याओं के समूह को **N** से दर्शाते हैं।

अर्थात् प्राकृत संख्या **(N)** = 1,2,3,.... आदि।

सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है। इन संख्याओं का एक गुण यह है कि हर संख्या अपने ठीक पहले की संख्या से 1 ज्यादा है अर्थात् किसी प्राकृत संख्या में एक जोड़ने पर अगली संख्या प्राप्त संख्या में 1 जोड़ने पर उसकी अगली संख्या प्राप्त होगी। दूसरा गुण यह है कि संख्याओं की यह एक ऐसी सूची है, जो बढ़ती ही जाती है। इन दोनों गुणों को उदाहरण लेकर जांचिए।

fØ;kdyki 2-

नीचे दी गई संख्याओं को बढ़ते एवं घटते क्रम में लिखिए –

l[;k,¡	c<rk Øe esa	?kVrk Øe esa
15,12,27,9,13,31,49,18	9,12,13,15,18,27,31,49	49,31,27,18,15,13,12,9
98,33,62,49,107		
67,78,75,57,25		
103,113,131,301,331		

इस आधार पर हम कह सकते है कि 9<12<13<15<18<27<31<49

या 49>31>27>18>15>13>12>9

Ikp dj mÙkj <ँf<, : सबसे बड़ी प्राकृत संख्या कौनसी होगी ?

क्या दस लाख से बड़ी कोई संख्या है ? दस करोड़ से ?

तो फिर सबसे बड़ी संख्या क्या होगी ?

i'ukoyh 1

1. सबसे छोटी प्राकृत संख्या कौन सी है?
2. 41600 तथा 41006 में कौन सी संख्या बड़ी है?
3. उपयुक्त चिहन >, < या = का प्रयोग कर खाली बाक्सों में पूर्ति कीजिए –

   (i) 45 ☐ 21, (ii) 543 ☐ 345

   (iii) 15 ☐ 15 (iv) 5304 ☐ 5340

   (v) 10991 ☐. 10091 (vi) 99876 ☐ 99786
4. 1 से 100 के बीच की संख्याएँ लिखने के लिए कितने बार 9 का प्रयोग करना पड़ता है?
5. चार अंकों की सबसे बड़ी प्राकृत संख्या तथा तीन अंकों की सबसे छोटी प्राकृत संख्या के बीच का अंतर निकालिए ?

geu lh[kk

1. गणना के लिए जिन संख्याओं का उपयोग किया जाता है उन्हें प्राकृत संख्याएँ कहते हैं।
2. 1,2,3,4,5,6 – – – इत्यादि सभी प्राकृत संख्याएं हैं।
3. प्राकृत संख्याओं के समूह को N से व्यक्त करते हैं। अर्थात् N = {1,2,3,4 - - -} इत्यादि।
4. सबसे छोटी प्राकृत संख्या एक है।
5. प्राकृत संख्या में एक जोड़ कर अगली प्राकृत संख्या प्राप्त की जा सकती है।
6. सबसे बड़ी प्राकृत संख्या नहीं प्राप्त की जा सकती है। अर्थात् किसी संख्या में एक जोड़कर अगली बड़ी संख्या प्राप्त होगी। प्राप्त संख्या में जोड़कर उसकी अगली बड़ी संख्या प्राप्त होती रहेगी।

28FJ5Y

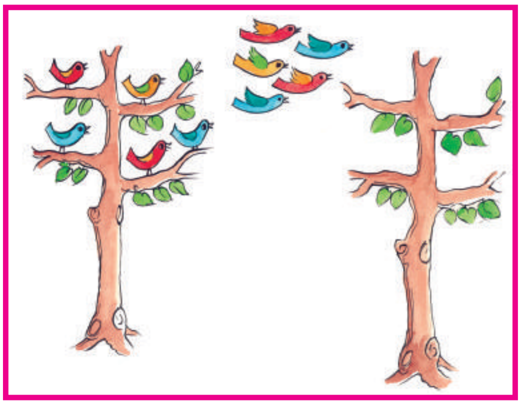
2
i.kZ la[;k ,o i.kZ la[;k ij lfØ;k,¡

i.kZ la[;k ¼Whole Number½

आपने पिछले पाठ में गणना संख्या अथवा प्राकृत संख्या के बारे में पढ़ा है।

1,2,3,4. . ., इत्यादि प्राकृत संख्याएँ हैं। क्या आप बता सकते हैं कि यदि किसी प्राकृत संख्या में से उसी प्राकृत संख्या को घटाया जाए तो शेषफल कितना होगा?

जैसे 2 – 2 = 0, 5–5 = 0, यहाँ 0 (शून्य) प्राप्त हो रहा है, क्या यह प्राकृत संख्या है ?



नहीं, शून्य प्राकृत संख्या नहीं है। परंतु हमें इसकी आवश्यकता है। यदि किसी पेड़ पर पाँच चिड़िया बैठी हों और पाँचों उड़ जाएँ, तो पेड़ पर बैठी चिड़ियाओं की संख्या क्या होगी? इस प्रश्न का जवाब देने के लिए गणना संख्या के साथ–साथ शून्य की भी आवश्यकता होगी। वह संख्याओं का समूह जिसमें गणना संख्या के साथ शून्य भी शामिल है **i.kZ la[;k** कहलाती है। पूर्ण संख्या को W से प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

पूर्ण संख्या (W) = 0,1,2,3,4,5, – – –, इत्यादि।

आइये, शून्य को समझने का प्रयास करें :

1. संगीता के पास 10 रु. हैं। उसने 7 रु. की कॉपी तथा 3 रु. का पेन खरीदा तो उसके पास कितने रुपये शेष बचे? 10 – 7 = 3 (कॉपी का दाम कम किया)

   3 – 3 = 0 (पेन का दाम कम किया)

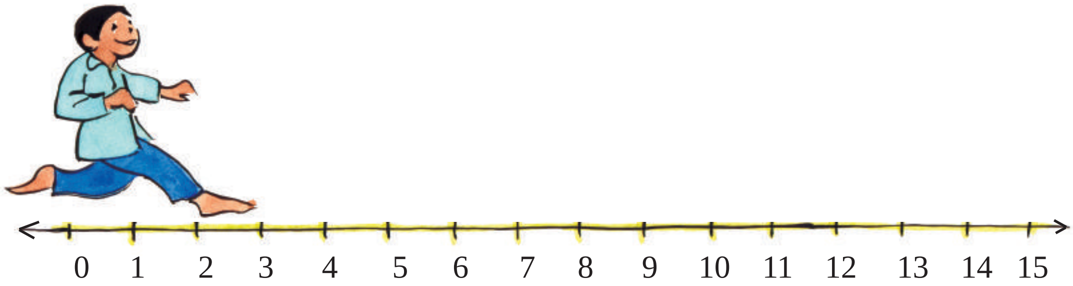
   संगीता के पास शून्य रूपये बचे। इसे 0 चिन्ह द्वारा दर्शाते हैं।

2. रामू की माँ ने रामू को 5 लड्डू दिए। रामू ने 2 लड्डू मोहन को खिला दिये और 3 रामू ने खा लिये। अब रामू के पास कितने लड्डू बचे?

3. रहीम के पास 100 पेज की एक कॉपी है जिसमें उसने 80 पेज पर गणित तथा 20 पेज पर विज्ञान का कार्य किया है। उसकी इस कॉपी में कितने पेज भोश बचे?

i.kZ la[;kvksa dks la[;k js[kk ij n'kkZuk

पूर्ण संख्या को एक सरल रेखा पर दिखाने के लिए अपनी कॉपी में चित्रानुसार एक सरल रेखा खींचिए जिसमें समान दूरी पर कई चिह्न लगे हों।



चित्र 2

इसमें प्रारंभिक बिन्दु को 0 से दिखाएं। शून्य के दाँयी ओर के बिन्दुओं पर क्रम I: 1,2,3,4 – – – इत्यादि संख्याएँ लिखें। क्या संख्या रेखा को देखकर आप बता सकते हैं कि कौन–सी संख्या बड़ी है? इसके लिए सोचिए कि किसी संख्या के बायें ओर की संख्या उस संख्या से बड़ी होगी या छोटी ?

i.k l[;kvk d x.k

आप जानते हैं कि 0,1,2,3,4,5. . ., इत्यादि पूर्ण संख्याएँ हैं। आइए, इनके गुणों का अध्ययन करें–

1) प्राकृत संख्या के सभी गुण पूर्ण संख्याओं के लिए भी सही हैं।

2) सबसे छोटी पूर्ण संख्या 0 है।

3) संख्या रेखा पर 0 से दाहिने ओर क्रमशः पूर्ण संख्या बढ़ते क्रम में दिखायी गयी है। अर्थात् 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, - - -, 101 + 1 = 102, 102 + 1 = 103, 103 + 1 = 104, - - -, इत्यादि।

4) संख्या रेखा पर दाहिने ओर से बाँए ओर का क्रम घटते क्रम में है, जैसे 4,3,2,1,0

5) सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं दिखाई जा सकती। क्योंकि यदि आप कोई बड़ी से बड़ी संख्या सोचते हैं तो उसमें एक जोड़ कर उसकी अगली बड़ी संख्या प्राप्त की जा सकती है। जो उस संख्या की परवर्ती संख्या होगी।

6) 50 की पूर्ववर्ती संख्या 49 है 17 की पूर्ववर्ती संख्या 16 है। क्या शून्य की भी पूर्ववर्ती संख्या होगी?

l[;k j[kk ij lfØ;k,

1- i.k l[;kvk dk ;kx –

fØ;kdyki 1-

संख्या रेखा पर 3 + 2 = 5 दिखाइए

1. संख्या रेखा बनाइए।
2. शून्य से दाहिनी ओर 3 स्थान चलें। (3 पर पहुँचें)
3. अब 3 से आगे दो स्थान चलें। (कहाँ पहुँचे?)
4. इस प्रकार अब शून्य से दूरी 5 है, अतः 3 + 2 = 5 होगा।

चित्र 3

vH;kl 2-1

क. आप स्वयं भी इसी प्रकार संख्या रेखा बनाकर निम्न प्रश्नों की जांच करिए।

(i) 4 + 5 (ii) 6 + 4 (iii) 5 + 7

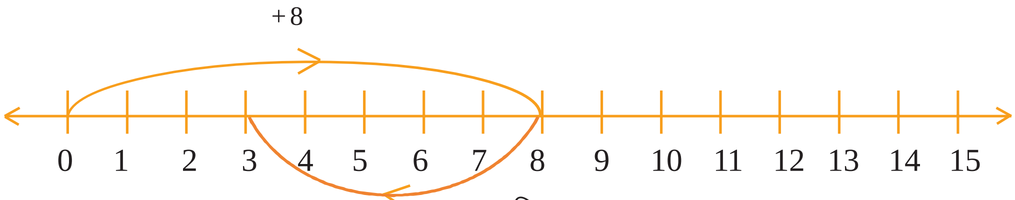
ख. क्या 3 + 4 = 4 + 3 है ? संख्या रेखा पर जांचिए।

2 i.kZ la[;kvksa dk ?kVkuk

संख्या रेखा पर किसी बड़ी पूर्ण संख्या से छोटी पूर्ण संख्या घटाई जा सकती है। यदि समान पूर्ण संख्या को घटाएँ तो अंतर 0 प्राप्त होता है। आइए, इसके लिए एक क्रियाकलाप करें।

fØ;kdyki 2-

8 – 5 = 3 को संख्या रेखा पर दर्शाना :



चित्र 4

1) एक संख्या रेखा खींचिए।
2) 0 से 8 भाग दायीं ओर चलें।
3) अब 8 से 5 भाग बायीं ओर चलें। (घटाने के लिए बायीं ओर चलेंगे)
4) चूंकि आप की स्थिति 0 से 3 भाग दायीं ओर है, अतः 8 – 5 = 3 होगा।

सोचिए, छोटी संख्या से बड़ी संख्या घटाने पर भी क्या हमें पूर्ण संख्या मिलेगी?

vH;kl 2-2

संख्या रेखा बनाकर निम्नलिखित उदाहरणों की जांच करें।

(i) 6–2 (ii) 7 – 4 (iii) 8 – 3

3- i.kZ la[;kvksa dk x.kk

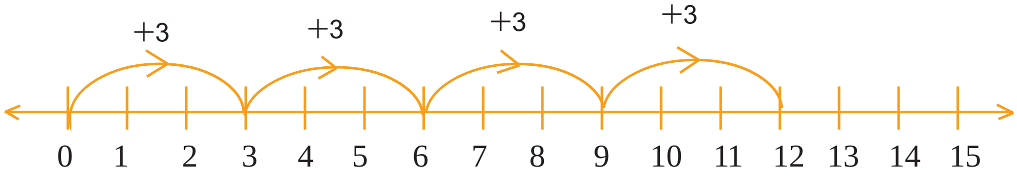
संख्या रेखा पर पूर्ण संख्या के गुणा को दर्शाया जा सकता है।

जैसे : 3 x 4 = 12 या 3 + 3 + 3 + 3 = 12

गुणा किसी संख्या को बार–बार जोड़ने की प्रक्रिया है। आइए, इसे संख्या रेखा पर करके देखें।

fØ;kdyki 3-

1) सर्वप्रथम संख्या रेखा खींचिए।



चित्र 5

0 से 3–3 के खाने बनाकर चार बार आगे बढ़ें इस प्रकार आप 0 से 3, 3 से 6, 6 से 9 तथा 9 से 12 पर पहुंचते हैं।

अतः 3 x 4 = 12

vH;kl 2-3

1. संख्या रेखा पर निम्नलिखित प्रश्नों को दर्शाइए।

(i) 4 x 3 (ii) 3 x 2 (iii) 0 x 2

(iv) 2 x 3 (v) 3 x 3

4- i.k l[;kvk dk Hkkx

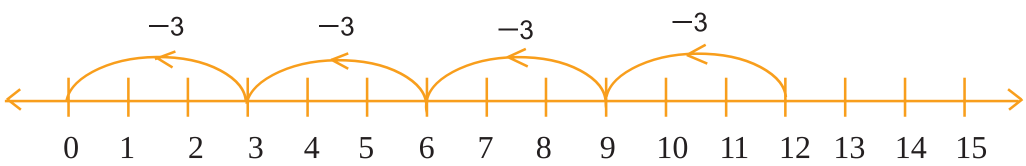
क्या आप बता सकते हैं कि यदि 12 से 3–3 के खाने बनाकर कितनी बार बायीं ओर चलें कि 0 प्राप्त हो जाए। इस क्रिया को करने के लिए आइये, एक क्रियाकलाप करते हैं :

fØ;kdyki 4-

आप जानते हैं कि भाग बार–बार घटाने की प्रक्रिया है।

अतः 12 ÷ 3 में,
12 – 3 = 9 (एक बार)
9 – 3 = 6 (दो बार)
6 – 3 = 3 (तीन बार)
3 –3 = 0 (चार बार)

12 से 3–3 खाने बनाकर बांयी ओर चार बार चलने पर शून्य पर पहुंचते हैं।
अतः 12 ÷ 3 = 4



चित्र 6

क्या आप संख्या रेखा पर दर्शाकर जाँच सकते हैं कि 8 को 3 से पूर्णतः भाग दिया जा सकता अथवा नहीं?

vH;kl 2-4

1. निम्नलिखित पूर्ण संख्याओं का भाग संख्या रेखा पर दिखाइए।

   (i) 8 ÷ 2 (ii) 8 ÷ 4 (iii) 8 ÷ 1 (iv) 8 ÷ 8

LFkkuh; eku

गणना के लिए 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 दस अंकों का प्रयोग किया जाता हैं। इस प्रणाली को दाशमिक प्रणाली कहते हैं। दा ामिक प्रणाली में दहाई की संख्या का स्थानीय मान इकाई की संख्या के स्थानीय मान का 10 गुणा, सैकड़ा की संख्या का स्थानीय मान दहाई की संख्या के स्थानीय मान का 10 गुणा तथा हजार की संख्या का स्थानीय मान सैकड़ा की संख्या के स्थानीय मान का 10 गुणा हैं। इससे आगे भी इसी प्रकार संख्या पद्धति में और बड़ी संख्याओं तक पहुंचते हैं।

जैसे : 769 = 7 x 100 + 6 x 10 + 9 x 1

769 में स्थानीय मान क्रमशः 700, 60, और 9 है –

स्थान	सैकड़ा	दहाई	इकाई
स्थानीय मान	7 x 100 = 700	6 x 10 = 60	9 x 1 = 9

यही कारण है कि 769 को 700 + 60 + 9 के विस्तारित रूप से दिखाते हैं।

mnkgj.k 1-

संख्या 4579 में 5 का स्थानीय मान बताइये।

gy %

यहां दी गयी संख्या 4579 में 5 सैकड़ा के स्थान पर है।

अतः 5 का स्थानीय मान = 5 x 100 = 500

mnkgj.k 2-

संख्या 3214 में सभी अंकों के स्थानीय मान लिखकर इसके सत्यता की जांच कीजिए।

gy %

संख्या 3214 में 4 इकाई के स्थान पर हैं, इसी प्रकार 1 दहाई, 2 सैकड़ा, व 3 हजार के स्थान पर है।

4 का स्थानीय मान = 4 x 1 = 4

1 का स्थानीय मान = 1 x 10 = 10

2 का स्थानीय मान = 2 x 100 = 200

3 का स्थानीय मान = 3 x 1000 = 3000

जाँच : 3214 = 3000 + 200 + 10 + 4 = 3214

mnkgj.k 3-

393237310 की परवर्ती (आगे की) संख्या ज्ञात कीजिए।

gy %

393237310 की परवर्ती संख्या

= 393237310 से 1 अधिक

= 393237311

mnkgj.k 4-

393237310 की पूर्ववर्ती (पीछे की) संख्या ज्ञात कीजिए।

gy %

= 393237310 से एक कम

= 393237309

iz'ukoyh 2-1

1. सबसे छोटी प्राकृत संख्या कौन सी है?
2. कौन सी पूर्ण संख्या प्राकृत संख्या नहीं है?
3. वह पूर्ण संख्या बताइए जो 5 की पूर्ववर्ती है?
4. 45 की अगली तीन क्रमागत संख्याएँ लिखिए?
5. 41608 तथा 41806 में कौन सी संख्या बड़ी है?
6. नीचे दिए गए कथन सत्य है या असत्य पहचानिए :
   - (i) सबसे छोटी प्राकृत संख्या शून्य है । (. . . . . . .)
   - (ii) सबसे छोटी पूर्ण संख्या शून्य है । (. . . . . . .)
   - (iii) किसी प्राकृत संख्या में उसी प्राकृत संख्या को घटाने से शेषफल शून्य मिलता है। (. . . . . . .)
   - (iv) 4215 में 2 का स्थानीय मान 200 है। (. . . . . . .)
   - (v) 4215 में 2 का अंकित मान 2 है। (. . . . . . .)
   - (vi) सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं बताई जा सकती है। (. . . . . . .)
   - (vii) 3857 में 8 हजार के स्थान पर है। (. . . . . . .)
   - (viii) 41 एवं 50 के बीच 9 पूर्ण संख्याएँ हैं। (. . . . . . .)
7. निम्नलिखित संख्याओं की पूर्ववर्ती संख्याएँ लिखिए –

   (i) 25 (ii) 79 (iii) 520 (iv) 1100 (v) 52332

8. निम्नलिखित संख्याओं की परवर्ती संख्याएँ लिखिए –

   (i) 25 (ii) 520 (iii) 1100 (iv) 52332

9. छः अंकों की सबसे छोटी पूर्ण संख्या लिखिए।
10. पाँच अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण संख्या लिखिए।
11. पाँच अंकों की सबसे बड़ी व छः अंकों की सबसे छोटी पूर्ण संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।
12. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते क्रम में लिखिए।

    252, 557, 18, 421, 497, 731

13. निम्नलिखित संख्याओं को घटते क्रम में लिखिए।

    225, 458, 69, 59, 617

14. निम्नलिखित में कौन सी संख्या सात लाख पांच हजार छः है ?

    (i) 750006 (ii) 705006 (iii) 7005006 (iv) 750006

15. 6 x 1000 + 3 x 100 + 8 x 10 + 7 x 1 को एक संख्या के रूप में लिखिए।
16. संख्या रेखा पर द ार्इये कि नीचे दिये गये हल सही हैं।

(i)	a.	4 + 3 = 7	b.	3 + 4 = 7
	c.	0 + 2 = 2	d.	2 + 0 = 2
	e.	4 + 3 = 3 + 4 की जांच करें।		
(ii)	a.	4 – 3 = 1	b.	7 – 4 = 3
	c.	6 – 2 = 4	d.	10 – 5 = 5
	e.	5 – 2 व 2 – 5 की जांच करें।		
(iii)	a.	2 x 3 = 6	b.	3 x 2 = 6
	c.	2 x 5 = 10	d.	5 x 2 = 10
(iv)	a.	6 ÷ 2 = 3	b.	8 ÷ 4 = 2

आप जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल हमेशा एक पूर्ण संख्या होती है, यह पूर्ण संख्याओं का योग के लिए **lojd fu;e** है।

यदि पूर्ण संख्याओं का गुणनफल हमेशा पूर्ण संख्या हो तो पूर्ण संख्याएँ गुणा के लिए संवरक नियम का पालन करती हैं। इसी प्रकार यदि दो पूर्ण संख्याओं का भागफल सदैव पूर्ण संख्या हो तो वह भाग के लिए तथा यदि दो पूर्ण संख्याओं का अंतर सदैव पूर्ण संख्या हो तो वह घटाने के लिए संवरक नियम का पालन करेगी।

आइये, नीचे दिये गये क्रियाकलाप से देखे कि पूर्ण संख्याएँ किन–किन संक्रियाओं के लिए संवरक नियम का पालन करती हैं।

fd;kdyki 5-

आपको कुछ संख्याओं की सारणी दी गई है। सारणी में पहली पंक्ति में जिस प्रकार सभी खानों को भरा गया है, बाकी पंक्तियों को उसी प्रकार भरिए। क्रमांक 8 के बाद आप स्वयं संख्या लिखकर पंक्ति के सभी रिक्त खानों को भरें।

Ø- l-	igyh i.k l-	nl jh i.k l-	igyh i.k l[;k $ nl jh i.k l[;k	;kxQy i.k l[;k g@ugh g	igyh i.k l[;k & nl jh i.k l[;k	vUrj i.k l[;k g@ugh g	igyh i.k l[;k × nl jh i.k l[;k	x.kuQy i.k l[;k g@ugh g	igyh i.k l[;k ÷ nl jh i.k l[;k
1	3	12	3 + 12 = 15	है	3 – 12 = ?	नहीं है	3 x 12 = 36	है	3 ÷ 12 = ?
2.	39	13							
3	5	0							
4	0	8							
5	11	15							
6	99	1							
7	27	9							
8	111	11							
9									
10									
11									
12									

उपरोक्त सारणी को देखकर बताइए कि किन–किन संक्रियाओं का परिणाम हमेशा पूर्ण संख्या है एवं किन–किन का परिणाम हमेशा पूर्ण संख्या नहीं है, यह भी सोचिए कि इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?

स्पष्ट है कि दो पूर्ण संख्याओं को यदि जोड़ा जाए तो उनका योगफल हमे ॥ पूर्ण संख्या होता है एवं दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी सदैव पूर्ण संख्या होता है। परंतु दो पूर्ण संख्याओं का अंतर एवं भागफल सदैव पूर्ण संख्या नहीं होता है। अतः पूर्ण संख्याएं योग एवं गुणा के लिए संवरक नियम का पालन करती है, परंतु घटाने एवं भाग की प्रक्रिया के लिए संवरक नियम का पालन नहीं करती।

;kx lfØ;k dh vU; fo'k"krk

मान लीजिए कि तीन मित्र अ, ब, और स हैं।

पहले अ तथा ब मिलते हैं और फिर मिलकर वे स से मिलते है अथवा ब तथा स पहले मिलकर फिर अ से मिलें, इन दो प्रकार से मिलने में क्या अन्तर है ? क्या दोनों स्थितियां समान हैं ?

दोनों ही स्थितियों में अन्त में अ, ब और स एक साथ मिल रहे हैं। जब दोनों परिस्थितियों में एक ही बात हो तो गणित में इस नियम को **lkgp;Z fu;e** कहते हैं। क्या साहचर्य का नियम पूर्ण संख्याओं के जोड़ के लिए सत्य है? आइये, एक उदाहरण देखें।

मान लीजिए 3, 4, 5 कोई तीन पूर्ण संख्याएँ हैं

पहले (3 + 4) का योग करें एवं योगफल में 5 जोड़ें तो (3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12 आएगा।

अब 3 में (4 + 5) का योगफल जोड़ें तो 3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12 आएगा।

क्या दोनों स्थितियों में योगफल समान है ?

fØ;kdyki 6-

इसकी जाँच निम्न संख्याओं के लिए करके देखें :

1. 2, 3, 4
2. 6, 7, 8
3. 0, 1, 2
4. 4, 13, 17, 20

क्या घटाने की क्रिया में भी यह संबंध लागू होगा ?

क्या (13 – 6) – 5 = 13 – (6 – 5) होगा, जाँच करें?

आप पाते हैं, कि घटाने में साहचर्य के नियम का पालन नहीं होता है।

तीन–तीन उदाहरण लेकर जोड़ व घटाने के लिए साहचर्य के नियम की जांच करें।

vH;kl 2-5

1. रिक्त खंड में उचित पूर्ण संख्या भरिए –

1. (4 + 6) + 5 = ☐
2. 4 + (6 + 5) = ☐
3. 12 +(6 + ☐) = 20
4. (☐ + 6) + 2 = 20
5. (8 + 9) + ☐ = 25
6. (12 + 8) + ☐ = ☐ +(8 + 10)
7. (6 + 2) + ☐ = ☐ + (2 + 3)

x|.ku fØ;k dk v/;;u

(1) निम्नांकित तालिका में रिक्त खंडों को पूर्ण करें

पूर्ण संख्या x पूर्ण संख्या = गुणनफल, पूर्ण संख्या है या नहीं

7	x	9 =	63, पूर्ण संख्या	8	x	12 =	
23	x	15 =		12	x	0 =	
0	x	12 =					

क्या ऐसी कोई दो पूर्ण संख्या सोच सकते हैं जिनका गुणनफल पूर्ण संख्या नहीं है।

fd;kdyki 8-

गुणन संक्रिया ( ) की सहायता से बॉक्स के खंडों में उचित पूर्ण संख्या भरिए। कुछ सवालों के हल बाक्स में पहले सही दिए गये है।

×	0	1	2	3
0	0			
1			2	
2		2		
3				9

Øe fofue; dk fu;e

×

12 x 5 = 60

अब इन संख्याओं का क्रम बदलकर गुणा करने पर ;

5 x 12 = 60

क्या दोनों स्थितिओं में गुणनफल समान हैं ?

यदि 357 x 486 = 173402 हो तो बिना गुणा किए बताइए कि –

486 x 357 = ☐

vH;kl 2-6

1. रिक्त स्थान भरिए –

(i) 87 x 887 = 887 x ☐

(ii) 279 x ☐ = 481 x 279

(iii) 303 x 117 = ☐ x 303

(iv) ☐ x 583 = 583 x 179

lkgp;Z fu;e dh tkp

अभी आपने दो संख्याओं को गुणा करना सीखा। आइये, अब हम तीन संख्याओं को गुणा करके देखें।

2,5 व 6 तीन संख्याओं को लीजिए इन्हें निम्न प्रकार से गुणा करिए एवं गुणनफल बाक्स में भरिए।

2 x (5 x 6)	=	☐	(2 x 5) x 6	=	☐
5 x (6 x 2)	=	☐	(5 x 6) x 2	=	☐
6 x (5 x 2)	=	☐	(6 x 5) x 2	=	☐
2 x (6 x 5)	=	☐	(2 x 6) x 5	=	☐
5 x (2 x 6)	=	☐	(5 x 2) x 6	=	☐
(6 x 2) x 5	=	☐	6 x (2 x 5)	=	☐

क्या सभी खानों में आए गुणनफल अलग–अलग है? यदि नहीं तो, तीन संख्याओं को हम विभिन्न तरीकों से गुणा कर सकते हैं और उत्तर वही आएगा। यही **lkgp;Z dk fu;e** कहलाता है। इसी प्रकार आप भी अन्य तीन संख्याएँ लेकर इस नियम की जांच कीजिए।

vH;kl 2-7

1. निम्नलिखित रिक्त खण्डों की पूर्ति कीजिए –

(i) 4 x (5 x 6) = (4 x ☐) x 6 (ii) 8 x (4 x 2) = ☐ x 2

(iii) 3 x (7 x 5) = (3 x ☐) x 5 (iv) 2 x (8 x ☐) = 8 x (☐ x 4)

(v) 7 x (3 x 5) = 7 x (☐ x 3)

HkkT;] Hkktd] HkkxQy ,oa 'ks"kQy →

यह आप पहले की कक्षाओं में भी कर चुके हैं, आइए, दोहरा लें।

mnkgj.k 1-

20 ÷ 5

5) 20 (4
   20
   00

यहाँ भाजक 5 व भागफल 4 है।

क्या भाज्य, भाजक व भागफल में कोई सम्बन्ध है?

20 = 5 x 4

भाज्य = भाजक x भागफल

mnkgj.k 2-

21 ÷ 5

भाज्य

भाजक 5) 21 (4 भागफल
– 20
1 शेषफल

1. जिस संख्या में भाग दिया जा रहा है भाज्य कहलाता है (21 भाज्य है।)
2. जिस संख्या से भाग दिया जा रहा है भाजक कहलाता है (5 भाजक है।)
3. जितनी बार भाग जाता है भागफल कहलाता है (4 भागफल है।)
4. प्रक्रिया के प चात भाजक से छोटी संख्या बचती है उसे भोशफल कहते है। 1 भोशफल है।

21 = 5 x 4 + 1

अब 22 में 5 का भाग करके देखें।

5) 22 (4
– 20
―――
2

इसमें 5 भाजक, 4 भागफल व 2 शेषफल हैं। भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल के बीच पाए जाने वाले सम्बन्ध को अपनी कॉपी में लिखिए तथा नीचे दिये गए अभ्यास के माध्यम से आपके द्वारा लिखे सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

vH;kl 2-8

Hkkx nhft, &

(i) 48 ÷ 7 (ii)36 ÷ 5 (iii) 78 ÷ 9

इस प्रकार आपने जो संबंध बनाया, वह विभाज्यता के संबंध के नाम से जाना जाता है और जो निम्नानुसार है– **HkkT; = Hkktd × HkkxQy $ 'k"kQy**

क्या शेषफल भाजक से बड़ा हो सकता है ?

vH;kl 2-9

1. नीचे दिये गए रिक्त स्थानों को भरिए –
   (i) 8 ÷ 4 में भागफल = ... शेषफल = ...
   (ii) 5 ÷ 2 में भागफल = ... शेषफल = ...
   (iii) 6 ÷ 4 में भागफल = ... शेषफल = ...
   (iv) 7 ÷ 2 में भागफल = ... शेषफल = ...

'kU; d x.k

आइये, शून्य (0) को जाने –

1. 5 + 0 = 5
2. 0 + 5 = 5
3. 5 – 0 = 5
4. 5 x 0 = 0
5. 0 x 5 = 0
6. 0 ÷ 5 = 0
7. 5 ÷ 0 = कोई हल नहीं

vH;kl 2-10

1. अब निम्न रिक्त स्थानों में उचित संख्याएं भरिए –
   (i) 0 + 0 = ... (ii) 0 – 0 = ...
   (iii) 7 + 0 = ... (iv) 0 + 7 = ...

(v) 7 − 0 = ... (vi) 7 x 0 = ...

(vii) 0 x 7 = ... (viii) 0 ÷ 7 = ...

उक्त अभ्यास से आप शून्य ''0'' के निम्न गुण समझ गये होंगे।

1. ''0'' को किसी भी पूर्ण संख्या से जोड़ा जाये तो संख्या के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसलिए शून्य (0) को **;kT; rRled vo;o** कहते हैं। चार उदाहरण सोच कर लिखें।
2. ''0'' को किसी भी पूर्ण संख्या से घटाया जाये तो भी पूर्ण संख्या के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसके भी 4 उदाहरण लिखें।
3. ''0'' को किसी भी पूर्ण संख्या से गुणा किया जाये तो गुणनफल शून्य ''0'' ही प्राप्त होता है।
4. ''0'' में किसी भी पूर्ण संख्या का भाग दिया तो भागफल ''0'' शून्य ही प्राप्त होता है।

5 ÷ 0 = ? शून्य को 5 में से बार–बार घटाने पर 5 ही मिलता है। कितनी भी बार हम घटाएं कभी भी संख्या नहीं बदलेगी। अर्थात् पूर्ण संख्या में शून्य का भाग देने पर कोई निश्चित संख्या भागफल के रूप में नहीं मिलती। इसी प्रकार **0 » 0 Hkh ifjHkkf"kr ugh gA** इस पर अपने शिक्षक से चर्चा करें।

i!'ukoyh 2-2

ekf[kd i!'u %

1. निम्न प्रश्नों को दी गई जानकारी के आधार पर बिना गुणा या योग किये हल कीजिए:

28PF7L

1.	17 x 23 = 391	तो	23 x 17 =
2.	15 + 25 = 40	तो	25 + 15 =
3.	40 + 0 = 40	तो 8	70 +6 40 =
4.	39 x 1 = 39	तो	31 x 39 =
5.	a x b = c	तो 6	b x7 a =

2. निम्नलिखित सवालों को ऐसे क्रम में लिखकर योगफल ज्ञात कीजिए, जिससे योग की संक्रिया आसान हो जाए।

(i) 23589 + 411 + 1248 (ii) 32 + 2546 + 68 + 544

(iii) 247 + 376 + 153 (iv) 143 + 456 + 857

(v) 32958 + 5000 + 12042

3. किसी भी राि ा में भून्य का गुणा करने से कौन सी पूर्ण संख्या प्राप्त होती है?
4. योग के लिए संवरक नियम क्या है ?
5. संक्रियाओं के गुण के आधार पर निम्नलिखित खाली स्थानों की पूर्ति कीजिए?

(i) 2376 + 4559 = ... + 2376

(ii) 1 x 0 = 0 x 1 =. . . . . .

(iii)

− □ □

□

6. ऐसी कौनसी संख्या है जिसमें उसी संख्या का भाग देने पर वही संख्या प्राप्त होती है?
7. 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या और 1 अंक की सबसे छोटी पूर्ण संख्या का गुणनफल बताइए?
8. यदि 76 x 16 = 1216 हो तो 1216 76 = 16 (बाक्स में सही मान भरिये)

fyf[kr iz'u %

9. रमा ने 17 पंक्तियों में कुल 544 पौधों की रोपाई की तो बताइए कि प्रत्येक पंक्ति में कितने पौधों की रोपाई की गई?

10. किसी शहर में 15 व्यक्तियों में से 1 व्यक्ति सरकारी नौकरी करता है यदि उस शहर में 1354 व्यक्ति सरकारी नौकरी करते हों तो शहर की कुल जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

11. भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए? तथा विभाज्यता के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

    (i) 7772 ÷ 36 (ii) 12425 ÷ 835 (iii) 92845 ÷ 300

12. निम्नलिखित में प्रत्येक रिक्त स्थान पर उपयुक्त अंक लिखिए?

(i)
$$\begin{array}{r} 7\;\;3\;\boxed{5} \\ -\boxed{4}\;\boxed{2}\;\boxed{} \\ \hline \boxed{}\;\boxed{}\;6 \\ \hline \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} \boxed{4}\;\boxed{9}\;3\;\;1 \\ -\;\boxed{}\;\boxed{}\;\boxed{7}\;\boxed{8} \\ \hline 1\;\;8\;\boxed{}\;\boxed{} \\ \hline \end{array}$$

13. मंजुलता 1800 रूपये लेकर बाजार गयी। 135 रूपये का एक पर्स, 75 रूपये का रूमाल व 1200 रूपये की कपड़े खरीदे। बताइए अब उसके पास कितने रूपये बचे?

14. एक बैंक में अशोक ने मंगलवार को 4539 रूपये जमा किए, भानिवार को 2556 रूपये निकाल लिए और दूसरे सप्ताह में फिर 1431 रूपये जमा किए तो बताइए कि उसके खाते में अब कितने रूपये शेष हैं ?

15. आदर्श विद्यालय के 6 वीं कक्षा में एक विद्यार्थी का शुल्क 95 रूपये है यदि छात्रों की कुल संख्या 335 हो तो कुल शुल्क ज्ञात कीजिए ?

16. 117 को दो संख्याओं के गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए जिसमें से एक संख्या 13 है ?

17. निभाा ने 24 रेडियो 18720 रूपये में खरीदे। एक रेडियो का मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि प्रत्येक का मूल्य समान हो ?

18. दिए गए जादुई वर्ग की तीन–तीन संख्याओं को सीधा, तिरछा एवं आड़ा जोड़ कर बताइए। क्या प्रत्येक स्थिति में योगफल समान आता है ?

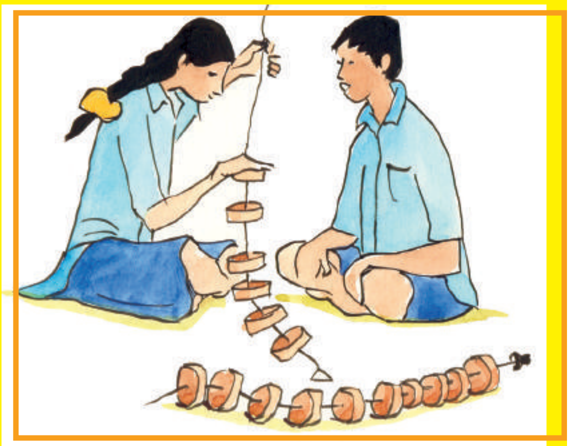
14	1	9
3	8	13
7	15	2

19. नीचे दिए गए जादुई वर्ग के रिक्त वर्गों की पूर्ति कीजिए। ध्यान रहे मैजिक वर्ग के स्तंभों, पंक्तियों एवं विकर्णों का योग हर तरह से बराबर होता है?

9		6	13	20
	10	12	19	
9	11	18	25	
15	17	24	26	
16			7	14

geu lh[kk

1. 0 (शून्य) एक पूर्ण संख्या है।
2. दो पूर्ण संख्याओं का आपस में योग करने से या गुणा करने से पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है।
3. पूर्ण संख्याओं के लिए क्रमविनिमय का नियम, योग एवं गुणन संक्रिया में लागू होता है। जबकि घटाने एवं भाग संक्रिया में लागू नहीं होता।
4. पूर्ण संख्याओं के लिए साहचर्य नियम योग एवं गुणन संक्रिया में लागू होता है जबकि घटाने एवं भाग संक्रिया में लागू नहीं होता।

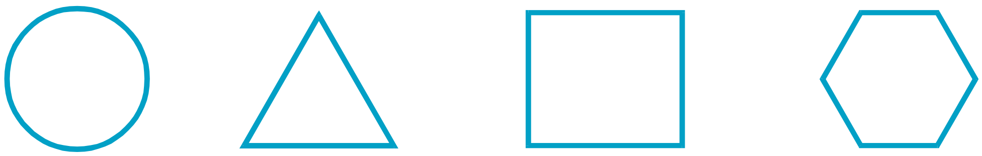


5. 0 को योज्य तत्समक अवयव कहते है।
6. 1 को गुणन तत्समक अवयव कहते हैं।
7. किसी भी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ने या घटाने पर संख्या का मान नहीं बदलता।
8. किसी भी पूर्ण संख्या में 1 का गुणा करें तो संख्या का मान नहीं बदलता है।
9. यदि किसी पूर्ण संख्या में 0 का गुणा करें तो उसका मान शून्य हो जाता है।
10. किसी पूर्ण संख्या में 0 से भाग देना अपरिभाषित है।
11. भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

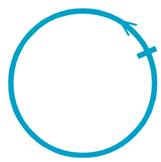
3
रेखाखण्ड

28YB99

गणित पढ़ते हुए आपने पहले भी कई प्रकार की आकृतियाँ देखी हैं, जैसे– वृत्त, त्रिभुज, चतुर्भुज इत्यादि।



क्या आप अपनी कॉपी पर एक वृत्त बना सकते हैं?



चित्र–1

आप के द्वारा बनाए गए वृत्त पर यदि आप पेंसिल घुमाएँ तो आप पाते हैं कि–

1. किसी बिन्दु से प्रारम्भ कर आप पुनः उसी बिन्दु पर पहुँच जाते हैं।
2. किसी बिन्दु से प्रारम्भ कर पुनः उसी बिन्दु पर पहुँचने तक आपको आकृति के किसी भी भाग पर दो बार चलना नहीं पड़ा।

ऐसी आकृतियाँ जिनमें उपरोक्त दोनों विशेषताएँ पाई जाती है **''बन्द आकृति''** कहलाती है।

अब एक और आकृति देखिए–

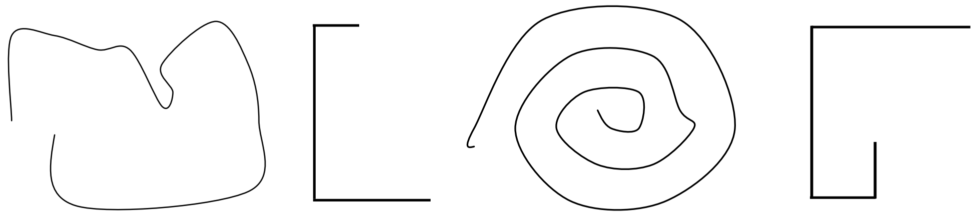
P

चित्र–2

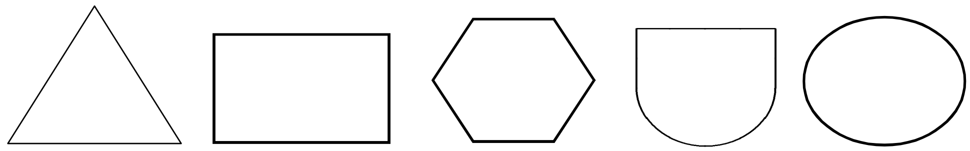
क्या P एक बंद आकृति है?

नहीं, क्योंकि P के किसी बिन्दु से प्रारंभ कर बिना पेंसिल उठाए उसी बिन्दु पर वापस पहुँचने के लिए आपको किसी न किसी भाग से दो बार गुजरना पड़ेगा।

दी गई आकृतियों में खुली तथा बंद आकृतियों को पहचानिए तथा यह भी बताइए कि वे सीधी रेखाओं, वक्र रेखाओं या दोनों प्रकार की रेखाओं से बनी हैं।



चित्र–3 चित्र–4 चित्र–5 चित्र–6



चित्र–7 चित्र–8 चित्र–9 चित्र–10 चित्र–11

इसका विवरण निम्नलिखित सारणी में लिखिए:

चित्र क्रं.	बंद आकृति / खुली आकृति	किस प्रकार की रेखाओं से बनी है। सीधी / वक्र / दोनों प्रकार की
3	खुली आकृति	वक्र रेखा
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

क्या आप अपने आस पास दिखाई देने वाली ऐसी आकृतियों की सूची बना सकते हैं, जो सीधी एवं वक्र रेखाओं से मिलकर बनी हों ?

आपने अब तक दो प्रकार की रेखाओं का उपयोग किया है। जिसमें से एक तो वक्र रेखा है या जिसे हम टेढ़ी–मेढ़ी रेखा भी कह सकते हैं तथा दूसरी सरल रेखा है जिसके बारे में आपने पिछली कक्षाओं में भी पढ़ा है। आइए, सरल रेखा के बारे में कुछ और जानकारी प्राप्त करें।

सरल रेखा खींचना तो आप सभी को आता है। क्या आप बोर्ड पर एक आड़ी सरल रेखा खींच सकते हैं ? यह सरल रेखा उतनी ही लम्बी होगी जितना लम्बा वह बोर्ड है जिस पर आपने सरल रेखा खींची है। अब मान लें कि बोर्ड की लम्बाई दुगुनी बढ़ा दी जाए तो सरल रेखा भी दुगुनी बढ़ाई जा सकती है। यदि बोर्ड को आगे, आगे और आगे बढ़ाते जाएँ तो सरल रेखा भी आगे, आगे और आगे बढ़ाई जा सकती है। इस प्रकार हम सरल रेखा को दोनों ओर इतना बढ़ा सकते हैं कि जिसका कोई ओर छोर न हो। **अतः सरल रेखा ऐसी सीधी रेखा है जिसको दोनों ओर कितना भी बढ़ाएँ कभी खत्म नहीं होगी।**

क्या आप अपनी कॉपी पर एक सरल रेखा खींच सकते हैं ?

यदि खींच सकते हैं तो खींचने का तरीका और यदि नहीं खींच सकते हैं तो नहीं खींच पाने का कारण लिखिए।

आपने सरल रेखा खींचने की कोशिश कर यह पाया कि आप उतनी ही लम्बी सीधी रेखा खींच सकते

हैं जितनी लम्बी आपकी कॉपी है, परंतु सरल रेखा तो ऐसी रेखा है जो कभी खत्म ही नहीं होती, इसे कॉपी में खींचा तो नहीं जा सकता, केवल संकेत के रूप में बताया जा सकता है। क्या आप ऐसा कोई सुझाव दे सकते हैं जिससे सरल रेखा को कॉपी में बनाया जा सके?

आपके सुझाव :–

....

संकेत का उपयोग कर सरल रेखा खींचनाः

चित्र–12

चित्र–12 में एक सरल रेखा खींची गई है, जिसके दोनों छोर पर तीर के निशान लगे हुए हैं।

दोनों तरफ तीर के निशान यह संकेत देते हैं कि सरल रेखा का कोई अंतिम बिंदु नहीं होता, वह समाप्त नहीं होती, वह चलती रहती है।

इसी प्रकार यदि किसी स्थिर बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींची जाए जो एक तरफ बढ़ती ही रहे और कहीं भी समाप्त न हो तो इसे किरण कहते हैं। अपनी कॉपी में किरण खींचिए तथा किरण को खींचने का तरीका भी लिखिए।

चूंकि किरण एक निश्चित बिन्दु से प्रारम्भ होकर आगे–आगे और आगे बढ़ती जाती है इसलिए किरण को एक तरफ तीर के निशान लगाकर दर्शाते हैं।

बिन्दु O से प्रारंभ होती हुई किरण

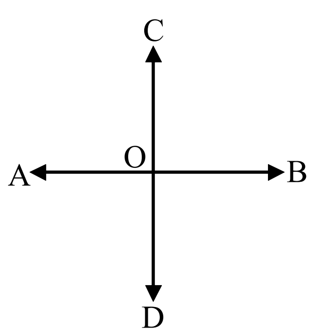
चित्र–13

ऐसी सीधी रेखा जो एक बिंदु से प्रारंभ होकर एक ही ओर बढ़ती जाती है, उसे **किरण** कहते हैं। इसकी कोई निि चत लंबाई नहीं होती है।

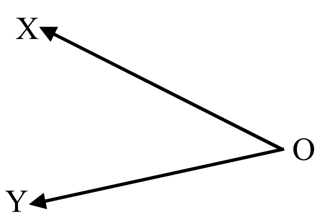
आप दैनिक जीवन में किरण के अन्य उदाहरण सोचें एवं लिखें।

✍ क्रियाकलाप 1.

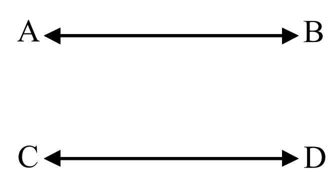
क्या आप निम्नलिखित चित्रों में किरणों एवं सरल रेखाओं को पहचान सकते हैं?



चित्र–14



चित्र–15



चित्र–16

पहचान कर लिखिए।

क्रियाकलाप 2.

नीचे आपको और दो बिन्दु दिए गए हैं। आप P बिन्दु से गुज़रने वाली कितनी सरल रेखा खींच सकते हैं, खींच कर देखिए। उसी प्रकार Q बिन्दु से कितनी सरल रेखाएँ खींची जा सकती है, कुछ ऐसी रेखाएं खींचिए।

P• •Q

चित्र–17

नीचे दिए गए प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

प्र.1 क्या आप P बिन्दु से खींची गई सरल रेखाओं को गिन सकते हैं ?

————————————————————————————

प्र.2 क्या आप Q बिन्दु से खींची गई सरल रेखाओं को गिन सकते हैं ?

————————————————————————————

प्र.3 आप ऐसी कितनी सरल रेखाएँ खींच सकते हैं जो P एवं Q दोनों बिन्दुओं से होकर गुजरती हों?

————————————————————————————

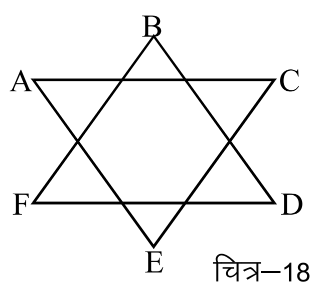
उपर्युक्त क्रियाकलाप से आप यह पाते हैं कि किसी एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती है। परन्तु, दो बिन्दुओं से होकर मात्र एक ही सरल रेखा खींची जा सकती है।

रेखाखंड

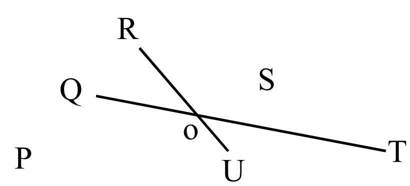
इस चित्र को देखें। इसे बनाने में जिन सीधी रेखाओं का उपयोग किया जाता है वे किसी एक निश्चित बिन्दु से प्रारंभ होकर दूसरी नि चत बिन्दु पर समाप्त होती हैं। ऐसी रेखाओं को रेखाखंड कहते हैं। इस प्रकार रेखाखंड एक सरल रेखा अथवा किरण का एक भाग है जिसकी लंबाई मापी जा सकती है।

क्रियाकलाप 3.

चित्र–18 और 19 को देखकर नीचे दिए गए सवालों के जवाब सोचिए–



चित्र–18



चित्र–19

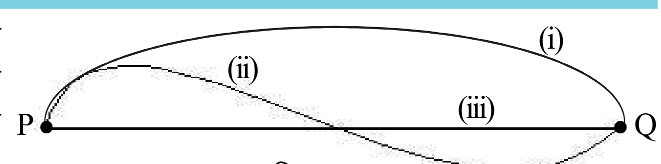
चित्र 18 में रेखाखंडो की पहचान कर उनकी संख्या ज्ञात कीजिए। सभी रेखाखण्डों के नाम भी लिखें।

चित्र 18 व 19 में कटान बिंदुओं की संख्या ज्ञात कीजिए। कौन से रेखाखंड किन कटान बिंदुओं पर एक दूसरे को काटते हैं ?

रेखाखण्ड क्या है ? अपने शब्दों में लिखिए।

क्रियाकलाप 4.

अपनी कॉपी पर दो बिंदु P और Q बनाइये इन बिंदुओं को नीचे दिये गये चित्र में तीन प्रकार से मिलाकर दिखाया गया है, आप इन्हें कुछ और प्रकारों से मिलाने का प्रयास कीजिए।



चित्र–20

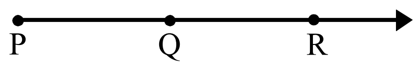
बिंदु P और Q को कई तरह से मिलाया जा सकता है। परन्तु रेखाखंड द्वारा उनको केवल एक ही प्रकार से मिलाया जा सकता है। रेखाखण्ड दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सबसे छोटी रेखा है।

चित्र–21

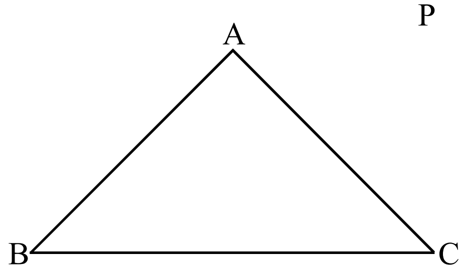
मीना कहती है P से Q तक की सबसे कम दूरी का मार्ग रेखाखंड ही है। क्या आप सहमत हैं? क्यों?

संरेख बिंदु

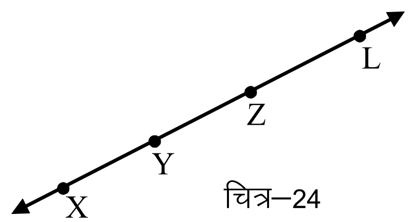
नीचे तल पर स्थित बिंदुओं को देखिए



चित्र–22



चित्र–23



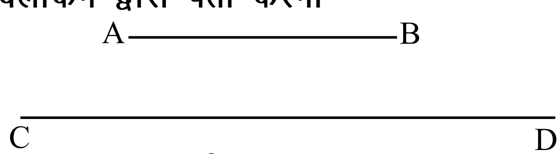
चित्र–24

चित्र–22 में बिंदु P,Q एवं R एक ही किरण पर स्थित हैं। इन्हे संरेख बिंदु कहते हैं।
चित्र–23 में बिंदु A,B एवं C एक ही रेखाखंड पर स्थित नहीं है। ये बिंदु संरेख नहीं हैं? क्यों?
चित्र–24 में बिंदु X, Y, Z एवं L एक ही सरल रेखा पर स्थित हैं। क्या ये संरेख बिंदु हैं?

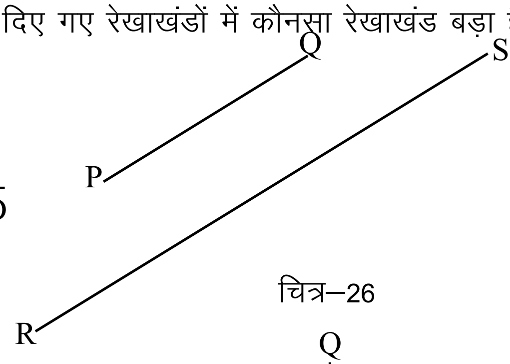
रेखाखंडों की तुलना

दो रेखाखंड की तुलना का अर्थ है पता करना कि दिए गए रेखाखंडों में कौनसा रेखाखंड बड़ा है?

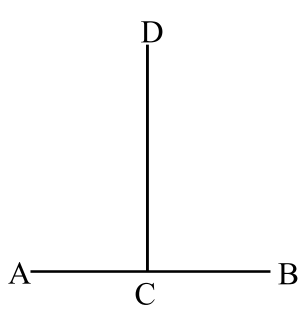
(1) अवलोकन द्वारा पता करना



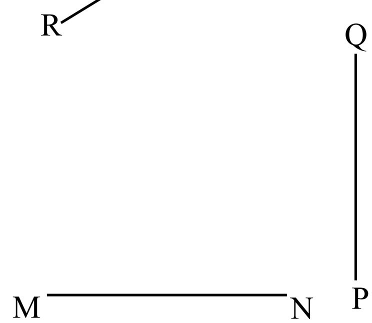
चित्र–25



चित्र–26



चित्र–27

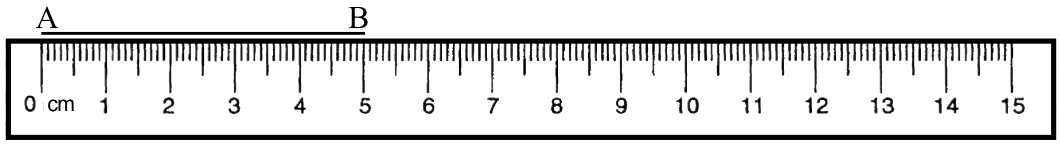


चित्र–28

चित्र 25 एवं 26 में केवल देखकर ही यह बताया जा सकता है कि CD रेखाखंड AB से तथा

RS, रेखाखण्ड PQ से बड़े हैं। अर्थात चित्र 25 में CD>AB तथा चित्र 26 में PQ<RS चित्र 27 और 28 में क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन सा रेखाखंड बड़ा है ? आइए इन्हें नाप कर देखें।

(2) स्केल की सहायता से सही मापन



चित्र–29

उपरोक्त चित्र 29 में AB रेखाखंड को नापते हुए दिखाया गया है।

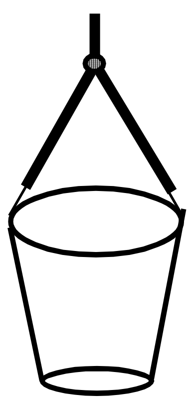
नापने की विधिः

अपनी कॉपी पर एक बिंदु A बनाइए। स्केल को इस प्रकार रखिए जिससे कि स्केल पर बना '0' का निशान बिंदु A पर आए। अब देखें कि रेखा का दूसरा छोर स्केल के किस निशान तक पहुँच रहा है। उपरोक्त चित्र में B, स्केल पर बने निशान 5 पर आ रहा है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि रेखाखंड AB की लम्बाई 5 सेमी है।

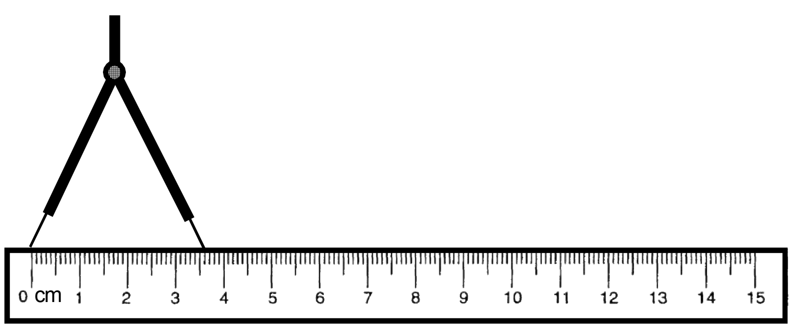
(3) डिवाइडर द्वारा मापन

आपने देखा कि स्केल की सहायता से हम उन रेखाखंडों की लंबाई नाप सकते हैं जहाँ स्केल सीधी रखी जा सकती है। क्या डिब्बे या गिलास के भीतर के दीवारों के बीच की दूरी स्केल की सहायता से नापी जा सकती है ?

एक डिवाइडर लें, उसे गिलास के मुंह पर रख कर इतना फैलाएं कि उसकी नोंक गिलास के भीतरी दीवारों को स्पर्श करे।



चित्र–30



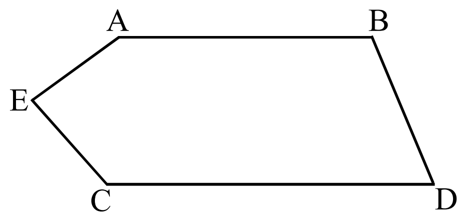
चित्र–31

अब डिवाइडर को बिना दबाए गिलास से बाहर निकालकर स्केल पर चित्र–31 के अनुसार रखें तथा लंबाई ज्ञात करें।

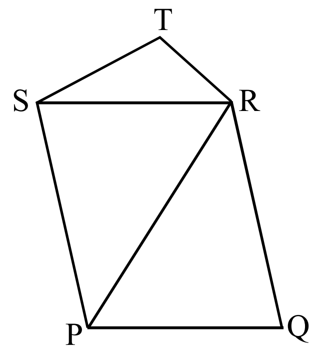
शिक्षक के लिए : यहाँ ध्यान में रखा जाए कि स्केल के किसी भी खंड से लंबाई नापने पर उसकी लंबाई के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। किसी पुराने स्केल का उपयोग करते समय शून्य से शुरू न करने की स्थिति में नाप कैसे पता करेंगे यह चर्चा छात्रों के साथ करें। ऐसे मापने का अभ्यास उन्हें करने को दें।

✍ क्रियाकलाप 5.

निम्न चित्रों में डिवाइडर या परकार की सहायता से रेखाखण्डों को नाप कर तुलना करें। प्रत्येक चित्र के लिए रेखाखण्डो को लम्बाई के बढ़ते क्रम में लिखें।

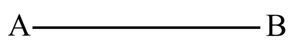


चित्र–32

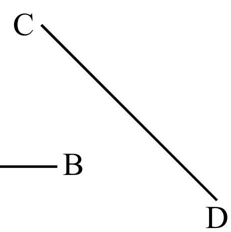


चित्र–33

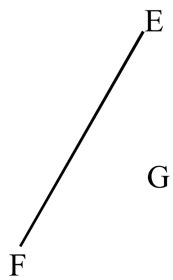
निम्न रेखाखंडों को स्केल एवं परकार की सहायता से नापिए एवं उनके माप लिखिए –



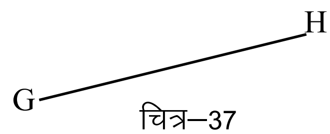
चित्र–34



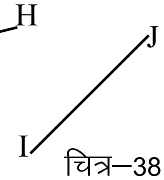
चित्र–35



चित्र–36

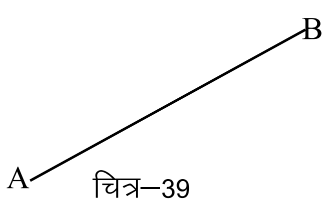


चित्र–37

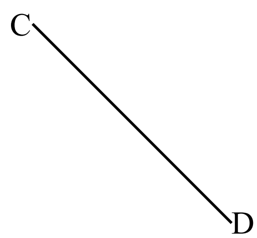


चित्र–38

दो या दो से अधिक रेखाखंडों की लंबाई के योग के बराबर की लंबाई का रेखाखंड खींचना :



चित्र–39



चित्र–40

चित्र–41

चित्र–42

(1) एक सरल रेखा XY खींचिए।

(2) परकार को AB रेखाखंड के माप के बराबर फैलाइए।

(3) रेखा XY पर कोई बिंदु P लेकर व उसे केन्द्र मानकर AB रेखाखंड के बराबर का चाप इस प्रकार काटिए कि वह रेखा XY को Q पर काटे।

(4) CD रेखाखंड के बराबर का चाप Q को केन्द्र मानकर इस प्रकार काटिए कि वह XY रेखा को PQ

दिशा में काटे। माना कि वह बिन्दु R है।

(5) इसी प्रकार EF रेखाखंड के बराबर का चाप Rको केन्द्र मानकर रेखाखंड XY पर काटिए। वह S पर कटता है।

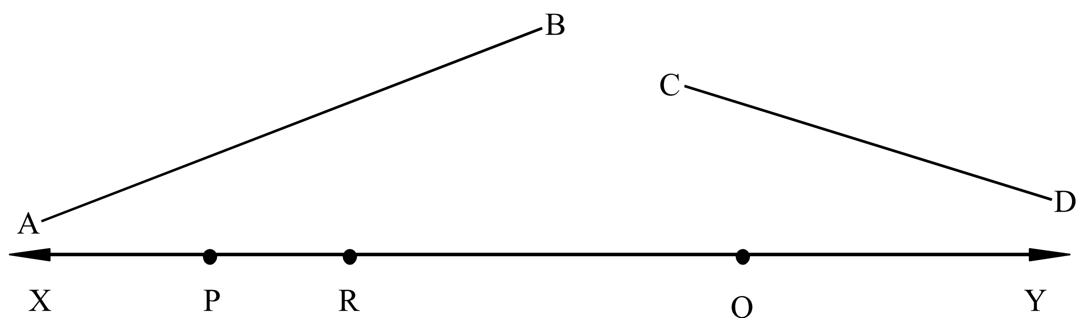
क्या AB = PQ, CD = QR, EF = RS है ? क्यों ? अपनी कॉपी पर लिखिए।

(6) PS=PQ+QR+RS

PS=AB+CD+EF

PS की लंबाई नापिए। PS ही दिए गए रेखाखंडों की लम्बाई के योग के बराबर की लम्बाई का रेखाखण्ड होगा।

रेखाखंडों के अंतर के बराबर रेखाखंड खींचना :



चित्र–43

1. एक सरल रेखा XY खींचिए। उस पर कोई बिन्दु P लिजिए।
2. परकार को बड़ी रेखाखण्ड AB के बराबर फैलाइए।
3. P को केन्द्र मानकर AB के बराबर का चाप रेखा XY पर काटिए। वह Q पर कटता है।
4. बिन्दु Q को केन्द्र मानकर CD के बराबर चाप P की दिशा में रेखा XY पर काटिए।

   वह R पर कटता है। क्या AB=PQ और CD=QR हैं ?

   यदि हैं तो क्यों ? अपनी कॉपी में लिखिए।

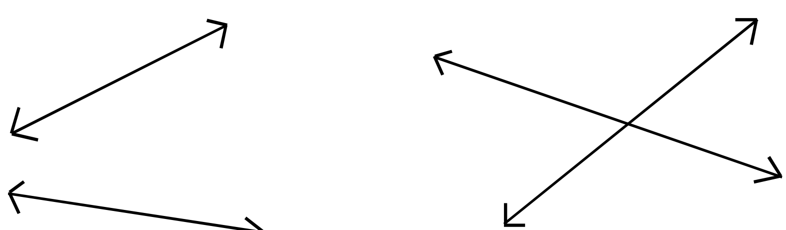
   यहाँ PQ के विपरीत दि ाा में चाप क्यों काटा गया है? योग करते समय चाप एक ही दि ाा में काटे गये थे। कारणों को अपनी कॉपी में लिखिए।
5. PQ-QR=PR

   या AB-CD=PR

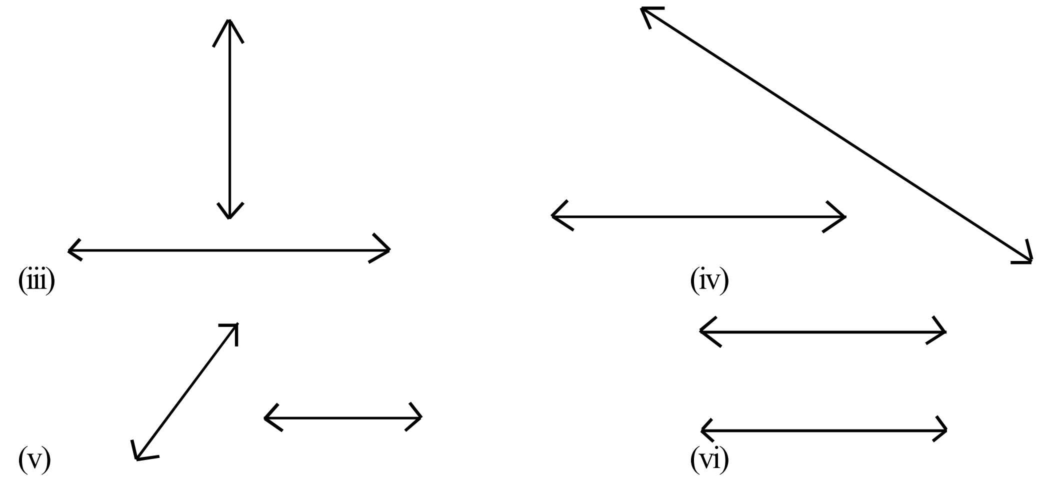
   PR की लंबाई नापिए। PR ही दिए गये रेखाखंडों कें अंतर के बराबर का रेखाखण्ड होगा।

समान्तर रेखाएँ

अध्यापिका ने छठी कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी को अपनी–अपनी कॉपी में दो रेखाएं खींचने को कहा। विद्यार्थियों ने रेखाएं कुछ इस प्रकार खींची:–



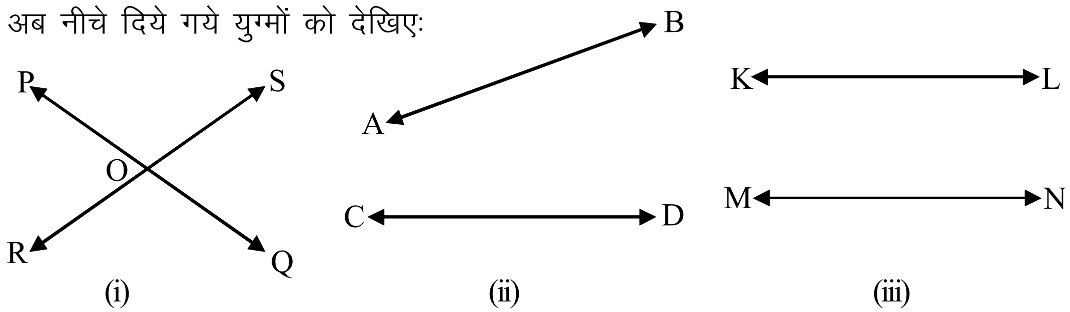
(i) (ii)



चित्र 44

आप भी अपनी कॉपी पर इसी प्रकार दो–दो रेखाओं के अलग–अलग युग्म बनाइए।

अब नीचे दिये गये युग्मों को देखिएः



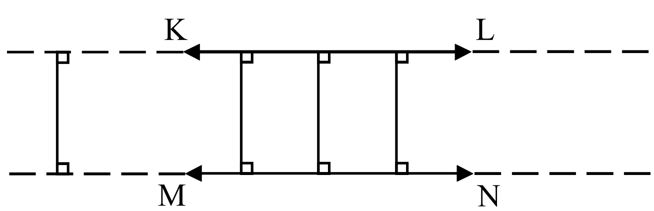
चित्र 45

चित्र 45(i) में रेखाएँ PQ तथा RS बिंदु 'O' पर काटती हैं। अतः रेखाएँ PQ तथा RS प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और बिंदु 'O' उभयनिष्ठ बिंदु (प्रतिच्छेद बिंदु)है।

चित्र 45 (ii) में रेखाएँ AB तथा CD आपस में काट तो नहीं रही है परन्तु यदि दोनों रेखाओं को आगे–पीछे बढ़ाया जाए तो एक दूसरे को काटेंगी। अर्थात् चित्र 45 (ii) भी चित्र 45(i) की श्रेणी में ही आएगा अर्थात् प्रतिच्छेदी रेखाओं की श्रेणी में।

चित्र 45(iii) में रेखाएँ KL तथा MN न ही आपस में काट रही है और न ही बढ़ाने पर आपस में एक–दूसरे को काटेंगी। हम कैसे जांचें कि ये एक दूसरे को नहीं काटेंगी।

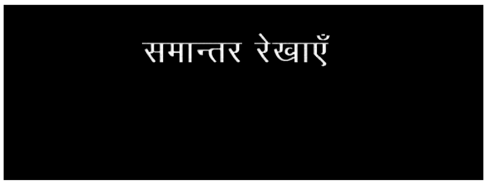
चित्र 45(iii) की रेखाओं को देखिए–

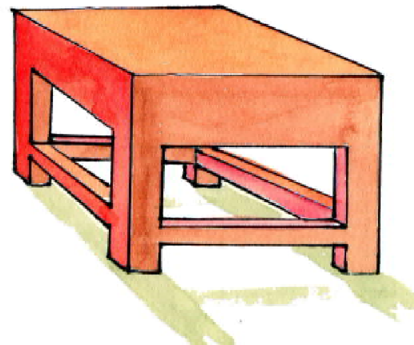


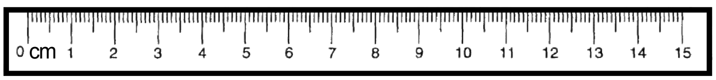
दोनों रेखाएँ KL तथा MN के बीच की लम्बवत् दूरी प्रत्येक बिंदु पर समान है। इन्हें दोनों तरफ कितना भी आगे क्यों न बढ़ाएँ, आप पायेंगे कि इन दोनों के बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान ही रहती है। आप भी डिवाइडर की मदद से दोनों रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी नापकर देखिए। क्या वे समान हैं?

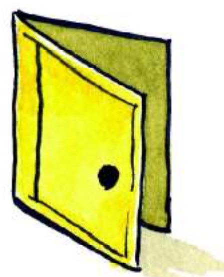
ऐसी रेखाएँ समांतर रेखाएँ कहलाती है। अर्थात् समान्तर रेखाएँ बराबर दूरी पर रहती हैं, न तो वे एक दूसरे के पास आती हैं और न ही दूर जाती हैं।

अपनी कक्षा में बैठे–बैठे आपके चारों तरफ फैली चीज़ों को देखिए। कक्षा का श्यामपट्ट, खिड़की, दरवाज़े, दीवारें, आपका ज्यामिति–बॉक्स, मेज़, पुस्तक, स्केल, आदि के किनारों में आप इस प्रकार की रेखाओं को महसूस कर सकेंगे। जैसे:









इनमें कहाँ–कहाँ हमें समांतर रेखा खण्डों के उदाहरण मिलते हैं

आप अपनी कॉपी में एक सूची बनाइए जिसमें पांच प्रतिच्छेदी रेखाखण्डों तथा पांच समांतर रेखाखंडों के उदाहरण हों।

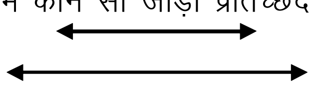
प्रश्नावली 3

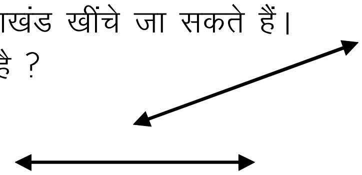
प्रश्न–1 नीचे दिये गये कथन सत्य हैं अथवा असत्य पहचानिए –

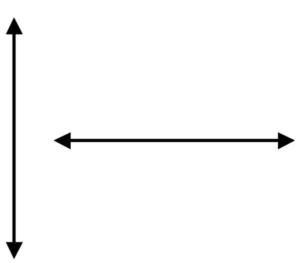
2987AH

(i) एक बिन्दु से असंख्य रेखाखंड खींचे जा सकते हैं।
(ii) दो बिन्दु से गुजरने वाली असंख्य सरल रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
(iii) रेखाखंड की केवल लम्बाई होती है, चौड़ाई नहीं।
(iv) एक रेखाखंड में यदि चार बिन्दु लिए जाएं तो ये सभी बिन्दु संरेख बिन्दु होते हैं।
(v) तीन असंरेख बिन्दु से अधिकतम दो रेखाखंड खींचे जा सकते हैं।

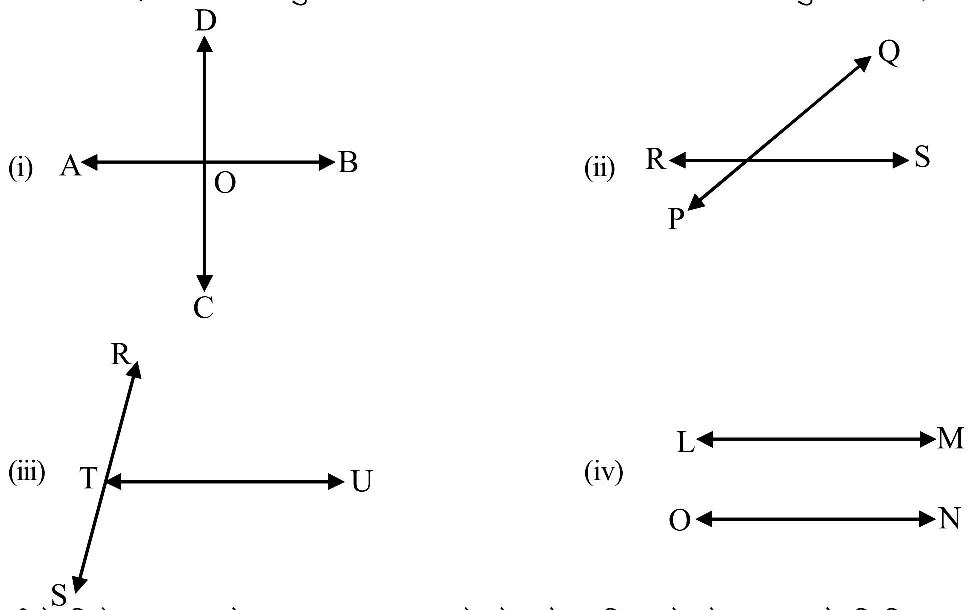
प्रश्न–2 नीचे चित्र में कौन सा जोड़ा प्रतिच्छेदी रेखाओं का नही है ?

(i) 

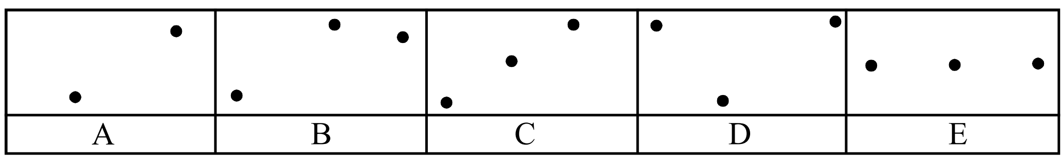
(ii) 

(iii) 

प्रश्न–3 नीचे दी गई रेखाओं के युग्म में से प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं के युग्म छांटिए?



प्रश्न–4 नीचे दिये गए खण्डों (A, B, C, D, E) में से संरेख बिन्दुओं के समूह को लिखिए –

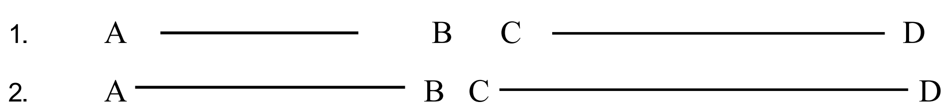


प्रश्न–5 निम्न माप की लम्बाई के रेखाखंड खींचिए?

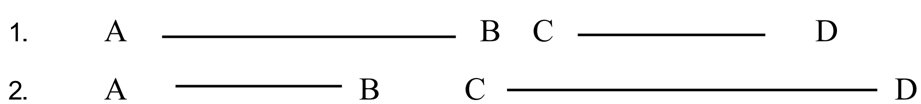
6 सेमी 5 सेमी 4.5 सेमी 2.3 सेमी

प्रश्न–6 एक ही सरल रेखा में 3 सें.मी., 5 सें.मी., 6.5 सें.मी. के तीन रेखाखंड खींचिए?

प्रश्न–7 नीचे रेखाखंड दिये गये हैं इनकी लम्बाई के योग के बराबर रेखाखंड खींचिए?



प्रश्न–8 नीचे दिये गये रेखाखंड की लम्बाई के अंतर के बराबर रेखाखंड खींचिए ?

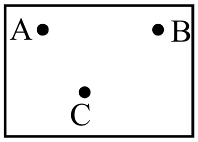


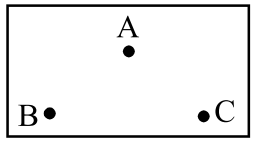
प्रश्न–9 12 सेमी की लम्बाई का रेखाखंड AB खींचकर उसे 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी के तीन रेखाखंड क्रमशः AC, CD एवं DB में विभाजित कीजिए तथा निम्न तथ्यों को सत्यापित कीजिए ?

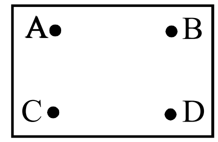
1. AD - AC = CB - DB

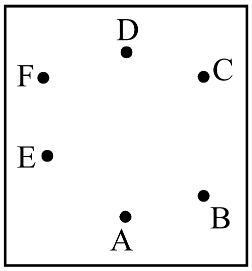
2. AB - CD = AC + DB

प्रश्न–10 इनमें से प्रत्येक परिस्थिति में इन बिन्दुओं से कितने रेखाखण्ड़ खींचे जा सकते हैं। रेखाखण्डों को खींचिए व उनकी संख्याएँ बताइए?

1. 

2. 

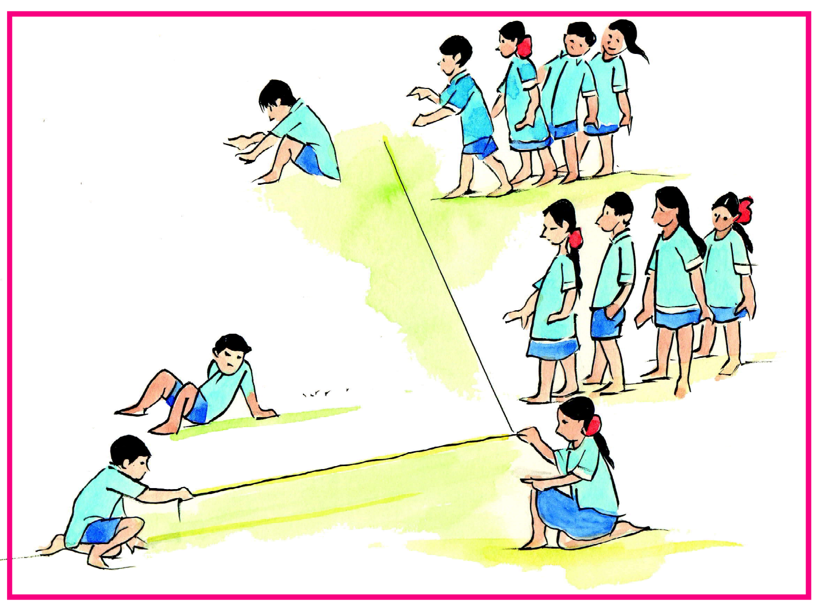
3. 

4. 

5.

हमने क्या सीखा

1. किरण का एक प्रारंभिक बिंदु होता है और वह किसी एक दिशा में लगातार बढ़ती रहती है।
2. सरल रेखा दोनों दिशाओं में लगातार बढ़ती रहती है।
3. रेखाखंड सरल रेखा का एक निश्चित भाग है जिसका प्रारंभिक एवं अंतिम बिन्दु निश्चित होता है, तथा रेखाखंड को नापा जा सकता है।
4. सरल रेखा एवं किरण की लंबाई को मापा नहीं जा सकता।
5. दो रेखाएँ एक दूसरे को अधिकतम एक ही बिंदु पर काटती हैं।
6. एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं तथा एक बिंदु से असंख्य किरणें खींची जा सकती है।



4

i.kkd

29H3CJ

एक दिन कक्षा के सभी छात्रों ने शिक्षक से अनुरोध किया कि वे कोई खेल खेलना चाहते हैं। इस पर शिक्षक ने अपनी स्वीकृति देते हुए कहा ''क्यों नहीं आइए आज संख्याओं से संबंधित खेल खेलें''।

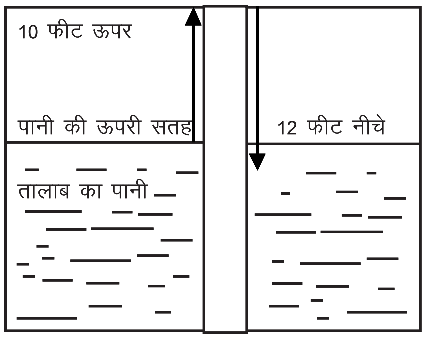
आप सभी अपनी कॉपी में एक अंक की कोई संख्या लिखकर इसे दो से गुणा करें, प्राप्त गुणनफल में से 12 घटाएँ और मुझे उत्तर बताएँ –

funs'k	Qkfrek	deyh	eksu
सोची गई संख्या	7	6	5
2 से गुणा करने पर	7×2=14	6×2=12	5×2=10
प्राप्त गुणनफल में 12 घटाइए	14–12=2	12–12=0	10–12= ?

छात्रों द्वारा किए जाने वाले हल की तीन संभावनाएँ हो सकती हैं :

1. कक्षा के कुछ विद्यार्थियों के परिणाम फातिमा के समान आ सकते हैं।
2. कुछ विद्यार्थियों के परिणाम कमली के समान आ सकते हैं।
3. कुछ विद्यार्थियों की समस्या मोनू के समान हो सकती है, वे संख्या को घटा सकने में असमर्थ रहे हों।

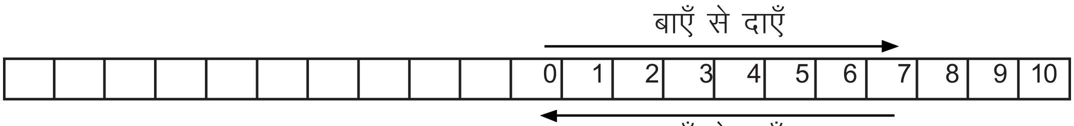
मोनू जैसे अन्य बच्चे भी थे उन सबने कहा, ''हम क्या करें'', शिक्षक ने कहा ''चलिए हम इसे समझने का प्रयास करें।'' ''मान लीजिए कि अपने गांव के तालाब में एक बाँस सीधा गड़ा हुआ है। तालाब का एक कीड़ा बाँस पर पानी के ऊपरी सतह से 10 फीट सीधा ऊपर चढ़ता है, इसके बाद वह कीड़ा वहां से 12 फीट नीचे की ओर आता है।''



चित्र 1

अतः यह स्पष्ट है कि वह कीड़ा पानी की ऊपरी सतह से 2 फीट नीचे है। पानी की सतह को यदि 0 से द ाया जाए तो नीचे के पैमाने को कैसे दिखाएं ?

परंतु मोनू को अब भी यह समझ में नहीं आया की (10–12) किस अंक के बराबर होगा। उसने कहा ''मुझे अभी भी समझ नहीं आया कि क्या करूँ।'' तब ि ाक्षक ने पासा और पट्टी का एक खेल खिलाया। ''हमारे पास एक लम्बी पट्टी है जिसके बीचों बीच 0 लिखा है। 0 के दायीं ओर 10 और बायीं ओर 10 खाने बने हैं। दाँयी ओर के खानों में (चित्र–2) 1 से 10 तक अंक लिखे हैं तथा दो पासे है, एक लाल और दूसरा हरा।



चित्र–2

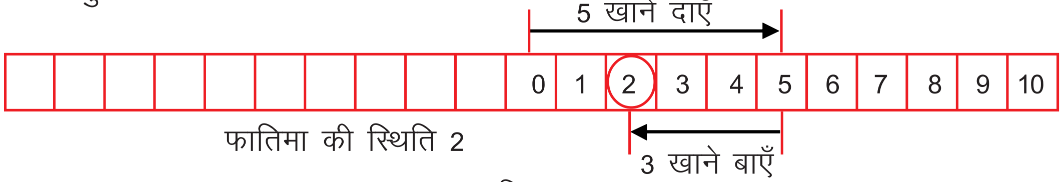
bl [ky e nk 'kr g

पहली:– फेंके गए लाल पासे के ऊपरी फलक पर जितने बिन्दु आएंगे लम्बी पट्टी पर 0 के दायीं ओर उतने ही खानें चलेंगे।

दूसरी:– फेंके गए हरे पासे के ऊपरी फलक पर जितने बिन्दु आएंगे उतने ही खाने पट्टी पर बाँयी ओर चलेंगे। यह चलना उस स्थान से प्रारंभ करेंगे जहाँ लाल पासे के कारण दाहिने ओर चलकर पहुँचे थे।

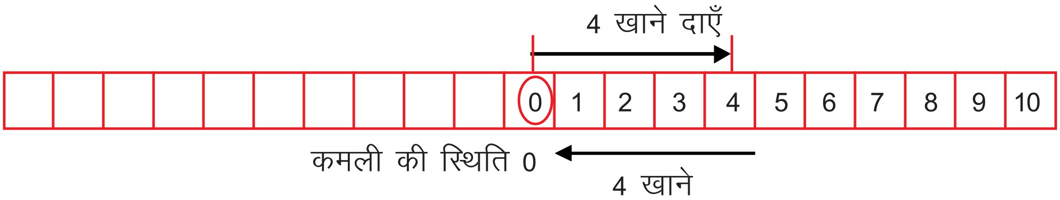
[ky vkjEHk gkrk g

सबसे पहले पासा फातिमा फेंकती है। फातिमा के लाल पासे पर 5 तथा हरे पर 3 बिन्दु आए। शर्त के अनुसार फातिमा शून्य से दाहिने ओर 5 खाने चलेगी और 3 खाने वापस आएगी। उसकी स्थिति नीचे चित्र 3 के अनुसार 2 पर है–



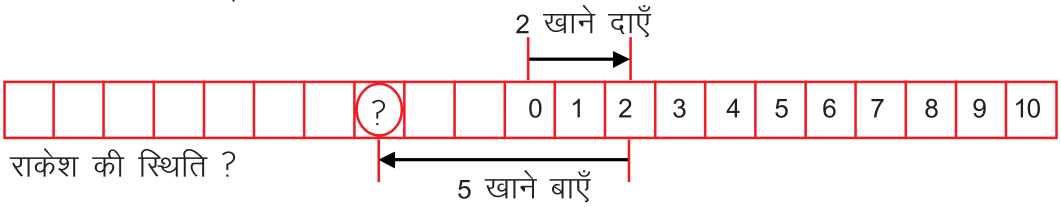
चित्र–3

अब कमली दोनों पासे फेंकती है। दोनों ही पासों पर 4 बिन्दु आए। (शर्त अनुसार) कमली की स्थिति को नीचे दर्शाया गया है–



चित्र–4

अन्त में राकेश दोनों पासे फेंकता है। उसके लाल पासे पर 2 और हरे पासे पर 5 बिन्दु आए। शर्त के अनुसार राकेश 2 खाना दाँयी ओर चलता है, और वहां से वापस मुड़ कर 5 खानें बायीं ओर जाता है। वह अपनी स्थिति शून्य से तीन खाने बाँए तरफ पाता है। एक बार फिर बच्चों को समझ नहीं आता की राकेश की स्थिति को क्या लिखें।



चित्र–5

परंतु कमली और कुछ अन्य को कुछ कुछ समझ में आने लगा है कि शून्य के दाँयी ओर की संख्याएँ क्रमशः एक–एक बढ़ रही है। दाँये ओर बढ़ने के लिए पिछली संख्या में 1 जोड़ कर क्रमशः अगली संख्या प्राप्त करते हैं। उसी प्रकार बाँये ओर जाने के लिए एक –एक घटा कर क्रमशः पीछे वाली संख्या प्राप्त करते जाते हैं। शून्य के दाहिने ओर की संख्याएँ क्रमशः एक–एक जोड़ने पर प्राप्त होती हैं और शून्य के बाएं ओर

जैसे

0 + 1 = 1
1 + 1 = 2
2 + 1 = 3
3 + 1 = 4
... + ... = ...
... + ... =....

की संख्याएँ क्रमशः एक–एक घटाने पर प्राप्त होती है। क्या यह बात आपके समझ में आई? मोनू ने कहा "क्या इसका अर्थ यह है कि शून्य के दायीं ओर की संख्याएँ धनात्मक हैं और 0 के बायीं ओर की संख्याएँ ऋणात्मक हैं। शिक्षक ने कहा, ''बिल्कुल ठीक है।'' यदि शून्य से क्रमशः एक–एक कम करते जाएँ तो 0–1=–1, –1–1=–2, –2–1=–3 इत्यादि संख्याएँ मिलती हैं। अतः राकेश की स्थिति –3 पर है क्योंकि शून्य से बाँयी ओर तीसरे खाने का यही मान होगा। इस प्रकार शून्य के बाँयी ओर –1,–2,–3,–4,–5,.... इत्यादि संख्याएँ (सभी ऋणात्मक संख्याएँ) होंगी। जैसे–जैसे बाँयीं ओर हम जाएंगे संख्या कम होती जाएगी अर्थात् ज्यादा बड़ी ऋणात्मक संख्या बनती जाएगी।

जैसे

3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0
0 – 1 = –1
–1–1 = –2
...– ... = ...
...– ... = ...
...– ... = ...

					–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

शून्य के बाएँ ओर की संख्याएँ शून्य के दाएँ ओर की संख्याएँ

चित्र–6

फातिमा कहती है कि शून्य के दायीं ओर की संख्यायें क्रमशः बढ़ती जाती हैं। 1>0, 2>1, 3>2, 4>3, 5>4, ... इत्यादि और बाएँ ओर की संख्या कम होती जाएगी अर्थात –1< 0, –2<–1, –3<–2......इत्यादि।

(आप ऋणात्मक संख्याओं को समझने के लिए यह खेल कक्षा में व घर पर जरूर खेलें। यदि आपको पासे प्राप्त नहीं होते हैं तो दो रंग के कागज लेकर दोनों पर 1 से 6 तक की संख्या अलग–अलग लिख कर इस प्रकार मोड़ लें कि संख्या नजर नहीं आए। अब प्रत्येक रंग का एक–एक कागज खींचे, इन्हीं अंकों से शर्तानुसार खेल खेलें।)

अपने अनुभव के आधार पर नीचे दी गयी संख्याओं के बीच बने बाक्स में उचित चिन्ह > (बड़ा) या (छोटा) < लगाएँ।

0		–1	–1		–2
50		70	100		101
–5		5	–53		–5

ऐसे ही कुछ और जोड़े सोचें व अपने साथियों को हल करने को दें।

_.kkRed l[;k,¡

fØ;kdyki 1-

3 + [4] = 7
3 + □ = 6
3 + □ = 5
3 + □ = 4
3 + □ = 3
3 + □ = 2
3 + □ = 1
3 + □ = 0

पूर्व के उदाहरणों में आपने पाया कि जिस प्रकार धनात्मक संख्याएँ हैं उसी प्रकार ऋणात्मक संख्याएँ भी हैं। इन संख्याओं को शामिल करने से हम कई नई संक्रियाएँ कर पाएँगे जैसे 12 में से 14 घटा पाएंगे और उत्तर को दर्शा पाएँगे। 3 और 4 जोड़ने पर परिणाम 7 आता है। यदि जोड़ का प्रथम अंक 3 स्थिर रखें तो उसमें कौनसी संख्या जोड़ें कि परिणाम क्रम ः 6,5,4,3,2,1, और 0 प्राप्त हो? इन मानों को खाली बाक्सों में लिखिए। ऐसे और भी सवाल सोचें व हल करें। क्या आप सबसे छोटी और सबसे बड़ी ऋणात्मक संख्या का मान बता सकते हैं?

i.kkd ¼Integer½

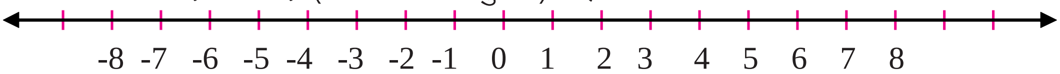
आप प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं से परिचित हैं। उनमें यदि ऋणात्मक संख्याएँ जोड़ लें तो? शून्य के दाँईं ओर प्राकृत संख्याएँ हैं और बाँयी ओर ऋणात्मक संख्याएँ। धनात्मक संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याएँ तथा शून्य को मिलाकर पूर्णांक बनते हैं। पूर्णांक को I या Z से दिखाते हैं। अर्थात्

पूर्णांक (I) = {.............-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,.......} आदि।

जिस प्रकार सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं है उसी प्रकार सबसे बड़ी पूर्णांक भी नहीं है। क्या आप सबसे छोटी पूर्णांक सोच सकते हैं ?

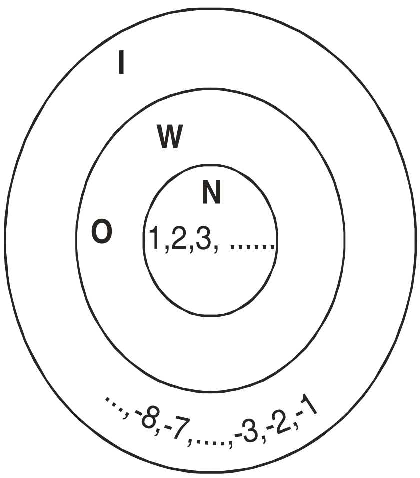
la[;k js[kk ij i.kkd la[;k dk fu:fir djuk

एक सरल रेखा खींचिए। इस सरल रेखा पर एक समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए। इस रेखा पर बीच में स्थित किसी बिन्दु को शून्य लिखकर इसके दाहिने ओर धनात्मक संख्याएँ तथा शून्य के बाँये ओर ऋणात्मक संख्याएँ लिखिए (चित्र–7 के अनुसार)। इस प्रकार बनी रेखा संख्या रेखा कहलाती है।



चित्र–7

Nk;k fp= dk ek/;e ls i.kkdk dk in'ku ¼&



;gk¡

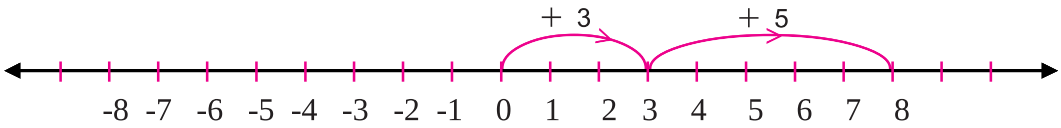
N ¾ ik—frd la[;k,¡
W ¾ i.k la[;k,¡
I ¾ i.kkd la[;k,¡

उपरोक्त संकेतों को देखकर चित्र 8 में पूर्णांक में शामिल संख्याओं की पहचान कीजिए। पूर्ण संख्या में कौन–कौन सी संख्या शामिल है।

i.kkZdk ij dh xbZ lfØ;kvksa dk la[;k js[kk ij izn'kZu djukA

i.kkZdksa dk tksM+uk &

tc nksuksa la[;k,¡ /kukRed gksa] जैसे 3 + 5 = ?



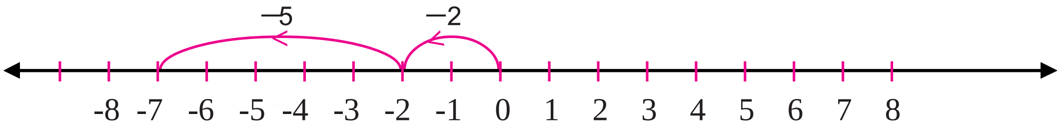
चित्र–9

पहले शून्य से 3 अंक धनात्मक दि ा में, फिर वहीं से 5 अंक धनात्मक दि ा में जाने पर 8 पर पहुँचते हैं अतः 3 + 5 = 8

और **tc nksuksa la[;k,¡ _.kkRed gksa]** जैसे (–2)+(–5)।

तो पहले ऋणात्मक दिशा में 2 अंक जाते हैं। फिर वहीं से 5 अंक ऋणात्मक दिशा में और बढ़ें तो –7 अंक पर पहुंचते हैं।

अर्थात् (–2)+(–5) = –7

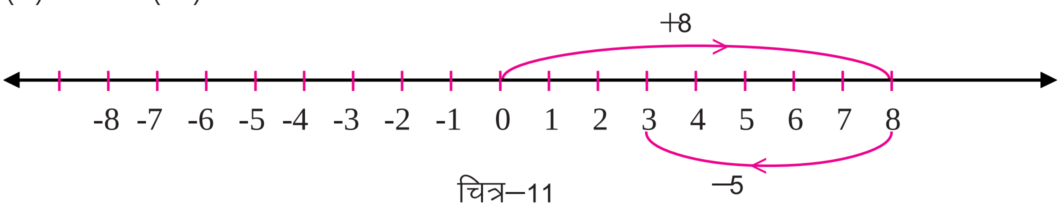


चित्र–10

tc ,d la[;k /kukRed vkSj nwljh la[;k _.kkRed gks&

जैसेः (अ) 8 +(–5) = ?

¼v½

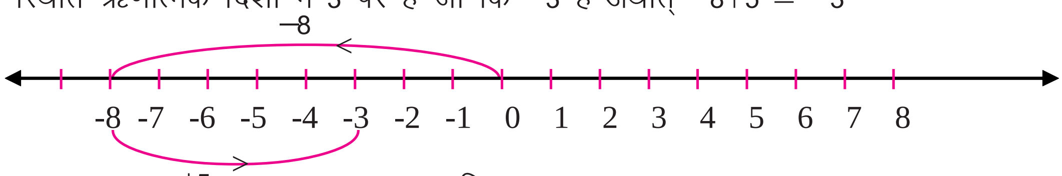


चित्र–11

पहले शून्य से 8 अंक धनात्मक दिशा में जाएंगे और फिर वहां से वापस 5 अंक ऋणात्मक दिशा में लेंगे। शून्य से उस दिशा को मालूम करें। यहाँ हमें धनात्मक दिशा में 3 प्राप्त होता है अर्थात् 8+(–5) = 3

¼c½ –8 + 5 = ?

ऋणात्मक दिशा में 8 अंक चलकर वहां से वापस 5 अंक शून्य की ओर (धनात्मक दिशा) में आने पर अंतिम स्थिति ऋणात्मक दिशा में 3 पर है जो कि –3 है अर्थात् –8+5 = –3



चित्र–12

इसी प्रकार आप भी दो–दो पूर्णांक लेकर उन्हें जोड़िए। प्राप्त परिणामों पर विचार करें।

इस प्रकार उपरोक्त उदाहरणों से यह मालूम होता है कि –

1. दो धनात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव धनात्मक पूर्णांक तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
2. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।

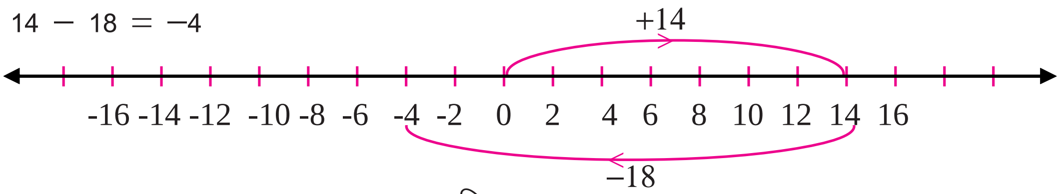
पूर्णांकों को जोड़ने में उन सभी गुणों का पालन होता है। जिनका पूर्ण संख्याएँ पालन करती है।

1. दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक ही होगा।
2. सभी पूर्णांकों के योग में क्रम विनिमय नियम लागू होता है।
3. दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक संख्या होती है, यही पूर्णांकों के योग के लिए संवरक नियम है।
4. पूर्णांकों में शून्य जोड़ने पर उनके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है।

i.kkd l[;kvk dk ?kVkuk

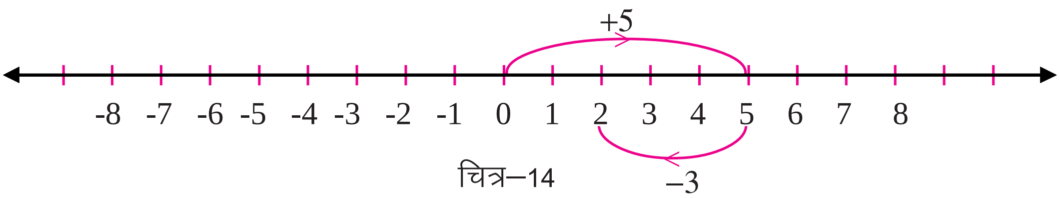
जिस प्रकार पूर्ण संख्याओं में घटाने की संक्रिया योग की विपरित संक्रिया है, उसी प्रकार पूर्णांक संख्याओं में घटाने की संक्रिया भी योग की विपरीत संक्रिया है। निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

(अ) 14 – 18 = –4



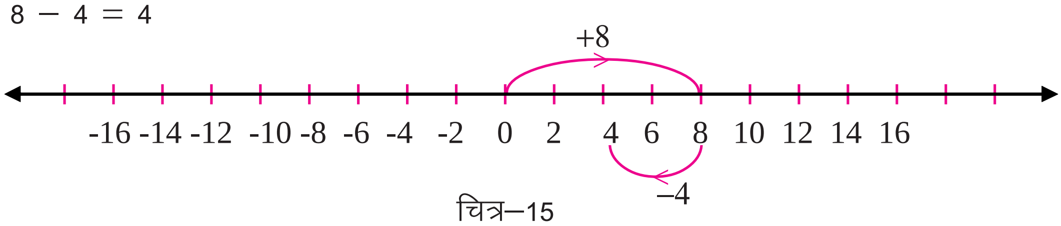
चित्र–13

(ब) 5 – 3 = 2



चित्र–14

(स) 8 – 4 = 4



चित्र–15

घटाने की प्रक्रिया तो आप जान चुके हैं। परंतु, यदि कभी 10 से –6 घटाने को कहा जाता है तब परेशानी हो सकती है क्योंकि ऋणात्मक संख्याओं को कैसे घटाएं, वह ठीक से समझ नहीं आता है। आइए, इस बात को समझें :

आप जानते हैं कि 5 + 0 = 5, 8 + 0 = 8, 111 + 0 = 111

अर्थात् किसी भी संख्या में यदि शून्य जोड़ा जाए तो योगफल वही रहता है जो संख्या का मान है।

bl rjg 'kU; dk ;kT; rRled dgr gA

सोचिए, 5 में क्या जोड़े कि शून्य प्राप्त हो? आपका उत्तर होगा (–5)

अर्थात् 5 + (–5) = 0 (योज्य तत्समक)

इसी प्रकार (–7) में क्या जोड़े कि शून्य प्राप्त हो? आपका उत्तर होगा (+7)

अर्थात् (–7) + (+7) = 0 (योज्य तत्समक)

यहाँ (–5) योज्य प्रतिलोम है 5 का तथा + 7 योज्य प्रतिलोम है (–7) का।

vr% fdlh l[;k dk ;kT; ifryke og l[;k g ftl mll l[;k d lkFk tkMu ij ;kT; rRled ¼'kU;½ ikIr gkrk gA

vFkkr~ | l[;k $ l[;k dk ;kT; ifryke ¾ ;kT; rRled |

uhp nh xbl l[;kvk dk ;kT; ifryke Kkr dhft, %

संख्या		संख्या का योज्य प्रतिलोम		योज्य तत्समक
35	+	(......................)	=	0
–40	+	(......................)	=	0
–17	+	(......................)	=	0
–35	+	(......................)	=	0
–13	+	(......................)	=	0

igyh l[;k e nlljh l[;k ?kVku dk vFk g igyh l[;k e nljh l[;k d ;kT; ifryke dk tkMukA D;k vkidk ;g ckr mfpr yxrh g

जैसे 12 –(5) = 12 +(5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 +(–5)

उसी प्रकार 12–(–5) = 12 +(–5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 +(+5) = 12 +5 =17

क्या आप 10 में से (–6) को घटा सकते हैं?

vH;kl &4-1

नीचे दिए गए प्रश्नों में घटायीं जाने वाली संख्या का योज्य प्रतिलोम निकाल कर हल कीजिए:

1) 3–(–7) 2) 12–(–10) 3) 15–(+7)

4) 7 –(+18) 5) 19–(–7)

ऊपर अभ्यास के प्रश्नों में आप देख रहे हैं कि ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक संख्या है और धनात्मक संख्या का ऋणात्मक एक ऋणात्मक संख्या है।

जैसे : – (–3) = +3

या (–1) × (–3) = +3

(–5) × (–3) = + 15

vFkkr~ nk _.kkRed i.kkdk dk x.kuQy lnb /kukRed i.kkd gkrk gA

इसी प्रकार,

$-(+7) = -7$

या $(-1) \times (+7) = -7$

$(-5) \times (+3) = -15$

अर्थात् एक ऋणात्मक पूर्णांक तथा धनात्मक पूर्णांक का गुणनफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

घटाने की संक्षिप्त विधि

जब किसी संख्या को 10, 100, 1000 आदि से घटाना होता है तो आप सबसे बड़े स्थान के 1 को उससे छोटी इकाइयों में बदलते हैं। जैसे, इस उदाहरण में देखें –

उदाहरण 1.

```
  1 0 0
–   7
```

हल :– यहाँ इकाई के शून्य से 7 नहीं घट सकता। दहाई में भी शून्य है, वहाँ से भी आपको कुछ नहीं मिल सकता। आप एक सैकड़े को दस दहाइयों में और इनमें से एक दहाई को दस इकाई में बदलते हैं –

सै.	द.	इ.		सै.	द.	इ.	
1	0	0	→	0	9	10	(100 = 90 + 10)

याने एक सैकड़ा छोटी इकाइयों में बदलकर 9 दहाई और 10 इकाई बन जाता है। ऐसे में सौ से छोटी किसी भी संख्या को घटाना आपके लिए आसान हो जाता है।

घटाइए

सै.	द.	इ.	
0	9	10	(100 – 7 = 90 + 10 – 7)
–		7	(= 90 + 3 = 93)
	9	3	

एक और उदाहरण देखें –

उदाहरण 2.

```
  1 0 0 0 0
–   2 8 7 4
```

हल :–

दिया है –

	दसह.	ह.	सै.	द.	इ.
	1	0	0	0	0
–		2	8	7	4

संख्या दस हजार को छोटी इकाइयों में बदलिए –

	दसह.	ह.	सै.	द.	इ.	
	0	9	9	9	10	(10000=9990+10)
–		2	8	7	4	
		7	1	2	6	

उदाहरण 3. 1 0 0 0 – 8 7 6

	9	9	(10)
–	8	7	6

इन उदाहरणों में आपने देखा कि इकाई के अंक को दस से घटाया जा रहा है बाकी सभी को नौ से।

अब आप चाहें तो सीधे उत्तर लिख सकते हैं।

100 – 23 = (9 – 2) (10 – 3) = 77

100 – 69 = (9 – 6) (10 – 9) = 31

1000 – 512 = (9 – 5) (9 – 1) (10 – 2) = 488

1000 – 32 = (9 – 0) (9 – 3) (10 – 2) = 968

1000 – 8 = 992

10,000 – 982 = 9018

10,000 – 8374 = 1626

i.kkdk d ?kVku l l cf/kr x.k

1. दो पूर्णांकों का अन्तर एक पूर्णांक होता है।(संवरक गुण)
2. पूर्णांक में से 0 घटाने पर उनका मान नहीं बदलता।

3. प्रत्येक पूर्णांक का पूर्ववर्ती एवं परवर्ती भी पूर्णांक होता है।

जैसे 0 का पूर्ववर्ती –1 एवं –1 का पूववर्ती –2, –5 का पूर्ववर्ती –6 इत्यादि तथा –1 का परवर्ती 0,–2 का परवर्ती –1, –6 का परवर्ती –5 इत्यादि।

बीजांक के प्रयोग से जोड़ने, घटाने की जाँच

तुम्हें पता ही है कि किसी संख्या का बीजांक ज्ञात करने के लिए उसके अंकों का योग तब तक करते हैं जब तक एक अंक वाली संख्या न मिल जाए। अंत में प्राप्त अंक ही बीजांक होता हैं।

जैसे –	45 का बीजांक	4 + 5 = 9 है
और	457 का बीजांक	4 + 5 + 7 = 16
	16 में दो अंक है इसीलिए	1 + 6 = 7
अर्थात्	457 का बीजांक 7 है।	

बीजांक की सहायता से हम अपने बनाए सवालों की जाँच कर सकते हैं।

जोड़ की जाँच

जोड़ के सवालों की जाँच करने के लिए हम जोड़ी जाने वाली संख्याओं और योगफल का बीजांक ज्ञात करते हैं।

यदि संख्याओं के बीजांक का योग उत्तर के बीजांक के बराबर हो तो उत्तर सही होगा।

आइए एक उदाहरण से समझते हैं – 453 + 158 = 611

453 के बीजांक 3 और 158 के बीजांक 5 का योग उत्तर 611 के बीजांक 8 के बराबर है।

अर्थात् उत्तर सही है।

इसी प्रकार अपने बनाए हुए जोड़ के सवालों के उत्तर की जाँच आप खुद ही कर सकते हैं।

घटाने की जाँच

यदि उत्तर के बीजांक में घटाई जाने वाली संख्या का बीजांक जोड़ने पर ऊपर वाली संख्या का बीजांक प्राप्त हो तो उत्तर सही होगा।

आइए एक उदाहरण देखें – 587 – 235 = 352

उत्तर 352 के बीजांक 1 और घटने वाली संख्या 235 के बीजांक 1 को जोड़ने पर 2 प्राप्त होता है।

587 का बीजांक भी 2 है।

अर्थात् उत्तर सही है।

इस तरीके से उन प्रश्नों के उत्तरों की जाँच कीजिए जिन्हें आपने हल किया है।

i.kkdk dk x.kk

fØ;kdyki 1

नीचे तालिका में पूर्णांक संख्याओं का गुणा करके दिखाया गया है।
कुछ रिक्त स्थान तालिका में है, उनकी पूर्ति कीजिए –

Ø-	igyh l[;k	nl jh l[;k	igyh l[;k nl jh l[;k	x.kuQy	fu"d"k
01.	3	4	3×4	+12	दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
02.	–6	–2	(–6) ×(–2)	+12	दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
03.	–5	2	(–5) ×(+2)	–10	एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है
04.	3	–6	(+3) × (–6)	–18	....
05	– 5	–4	....	....	....
06	–7	2	....	....	....
07.	–8	–12	....	....	....
08.	15	–13	....	....	....
09	–17	–19	....	....	....

9, 99, 999......... आदि का गुणा

एक, दो और तीन अंकों वाली किसी संख्या में क्रमशः 9, 99, 999 जैसी संख्याओं का गुणा करने पर हमें एक मजेदार पैटर्न मिलता है। आइए कुछ उदाहरण देखें –

8   9 = 72   47   99 = 46 53

7   9 = 63   78   99 = 77 22

5   9 = 45

आप देख रहे हैं कि गुण्य और गुणक एक–एक अंक वाली संख्याएँ हैं। प्राप्त गुणनफल में दहाई का अंक हर बार गुण्य से एक कम है और दहाई में मिली इस संख्या को 9 से घटाने पर जो मिला उसे इकाई में रखा गया है। क्या यही पैटर्न दूसरी संख्याओं में भी मिलेगा?

देखें :–

	दहाई	इकाई		द.	इ.	
6 9	= (6 − 1)	(9 − 5)	=	5	4	= 54 सत्य है।
4 9	= (4 − 1)	(9 − 3)	=	3	6	= 36 सत्य है।

यदि गुण्य और गुणक दो–दो अंकों की संख्याएँ हों तो क्या होगा? यहाँ हमें गुणनफल के रूप में चार अंकों की संख्या मिलेगी (10 99 को छोड़कर)

	ह. सै.	द. इ.	ह.	सै.	द.	इ.
10×99	= (10-1)	(99-9)	=	9	9	0
75 99	= (75 − 1)	(99 − 74)	= 7	4	2	5
84 99	= (84 − 1)	(99 − 83)	= 8	3	1	6

इसे थोड़ा और बढ़ाएँ –

100 999 को हल करें।

	दस ह. ह.	सै. द. इ.		
100 999	= (100 − 1)	(999 − 99)		
	99	900	=	9 9 9 0 0

यदि 100 से बड़ी कोई भी तीन अंक वाली संख्या लें तो गुणनफल 6 अंकों की संख्या होगी।

217 999	= (217 − 1)	(999 − 216)	
	216	783	= 2 1 6 7 8 3
999 999	= (999 − 1)	(999 − 998)	
	998	001	= 9 9 8 0 0 1

अब थोड़ो सोचें ये सब कैसे होता है ?

8 9 = 8 (10 − 1) = 80 − 8 = 70 + 10 − 8
= 70 + 9 − 7
= 70 + 2
= 72

(7 + 1) (10 − 1) = 70 + 10 − 7 − 1
= 70 + 10 − 1 − 7
= 70 + 9 − 7
= 70 + 2
= 72

अब इन उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए–

3 2 = 6, 2 1 = 2, 4 2 = 8, 1 4 = 4

5 3 = 15, 2 8 = 16, 7 3 = 21, 9 9 = 81

ऊपर के पहले चार उदाहरणों में आप देख रहे हैं कि इकाई की संख्या में इकाई की संख्या का गुणा करने पर इकाई की संख्या ही मिल रही है। नीचे के चारों उदाहरणों में भी इकाई में इकाई का गुणा हुआ और गुणनफल में इकाई के साथ – साथ दहाई की भी कोई संख्या मिल रही है।

×

इसी तरह आप देख सकते हैं कि दहाई में इकाई का गुणा करने पर या तो दहाई और सैकड़ा या केवल दहाई की संख्या मिलेगी।

जैसे 20 3 = 60, 30 1 = 30, 10 4 = 40

40 3 = 120, 50 5 = 250, 30 7 = 210

20 यानी दो दहाई में 3 का गुणा करने पर 60 इकाइयाँ यानी 6 दहाइयाँ मिलीं। 4 दहाइयों (40) में 3 का गुणा करने पर 12 दहाइयाँ या 1 सैकड़ा और 2 दहाइयाँ मिलीं।

यदि इन बातों का ध्यान रखते हुए गुणा करें तो गुणा करना थोड़ा संक्षिप्त हो जाता है। आगे कुछ उदाहरणों से हम समझेंगे यह गुणा कैसे किया जाता है।

उदाहरण 1 13 12

हल – 13

12

चरण – 1

```
  13
  12
 ----
   6
```

इकाई 3 में इकाई 2 का गुणा किया।

6 इकाइयाँ मिलीं। इन्हें इकाई में लिखा।

चरण – 2

```
  1 3
  1 2
 -----
  5 6
```

पहली संख्या की इकाई 3 में दूसरी संख्या की दहाई 1 का गुणा किया, 3 दहाइयाँ मिलीं। दूसरी संख्या की इकाई 2 में पहली संख्या की दहाई 1 का गुणा किया, 2 दहाइयाँ मिलीं, कुल 5 दहाइयाँ (3 + 2) मिलीं, इसे दहाई में लिखा।

```
 1   3
   X
 1   2
```

(3   1) + (2   1) = 3 + 2 = 5 दहाइयाँ

चरण – 3

```
  1 3
  1 2
 -----
 1 5 6
```

पहली संख्या की दहाई 1 में दूसरी संख्या की 1 दहाई का गुणा किया 1 सैकड़ा मिला। इसे सैकड़े में लिखा। कुल 156 मिला।

इन तीनों चरणों को इस तरह देख सकते हैं –

सै.	द.	इ.		
1	1	3	3	
1	1	2	2	
1	(3 + 2)		6	
1	5	6	=	156

उदाहरण 2 12   31 को हल करें।

हल

चरण – 1

```
  1   2
  3   1
 -------
      2
```

इकाई 2   इकाई 1 = 2 इकाइयाँ

इकाई में लिखा।

चरण – 2

```
  1   2
    X
  3   1
 -------
  7   2
```

इकाई 2   दहाई 3 = 6 दहाइयाँ

इकाई 1   दहाई 1 = 1 दहाइयाँ

योग = 7 दहाइयाँ   (दहाई में लिखा)

चरण 3

```
   1   2
   3   1
 ________
 3 7   2
```

सैकड़ा 1 सैकड़ा 3 = 1 3 = 3 (सैकड़े में लिखा)

हल मिला 12 31 = 372

इन दोनों उदाहरणों में गुणा करने पर हमें हासिल नहीं मिला। यदि संख्याओं को थोड़ा बड़ा लें तो यह स्थिति बनेगी।

आइए देखें –

उदाहरण 3 43 12 को हल करें

चरण 1

```
  4 3
  1 2
 _______
    6
```

इकाई 3 इकाई 2 = 6 इकाइयाँ (इकाई में लिखा।)

चरण 2

```
  4   3
   ╳
  1   2
 _______
   1 6
```

×

(इकाई 3 दहाई 1) + (इकाई 2 दहाई 4)

3 + 8 = 11 दहाई

11 दहाई = 1सैकड़ा + 1 दहाई

1 दहाई को दहाई में लिखा। 1सैकड़ा हासिल के रूप में आगे के लिए रखा।

चरण 3

```
  4   3
  1   2
 _______
 5 1 6
 _______
```

दहाई 4 दहाई 1 = 4 सैकड़ा

= + 1 सैकड़ा (हासिल का)

योग = 5 सैकड़ा

इसे सैकड़े में लिखा।

गुणनफल मिला 43 12 = 516

उदाहरण 4 हल कीजिए – 76×58

चरण 1

```
  7 6
  5 8
 _______
    8
 (4)
```

6 8 = 48 8 इकाई

4 दहाई (हासिल के)

चरण 2

```
 7   6
  ╳
 5   8
───────
   0 8
(9) (4)
```

(6   5) + (8   7)

30 + 56 = 8 6 दहाइयाँ

+ 4 दहाइयाँ (हासिल के)

9 0 दहाइयाँ

= 9 सैकड़े + 0 दहाई

दहाई में 0 लिखा, 9 सैकड़े (हासिल की)

चरण 3

```
 7   6

 5   8
───────
4 4 0 8
───────
 (5)(4)
```

हल मिला

7   5 = 3 5 सैकड़े

+ 9 सैकड़े (हासिल)

4 4 दहाइयाँ

4 हजार और 4 सैकड़े

इन्हें इनके स्थानों पर लिखा।

76   58 = 4408

i.kkdk e x.ku lfØ;k d x.k

1. दो पूर्णांकों का गुणनफल सदैव एक पूर्णांक होता है। इसे संवरक गुण कहते हैं।
   जैसे :– (यहाँ 3 एवं –6 का गुणनफल –18 एक पूर्णांक संख्या है)
2. पूर्णांकों की गुणन संक्रिया क्रम–विनिमेय नियम का पालन करती है।
   जैसे :–
3. प्रत्येक पूर्णांक में एक का गुणा करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।
   जैसे :–
   यहाँ संख्या 1 को गुणन–तत्समक अवयव कहते हैं।
4. किसी पूर्णांक में उसके गुणंन प्रतिलोम का गुणा करने पर सदैव 1 प्राप्त होता है।
   जैसे :–
   यहाँ संख्या 5 का गुणन प्रतिलोम $\frac{1}{5}$ है। शून्य का गुणन प्रतिलोम अस्तित्व में नहीं है।
5. **'kU; dk x.kk &** किसी पूर्णांक में शून्य का गुणा करने पर गुणनफल सदैव शून्य प्राप्त होता है।
   जैसे :– $(-3)\times 0 = 0\times(-3) = 0$
6. पूर्णांकों के गुणा पर साहचार्य नियम लागू होता है।
   जैसे :–

7. वितरण गुण :– पूर्णांकों में गुणन संक्रिया योग संक्रिया पर वितरण गुण का पालन करती है। जैसे :–

या

i.kkdk dk Hkkx

पिछले पाठ में पूर्ण संख्याओं के संदर्भ में आपने भाग देना सीखा है। पूर्णांक संख्याओं के गुणा के उदाहरण भी हम देख चुके है। इन्हीं के आधार पर हम पूर्णांकों के भाग के बारे में समझ सकते हैं।

3 × 4 = 12	-5 × 6 = - 30	(-7) × (-2) = 14
12 ÷ 3 = ?	-30 ÷ -5 = ?	14 ÷ (-2) = ?
12 ÷ 4 = ?	30 ÷ 6 = ?	14 ÷ (-7) = ?

गुणन एवं भाग संक्रियाएँ परस्पर विपरीत संक्रियाएँ है। यह शून्य के लिए लागू नहीं होता क्योंकि शून्य से किसी भी पूर्णांक को भाग नहीं दिया जा सकता। इसी आधार पर ऊपर दिए कथनों में प्रश्न चिह्नों के स्थान पर संख्याएँ लिखें।

i.kkd e Hkkx lfØ;k d xq.k

[illegible] = 3

1. पूर्णांकों के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नहीं होता है। जैसे 3÷4 में भागफल पूर्णांक नही है।
2. प्रत्येक पूर्णांक में (शून्य को छोड़कर)उसी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल हमेशा 1 आता है। जैसे :– 7 ÷ 7 = 1
3. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर परिणाम–1 प्राप्त होता है। जैसे :–
4. शून्य में किसी भी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल का मान शून्य ही रहता है। जैसे :–
5. किसी पूर्णांक संख्या में शून्य से भाग देने पर भागफल ज्ञात नहीं कर सकते। अर्थात्

vifjHkkf"kr

i'ukoyh&4

29QYE7

1. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करके परिणाम बताइए –

(i)	2 + (-4)	(ii)	-3 + 5	(iii)	(-6) + (-3)
(iv)	6 + 4 + (-2)	(v)	4 + (-3) + (-5)	(vi)	0 + 3
(vii)	0 + (-5)	(viii)	9 + 0 + (-1)		

2. योगफल ज्ञात कीजिए–

(i)	1531, (-503)	(ii)	-55, -211	(iii)	117, -81
(iv)	-18, 172				

3. निम्न में से प्रत्येक रिक्त स्थान में >, = या < का चिह्न लगाइए जिससे कथन सत्य हो–

(i) 8 + (-3) .... -3 + 8

(ii) -28 + 25 .... -25 + 28

(iii) -4 + 0 .... 4 + 0

(iv) 0 + 9 .... 9 + 0

(v) 25 + (+25) .... + 25 - (-25)

(vi) 208 + 53 .... 208 - 53

4. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए–

(i) (+2) × (3) × (5) (ii) 3 × (-5) × (-6)

(iii) (-4) × 3 × (-2) (iv) (-6) × (-4) × 1

(v) 3 × 0 × (-2) (vi) 2 × (-7) × (-3)

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति >, = या < लिखकर कीजिए –

(i) (2) × (5) .... (-3) × (5)

(ii) 2 × -4 × -3 .... 8 × 3

(iii) 4 × -3 × -1 28

(iv) (-8) × (-5) .... 2 × 20

(v) 2 × -3 × 0 .... 0 × -8

(vi) 4 × 5 × (-3) .... -4 × (+5) × (-3)

(vii) 3 × 8 × (-5) .... 3 × 8 × (-5)

6. दो पूर्णांकों का योग 69 है। यदि उनमें से एक पूर्णांक 56 है तो दूसरा पूर्णांक बताइए।

7. दो पूर्णांकों का योग 85 है यदि एक पूर्णांक –15 है तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

8. निम्न में से प्रत्येक का भागफल ज्ञात कीजिए –

(i) 30 ÷ 2 (ii) 40 ÷ (-4) (iii) -48 ÷ 12

(iv) 24 ÷ 0 (v) -14 ÷ 1 (vi) 95 ÷ (-5)

9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) -80 ÷ ....= - 20 (ii) 46 ÷ .... = -23

(iii) -24 ÷ .... = 24 (iv) 12 ÷ .... = -1

10. नीचे दी गई संख्याओं का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए –

(i) 17 (ii) -23 (iii) 68

(iv) -75

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) -18 + ... = 0 (ii) 26 + ... = 0

(iii) 161 + ... = 0 (iv) -79 + ... = 0

geu Ih[kk

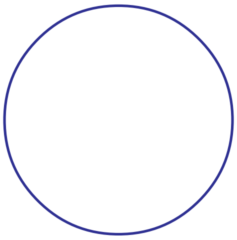
1. दो धनात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव धनात्मक पूर्णांक तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
2. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।
3. दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक होता है, यही पूर्णांकों के योग के लिए संवरक नियम है।
4. पूर्णांक में शून्य जोड़ने पर उसके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है। शून्य को योज्य तत्समक अवयव कहते हैं।
5. पूर्णांक में 1 का गुणा करने पर उसके मान में परिवर्तन नहीं आता है। संख्या 1 को गुणन तत्समक कहते हैं।
6. किसी धनात्मक संख्या को किसी ऋणात्मक संख्या के साथ गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक संख्या होता है। जैसे $(+1) \times (-1) = -1$ या $(-1) \times (+1) = -1$
7. ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक संख्या के साथ गुणा होने पर धनात्मक संख्या प्राप्त होती हैं। जैसे – $(-1) \times (-1) = +1$
8. दो पूर्णांकों का योग, अन्तर एवं गुणा एक पूर्णांक होता है।
9. पूर्णांक से 0 घटाने पर उसका मान नहीं बदलता।
10. प्रत्येक पूर्णांक की पूर्ववर्ती एवं परवर्ती संख्या होती है।
11. किसी ऋणात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम धनात्मक संख्या तथा किसी धनात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम ऋणात्मक संख्या होती है।
12. पूर्णांक के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नहीं होता है। जैसे $3 \div 4$ में भागफल पूर्णांक नहीं है।
13. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक में उसी पूर्णांक का भाग देने पर भागफल हमेशा 1 आता है।
14. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर परिणाम -1 प्राप्त होता है।
15. शून्य का गुणन प्रतिलोम अस्तित्व नहीं रखता है।
16. पूर्णांकों के गुण –

गुण	योग संक्रिया	अंतर संक्रिया	गुणन संक्रिया	भाग संक्रिया
संवरक	✓	✓	✓	×
क्रमविनिमेय	✓	×	✓	×
साहचार्य	✓	×	✓	×

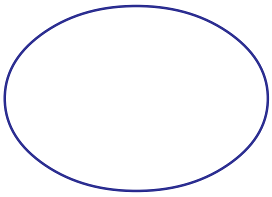
5
oRr

पिछली कक्षा में आपने वृत्त के बारे में पढ़ा है। वृत्त के आकार को भी आप पहचानते हैं। जैसे– चूड़ी, रोटी, बैलगाड़ी का पहिया इत्यादि। अपने चारों ओर पाई जाने वाली ऐसी 10 चीजों के उदाहरण अपनी कॉपी में लिखिए।

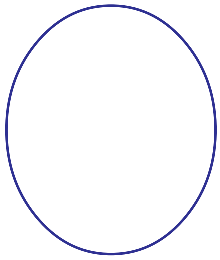
नीचे कुछ आकृतियां दी गई हैं, वे वृत्त हैं अथवा नहीं, दिए गए रिक्त स्थान में लिखिए:



चित्र–1



चित्र–2



चित्र–3

————————— ————————— —————————

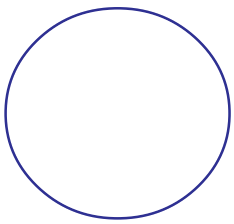
दैनिक जीवन में उपयोग में आने वाली ऐसी कई वस्तुएँ हैं जिनकी सहायता से आप अपनी कॉपी में वृत्त बना सकते हैं। ऐसी कौन–कौनसी वस्तुएँ आप पहचान सकते हैं? सूची बनाइए। किन्हीं 3 वस्तुओं की सहायता से वृत्त बनाइए।

जिस वस्तु की सहायता से आपने वृत्त बनाया है उसका किनारा कभी–कभी पूर्णतः वृत्ताकार न होकर टेढ़ा–मेढ़ा भी हो सकता है। इसलिए पूर्ण वृत्त बनाने के लिए परकार का उपयोग करते हैं।

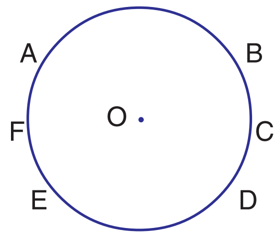
fØ;kdyki&1

ijdkj dh lgk;rk l s oRr [khpuk– अपने ज्यामिति बॉक्स में रखी परकार को लीजिए। परकार में पेंसिल लगाकर उसको थोड़ा सा फैलाइए। परकार की नोंक को कॉपी के बीचों–बीच रखकर पेंसिल वाले सिरे को चारों ओर घुमाइए। ध्यान रहे परकार की नोंक कॉपी पर अपनी जगह से नहीं हटनी चाहिए। इस प्रकार बनी आकृति वृत्त कहलाती है।

चित्र–4



चित्र–5



चित्र–6

जिस स्थान पर परकार की नोक आपने रखी थी वहाँ पेंसिल की सहायता से एक बिंदु बनाकर ''O'' लिखें यह बिन्दु ''O'' वृत्त का केन्द्र है। अब वृत्त पर कई बिंदु A,B,C,D,E एवं F बनाकर निम्न दूरियों को मापें (चित्र–6):

1.	OA =	2.	OD =	3.	OB =
4.	OE =	5.	OC =	6.	OF =

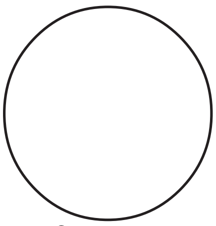
क्या उपरोक्त सभी माप एक समान हैं?

वृत्त पर कोई भी बिंदु लेने पर क्या वह यही माप देगा?

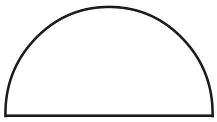
इसी प्रकार परकार की सहायता से और दो वृत्त बनाकर ऊपर के परिणामों की जांच कीजिए। आपने वृत्त बनाना सीख लिया है। आइए, अब वृत्त के विभिन्न भागों को जानने के लिए क्रियाकलाप करें।

fØ;kdyki&2

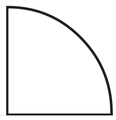
कागज़ पर परकार की सहायता से वृत्त बनाइए तथा वृत्ताकार आकृति को कैंची से काट कर अलग कीजिए। इस वृत्ताकार कागज की आकृति को इस प्रकार मोड़िए कि एक भाग दूसरे भाग को ढक लें। इस अर्धवृत्ताकार आकृति को पुनः दो बराबर भागों में मोड़ें। अब इस कागज को खोलकर उसमें बने मोड़ के निशानों को पेंसिल की सहायता से रेखांकित कीजिए तथा नीचे दी गई आकृति के अनुसार नामांकित करें।



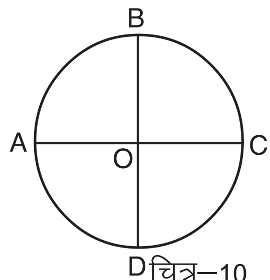
चित्र–7



चित्र–8



चित्र–9



चित्र–10

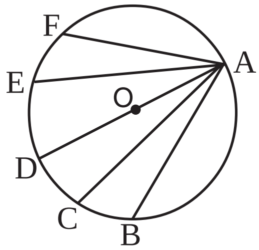
- रेखा खण्ड AC और BD की लम्बाई मापिये, क्या वे बराबर हैं?
- कटान बिन्दु O से A तक, O से C तक, O से B तक और O से D तक की दूरी नाप कर देखिए कि उनकी लम्बाई समान है या नहीं?

आप देखते हैं कि OA,OB, OC एवं OD की लम्बाई समान है। ये सभी वृत की "**f=T;k**" हैं।

fØ;kdyki&3

अपनी कॉपी में परकार की सहायता से एक वृत्त बनाइए। वृत्त के केन्द्र बिंदु को चिह्नित कीजिए। वृत्त पर कोई बिंदु A लीजिए, A को वृत्त पर स्थित भिन्न–भिन्न बिन्दुओं से इस प्रकार मिलाइए कि कम से कम एक रेखाखण्ड केन्द्र से होते हुए गुजरे। आपने जो विभिन्न रेखाखण्ड खींचें हैं उन्हें नापकर अपनी कॉपी में लिखिए तथा नीचे दिए गए प्रश्नों का हल ढूंढिए :–

1. सबसे लम्बी रेखाखण्ड कौन सी है?
2. क्या सबसे लम्बी रेखाखण्ड केन्द्र से होकर जाती है?
3. एक ही वृत्त में ऐसे कितने सबसे लम्बे रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं?



चित्र–11

क्रियाकलाप 3 में आपने वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को मिलाते हुए कई रेखाखण्ड खींचे होंगे। इन्हीं रेखाखण्डों को **thok** या **pkid.k** कहते हैं। सबसे बड़ी जीवा केन्द्र से होकर जाती है, **0;kl** कहलाती है (जैसे रेखाखंड AD)।चूँकि केन्द्र से जाने वाली प्रत्येक जीवा सबसे लम्बी जीवा है और आप यह भी जानते हैं कि किसी बिन्दु से असंख्य रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं, इसलिए किसी वृत्त में भी असंख्य व्यास खींचे जा सकते हैं।

fØ;kdyki&4

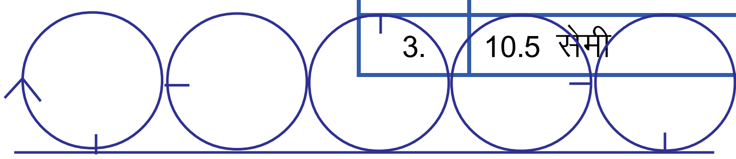
अपनी कॉपी में अलग–अलग माप के 3 वृत्त बनाइए तथा निम्न सारणी को पूर्ण कीजिए –

Ø- l-	0;kl dh yEckbZ	f=T;k dh yEckbZ	0;kl ÷f=T;k
01.			
02.			
03.			

उपरोक्त क्रियाकलाप में आप पाते हैं कि किसी वृत्त का व्यास, त्रिज्या का दुगुना होता है। अर्थात् 'त्रिज्या व्यास की आधी होती है।'

अब वृत्त के चारों ओर का घेरा मापकर वृत्त का परिमाप ज्ञात करें और घेरे तथा व्यास में सम्बन्ध समझें।

आप जानते हैं कि किसी भी बन्द आकृति के घेरे की लम्बाई ही उस आकृति का परिमाप है। अतः वृत्त का परिमाप निकालने के लिए एक पुट्ठे पर वृत्त बनाकर उसे काट लिजिए। इसके किनारे पर पेन से एक निशान लगाइये। अपनी कॉपी पर एक सरल रेखा खींचकर उसके एक छोर पर भी निशान A लगाइए। वृत्ताकार पुट्ठे पर बने निशान को सरल रेखा पर बने निशान के ऊपर रखिए तथा पुट्ठे को एक चक्कर तब तक घुमाइए जब तक कि पुट्ठे पर बना निशान पुनः सरल रेखा पर न आ जाए। सरल रेखा पर निशान B लगाइए।



चित्र–12

बिन्दु A और B के बीच की दूरी को मापिए। यही माप इस वृत्त का परिमाप होगा। इसी प्रकार नीचे दिए गए माप की त्रिज्या के वृत्त काटकर सारणी को पूर्ण कीजिए –

Ø-l-	f=T;k dh eki	oRr dk ifjeki	oRr d
1.	3.5 सेमी		
2.	7 सेमी		
3.	10.5 सेमी		

सारणी में परिमाप ÷ व्यास का मान सभी में लगभग समान है अर्थात् प्रत्येक वृत्त का परिमाप तथा व्यास का अनुपात एक ही (स्थिरांक) होता है। इस स्थिरांक को ग्रीक अक्षर π (पाई) से दर्शाते हैं तथा इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 के बराबर होता है।

i'ukoyh 5

2A9QHH

प्र.1 वृत्त बनाइए

(i) त्रिज्या = 2 सेमी (ii) त्रिज्या = 3.5 सेमी

(iii) त्रिज्या = 4.2 सेमी (iv) त्रिज्या = 5 सेमी

प्र.2 वृत्त बनाइए–

(i) व्यास = 3 सेमी (ii) व्यास = 6 सेमी

(iii) व्यास = 6.8 सेमी (iv) व्यास = 7.4 सेमी

प्र.3 3.2 सेमी त्रिज्या के वृत्त में 6.4 सेमी की एक जीवा खींचिए।

प्र.4 एक वृत्त की रचना कीजिए जिसकी सबसे बड़ी जीवा की लम्बाई 8 सेमी है।

प्र.5 किसी वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तो उसका परिमाप क्या होगा?

प्र.6 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) व्यास = 2 × .... ।

(ii) वृत्त के दो व्यास .... पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा को .... कहते हैं।

(iv) व्यास वृत्त के .... से गुजरता है।

(v) वृत्त की सभी त्रिज्यायें .... होती हैं।

(vi) केन्द्र से परिधि के किसी बिन्दु को मिलाने वाली रेखा वृत्त की .... है।

(vii) वृत्त में परिधि के दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को .... कहते हैं।

geu Ih[kk

1. वृत्त के केन्द्र से वृत्त पर स्थित बिन्दु को मिलाने वाली रेखा वृत्त की त्रिज्या है।
2. एक ही वृत्त की त्रिज्यायें समान होती हैं।
3. वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा वृत्त की जीवा कहलाती है।
4. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है जो वृत्त के केन्द्र से गुजरती है।
5. किसी भी वृत्त का व्यास, त्रिज्या का दुगुना होता है।
6. वृत्त के परिमाप तथा व्यास का अनुपात सदैव स्थिर होता है। इस स्थिरांक को π कहते हैं जिसका मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 के लगभग बराबर होता है।

2AILJ5

6
गुणनखण्ड एवं गुणज

पूर्णांक के पाठ में आपने पढ़ा है कि भाग की संक्रिया हमेशा संवरक नियम का पालन नहीं करती हैं, अर्थात किसी पूर्णांक को यदि किसी अन्य पूर्णांक से भाग दिया जावे तो हमेशा पूर्णांक प्राप्त नहीं होता। सोचकर बताइये कि 8 में किन–किन संख्याओं का भाग जाता है और शेष नहीं बचता? और 7 में किस–किस का भाग जाता है?

गुणनखंड

2 x 5 = 10 में आपने देखा कि 2 तथा 5 का भाग 10 में पूरी तरह चला जाता है। किसी संख्या के गुणनखंड वे संख्याएँ हैं जो उस संख्या को पूरी तरह विभाजित करें ।

10 ÷ 2 = 5 अर्थात 2 तथा 5,10 के गुणनखंड है

10 ÷ 5 = 2

किसी संख्या के गुणनखंड उस संख्या की सभी भाजक संख्याएँ होंगी।

प्रत्येक संख्या कम से कम 1 व स्वयं से अवश्य विभाजित होती है।

जैसे : 12 में 1 का भाग पूरी तरह चला जाता है।

12 में 12 का भाग पूरी तरह चला जाता है।

क्या आप ऐसी कोई संख्या जानते हैं जिसमें एक का अथवा उसी संख्या का भाग पूरी तरह नहीं जाता हो?

भाज्य संख्याएँ

वह संख्या जिनमें 1 तथा उसी संख्या के अतिरिक्त अन्य संख्याओं से पूरा–पूरा भाग दिया जा सकता है, भाज्य संख्या कहलाती है।

आइए, देखे 12 में और किन किन संख्याओं का भाग जाता है।

12 = 1 x 12
= 2 x 6
= 3 x 4
= 3 x 2 x 2

12, संख्या 1 ,2, 3, 4, 6, 12 से पूर्णतया विभाजित हो जाता है।

अतः किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतया विभाजित करता है।

अभाज्य संख्याएँ

वह संख्या जिसका गुणनखंड केवल 1 तथा स्वयं वही संख्या हो अभाज्य संख्या कहलाती है।

जैसे : 13 में केवल 1 एवं 13 का पूरा–पूरा भाग जाता है, अन्य किसी संख्या का नहीं अतः 13 एक अभाज्य संख्या है इसी प्रकार 2, 3, 5,... इत्यादि अभाज्य संख्याएँ हैं।

क्रियाकलाप 1.

नीचे सारणी में कुछ संख्याओं सभी गुणनखंड दिये गये हैं। शेष संख्याओं के सभी गुणनखंडों को रिक्त स्थानों में लिखिए तथा एक गुणनखंड, दो गुणनखंडों वाली एवं दो से अधिक गुणनखंडों वाली संख्याओं को अलग–अलग छाँटिये–

सारणी

संख्या	सभी गुणनखंड	संख्या	सभी गुणनखंड
1	1	6	1, 6,2,3
2	1,2	7	....
3	....	8	....
4	1,4,2	9	....
5	....	10	....

उपरोक्त सारणी में हमें तीन प्रकार की संख्याएँ दिखाई देती हैं –

1. एक गुणनखंड वाली संख्या : ऐसी संख्या जिसका केवल एक ही गुणनखंड है। ऐसी संख्या 1 है। यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या, यह एक अद्वितीय संख्या है।
2. दो गुणनखण्डों वाली संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, इत्यादि ऐसी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो ही गुणनखंड होते हैं । अतः यह अभाज्य संख्याएँ होगी। इस प्रकार अभाज्य संख्याओं के पाँच अन्य उदाहरण अपनी कॉपी में लिखिए।
3. दो से अधिक गुणनखंडों वाली संख्या : 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी संख्याएँ हैं जिनके दो से अधिक गुणनखंड है ये सभी भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

क्रियाकलाप 2.

एरटोस्थनींज की छलनी : भाज्य और अभाज्य संख्याओं को अलग–अलग छांटने के लिए एरटोस्थनींज ने एक तरीका अपनाया था, इसे एरटोस्थनींज की छलनी कहते हैं।

एरटोस्थनींज की छलनी

सारणी में 1 से 100 तक की संख्या दी गई है। नीचे दिये गये निर्देशों का पालन कीजिए–

निर्देश :

(1) 1 को काट दीजिए, क्योंकि 1 अभाज्य संख्या नहीं है।

(2) 2 के चारो ओर एक घेरा बना दीजिए तथा 2 से विभाजित होने वाली सभी संख्याओं को एक लकीर से काट दीजिए। जैसे 4,6,8,. . . इत्यादि।

(3) अब अगली बिना कटी संख्या 3 को घेरे लगाकर 3 से विभाजित होने वाली सभी संख्याओं को एक लकीर से काट दीजिए। यहाँ हमने 2 और 3 से विभाजित होने होनी वाली कुछ संख्याओं को काट दिया है शेष संख्याओं को काट कर सारणी को पूरा कीजिए।

(4) इसी प्रकार अगली बिना कटी संख्या को घेरिये तथा उससे विभाजित होनी वाली सभी संख्याओं को काटिए।

(5) यह प्रक्रिया तब तक दोहराइये जब तक 100 तक की सभी संख्याए कट न जाए या घिर न जाए।

सारणी

इस प्रक्रिया के बाद इस छलनी में घेरों के अंदर की सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ है तथा 1 को छोड़कर, काटी गई सभी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ है।

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

क्रियाकलाप 3.

भाज्य और अभाज्य संख्याओं को तो आपने जान लिया है। अब आइए गुणनखण्ड निकालने का एक खेल खेलें।

आप अपनी कापी में कुछ घेरे बनाइए । प्रत्येक घेरा के नीचे चित्रानुसार मान 1, 2, 3, 4 ..., इत्यादि लिखिए। और नीचे लिखे निर्देशों का पालन करिए –

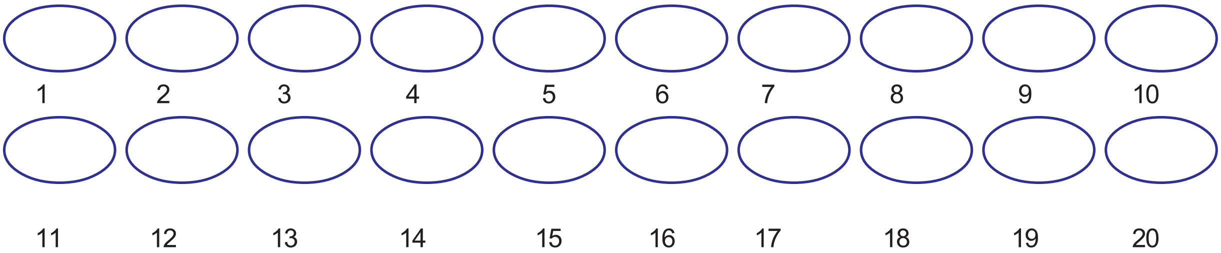
निर्देश :

1 का भाग जिन संख्याओं में जाता है उन सभी घेरों में 1 लिखिए।

जिन संख्याओं में 2 का भाग जाता है उन घेरों में 2 लिखिए।

जिन संख्याओं में 3 का भाग जाता है, उन घेरों में तीन लिखिए।

इसी प्रकार आगे की संख्याएँ लिखते जाइए एवं निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



प्रश्न 1. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर मात्र एक संख्या है। उस घेरे के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

प्रश्न 2. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर दो संख्याएँ है। उन घेरों के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

प्रश्न 3. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर दो से अधिक संख्याएँ है, उन घेरों के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

घेरे के अंदर की सभी संख्याएँ घेरे के बाहर की सभी संख्याओं के गुणनखण्ड हैं। **वे संख्याएँ जिनके मात्र दो गुणनखंड (1 एवं स्वयं वह संख्या) होते हैं अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।**

सहभाज्य संख्याएँ

आइये 8 और 15 के गुणनखंडों पर विचार करें।

8 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8

15 के गुणनखंड = 1, 3, 5, 15

उक्त दोनो संख्याओं के गुणनखण्डों को देखने पर यह स्पष्ट होता हैं कि केवल 1 ही है जो 8 और 15 का उभयनिष्ठ गुणनखंड है। 1 के अतिरिक्त और कोई संख्या ऐसी नहीं है जो 8 और 15 का उभयनिष्ठ गुणनखंड हो। ऐसी स्थिति में संख्याएँ 8 और 15 सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

इसी तरह 9, 10 और 49 के गुणनखण्डों पर विचार करें।

9 के गुणनखंड = 1, 3, 9

10 के गुणनखंड = 1, 2, 5, 10

49 के गुणनखंड= 1, 7, 49

उक्त उदाहरण में केवल 1 ही ऐसी संख्या है जो 9, 10 और 49 तीनों का उभयनिष्ठ गुणनखंड है इसके अतिरिक्त और कोई संख्या नहीं है जो 9, 10, 49 सभी का गुणनखंड हो, इसलिए 9, 10, और 49 सह अभाज्य संख्याएँ हैं।

ऐसी संख्याएँ जिनका केवल एक ही उभयनिष्ठ गुणनखंड 1 हो, सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

अभ्यास

(1) 1 से 100 के बीच आने वाली अभाज्य संख्याओं को अपनी कॉपी में लिखिए।

(2) 75 से 100 के बीच आने वाली भाज्य संख्याओं को अपनी कॉपी में लिखिए।

(3) 70 से 80 के बीच सबसे ज्यादा गुणनखण्ड वाली संख्या कौन सी है?

(4) क्या 12 और 25 सह अभाज्य संख्याएँ हैं ?

(5) क्या दो क्रमागत संख्याएँ सह अभाज्य संख्याएँ होंगी ?

संख्याओं के अन्य प्रकार

1. **सम संख्या :** वे संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित होती हैं सम संख्या कहलाती है।
   जैसे : 2, 4, 6, 8, 10, 12 ....
2. **विषम संख्या :** वे संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित नहीं होती हैं विषम संख्या कहलाती है।
   जैसे : 1, 3, 5, 7, 9, 11. . . इत्यादि।

नीचे आपको कुछ विषम संख्याएँ दी गई है। उनमें से भाज्य और अभाज्य संख्याओं को छाँटकर सारणी में दिए गये स्थान पर लिखिए।

41, 45, 47, 53, 55, 57, 63, 67, 69, 71, 73, 77, 81, 83, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

सारणी

भाज्य संख्याएँ	अभाज्य संख्याएँ

क्या सभी विषम संख्याएँ अभाज्य होती हैं?

अभाज्य गुणनखंड

आइये देखें 42 के अभाज्य गुणनखण्ड क्या होंगे?

42 = 14 x 3, यहां 3 अभाज्य है,

क्या 14 भी अभाज्य है?

नहीं, 14 को 2 x 7 लिख सकते है।

अर्थात् 42 = 2 x 7 x 3, अब यहां 2, 7, 3 सभी अभाज्य संख्याएँ हैं। ये 42 के अभाज्य गुणनखण्ड है। इन्हें अभाज्य गुणनखण्ड कहते है।

6 के अभाज्य गुणनखण्ड कौन–कौन से हैं? और भी कुछ संख्याएँ लेकर उनके अभाज्य गुणनखण्ड पता करिए।

अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना2

अभाज्य गुणनखण्ड कैसे पता करें? क्या एक–एक संख्या को कई–कई बार भाग करके देखें? सामान्य तौर पर नीचे दिया तरीका इस्तेमाल करने से किसी भी संख्या के अभाज्य गुणनखण्डों का पता लग सकता हैं। दी गई संख्या को सबसे पहले 2 से भाग करके देखें। यदि संख्या 2 से विभाज्य है तो संख्या और फिर उसके भागफलों में तब तक 2 का भाग देते है जब तक वह 2 से विभाज्य रहती है। फिर यदि संख्या

3 से विभाज्य है तो उस में 3 से बारी–बारी तब तक भाग देते हैं जब तक वह 3 से विभाज्य है। इसी प्रकार 5, 7, 11. . ., इत्यादि के लिए भी वही प्रक्रिया दोहराते हैं जब तक की भागफल 1 प्राप्त नहीं हो जाता।

उदाहरण 1 आइए 24 के अभाज्य गुणनखंड निकालें।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

24 = 2 X 2 X 2 X 3

अतः 24 के अभाज्य गुणनखण्ड 2,2,2,3 है।

उदाहरण 2 अब 30 के अभाज्य गुणनखंड निकालें।

2	30
3	15
5	5
	1

30 = 2 X 3 X 5

अतः 30 के अभाज्य गुणनखण्ड 2,3 एवं 5 हैं।

अभ्यास

1. निम्न संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 16 (ii) 48 (iii) 60 (iv) 84

अभाज्य गुणनखंड निकालना तो आपने सीख लिया। आइए, अब किसी संख्या के सभी गुणनखंडों पर विचार करें।

उदाहरण 3. क्या 18, 108 का गुणनखंड है?

प्रथम विधि : यदि 18 , 108 का गुणनखंड हो तो 108 में 18 का भाग पूरी तरह चला जाना चाहिए।

18) 108 (6
– 108
0

अतः 108 का एक गुणनखंड 18 है ।

द्वितीय विधि : (I) 18 के अभाज्य गुणनखंड निकालिए।
(II) 108 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

18 = 2x3x3
108 = 2x2x3x3x3

चूंकि 18 के अभाज्य गुणनखंडों में शामिल सभी संख्याएँ, 108 के अभाज्य गुणनखंडों में भी शामिल हैं इसलिए 108 का गुणनखंड 18 है।

उदाहरण 4. 18 के सभी गुणनखंड लिखिए।

विधि 1 : जैसा कि आप जानते हैं कि 18 में 1,18,2,3,6,9 इन सभी संख्याओं का भाग दिया जाये तो शेषफल शून्य (0) रहता है।

अतः 1,18,2,3,6,9, सभी 18 के गुणनखण्ड अथवा अपवर्तक है।

गुणनखंड को अपवर्तक भी कहते हैं।

विधि 2 : यहाँ 18 के सभी अपवर्तको को निम्न प्रकार से भी ज्ञात किया जा सकता है।

18 = 1 x 18

18 = 2 x 9

18 = 3 x 6

इस प्रकार 18 के सभी अपवर्तक होगें : 1, 2, 3, 6, 9, 18

उदाहरण 5. 60 के सभी गुणनखंडो को लिखिए।

हल : 60 = 1 x 60

= 2 x 30

= 3 x 20

= 4 x 15

= 5 x 12

= 6 x 10

अतः 60 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 होंगे।

अभ्यास

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी अपवर्तक लिखिये।

(i) 28 (ii) 36 (iii) 45 (iv) 72

इस विधि से गुणनखंड निकालने में आपको अधिक समय लग रहा है। आपको विभाज्यता की जांच के नियम मालूम नहीं हैं, जिसके कारण बिना भाग दिये आप यह नहीं बता सकते कि किसी संख्या में 3, 5 अथवा 7. . . ,इत्यादि का भाग जाएगा या नहीं। आइये, विभाज्यता पता करने के कुछ नियम सीखें।

विभाज्यता की जाँच के नियम :

(1) 2 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के इकाई के अंक 0, 2, 4, 6, 8 हों तो वह संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित होगी।

20, 62, 34, 26, 18 .... 2 से विभाज्य है।

21, 63, 33, 35, 17 .... 2 से अविभाज्य है।

यहाँ 18, 2 से विभाज्य है, आइए भाग देकर इसकी जाँच करें –

2) 18 (9
–18
0   2 से पूर्णतः विभाजित है।

2) 21 (10
– 2
01
– 00
1   2 से पूर्णतः विभाजित नहीं है।

(2) 3 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या तीन से विभाजित होगी ।

जैसे : 111111 में सभी अंकों का योग 1+1+1+1+1+1 = 6 है अतः संख्या 3 से विभाजित होगी।
इसी प्रकार 5112 में सभी अंकों का योग 9 है अतः संख्या 3 से विभाजित होगी।
412 में सभी अंकों का योग 7 है अतः संख्या 3 से विभाजित नहीं होगी।

(3) 6 से विभाज्यता की जाँच

यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित हो तो वह संख्या 6 से भी विभाजित होगी।
जैसे 216, 2 से विभाज्य है (इकाई अंक 6 है)
216,3 से विभाज्य है (अंको का योग 9 है)
अतः यह 6 से भी विभाज्य होगी।
इसी प्रकार 643212, 2 से विभाज्य है (क्योंकि इकाई का अंक 2 है।)
3 से विभाज्य है (क्योंकि अंको का योग 18 है।)
अतः संख्या 6 से भी विभाज्य होगी।

(4) 9 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या भी 9 से विभाज्य होगी।
जैसे 3663, 9 से विभाज्य है, क्योंकि (अंको का योग 3+6+6+3 = 18 है, जिसमें 9 का भाग पूरा–पूरा जाता है।)
1827, 9 से विभाज्य है (अंको का योग 18, 9 से विभाज्य हैं)
1227, 9 से विभाज्य नहीं है (अंको का योग 12, 9 से विभाज्य नहीं हैं)

(5) 5 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या में इकाई का अंक 0 अथवा 5 हों तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।
जैसे : 1045 5 से विभाज्य है, क्योंकि इकाई का अंक 5 है।
940 5 से विभाज्य है, क्योंकि इकाई का अंक 0 है।

(6) 10 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के इकाई का अंक शून्य हों तो वह संख्या 10 से विभाज्य होगी
जैसे : 1000, 10 से विभाज्य है (इकाई का अंक शून्य है)
2130, 10 से विभाज्य है (इकाई का अंक शून्य है)
5003, 10 से विभाज्य नहीं है (इकाई का अंक 3 है)

(7) 4 से विभाज्यता की जाँच

जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित होती है अथवा दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होगी।
जैसे –
79412 में दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 12 है जो कि 4 से विभाजित है अतः संख्या 79412, 4 से विभाजित होगी।
1300, 4 से विभाजित है जिसमें दहाई व इकाई के अंक शून्य हैं।
413, 4 से विभाजित नहीं है क्योंकि 13 में 4 का भाग पूरा–पूरा नहीं जाता है।

(8) 8 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के सैकड़ा, दहाई, इकाई वाले तीन अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो।
या सैकड़ा, दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 8 से विभाज्य होगी।

31000, 8 से विभाज्य है। (इकाई, दहाई व सैकड़ा के अंक शून्य है)

1816, 8 से विभाज्य है। (816, 8 से विभाजित है।)

12317, 8 से विभाज्य नहीं है। (317, 8 से विभाजित नहीं है।)

(9) 7 से विभाज्यता की जाँच

किसी संख्या के अंतिम अंक का दुगुना कर शेष अंकों की संख्या से घटाइए तथा बची हुई संख्या पर पुनः यही प्रक्रिया दोहराइये जब तक 1 या 2 अंक की संख्या प्राप्त नहीं हो जाती यदि प्राप्त संख्या 7 से विभाजित हो तो दी गई संख्या भी 7 से विभाज्य होगी।

जैसे : 1729 में अंतिम अंक 9 है। 9 का दुगुना = 18

172 – 18 = 154 में अंतिम अंक 4 है। 4 का दुगुना = 8

15 – 8 = 7 अंतिम अंक 7 है। अतः 7 से विभाज्य है

क्या आप जानते हैं कि 1729 को **रामानुजन संख्या** भी कहा जाता है?

भारत के महान गणितज्ञ रामानुजन जब इंग्लैंड में थे। उस समय वह एक बार बहुत बीमार हो गये। उनसे मिलने इग्लैड के प्रो. हार्डी आए उनमें जो बातचीत हुई वह इस प्रकार है –

रामानुजन ने पूछा	–	आप कैसे आए?
प्रो. हार्डी	–	टैक्सी द्वारा
रामानुजन	–	टैक्सी का नम्बर क्या था?
प्रो. हार्डी	–	1729, कोई विशेष संख्या नहीं है।
रामानुजन	–	आप गलती पर हैं यह संख्या बहुत रूचिकर है यह एक मात्र ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो संख्याओं के घनों के योगफल के रूप में दो विभिन्न तरीके से लिखा जा सकता है।
		अर्थात $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$

(10) 11 से विभाज्यता की जाँच

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंकों का योग निकालिए तथा सम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। यदि विषम स्थानों के अंकों का योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0, 11 अथवा 11 का गुणज हों तो वह संख्या 11 से विभाजित होगी।

जैसे : 856592 के विषम स्थानों के अंकों का योग = 8+6+9 = 23

सम स्थानों के अंकों का योग = 5+5+2 = 12

दोनों योगों का अंतर = 23 - 12 = 11

अतः संख्या 11 से विभाज्य है।

उदाहरण 6.

जाँच कीजिए की क्या 805130425, 11 से विभाज्य है?

हल : संख्या 805130425 के

1. विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 8+5+3+4+5 = 25
2. सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 0+1+0+2 = 3

योग का अंतर = 25 - 3

= 22, जो 11 से विभाजित है।

अतः संख्या 805130425 भी 11 से विभाजित होगी।

अभ्यास

1. जिस संख्या से दी गई संख्या विभाज्य है उसमें ✓ का निशान लगाइये।

Ø-	l[;k	ftul l[;k i.kr% foHkkftr gk tk,									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2550	✓	✓	✓		✓	✓				✓
2	4914										
3	9432										
4	7332										
5	13310										
6	872										
7	1210										

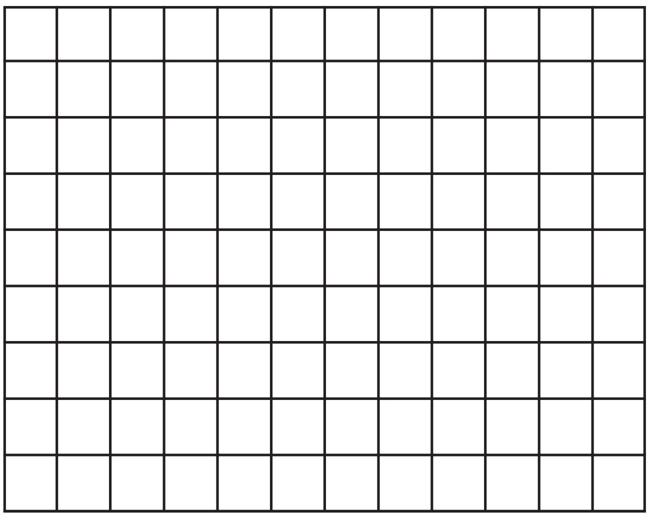
2. 27720 किन–किन संख्याओं से विभाज्य है? बताइए।
3. नीचे लिखे कथन सत्य हैं अथवा असत्य बताइए।
   (i) 78, 2 से विभाजित हो सकती है।
   (ii) 375 में 3, 5 व 10 का भाग पूरा–पूरा चला जाता है।
   (iii) जिस संख्या में इकाई का अंक 0 हों वह संख्या 5 से विभाजित होगी।
   (iv) किसी संख्या के सम स्थानों के अंकों का योग व विषम स्थानों के अंकों के योग का अन्तर यदि 0 हो तो वह संख्या 11 से भाज्य होगी।
   (v) संख्या 10080, क्रमशः 2,3,4,5,6,7,8,9 से पूर्णतः विभाजित है।

2ASHKS

महत्तम समापवर्तक (Highest common factor)

क्रियाकलाप 4

नीचे 12 फीट लम्बे तथा 9 फीट चौड़े कमरे को नापने के लिये एक लकड़ी का स्केल बनाना हैं। उस बड़े से बड़े स्केल की लम्बाई क्या होगी जिससे 12 फीट और 9 फीट दोनों को नापा जा सके



12 फीट की लम्बाई आप किस–किस माप के स्केल से नाप सकते हैं ?

आप पायेंगे 1, 2, 3, 4, 6, 12 फीट लम्बी स्केल से 12 फीट की लम्बाई नापी जा सकती है, ये सभी 12 के गुणनखण्ड है।

उसी प्रकार 9 फीट की लम्बाई 1, 3 और 9 फीट लम्बे स्केल से नापी जा सकती है ये सभी 9 के गुणनखण्ड है। परन्तु ऐसे बड़े से बड़े स्केल की आवश्यकता है जो 12 फीट और 9 फीट दोनों को नाप सके। यह 12 और 9 का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड अर्थात् **"3"** होगा।

चूंकि यह सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (अपवर्तक) है, इसलिए इसे हम **महत्तम समापवर्तक** (H.C.F.) भी कहते हैं।

आइए अपवर्तक (गुणनखंड) की सहायता से एक से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करें।

उदाहरण 7.

48 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48

64 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

72 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 72

उपरोक्त सभी उभयनिष्ठ गुणनखंडों पर घेरा लगाइए आप देखेगे 48, 64,72 के सम अपवर्तक 1, 2, 4, 8, है। इनमें सबसे बड़ा अपवर्तक 8 है

अतः 48, 64, 72 का म. स. 8 है।

दो या दो से अधिक संख्याओं के समअपवर्तकों में से सबसे बड़ा सम अपवर्तक उन संख्याओ का महत्तम समापवर्तक (म. स.) कहलाता है।

म. स. = सबसे बड़ा समान गुणनखंड।

म. स. ज्ञात करने की विधियाँ

1. अभाज्य गुणनखंड विधि से

उदाहरण 8. 24, 36, 60 का म. स. ज्ञात कीजिए।

24

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

24 = 2 x 2 x 2 x 3

36

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

36 = 2 x 2 x 3x 3

60

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

60 = 2 x 2 x 3 x 5

अतः 24, 36, 60 का उभयनिष्ठ गुणनखंड

24 = 2 x 2 x 2 x 3

36 = 2 x 2 x 3 x 3

60 = 2 x 2 x 3 x 5

म.स. = 2 x 2 x 3 = 12

2. अपवर्तक विधि

24 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

36 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

60 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

अतः 24, 36, 60 के समअपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 12

सबसे बड़ा सम अपवर्तक = 12

म. स. = 12

3. भाग विधि से म. स. ज्ञात करना

भाग विधि से म.स. दो तरीके से ज्ञात किया जा सकता है –

प्रथम विधि :

उदाहरण 9. 16 तथा 36 का म. स. ज्ञात कीजिए?

2	16, 36,
2	8, 18
	4, 9

चरण

1) सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से 16 एवं 36 को भाग देने पर ।
2) 2 से 8 एवं 18 को भाग देने पर।
3) चूंकि किसी एक ही अभाज्य संख्या से 4 एवं 9 को भाग देना संभव नहीं है।

इसलिए जिन अभाज्य संख्याओं से दी गई सभी संख्याओं में एक साथ भाग जाता है उनका गुणनफल ही म.स. होगा

16 और 36 का महत्तम समापवर्तक 2 **x** 2 **=** 4

उदाहरण 10. 60, 90, 210 का महत्तम समापवर्तक भाग विधि से ज्ञात कीजिए ?

2	60, 90, 210
3	30, 45, 105
5	10, 15, 35
	2, 3, 7

चरण

1) 2 से 60, 90, 210 को भाग देने पर ।
2) 3 से 30, 45, 105 को भाग देने पर।
2) 5 से 10, 15, 35 को भाग देने पर।
4) चूंकि किसी अन्य अभाज्य संख्या से 2, 3 एवं 7 को भाग देना संभव नहीं है।

अतः 60,90,210 का म.स. 2 x 3 x 5 = 30

द्वितीय विधि :

इस विधि से म.स. ज्ञात करने के लिए छोटी संख्या का भाग बड़ी संख्या में तब तक दीजिए जब तक कि शेषफल भाजक से छोटी न आ जाए। अब भाजक को भाज्य व शेषफल को भाजक मानकर हल करें। यह क्रिया तब तक करते रहिए जब तक कि शेषफल शून्य न आ जाए। जिस भाजक से भाग देने पर शेषफल शून्य होगा वही म.स. हैं।

उदाहरण 11. 15 एव 63 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए ?

```
15)  63  ( 4          3)  15 ( 5
   – 60                 - 15
      3                    0
```

अतः 15 व 63 का म.स. 3 है।

उदाहरण 12. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 18 और 55 को भाग देने पर क्रमशः 2 और 3 शेष बचे।

हल : चूंकि 18 को भाग देने पर 2 शेष बचता है अतः संख्या = 18 – 2 = 16 है

उसी प्रकार दूसरी संख्या = 55 – 3 = 52 है।

16 और 52 का म.स. निकालने पर –

```
16 )  52 ( 3
    - 48
        4 ) 16 ( 4
          - 16
             0
```

16 व 52 का म.स. 4 प्राप्त हुआ।

महत्तम समापवर्तक की विशेषताएं

आइये, महतम समापवर्तक की विशेषताओं को उदाहरणों के द्वारा समझे।

उदाहरण 13. 15, 60 का म. स. निकालिए।

चूंकि 15 से 60 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 15 तथा 60 का म. स. 15 होगा।

उदाहरण 14.

12, 36 का म. स. निकालिए।

चूंकि 12,से 36 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 12 तथा 36 का म.स. 12 होगा।

उदाहरण 15.

20, 40 का म. स. निकालिए।

चूंकि 20,से 40 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 20 तथा 40 का म. स. 20 होगा।

उदाहरण 16.

15 और 16 में 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नही है।

अतः 15 एवं 16 का म. स. 1 होगा।

इसी प्रकार, 13 और 17 में 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

अतः 13 एवं 17 का म. स. 1 होगा ।

इससे यह स्पष्ट होता है कि –

1) यदि दो संख्याओ में बड़ी संख्या छोटी संख्या से पूरी तरह विभाजित होती है तो छोटी संख्या दोनों संख्याओ का म. स. होगी।

2) ऐसी संख्याएँ जिनका 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होता उन संख्याओं का म.स. 1 होता है।

प्रश्नावली 6.1

1. अभाज्य गुणनखंड विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

   (i) 120, 204 (ii) 144, 198

   (iii) 150, 140, 210, (iv) 108, 135,162

2. भाग विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

   (i) 252, 576 (ii) 300, 450

   (iii) 72, 96, 144 (iv) 120, 300, 105

3. दो क्रमागत संख्याओं का महत्तम समपवर्तक क्या होगा?

4. निम्न से प्रत्येक भिन्न को उसके हर और अंश में उनके महत्तम समापवर्तक से भाग देकर सरल रूप में लिखिए।

   (i) 1444 / 256 (ii) 2211 / 3025

5. दो छोटे टेंकरों में क्रमशः 85 और 68 लीटर पेट्रोल आता है। उस मापने वाले बर्तन की अधिकतम धरिता ज्ञात कीजिए जिससे प्रत्येक टेंकर का पेट्रोल पूरा–पूरा मापा जा सके।

6. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 389, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 4, 7, और 3 शेष बचे।

7. एक विद्यालय की कक्षा 6, 7, 8 में क्रमशः 220, 176 तथा 132 छात्र हैं। अधिक से अधिक छात्रों के समूह बनाएँ जो प्रत्येक कक्षा में बन सके तथा प्रत्येक समूह में छात्रों की संख्या समान हो।

8. हमीदा के पास 527 सेब, 646 चीकू व 748 संतरे है। इन्हें बराबर–बराबर फलों के ढेरों में रखना है। बड़े से बड़े ढेर में कितने फल होंगे? कुल कितने ढेर बनेंगे?

9. एक आयातकार कमरे की बाहरी लम्बाई 122 मी एवं चौड़ाई 92 मी है यदि दीवार की मोटाई 1 मीटर हो तो उस बड़े से बड़े स्केल की लम्बाई ज्ञात करो जो आंतरिक भाग की लम्बाई व चौड़ाई को पूर्णतः नाप सके ।

   संकेत : आंतरिक लम्बाई = 122 – 2 = 120, आंतरिक चौड़ाई = 92 – 2 = 90

   (120 एवं 90 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए)

गुणज (Multiple)

पिछली कक्षाओं में आप ने पहाड़ा तो पढ़ा ही होगा। पहाड़ा का उपयोग गुणा करने व भाग देने में भी आपने किया है।

आप जानते हैं कि 7 X 3 = 21 होता है, अर्थात् 7 व 3 दोनों का एक गुणज 21 है।

दो के पहाड़े में जो संख्याएँ आती है वे सभी दो के गुणज हैं इसी प्रकार 13,26,39,52,65,78. . . , इत्यादि सभी 13 के गुणज होंगे।

क्रियाकलाप 5.

नीचे कुछ संख्याएँ दी गई है, उनके प्रथम 5 गुणजों को दिये गये बॉक्स में लिखिए।

4 के गुणज :	4	8	12	16	20
7 के गुणज :					
12 के गुणज :					
15 के गुणज :					
16 के गुणज :					
20 के गुणज :					

लघुतम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

3JUALG

दैनिक जीवन में हमें मिलने वाले कुछ उदाहरणों पर चर्चा करें –

उदाहरण 17. राम फल खरीदने बाजार गया। वहाँ दुकानदार ने उसे दो तरह के केले बताये। पहले तरह के केले 10 रूपये के 6 थे व दूसरी तरह के 10 रूपये के 8 केले थे। राम दस–दस रूपये के नोट दे कर बिना खुदरा किए दोनों तरह के केले समान संख्या में खरीदना चाहता है। बताइए वह दोनों तरह के कितने केले खरीद सकता है।

हल : इसके लिए हम 6 व 8 के गुणज लिखेंगे।

6 के गुणज – 6, 12, 18, (24), 30, 36, 42, (48), 54, 60, 66, (72), 78

8 के गुणज – 8, 16, (24), 32, 40, (48), 56, 64, (72) ....

इसका मतलब यह है कि पहले तरह के 6,12,18,24 .... केले वह दस–दस रूपये के क्रमशः एक, दो, तीन, चार .... नोट देकर बिना खुदरा किए खरीद सकता है।

इसी तरह वह दूसरी तरह के 8,16,24 .... केले बिना खुदरा किए खरीद सकता है। एक ही संख्या में खरीदने के लिए उसे दोनों में आनी वाली संख्या के केले खरीदने होंगे। अर्थात् 6 व 8 के गुणज में जो संख्या समान है, उनको लेना होगा।

यह संख्या हैं 24, 48, 72, ...

समान संख्या में केले खरीदने के लिए राम 24, 48 व 72 .... केले खरीद सकता है।

आइए, एक और उदाहरण देखें।

उदाहरण 18. एक दुकानदार अपनी दुकान के लिए थोक में पेन खरीदने जाता है। उसे दो तरह के पेन पसंद आते है। पहले प्रकार के पेन के एक पैकेट में 12 पेन हैं तथा दूसरे प्रकार के पेन के पैकेट में 15 पेन हैं। थोक दुकानदार पैकेट खोलकर पेन नहीं बेचता है। क्या आप बता सकते है कि उसे कम से कम कितने पैकेट खरीदने चाहिए जिससे खरीदे गए दोनों प्रकार के पेनों की संख्या समान हो?

आइये इस प्रश्न को निम्न सारणी के माध्यम से हल करें।

सारणी

i|dV e| iuk| dh l|[;k	d|y iuk| dh l|[;k				
	1 i|dV e|	2 i|dV e|	3 i|dV e|	4 i|dV e|	5 i|dV e|
12	12	24	36	48	(60)
15	15	30	45	(60)	75

इस प्रकार आप देख रहे है कि 12 पेन वाले पैकेट यदि 5 खरीदें जावे तो 60 पेन होंगे और 15 पेन वाले पैकेट यदि 4 खरीदें जावे तब 60 पेन होंगे।

उपरोक्त प्रश्न को हल करते समय आपने 12 और 15 के गुणज निकाले हैं तथा जो उभयनिष्ठ गुणज **सबसे छोटा** है वही चाहा गया उत्तर है।

गुणज को **''अपवर्त्य''**भी कहते हैं इसलिए सबसे छोटे उभयनिष्ठ गुणज को **लघुतम सम अपवर्त्य** या **लघुतम समापवर्त्य** कहते हैं। इसे संक्षेप में **ल.स.(L.C.M.)** भी कहते हैं।

क्या आप 10,12 और 15 का सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज या लघुतम समापवर्त्य प्राप्त कर सकते है?

10 के गुणज लिखिए = ...

12 के गुणज लिखिए = ... ,

15 के गुणज लिखिए = ...

सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज या लघुतम समापवर्त्य = ...

नीचे दी गई सारणी में दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए :

सारणी

क्रम सं.	संख्याएँ	संख्याओं के गुणज या अपवर्त्य	ल0 स0
1	3, 5, 6,	3 के अपवर्त्य = 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30 5 के अपवर्त्य = 5,10,15,20,25,30,35,40,45,50 6 के अपवर्त्य = 6,12,18,24,30,36,42,48,54,60	30
2	4, 6, 9,		
3	4, 9, 12,		
4	6, 15, 18		

इस प्रकार यह कह सकते हैं कि

(1) वह अपवर्त्य जो दी गई संख्याओं का सबसे छोटा समान अपवर्त्य हो दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य कहलाता है।

(2) दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. वह छोटी से छोटी संख्या है जिसमें दी गई प्रत्येक संख्या का पूरा–पूरा भाग चला जाता है।

ल. स. ज्ञात करने की विधियाँ

(1) अभाज्य गुणनखंड विधि

उदाहरण 19. 16 और 24 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

2	16
2	8
2	4
2	2
	1

16 = 2 x 2 x 2 x 2

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

24 = 2 x 2 x 2 x 3

(II) सभी संख्याओं में सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड लें। यह गुणनखण्ड किसी भी संख्या में अधिक से अधिक जितनी बार आया हो उसे उतनी बार लिखिए।

(III) उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनिए और उसे भी अधिक से अधिक जितनी बार किसी संख्या में वह आया हो उतनी बार लिखिए।

(IV) इसी प्रकार सभी अभाज्य गुणनखंडो को लिख कर गुणा करके ल.स. ज्ञात किया जाता है।

16 = 2 x 2 x 2 x 2

24 = 2 x 2 x 2 x 3

सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड 2, अधिकतम 4 बार 16 में आया है।

उससे बड़ा अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम एक बार 24 में आया है।

16 और 24 का ल. स. = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 = 48

(2) भाग विधि द्वारा

उदाहरण 20. 12,16,24, का ल. स. ज्ञात कीजिए।

2	12, 16, 24	2 का भाग तीन संख्याओं में जाता है।
2	6, 8, 12	2 का भाग तीन संख्याओं में जाता है।
2	3, 4, 6	2 का भाग दो सख्याओं में जाता है।
2	3, 2, 3	2 का भाग एक संख्याओं में जाता है।
3	3, 1, 3	3 का भाग दो संख्याओं में जाता है।
	1, 1, 1	समस्त भाजक संख्याओं का गुणनफल ही ल.स. है।

12,16 और 24 का ल.स. = 2 x 2 x 2 x 2x 3 = 48

दो संख्याओं के गुणनफल तथा ल.स. एवं म.स. के मध्य संबंध

उदाहरण 21. मान लीजिए दो संख्याएँ 12 और 16 है।

आइये, दोनों संख्याओं का गुणा करके देखें जहाँ प्रथम संख्या 12 व द्वितीय संख्या 16 है।

दोनों संख्याओं का गुणा = प्रथम संख्या x द्वितीय संख्या

= 12 x 16

= 192

अब दोनों संख्याओं का म.स. व ल.स. भी ज्ञात करते हैं।

म. स.

2	12, 16
2	6, 8
	3, 4

म .स. = 2 x 2 = 4

ल.स.

2	12, 16
2	6, 8
2	3, 4
2	3, 2
3	3, 1
	1, 1

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 2x 3 = 48

अर्थात् म.स. x ल.स. = 4 x 48 = 192

दोनों स्थितियों में गुणनफल समान प्राप्त होता है, अतः यह कह सकते है कि –

प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या = म. स. × ल. स.

अर्थात् **दो संख्याओं का गुणनफल = उनका म.स. × उनका ल.स.**

✍ क्रियाकलाप 6:

सारणी में दी गई संख्याओं का ल.स. व म.स. निकाल कर ऊपर दिये गये सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

सारणी

प्रथम संख्या	द्वितीय संख्या	म. स.	ल.स.	म.स. x ल.स.	प्रथमसंख्या x द्वितीय संख्या
6	8	2	24	2 x 24 = 48	6 x 8 = 48
4	9				
30	36				
42	48				
108	18				

आप यह भी पाते हैं कि दो संख्याओं का म.स. उनके ल.स. का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्नावली 6.2

मौखिक प्रश्न

1. दो संख्याओं का म. स. 2 और ल. स. 12 है। यदि एक संख्या 6 है तो दूसरी संख्या क्या होगी?
2. दो संख्याओं का गुणनफल 338 है इनके म.स. एवं ल. स. का गुणनफल बताइये?
3. 2, 6, 8 का लघुतम समापवर्त्य बताइए?
4. 7 और 14 का ल. स. 7 से बड़ा है। या छोटा?
5. 15 और 30 का ल. स. क्या 30 से कम हो सकता है ?

लिखित प्रश्न

1. लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए (गुणनखंड विधि से)

   (i) 14, 28 (ii) 108, 162 (iii) 12, 15, 45 (iv) 40, 36, 126
2. लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए (भाग विधि से)

   (i) 28, 56 (ii) 112, 168 (iii) 36, 45, 72 (iv) 180, 184, 144
3. 55 मीटर लम्बे एवं 22 मीटर चौड़े मैदान में वर्गाकार दरियां बिछानी है एक ही नाप की कम से कम बिछाई जाने वाली दरियों की संख्या ज्ञात कीजिए? (संकेत – म.स. ज्ञात करें)
4. 6 घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ हुई यदि वे क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 सेकेंड के अंतराल में बजती है तो 30 मिनट में कितनी बार इकट्ठी बजेगी? (संकेत – ल.स. ज्ञात करें)
5. एक व्यापारी हर चौथे दिन रायपुर जाता है जबकि दूसरा व्यापारी हर 10 वें दिन। वे दोनों यदि 3 जनवरी को एक साथ रायपुर गये हों तो अगली तिथि बताइए जब वे पुनः रायपुर में एक साथ पहुंचेंगे?
6. दो संख्याएँ 24 एवं 36 है यदि उनका म.स. 12 हो तो उनका ल. स. ज्ञात कीजिए?
7. यदि दो संख्याओं का म. स. 13 ल.स. 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए?
8. शशांक नित्य 4.65 रुपये बचाता है। कम से कम कितने दिनों में वह रुपयों की पूरी – पूरी संख्या बचा सकेगा?

   संकेत – 4.65 में 4 रु. पूर्णांक में है अतः 65 पैसे और 100 पैसे का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करें एवं प्राप्त ल. स. में 65 पैसे का भाग देने पर पूर्ण दिनों की संख्या प्राप्त होगी जो बचत की पूरी राशि रुपये में व्यक्त करेगा।
9. क्या दो संख्याओं का म. स. 14 और ल. स. 204 हो सकता है। अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए?
10. किसी दिन रतनपुर से रायपुर की बसें 40 मिनट के अंतराल से और रायपुर से रतनपुर की 45 मिनट

के अंतराल में चलती है। यदि विपरीत दिशा से आने वाली दो बसें किसी विशेष पुल से 10.15 बजे प्रातः गुजरती है तो उसके बाद उस पुल से दो विपरीत दिशा की बसें किस समय गुजरेंगी?

संकेत : 40 और 45 का ल. स. 360 मिनट

360 / 60 = 6 घंटे

10.15 + 6.00 = 16.15

16.15 − 12.00 = 4.15 शाम

हमने सीखा

1. किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतया विभाजित करती है।
2. किसी संख्या का गुणज उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होती है।
3. प्रत्येक संख्या स्वयं का गुणज एवं गुणनखंड होती है।
4. 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड होता है जो कि न अभाज्य है न ही भाज्य।
5. केवल 2 ही सम अभाज्य संख्या है।
6. दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक बड़ा से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।
7. लघुतम समापवर्त्य वह छोटा से छोटा उभयनिष्ठ गुणज होता है जो दी गई सभी संख्याओं का गुणज है।
8. दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक तथा लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है।
9. 2 के सभी गुणज सम संख्याएँ कहलाती है।
10. संख्याएँ, जो 2 के गुणज नहीं है वे विषम संख्याएँ कहलाती है।
11. दो संख्याओं का म. स. उनके ल. स. का एक गुणनखंड होता है।
12. संख्याओं का महत्तम समापवर्तक संख्याओं से बड़ा नहीं हो सकता है।
13. संख्याओं का लघुतम समावर्त्य संख्याओं से छोटा नहीं हो सकता है।
14. ऐसी संख्याएँ जिनका केवल एक ही उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1) हो,सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

7
भिन्न

राजू ने पिछली कक्षाओं में भिन्न संख्या के बारे में पढ़ रखा था, परन्तु वह इस बात से परेशान था कि भिन्न संख्याओं की जरूरत ही क्या है।

चित्र 1

तभी डॉली ने आवाज लगाई, ''राजू, रश्मि और फरीदा चलो, हम सब टिफीन खा लें।''

टिफीन खोलने पर उसमें 10 पूड़ियाँ निकली। अब समस्या यह आ गई कि इन चारों के बीच 10 पूड़ियों को बराबर–बराबर कैसे बाँटा जाए।

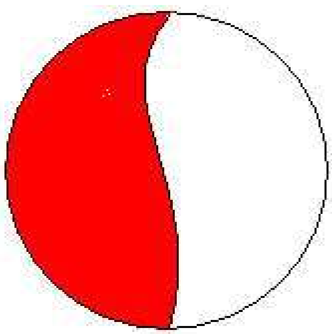
इसके बाँटने के लिए डॉली ने पहले सबको दो–दो पूड़ियां बाँट दीं। अब शेष बची दो पूड़ियों को चारों में बाँटना था। उसने दोनों पूड़ियों को आधे–आधे हिस्से में बाँट कर चार टुकड़े बनाये और सभी के बीच बाँट दिए। इस प्रकार सभी को दो और आधी पूड़ी मिली। राजू को ऐसा लगा कि यह आधी पूड़ी ही 1 बटा 2 के बराबर है, उसने अपने $\frac{1}{2}$ पूड़ी को फिर दो बराबर भागों में बाँटकर एक भाग को दिखाकर पूछा – यह हिस्सा कितना है?

इस पर फरीदा ने अपने हिस्से की आधी पूड़ी को भी दो बराबर भागों में बाँटकर अपनी और राजू की आधी पूड़ी के चारों हिस्सों को एक साथ जमाकर कहा यह देखो पूरी पूड़ी बन गई। चूँकि यह पूड़ी चार बराबर हिस्सों में बाँटी हुई है, इसलिए प्रत्येक टुकड़ा एक पूड़ी का चौथाई हिस्सा है या 1 बटा 4 अथवा $\frac{1}{4}$ है। फिर राजू ने पूछा ''क्या 2 टुकड़े $\frac{2}{4}$ के बराबर होंगे?''

रश्मि ने कहा हाँ, इसी प्रकार 3 टुकड़े $\frac{3}{4}$ के बराबर होंगे और चारों टुकड़े $\frac{4}{4}$ अर्थात् एक पूरी पूड़ी के बराबर होंगे और ऐसे 5 टुकड़े सवा पूड़ी अर्थात् $1\frac{1}{4}$ होंगे।

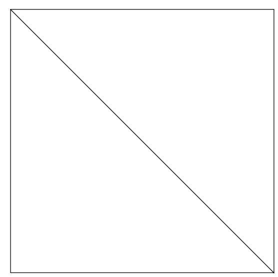
अब राजू सोचने लगा जब पूड़ी के समान चार टुकड़ों में से तीन टुकड़े लेने पर $\frac{3}{4}$ प्राप्त होते हैं तो किसी भी चीज़ का $\frac{3}{5}$ प्राप्त करने के लिए उस चीज़ के समान 5 टुकड़ों में से 3 टुकड़े लेने पड़ेंगे।

राजू तो कुछ–कुछ भिन्न को समझने लगा, क्या आपने समझा? यह जानने के लिए अपने आप को परखें। नीचे कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। इन आकृतियों के नीचे लिखी गई संख्या के अनुसार उपयुक्त भाग को पेंसिल से छायांकित कीजिए।



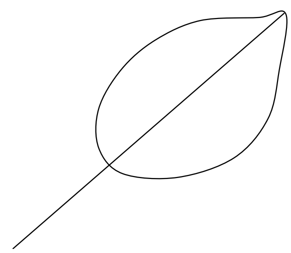
$\frac{1}{2}$ भाग

चित्र 2



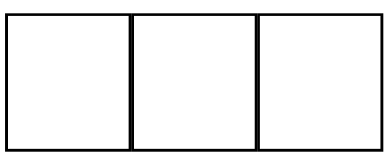
$\frac{1}{2}$ भाग

चित्र 3



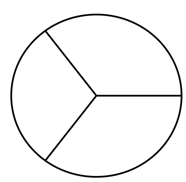
$\frac{1}{2}$ भाग

चित्र 4



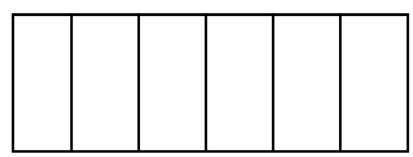
$\frac{1}{3}$ भाग

चित्र 5



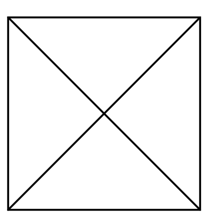
$\frac{1}{3}$ भाग

चित्र 6



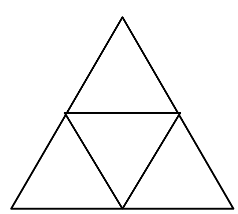
$\frac{2}{6}$ भाग

चित्र 7



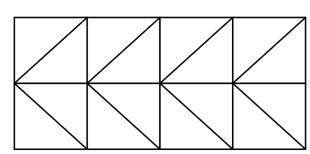
$\frac{1}{4}$ भाग

चित्र 8



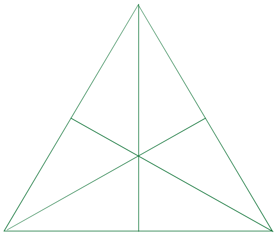
$\frac{3}{4}$ भाग

चित्र 9



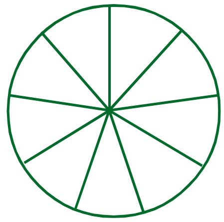
$\frac{12}{16}$ भाग

चित्र 10



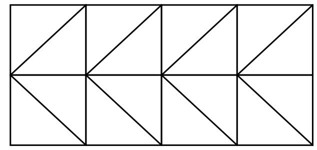
$\frac{1}{2}$ भाग

चित्र 11



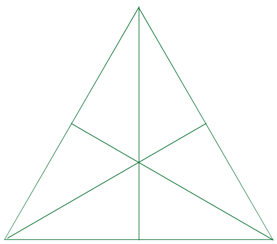
$\frac{7}{9}$ भाग

चित्र 12



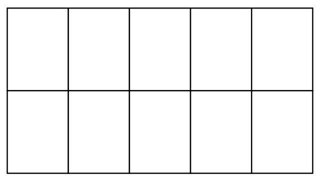
$\frac{3}{4}$ भाग

चित्र 13



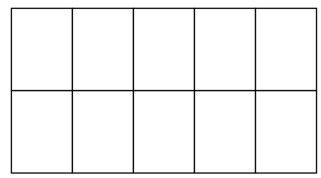
$\frac{3}{6}$ भाग

चित्र 14



$\frac{1}{5}$ भाग

चित्र 15



$\frac{2}{10}$ भाग

चित्र 16

इन में कौन–कौन से भिन्न कुल स्थान का समान हिस्सा घेर रहे हैं उन्हें तालिका में भरिए।

चित्र क्रमांक	भिन्नात्मक मान पहले चित्र के अनुसार	भिन्नात्मक मान दूसरे चित्र के अनुसार	निश्कर्श
चित्र 5 और 7	1/3	2/6	1/3 = 2/6

उपरोक्त सभी उदाहरणों में यह देखा गया है कि किसी भिन्न के अंश और हर में यदि एक ही संख्या से गुणा किया जाए अथवा एक ही संख्या से भिन्न के अंश एवं हर में भाग दिया जाए तो भिन्न का मान नहीं बदलता अर्थात् किसी भिन्न को कई प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, जिनके उदाहरण नीचे दिए गए हैः–

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$

इस प्रकार एक ही भिन्न को कई प्रकार से व्यक्त करने पर बने भिन्नों को **समतुल्य भिन्न** कहते हैं।

✍ क्रियाकलाप 1.

नीचे दिए गए सारणी को पूर्ण कीजिए। उदाहरण के लिए एक खानें को हमने भर दिया है।

सारणी

भिन्न	प्राप्त समतुल्य भिन्न				
	$\frac{2}{2}$ से गुणा करने पर	$\frac{3}{3}$ से गुणा करने पर	$\frac{4}{4}$ से गुणा करने पर	$\frac{5}{5}$ से गुणा करने पर	$\frac{6}{6}$ से गुणा करने पर
$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{14}$	$\frac{2}{7}\times\frac{3}{3}=\frac{6}{21}$	$\frac{2}{7}\times\frac{4}{4}=\frac{8}{28}$	$\frac{2}{7}\times\frac{5}{5}=\frac{10}{35}$	$\frac{2}{7}\times\frac{6}{6}=\frac{12}{42}$
$\frac{3}{8}$					
$\frac{4}{5}$					
$\frac{5}{9}$					
$\frac{4}{6}$					

✍ क्रियाकलाप 2.

नीचे कुछ भिन्न दिए गए हैं। उनके अंश अथवा हर में उचित संख्या लिखकर समतुल्य भिन्न बनाइए।

(i) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{30}$ (ii) $\frac{4}{7}=\frac{12}{\square}$ (iii) $\frac{7}{9}=\frac{35}{\square}$ (iv) $\frac{34}{51}=\frac{2}{\square}$

(v) $\frac{26}{65}=\frac{\square}{5}$ (vi) $\frac{37}{74}=\frac{\square}{2}$ (vii) $\frac{10}{36}=\frac{5}{\square}$ (viii) $\frac{27}{81}=\frac{\square}{3}$

(ix) $\frac{30}{36}=\frac{\square}{6}$ (x) $\frac{3}{4}=\frac{21}{\square}$ (xi) $\frac{4}{9}=\frac{\square}{54}$ (xii) $\frac{11}{13}=\frac{55}{\square}$

ऊपर आपने समतुल्य भिन्न बनाने का कौनसा तरीका अपनाया?

क्रियाकलाप 2 (i) में हर का मान 5 है। इसे ऐसे भिन्न में बदलना है जिसके हर का मान 30 हो। यह हमें 5 को 6 से गुणा करने पर प्राप्त होता है। अतः तुल्य भिन्न बनाने के लिए अंश को भी 6 से गुणा करना पड़ेगा। अर्थात

$$\frac{3}{5}\times\frac{6}{6}=\frac{18}{30}$$

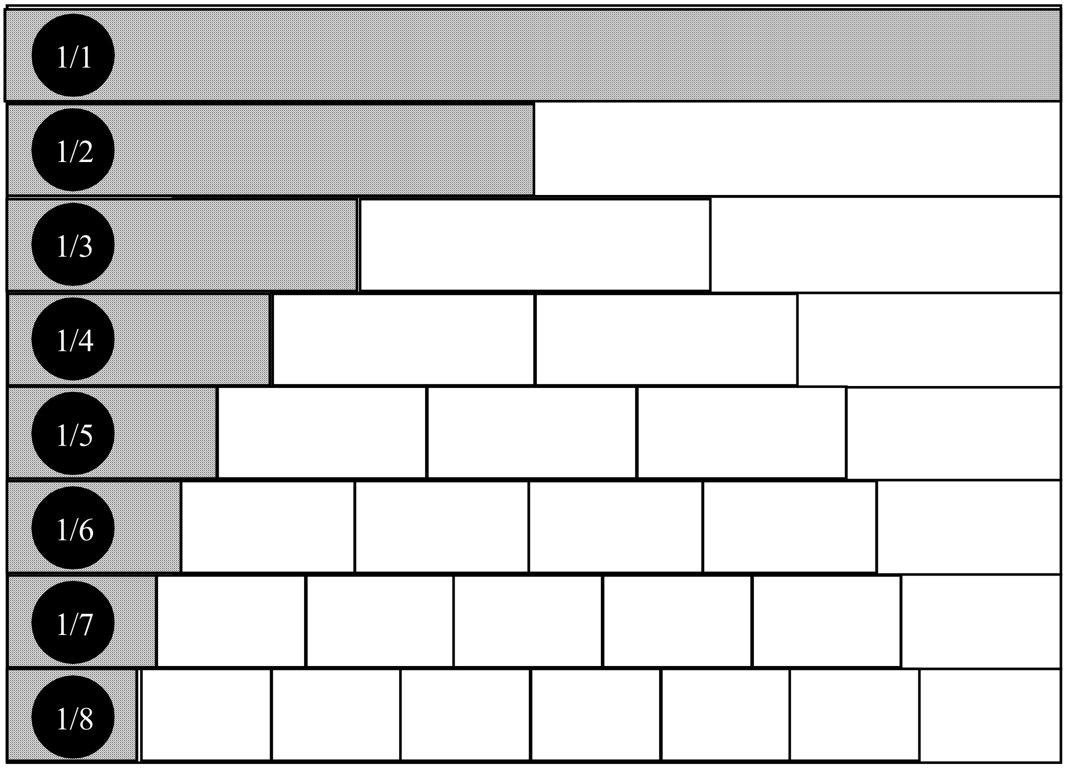
✍ क्रियाकलाप 3.

नीचे दो–दो भिन्न के जोड़े दिए गये है। इन जोड़ों को ऐसे तुल्य भिन्न में बदलिए जिनका हर समान हों। तुल्य भिन्न को दी गई तालिका में लिखिए।

क्रमांक	भिन्न	हर	दोनों का समान हर	समहर भिन्न
1	$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$	2,3	6	$\frac{3}{6}$ और $\frac{2}{6}$
2	$\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{7}$			
3	$\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{4}$			
4	$\frac{4}{4}$ और $\frac{1}{6}$			
5	$\frac{3}{5}$ और $\frac{5}{7}$			
6	$\frac{2}{6}$ और $\frac{1}{9}$			
7	$\frac{7}{7}$ और $\frac{3}{5}$			
8	$\frac{5}{3}$ और $\frac{7}{9}$			
9	$\frac{5}{8}$ और $\frac{1}{6}$			
10	$\frac{5}{6}$ और $\frac{4}{9}$			
11	$\frac{4}{15}$ और $\frac{3}{20}$			
12	$\frac{5}{12}$ और $\frac{7}{18}$			

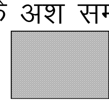
ऊपर आपने सभी भिन्न युग्मों को समान हर वाले भिन्नों में बदला है। इन्हें समान हर भिन्न कहते है। परन्तु अभ्यास क्रमांक 8, 9, 10, 11 में आपने यह भी पाया होगा कि यदि दोनों भिन्नों के हरों का लघुतम समापवर्त्य निकाल कर समान हर बनाया जाये तो भिन्न अंश और हर के सबसे सरलतम रूप में प्राप्त होगा।

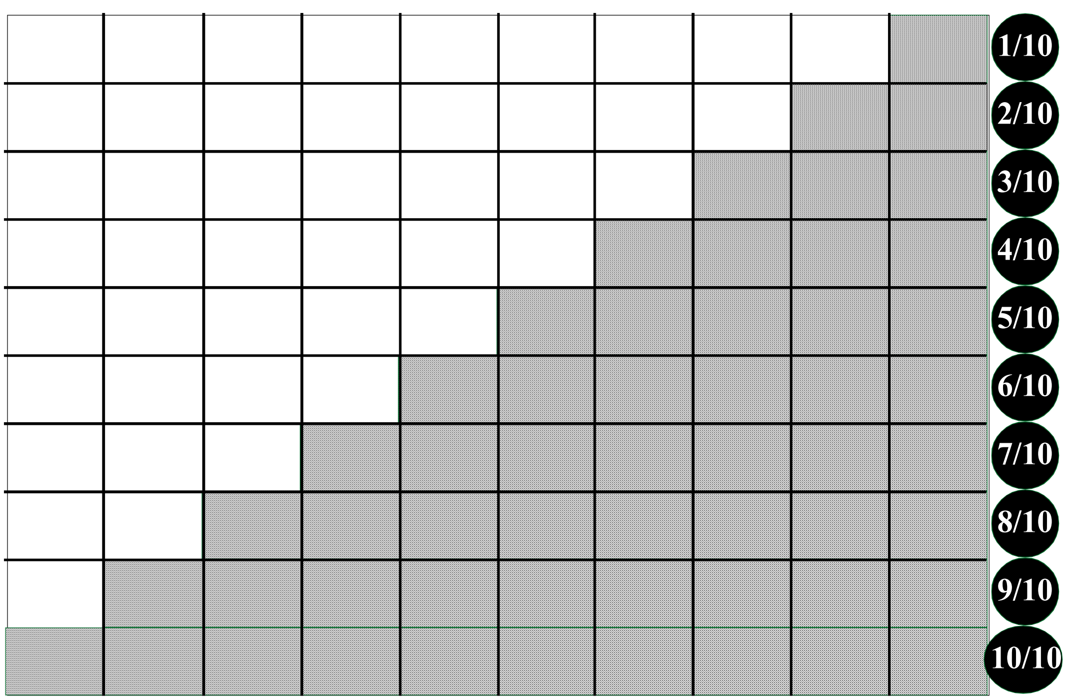
उदाहरण 1. **भिन्नों का क्रमण**



ऊपर हम देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$

अतः जब भिन्नों के अंश समान हों तो हर के बड़ा होने पर भिन्न का मान छोटा हो जाता है।

उदाहरण 2. $\frac{1}{10} =$ 



उपरोक्त चित्र से यह स्पष्ट होता है कि

$$\frac{1}{10} < \frac{2}{10} < \frac{3}{10} < \frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10} < \frac{10}{10}$$

दिए गए समान हर वाले भिन्नों में जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ा होता है।

अतः समान हर भिन्नों में अंश के बड़ा या छोटा होने पर भिन्न बड़ा या छोटा होता है।

यदि हर समान न हो तो बड़ा या छोटा भिन्न पता करने के लिए, समान हर वाले तुल्य भिन्न बनाए जाते हैं।

जैसे $\frac{5}{12}$ और $\frac{7}{18}$ में कौन सी भिन्न बड़ी है?

12 एवं 18 का लघुतम समापवर्त्य 36 है।

$$\Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$$

तथा $\frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{18 \times 2} = \frac{14}{36}$

समान हर भिन्न हुए $\frac{15}{36}$ और $\frac{14}{36}$

अतः $\frac{15}{36} > \frac{14}{36}$ यानी $\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$

अभ्यास

नीचे कुछ भिन्न संख्यायें दी गई है उन्हें बढ़ते हुए क्रम में लिखिए।

1. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$
2. $\frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{5}{9}$
3. $\frac{7}{9}, \frac{11}{15}, \frac{13}{18}$
4. $\frac{3}{7}, \frac{8}{9}, \frac{5}{12}$
5. $\frac{11}{12}, \frac{11}{13}, \frac{11}{14}$

आपने भिन्नों को समान हर भिन्नों में बदलकर उन्हें बढ़ते अथवा घटते क्रम में लिखना सीख लिया है। इसी प्रकार भिन्नों को समान हर बनाकर भी जोड़ा एवं घटाया जाता है।

उदाहरण 3. हल करें : $\frac{3}{5} + \frac{7}{9} + \frac{2}{3}$

इन भिन्नों को जोड़ने के लिए हमें हर समान करना होगा ताकि हम बराबर टुकड़े जोड़ें। समान हर बनाने के लिए सर्वप्रथम सभी हरों का लघुत्तम निकालते हैं।

3	5,9,3
	5,3,1

लघुतम समापवर्त्य = 3X5X3 = 45

अब सभी भिन्नों को 45 हर वाली तुल्य भिन्न संख्या बनाते हैं।

अतः संख्याएँ बनीं $\frac{27}{45}, \frac{35}{45}, \frac{30}{45}$

अत: $\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{2}{3}=\frac{27}{45}+\frac{35}{45}+\frac{30}{45}$ [चूंकि सभी भिन्नों के हर समान हैं इसलिए अंशों को जोड़ने पर]

$=\frac{27+35+30}{45}=\frac{92}{45}$

उदाहरण 4. हल करें : $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{12}$

3, 5 और 12 का लघुतम समापवर्त्य

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3,5,12 \\ \hline & 1,5,4 \end{array}$$

ल. स. = 3 x 5 x 4 = 60

$\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{12}=\frac{20}{60}+\frac{36}{60}-\frac{40}{60}$

$=\frac{20+36-40}{60}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$

(सरलतम रूप : आप जानते हैं कि भिन्न के अंश व हर में एक ही संख्या का भाग देने पर भिन्न संख्या के मान में परिवर्तन नहीं होता है, अतः यहाँ $\frac{16}{60}$ में अंश व हर में 4 का भाग देकर $\frac{4}{15}$ प्राप्त किया है।)

अभ्यास – हल करें :

क्र.स.	प्रश्न	हरों का ल.स.	भिन्नों को प्राप्त ल.स. वाले समहर भिन्न में बदलने पर	समहर भिन्न के अंशों का योगफल एवं अंतर	हल	सरलतम भिन्न
1.	$\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{1}{15}$	45	$\frac{27}{45}+\frac{35}{45}+\frac{3}{45}$	27 + 35 + 3 = 65	$\frac{65}{45}$	$\frac{13}{9}$
2.	$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}$	30	$\frac{20}{30}+\frac{18}{30}-\frac{5}{30}$	20 + 18 − 5 = 33	$\frac{33}{30}$	$\frac{11}{10}$
3.	$\frac{1}{6}-\frac{4}{7}+\frac{8}{4}$					
4.	$\frac{2}{5}-\frac{11}{13}+\frac{15}{4}$					
5.	$\frac{6}{7}+\frac{11}{14}-\frac{9}{21}$					
6.	$\frac{3}{26}-\frac{5}{39}+\frac{1}{13}$					

ऊपर प्रश्नों को हल करते समय आपने यह पाया है कि कई हल ऐसे हैं जहाँ अंश का मान हर से अधिक है। ऐसे भिन्नों को **विषम भिन्न** अथवा **अनुचित भिन्न** कहते हैं।

जैसे – $\frac{13}{9}$ में अंश (13) > हर (9)

अतः $\frac{13}{9}$ एक अनुचित भिन्न है। इसी प्रकार $\frac{11}{10}$ भी एक अनुचित भिन्न है।

$\frac{13}{9}$ को $1+\frac{4}{9}$ या $1\frac{4}{9}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। इसे **मिश्र भिन्न** कहते है।

जब भिन्न का अंश हर से छोटा हो तो उसे **उचित भिन्न** कहते हैं।

जैसे – $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{101}{106}$ इत्यादि।

क्रियाकलाप 4

नीचे दिए गए भिन्नों से उचित तथा अनुचित भिन्नों को पहचान कर अनुचित भिन्नों को मिश्र भिन्न के रूप में लिखिए।

क्र.स.	भिन्न	उचित अथवा अनुचित	यदि अनुचित हो तो मिश्र भिन्न के रूप में	क्र.स.	भिन्न	उचित अथवा अनुचित	यदि अनुचित हो तो मिश्र भिन्न के रूप में
1.	$\frac{127}{29}$	अनुचित	$4\frac{11}{29}$	5.	$\frac{126}{127}$		
2.	$\frac{29}{127}$	उचित	–	6.	$\frac{36}{39}$		
3.	$\frac{29}{133}$			7.	$\frac{103}{13}$		
4.	$\frac{81}{10}$			8.	$\frac{335}{33}$		

भिन्न संख्याओं का गुणा एवं भाग

दो भिन्नों का जब गुणा होता है तब अंश का अंश के साथ एवं हर का हर के साथ गुणा हो जाता है। जैसे अगर हमें आधे का आधा निकालना हो तो वह $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ है इसी तरह पौने का आधा $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$ होगा। हम यह भी जानते है कि आध ा का आधा एक पाव होता है, $\frac{1}{2}$ का दुगुना 1 होता है। अर्थात् हर को हर से और अंश को अंश से गुणा करने पर उत्तर प्राप्त होता है।

जैसे : $\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{8\times5}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$

आइए भाग की संक्रिया को नीचे दिए गये उदाहरणों से समझें –

$6 \div 3$ का मतलब यह हुआ कि 6 में 3 कितनी बार आता है। अब यह सोचें कि $\frac{1}{2}$ में $\frac{1}{4}$ कितनी बार आता है। दोनों सवालों में उत्तर 2 ही है। इसी प्रकार $\frac{3}{2}$ में $\frac{1}{2}$ तीन बार आता हैं।

$$3 \div 5 = \frac{3}{1} \div \frac{5}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$8 \div 9 = \frac{8}{1} \div \frac{9}{1} = \frac{8}{1} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{8}{7} \div \frac{11}{13} = \frac{8}{7} \times \frac{13}{11} = \frac{104}{77}$$

इस प्रकार जब एक भिन्न को दूसरे भिन्न से भाग दिया जाता है तब भाजक की भिन्न संख्या उलट दी जाती है अर्थात् भाजक का अंश हर में और हर अंश में चला जाता है तथा भाग का चिन्ह गुणा में बदल जाता है।

अभ्यास

निम्न भिन्नों को हल कर सरलतम रूप में लिखिए –

(1) $\frac{1}{3} \div \frac{5}{7}$ (2) $\frac{121}{70} \div \frac{11}{35}$

(3) $\frac{27}{8} \div \frac{81}{16}$ (4) $\frac{33}{28} \div \frac{11}{4}$

इसी प्रकार कुछ और सवाल बनाइए और साथियों से हल करवाइए।

2MPI5M

संख्याओं का स्थानीय मान (Place Value)

अब तक आप संख्याओं से कई तरह के खेल, खेल चुके हैं। जोड़ना, घटाना, गुणा करना एवं भाग देना सीख चुके हैं। इस दौरान आपने अंको के स्थानीय मानों जैसे इकाई, दहाई सैंकड़ा, हजार इत्यादि को भली–भाँति समझा और परखा है। आइए अंकों के स्थानीय मान के बारे में आगे कुछ और चर्चा करें।

अंक 3, 6 और 8 को क्रम बदलकर 3 अंकों की कितनी संख्यायें बना सकते हैं ?

(i) 368 (ii) 386 (iii) .... (iv) .... (v) .... (vi) ....

प्रत्येक बार आप उन्हीं अंकों (3,6 और 8) का उपयोग कर रहें हैं परन्तु संख्याओं के मान भिन्न–भिन्न क्यों हो रहें हैं ? अपने साथियों से चर्चा कर कारण लिखिए– ....

....

मैरी ने हमीदा से कहा – 368 में 8 का मान 8 है।

386 में 8 का मान 80 है।

836 में 8 का मान 800 है।

इस प्रकार एक ही अंक मान अलग–अलग स्थानों पर अलग–अलग हो रहा है। यदि हम आठ हजार आठ सौ अठ्यासी (8888) लिखें तो अंक 8 का मान एक स्थान पर 8000 है। एक स्थान पर 800 है।

एक स्थान पर 80 है तथा एक स्थान पर 8 है।

आइये दो संख्याओं 368 और 895 को जोड़ कर देखें –

हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
	3	6	8
	8	9	5
	11	15	13

क्या इस तरह योग दर्शाना सही है ?

इकाई के अंकों को जोड़ने पर 13, दहाई के अंकों को जोड़ने पर 15,सैंकड़ा के अंकों को जोड़ने पर 11 प्राप्त हुए। इस योगफल को स्थानीय मान के आधार पर देखें तो 11 सैंकड़ा, 15 दहाई, 13 इकाई प्राप्त होते हैं। अतः इसे निम्नलिखित रूपों में लिखा जा सकता है :–

11 सैंकड़ा + 15 दहाई + 13 इकाई परन्तु किसी भी स्थान पर सबसे बड़ा अंक 9 ही हो सकता है, क्योंकि 10 होने पर उस स्थान पर केवल 0 रह जाएगा और 1 अगले स्थान पर जुड़ने के लिए चला जाएगा। ऊपर उदाहरण में 8 और 5 जोड़ने पर 13 इकाई होते हैं। 13 की संख्या में 3 इकाई और 1 दहाई होने के कारण 3 को इकाई के स्थान पर तथा 1 दहाई स्थान पर 6 और 9 के साथ जोड़ा जाता है । इस प्रकार सभी दहाई के अंकों को जोड़ने पर 6 + 9 + 1 = 16 दहाई आया। 16 दहाई में 10 दहाई बराबर एक सैंकड़ा होने के कारण केवल 6 दहाई के स्थान पर लिखा जावेगा तथा 10 दहाई का 1 सैंकड़ा को सैंकड़ा के अंको में जोड़ा जायगा। इससे 3 + 8 + 1 = 12 सैंकड़ा बन जाएगा। इसी क्रम में विचार करने पर 12 सैंकड़ा में 10 सैंकड़ा बराबर 1 हज़ार होता है। इसलिए उसे अलग कर सैंकड़ा के स्थान पर केवल 2 लेंगे। इस प्रकार शेष बचे 10 सैंकड़ा का मान 1 हजार होने के कारण हज़ार के स्थान पर 1 लिखा जायगा। इस प्रकार उपरोक्त प्रश्न का योगफल –

हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई		
1	2	6	3	=	1263

ऊपर दिए गए उदाहरण की तरह आप निम्नलिखित संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

(1)

हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
	7	8	5
	6	1	8

(2)

हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
	5	6	8
	4	3	9

(3)

हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
	8	6	4
	3	9	5
	9	2	7

(4)

हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
	4	3	8
	8	6	7
	2	8	9

अब यह स्पष्ट हो गया कि 10 इकाई = 1 दहाई, 10 दहाई = 1 सैंकड़ा,

10 सैंकड़ा = 1 हजार, 10 एक हजार = एक दस हजार और दस,दस हजार = 1 लाख होता है। इसी प्रकार यदि इसके उल्टे चलें तो –

1 लाख ÷ 10 → 10 हजार ÷ 10 → 1 हजार ÷ 10 → 1 सैंकड़ा ÷ 10 →

→ 1 दहाई ÷ 10 → 1 इकाई ÷ 10 और अब और आगे चलें तो

विपरीत चलने पर

100 हजार / 1 लाख → दस हजार / दस हजार → 10 सैंकड़ा / 1 हजार → 10 दहाई / 1 सैंकड़ा → 10 इकाई / 1 दहाई → 1 इकाई → ?

इस प्रक्रिया में दाएँ से बाएँ बढ़ते समय क्रमशः 10 का गुणा होता है । इसके उलटी दि   ा में चलने पर क्रमशः 10–10 का भाग होता चलता है। अब सोचें कि इकाई में 10 का भाग देने पर क्या होता है? आप को याद होगा

$$1 \div 10 = \frac{1}{10} = 0.1$$

इसी प्रकार इस क्रम को जारी रखा जाए तो –

1 लाख $\xrightarrow{\div 10}$ दस हजार $\xrightarrow{\div 10}$ 1 हजार $\xrightarrow{\div 10}$ 1 सैंकड़ा $\xrightarrow{\div 10}$ 1 दहाई $\xrightarrow{\div 10}$

→ 1 इकाई $\xrightarrow{\div 10}$ $\frac{1}{10}$ दसवाँ भाग 0.1 $\xrightarrow{\div 10}$ $\frac{1}{100}$ सौवाँ भाग 0.01 $\xrightarrow{\div 10}$ $\frac{1}{1000}$ हजारवाँ भाग 0.001 $\xrightarrow{\div 10}$ $\frac{1}{10000}$ दस हजारवाँ भाग 0.0001 ····>·····>

इत्यादि।

अतः हम कह सकते हैं कि –

जिस प्रकार दाएँ से बाएँ जाते समय स्थानीय मान दस गुणा हो जाता है। उसी प्रकार बाएँ से दाएँ आते समय स्थानीय मान $\frac{1}{10}$ गुणा हो जाता है या 10 वाँ भाग हो जाता हैं।

आइए इसे निम्न उदाहरण से देखें –

0.325 का स्थानीय मान निकालें –

दशमलव के बाद पहला स्थान अर्थात् 0.1 = $\frac{1}{10}$	दशमलव के बाद दूसरा स्थान अर्थात् 0.01 = $\frac{1}{100}$	दशमलव के बाद तीसरा स्थान अर्थात् 0.001 = $\frac{1}{1000}$
3	2	5
3 X 0.1 = 0.3	2 X 0.01 = 0.02	5 X 0.001 = 0.005

या

$$0.3 + 0.02 + 0.005 = 0.325$$

इसी प्रकार $0.628 = 0.6 + 0.02 + 0.008$

या $0.628 = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$

क्रियाकलाप 5.

नीचे दी गयी सारणी में स्थानीय मान के अंकों को उचित स्थान से भरिए।

संख्या	100000 एक लाख	10000 दस हज़ार	1000 हजार	100 सैकड़ा	10 दहाई	1 इकाई	.1= 1/10 द मलव के बाद पहला स्थान	.01= 1/100 द मलव के बाद दूसरा स्थान	.001= 1/1000 द मलव के बाद तीसरा स्थान	.0001= 1/10000 दशमलव के बाद चौथा स्थान
830000.3257										
63.0095										
30.8007										
968.038										
3235.0509										

कक्षा 5वीं में हमनें लंबाई के बारे में अध्ययन किया है। जिसमें हमने सीखा हैः–

10 मिमी = 1 सेमी

1 मिमी $= \frac{1}{10}$ सेमी = 0.1 सेमी

100 सेमी = 1 मी.

1 सेमी. $= \frac{1}{100}$ मी. = 0.01 मी.

1000 मी. = 1 किमी

1 मी $= \frac{1}{1000}$ किमी = 0.001 किमी

उदाहरण 5 :

रमेश एक शहर से दूसरे शहर की 150.5 किमी. की दूरी ट्रेन से, 65.7 किमी. बस से तथा शेष 900 मी. की दूरी पैदल ही तय करता है। बताइए रमेश ने कुल कितनी दूरी तय की।

हलः–

रमेश द्वारा तय की गई दूरीः–

ट्रेन द्वारा 150.5 किमी.

बस द्वारा 65.7 किमी.

पैदल 900 मी.

हम जानते है कि

$$1 \text{ मी.} = \frac{1}{1000} \text{ किमी.}$$

$$900 \text{ मी.} = \frac{1}{1000} \times 900 = 0.9 \text{ कि.मी}$$

अतः

	150.5	किमी.
	65.7	किमी.
+	0.9	किमी.
=	217.1	किमी.

अतः रमेश ने कुल 217.1 किमी. की दूरी तय की।

आप जानते हैं

1 रुपये =100 पैसे

$$1 \text{ पैसे} = \frac{1}{100} \text{ रुपये} = 0.01 \text{ रुपये}$$

उदाहरण 6. यदि 6 पेनों की कीमत 72 रु. है, तो 1 पेन की कीमत बताइए।

हलः–

जबकि 6 पेन की कीमत 71 रु. है

$$\text{तब 1 पेन की कीमत} = \frac{72}{6} \text{ रु.}$$

$$= 12 \text{ रुपये}$$

अतः 1 पेन की कीमत 12 रुपये होगी।

उदाहरण 7.

किसी दिन दोपहर के समय एक शहर का तापमान 36^0 सेंटीग्रेड था और रात को दस बजे 28.5^0 सेंटीग्रेड हो गया। बताइए तापमान में कितनी गिरावट आई।

हलः–

दोपहर के समय तापमान = 36.0^0 सेंटीग्रेड

रात के समय तापमान = 28.5^0 सेंटीग्रेड

तापमान में गिरावट = $36.0^0 - 28.5^0$

= 7.5^0 सेंटीग्रेड

अभ्यास

1 एक मीटर कपड़े की कीमत 24.75 रु. है तो 2.8 मी. कपड़े की कीमत बताइए।

2 अनुज दुकानदार से एक पुस्तक 143.60 रु. में खरीदता है और वह दुकानदार को 500 रु. देता है, बताइए दुकानदार ने अनुज को कितने रुपये लौटाये।

3\. अक्षत अपने गाँव जाने के लिये 26 किमी. कार से जाता है, 105 किमी. 500 मी. बस से जाता है और बची हुई दूरी 1 किमी. 250 मी. को पैदल चलकर तय करता है। बताइए वह कुल कितनी दूरी तय करता है।

4. दो शहरों के तापमान क्रमशः 20.50^o सेंटीग्रेड और 24^o सेंटीग्रेड है। बताइए दोनों शहरों के तापमान में कितना अंतर है?

प्रश्नावली 7

1. नीचे दिए गए कथनों में सत्य कथनों के आगे सत्य एवं असत्य कथनों के आगे असत्य लिखिए। असत्य कथनों को सुधार कर लिखें।

   (i) $\frac{13}{16}$ और $\frac{78}{119}$ तुल्य भिन्न हैं। ....

   (ii) $\frac{33}{17}$ एक उचित भिन्न है। ....

   (iii) $\frac{15}{22}$ और $\frac{60}{88}$ तुल्य भिन्न हैं। ....

   (iv) $\frac{23}{103}$ एक अनुचित भिन्न है। ....

   (v) $\frac{13}{3}$ को भिन्न के रूप में $4\frac{1}{3}$ भी लिखा जा सकता है। ....

   (vi) $\frac{3}{2} < \frac{2}{3}$ ....

   (vii) $-1 < .01$ ....

   (viii) $.2 \text{ x } .3 = .6$ ....

   (ix) $\frac{135}{10000} = .0135$ होता है। ....

   (x) $.056 \text{ x } 1000 = 56$ होता है। ....

2. निम्न भिन्नों को घटते क्रम में लिखिए।

   (i) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$ (i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{12}$

   निम्न संख्याओं को घटते क्रम में लिखिए।

   (iii) .0008, .08, .008, .8, 8 (iv) .01, .0099, .00992, .0012

3. निम्न भिन्नों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

   (i) $\frac{5}{6}, \frac{9}{24}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{2}{15}$

4. निम्न के मान प्राप्त कीजिए –

   (i) $\frac{1}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{5} + \frac{7}{4} + \frac{13}{6}$ (ii) $9 - .9 - .09 - .009 - .0009$

   (iii) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} \times \frac{4}{3} \div \frac{28}{15}$ (iv) $\frac{13}{27} \times \frac{3}{26} \div \frac{1}{18}$

(v) $\frac{17}{6}+\frac{19}{4}+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}$ (vi) $\frac{6}{7}+\frac{13}{14}-\frac{9}{21}$

5. रिक्त स्थानों को भरिए –

(i) $\frac{4}{5}=\frac{\cdots\cdots}{30}$ (ii) $\frac{7}{5}=\frac{\cdots\cdots}{55}$

(iii) $\frac{6}{7}=\frac{\cdots\cdots}{42}$ (iv) $\frac{4}{9}=\frac{\cdots\cdots}{18}$

6. निम्न में से उचित व विषम भिन्न को छाँटिए –

$\frac{17}{4}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{13}, \frac{15}{16}, \frac{6}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{5}$

7. निम्नलिखित का स्थानीय मान ज्ञात कीजिए।

(i) 843.23 (ii) 14.876 (iii) 8764.0314

हमने सीखा

1. किसी भी भिन्न को अनेक समतुल्य भिन्नों में बदला जा सकता है। इसके लिए भिन्न के अंश व हर को समान संख्या से गुणा या भाग किया जाता है।
2. भिन्नों की तुलना :
   - (i) यदि भिन्नों का अंश बराबर हो तो छोटी हर वाली भिन्न बड़ी भिन्न होगी।
   - (ii) यदि भिन्नों का हर बराबर हो तो बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी होगी।
   - (iii) भिन्नों की तुलना हर का लघुत्तम समापवर्त्तक लेकर सभी भिन्नों को समान हर भिन्न बनाकर किया जा सकता है।
3. जिन भिन्नों का हर, अंश से छोटा हो उन्हें विषम या अनुचित भिन्न कहते है।
4. जिन भिन्नों का हर अंश से बड़ा हो उन्हें उचित भिन्न कहते है।
5. जब दो भिन्नों का गुणा करते हैं, तब अंश का अंश से एवं हर का हर से गुणा हो जाता है।
6. भिन्न से भाग देने में भाजक भिन्न संख्या उलट जाती है एवं भाग की जगह गुणन चिह्न लग जाता है।

8
कोण

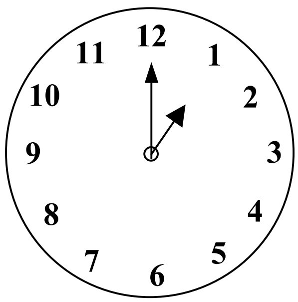
2N8A8X

जब आप दरवाजा खोलते अथवा बन्द करते हैं तो दरवाजा अलग–अलग स्थितियों में दीवार के साथ अलग–अलग कोण बनाता है। यदि शरीर को एक सीधी रेखा मान लें और हाथ को दूसरी सीधी रेखा तो हाथ को जैसे–जैसे घुमाते हैं शरीर के साथ हाथ अलग–अलग कोण बनाता है।

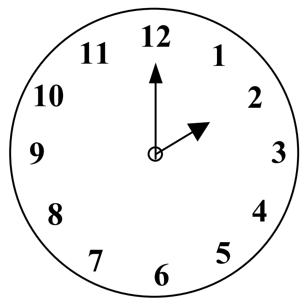
दैनिक जीवन में और कई स्थानों पर भी आपने कोणों को बनते हुए देखा है। जैसे घड़ी की दो सुईयों के बीच बना कोण, कैंची की दो भुजाओं के बीच बना कोण... इत्यादि।

और कहाँ–कहाँ आपने कोणों को बनते देखा है, अपनी कॉपी में लिखिए।

आइए, कुछ उदाहरणों को देखें जिनमें कोण बन रहे हैं :–

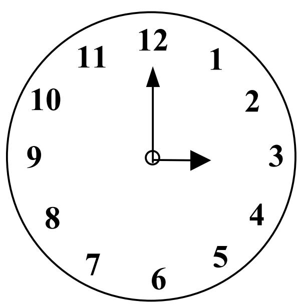


चित्र 1

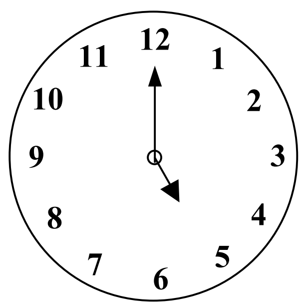


चित्र 2

घड़ी के सूईंयों से बनते कोण



चित्र 3



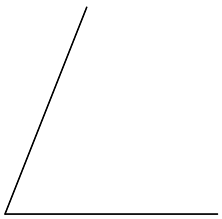
चित्र 4

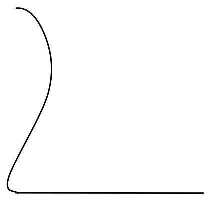
घड़ी के सभी चित्रों में बड़ी सुई 12 पर है तथा छोटी सुई की स्थिति अलग–अलग है, चित्र 1 में दोनों सुईयों के बीच का झुकाव या घुमाव कम है, चित्र 2, 3 एवं 4 में दोनों सुईयों के बीच झुकाव/घुमाव बढ़ता जाता है। इसी प्रकार कैंची का उपयोग करते समय उसकी दोनों भुजाओं के बीच झुकाव या घुमाव बदलता रहता है। डिवाइडर की दोनों भुजाओं के बीच भी उपयोग के अनुसार घुमाव बदलता है। भोजन करते समय आपने अनुभव किया होगा कि कोहनी पर बदलते घुमाव या झुकाव के कारण ही खाना थाली से मुंह तक पहुंचता है।

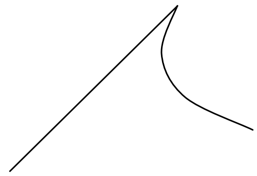
''किसी बिन्दु पर दो भुजाओं के बीच बनने वाले ऐसे ही घुमाव या झुकाव को कोण कहते हैं।''

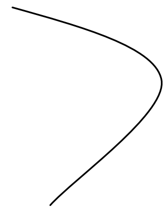
इसी प्रकार जब दो रेखाएँ अथवा किरणें एक दूसरे को काटती हैं अथवा मिलती हैं तो उन रेखाओं के बीच के घुमाव अथवा झुकाव को कोण कहते हैं।

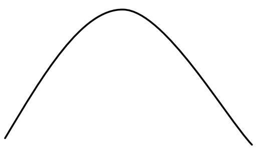
नीचे दिए गए चित्रों में किस चित्र में कोण बन रहे हैं और किस चित्र में कोण नहीं बन रहे हैं।

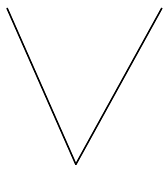

चित्र 5
_ _ _ _ _

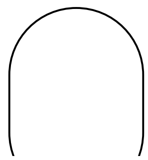

चित्र 6
_ _ _ _ _

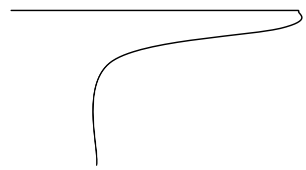

चित्र 7
_ _ _ _ _


चित्र 8
_ _ _ _ _


चित्र 9
_ _ _ _ _


चित्र 10
_ _ _ _ _


चित्र 11
_ _ _ _ _

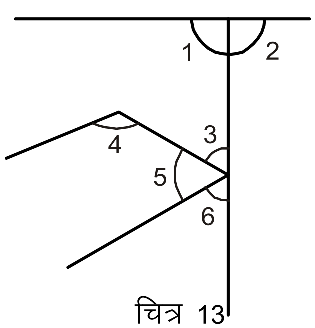

चित्र 12
_ _ _ _ _

उपरोक्त चित्रों में आपने देखा कि चित्र 5 में कोण बन रहा है, परंतु चित्र 8 में कोण नहीं बन रहा हैं, क्योंकि दो भुजाओं में से एक सीधी रेखा नहीं है अर्थात् **दो सरल रेखाओं अथवा रेखाखण्डों से ही कोण बन सकता है।**

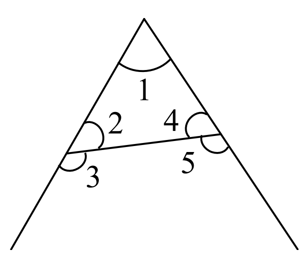
शिक्षक व अपने साथियों के साथ अपने आसपास के वातावरण व वस्तुओं में बनने वाले कोणों के बारे में चर्चा करें। अपने आस पास बनने वाले कोणें की सूची को और बड़ा बनाएँ।

✍ क्रियाकलाप 1.

जिस प्रकार हिन्दी के अक्षर 'त्र' में तथा अंग्रेजी के अक्षर **'A'** में नीचे दिखाए अनुसार कोण बन रहे हैं उसी प्रकार हिन्दी और अंग्रेजी के अक्षरों को लिखकर उनमें बनने वाले कोणों को चिह्नांकित कीजिए। किन अक्षरों में कोई भी कोण नहीं बनता।

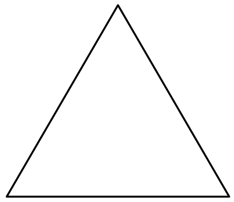


चित्र 13

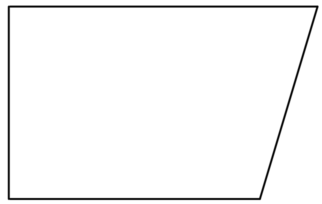


चित्र 14

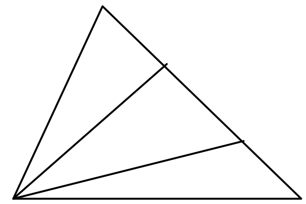
✍ क्रियाकलाप 2.



चित्र 15



चित्र 16



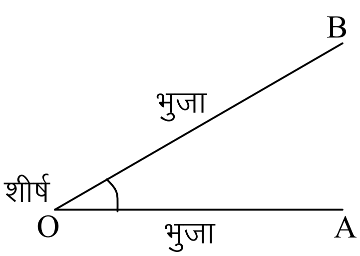
चित्र 17

उपरोक्त चित्रों को देखें और बताइए कि प्रत्येक में कितने कोण हैं?

चित्र	कोणों की संख्या
(15)	....
(16)	....
(17)	....

अब आप कोणों को पहचानने लगे हैं तथा कोण किस तरह बनते हैं यह भी जानने लगे हैं। क्या आप बता सकते हैं कि एक कोण बनने के लिए क्या–क्या जरूरी है?

प्रत्येक कोण में दो भुजाएँ होती हैं ये दोनों किसी बिन्दु पर मिलती हैं। जिस बिन्दु पर मिलती हैं उसे कोण का **शीर्ष** कहते हैं।

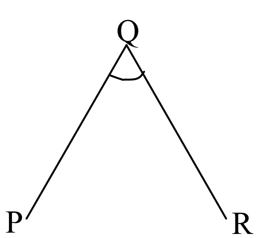


चित्र 18

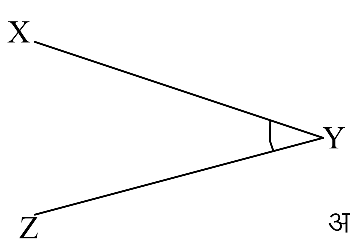
जैसे चित्र 18 में कोण AOB को देखें। OA और OB भुजाएँ हैं। जो कोण के शीर्ष 'O' पर मिलती हैं। इसमें OA की दिशा से OB की दिशा जाने में कितना घुमाव हुआ है यह कोण AOB बताता है।

कोण को संकेत को $\angle$ से दर्शाते हैं।

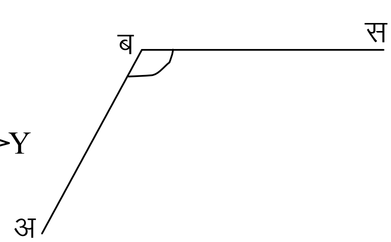
कोणों को उनके नाम से पढ़ना



चित्र 19



चित्र 20



चित्र 21

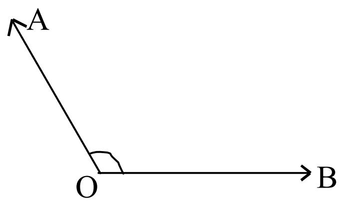
चित्र 19 में कोण को ∠PQR या ∠RQP के नाम से पढ़ते हैं या लिखते हैं। चित्र 20 में कोण को ∠XYZ या ∠ZYX के नाम से पढ़ते हैं।

याद रखें :– जिस बिन्दु पर कोण बनता है उसे शीर्ष कहते हैं। शीर्ष का स्थान लिखते या बोलते समय हमेशा बीच में होता है।

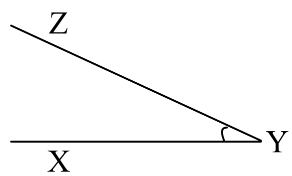
इसी प्रकार चित्र 21 में कोण को ∠अ ब स या ∠स ब अ पढ़ते या लिखते है।

क्रियाकलाप 3.

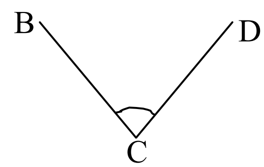
निम्न चित्रों में बने कोणों के नाम दिये गये स्थान पर दोनों प्रकार से लिखिए :–



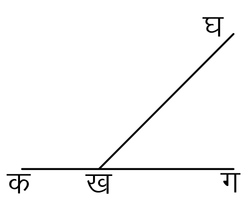
चित्र 22



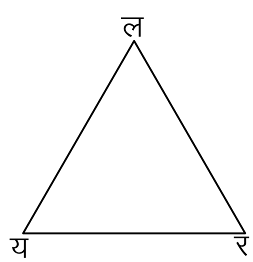
चित्र 23



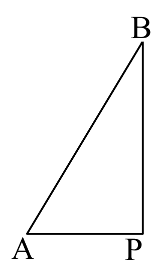
चित्र 24



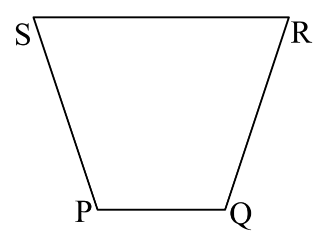
चित्र 25



चित्र 26



चित्र 27

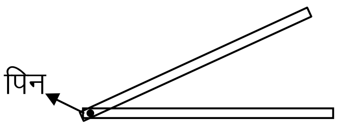


चित्र 28

चित्र क्रमांक	कोणों के नाम
जैसे– 22	∠AOB या ∠BOA
23	....
24	....
25	....
26	....
27	....
28	....

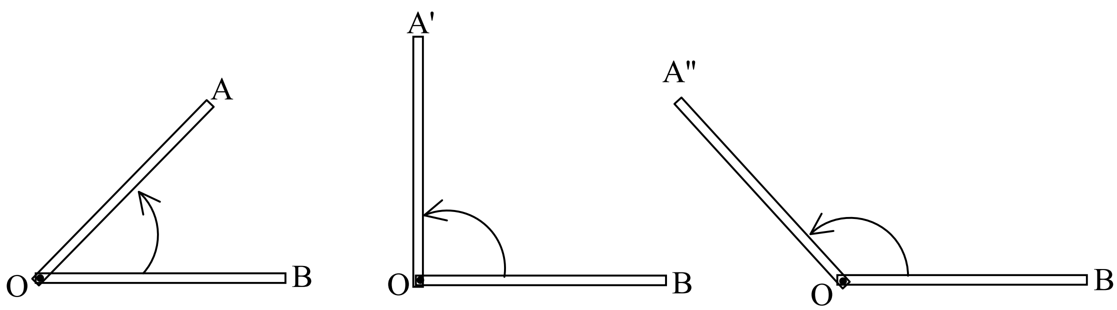
कोण की माप

क्रियाकलाप 4.



चित्र 29

दो झाड़ू की सींक या बाँस की कमची लीजिए। उनके एक–एक सिरे को मिलाकर उस पर एक पिन चित्रानुसार लगा दीजिए। आपका कोण बनाने वाला यंत्र अब तैयार है। अब आप एक सींक को स्थिर रखकर दूसरे सींक को घूमाने पर आपको अलग–अलग मान के कोण मिलेंगे। आइए, इसकी कुछ स्थितियों पर विचार करें –

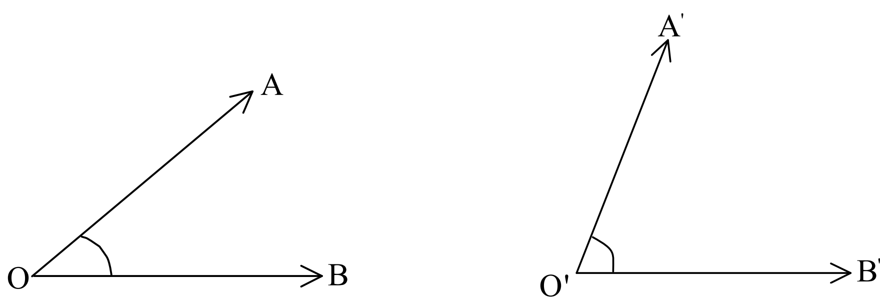


चित्र 30 चित्र 31 चित्र 32

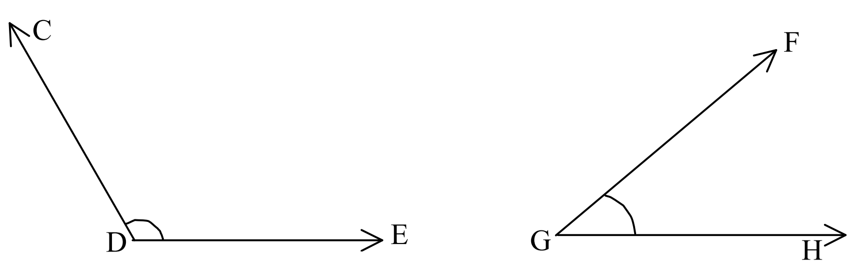
OB को स्थिर रखकर OA को घुमाते है जैसे–जैसे घुमाव बढ़ता है तो कोण का मान भी बढ़ता है या $\angle AOB < \angle A'OB < \angle A''OB$

कोण बनाने वाले यंत्र से अब आप सबसे बड़ा व सबसे छोटा कोण बनाकर अपने अध्यापक को बताएं।

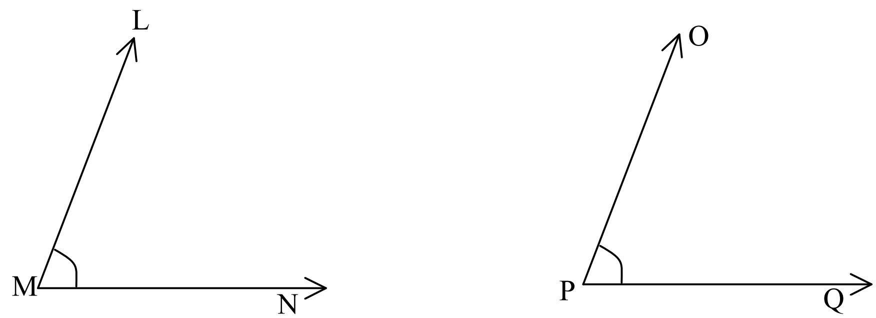
नीचे दिए गए कोणों में से बड़ा कोण बताइए।



चित्र 33



चित्र 34



चित्र 35

क्या $\angle LMN > \angle OPQ$ है? कारण बताइए?

ऐसी स्थिति जब दो कोणों को देखकर छोटा या बड़ा नहीं बताया जा सके तब हम ऐसे कोणों के माप को चाँदे से नाप कर पता लगाएँगे।

आप अपने चाँदे को देखें। इसके घुमावदार सतह पर समान दूरी पर निशान लगे हैं। इन्हें गिनकर पता लगाएं कि इस पर कुल कितने निशान बने हैं। अलग–अलग मान के अंशों को पहचाने तथा उसकी स्थिति देखें।

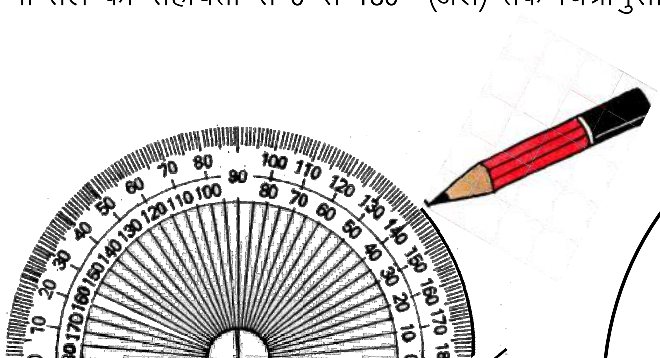
आइए, अब किसी एक निश्चित माप का कोण बनाते हैं। आपने कक्षा–5 में कोण तो बनाया ही होगा। कोण बनाने के लिए स्केल और चाँदा की आवश्यकता पड़ती है। अपने कम्पास बाक्स में रखे चाँदा को देखिए और इसके किनारे तथा इनमें बने कुल खण्डों के बारे में अपने कॉपी पर लिखिए।

जिस प्रकार लम्बाई नापने के लिए मीटर, सेमी. इत्यादि इकाइयों का उपयोग किया जाता है, उसी प्रकार दो रेखाओं के बीच कोण को मापने के लिए जिस इकाई का उपयोग किया जाता है, उसे ''अंश''(^{0}) कहते है।

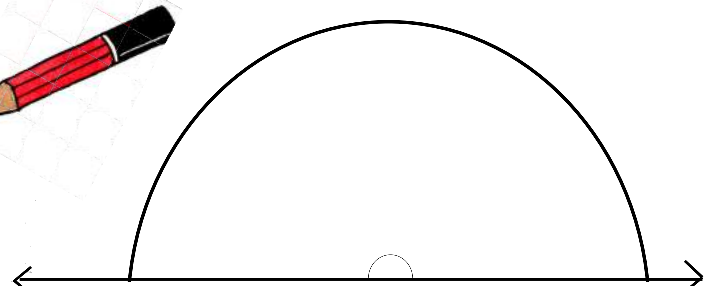
जैसे :–	45 अंश	=	$45°$
	22.5 अंश	=	$22.5°$

क्रियाकलाप 5.

आइये, अंशों के बारे में जानने का प्रयास करें। अपने कॉपी के कोरे पन्ने पर स्केल की सहायता से एक लम्बी रेखा खींचिए तथा इस रेखा के बीचों बीच चाँदे की आधार रेखा को रखिए। चाँदे के बाहरी सीमा पर पेन्सिल की सहायता से 0 से 180° (अंश) तक चित्रानुसार रेखा खींचिए (चित्र 36)।

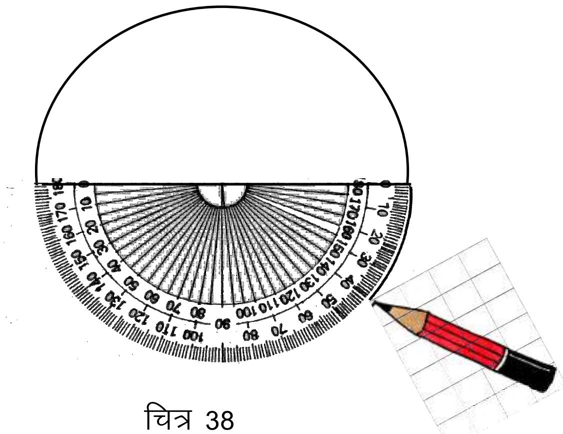


चित्र 36

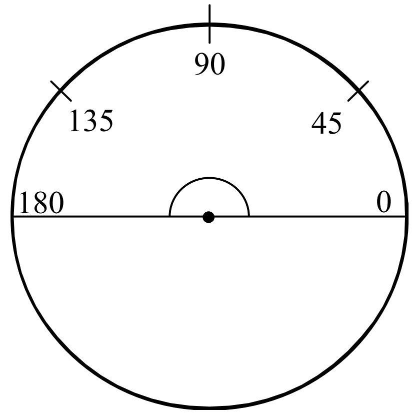


चित्र 37

चित्र 37 की तरह चाँदा हटाने पर वहाँ एक अर्धवृत्त का आकार बनता है। अब चाँदे को पूर्व आधार रेखा पर इस प्रकार रखें कि घुमावदार छोर नीचे की ओर ठीक विपरीत दिशा में रहे। (चित्र 38) अब चाँदे के घुमावदार सीमा में 0 से 180° तक पेंसिल पूर्वानुसार घुमाएँ। चाँदा हटाने पर आपको एक वृत्ताकार रचना मिलेगी (चित्र 39)



चित्र 38



चित्र 39

इस चित्र के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

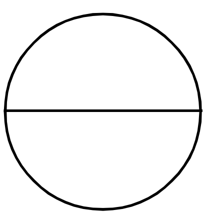
1. एक अर्द्धवृत्त के केन्द्र पर बना कोण (चित्र 37) = 180°
2. दूसरे अर्द्धवृत्त के केन्द्र पर बना कोण (चित्र 38) = ?
3. दोनों अर्द्धवृत्तो द्वारा संयुक्त रूप से केन्द्र पर कुल बना कोण = ?

आप पाते हैं कि पहले 180° और बाद में 180° का कोण बना इस प्रकार 360° का कोण एक बिन्दु पर बनता है। यह बिन्दु इस प्रकार बनने वाले वृत्त का केन्द्र बिन्दु भी है।

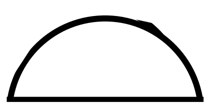
वृत्ताकार कागज़ के टुकड़े को काटकर बीच से ऐसे मोड़िए जिससे वृत्त दो बराबर भागों में बँट जाए। आप पाएंगे कि O से होकर एक सरल रेखा प्राप्त होती है जिस पर 180° का कोण बना है। इस कोण को सरल कोण भी कहते हैं।

इसी प्रकार एक वृत्त के केन्द्र पर कितने सरल कोण बन सकते हैं?

आपने वृत्ताकार कागज़ को दो भागों में मोड़कर सरल कोण प्राप्त किया है। अब उसे पुनः दो भागों में इस प्रकार मोड़े कि वृत्त चार बराबर भागों में बँट जाए। (नीचे चित्रानुसार)

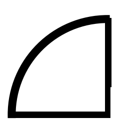


चित्र 40



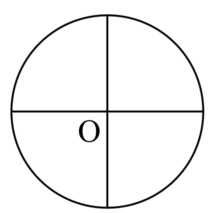
कागज एक बार मोड़ने पर

चित्र 41



दो बार मोड़ने पर

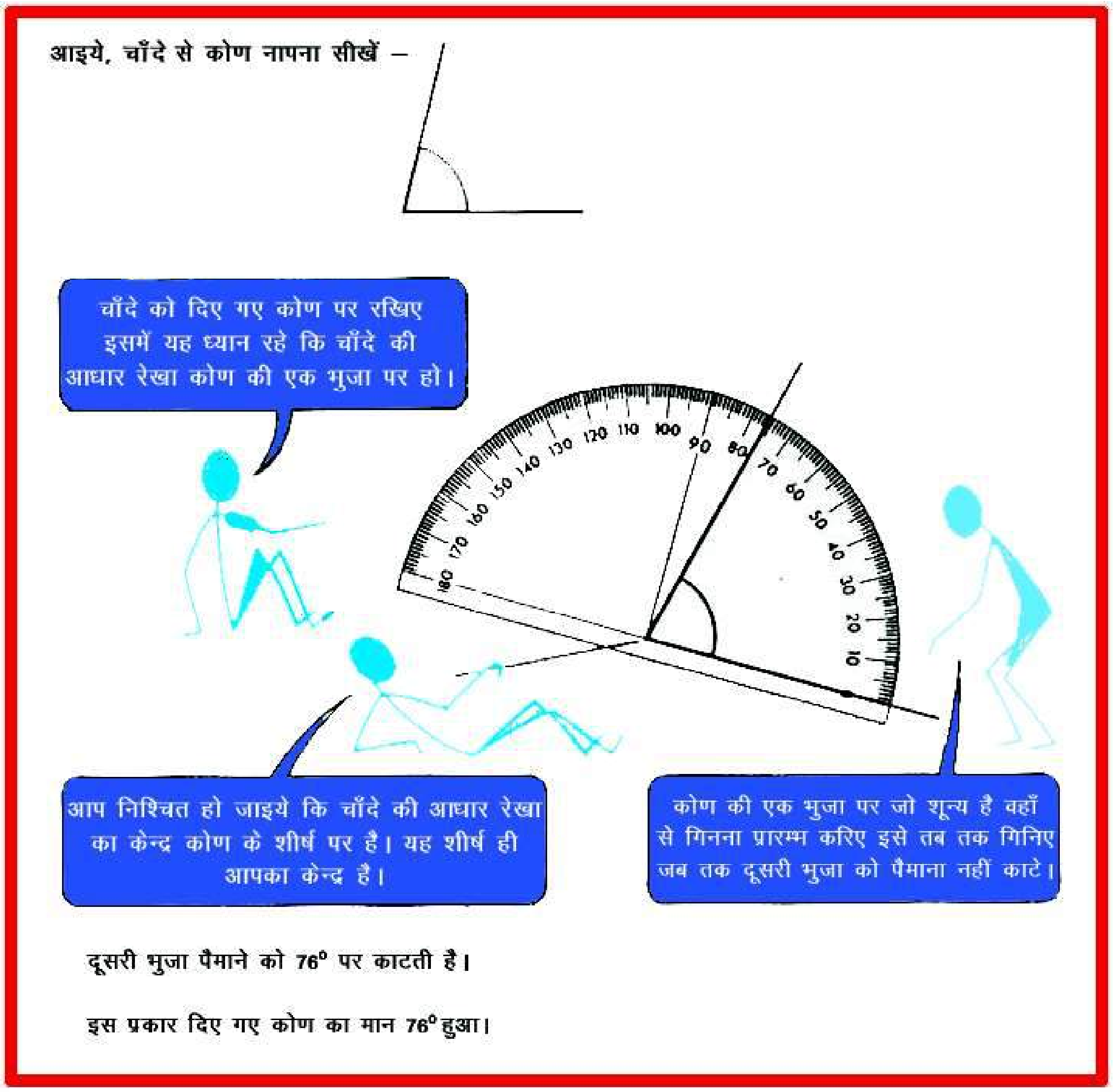
चित्र 42



कागज खोलने पर

चित्र 43

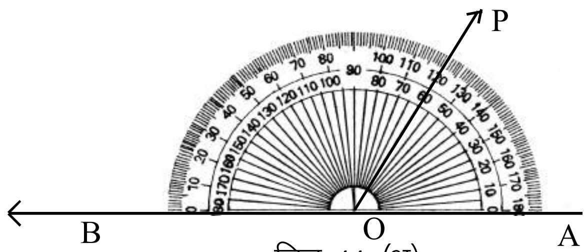
अब वृत्त बिन्दु O पर चार समान भागों में बंट गया है। आप बताएं कि बिन्दु O पर बने चारों कोणों का माप अलग–अलग कितने अंश का है?



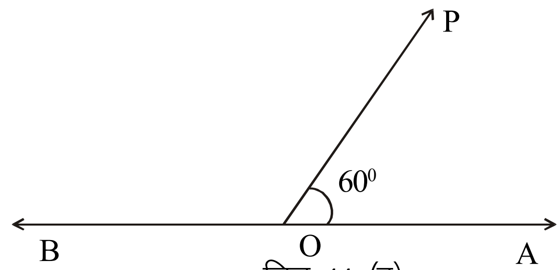
अभ्यास 1

आप अपनी कॉपी में विभिन्न नाप के 5–5 कोण बनाइये उन्हें नापिये एवं अपने साथियों व अध्यापक से जाँच कराइए।

चाँदे की सहायता से कोण बनाने के लिए सर्वप्रथम एक सरल रेखा AB खींचते हैं। इस सरल रेखा के जिस बिन्दु O पर कोण बनाना है, वहां चाँदें के मध्य बिन्दु को इस प्रकार रखेंगे कि चाँदें के आधार पर बनी सरल रेखा और कॉपी पर बनी सरल रेखा एक सीध में रहें। अब चाँदा के 0° से ऊपर लिखे गए अंक को पढ़ते चलें। जिस माप का कोण बनाना है वहाँ एक बिन्दु लगाएं। मान लीजिए आपको 60° का कोण बनाना है, तब चाँदा के शून्य से 60° तक ऊपर बढ़ें और एक बिन्दु P लगाएं। चाँदा हटाकर इस बिन्दु को सरल रेखा के बिन्दु से मिलाएं। अब $\angle POB = 60°$ का बन गया है।



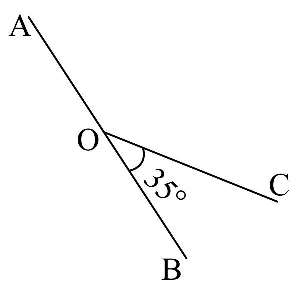
चित्र 44 (अ)



चित्र 44 (ब)

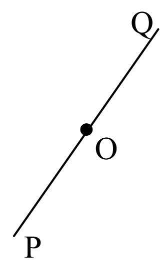
✍ क्रियाकलाप 6.

आपको कुछ रेखाएँ दी गई है। प्रत्येक रेखा में दिए हुए बिन्दु पर आप दिए हुए माप का (चित्र 44 की तरह) कोण बनाइए?



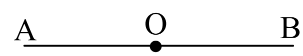
$\angle BOC = 35°$

चित्र 45



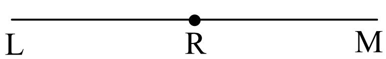
$\angle POR = 130°$

चित्र 46



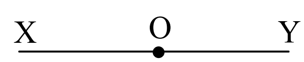
$\angle AOB = 180°$

चित्र 47



$\angle MRQ = 170°$

चित्र 48



$\angle YOZ = 70°$

चित्र 49

उपरोक्त चित्रों में आपने किन बिन्दुओं पर कोण बनाया तथा कोणों को किस ओर से शून्य से नापना शुरू किया।

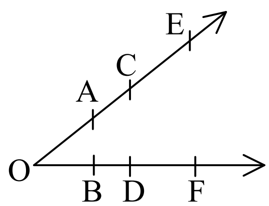
सारणी संख्या 1

चित्र क्रं.	बिन्दु जिस पर कोण बना है।	बिन्दु जिस ओर के शून्य से कोण को नापना प्रारम्भ किया
45	O	B
46		
47		
48		
49		

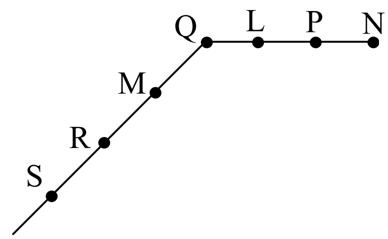
एक बात : *क्या आप जानते हैं कि* व्यक्ति के व्यायाम के समय सावधान की मुद्रा में दोनों एड़ियों के बीच 30° का कोण बनना चाहिए। ऐसी और भी बातें पता करिए।

✍ क्रियाकलाप 7.

चित्र में कोणों के माप तथा भुजाओं की लम्बाई नापकर दी गई सारणी में लिखिए तथा नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 50



चित्र 51

सारणी संख्या 2

चित्र संख्या	कोण का नाम	कोण का माप	कोण बनाने वाली भुजाओं के नाम		भुजाओं का माप	
50	$\angle AOB$	43^{O}	O A	O B		
50	$\angle COD$		O C	O D		
50	$\angle EOF$		O E	O F		
50	$\angle AOF$		O A	O F		
50	$\angle EOB$		O E	O B		
51	$\angle LQM$		Q L	Q M		
51	$\angle PQR$		Q P	Q R		
51	$\angle PQS$		Q P	Q S		
51	$\angle LQR$		Q L	Q R		

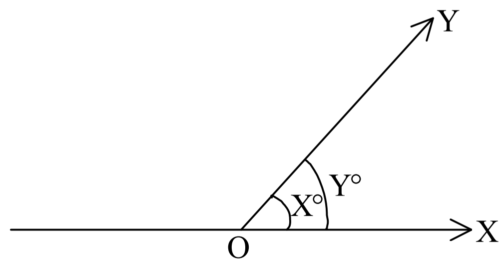
(1) क्या $\angle COD > \angle AOF$, $\angle EOF > \angle COD$ यदि नहीं तो क्यों नहीं?

(2) क्या कोणों का माप भुजाओं की लम्बाई पर निर्भर है?

(3) दो भुजाओं के बीच बने कोणों का अधिक या कम होना किस बात पर निर्भर करता है?

✍ क्रियाकलाप 8.

चित्र 52 में कोण X° व Y° का मान चाँदे की सहायता से मापिये? क्या $X^\circ = Y^\circ$ है? अपनी कॉपी में लिखिए।



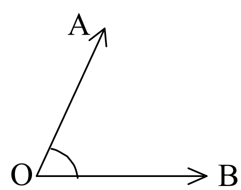
चित्र 52

क्रियाकलापों से स्पष्ट होता है कि कोणों के माप, कोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाई (चाप) पर निर्भर नहीं करते क्योंकि कोण सरल रेखाओं अथवा किरणों से मिलकर बने हो सकते हैं जिनका विस्तार असीमित होता है। दोनों रेखाएँ असंख्य बिन्दुओं से मिलकर बनी होती हैं। **अतः दो सरल रेखाओं के बीच किन्हीं दो बिन्दुओं की दूरी कोण की माप नहीं है।**

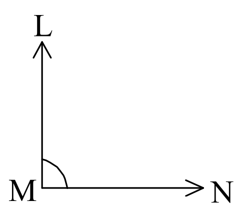
प्रश्नावली 8.1

1. कोणों के नाम लिखिए –

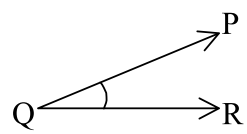
(i)



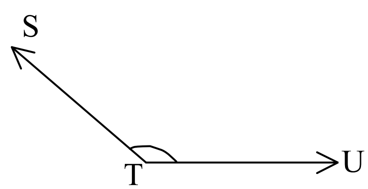
(ii)



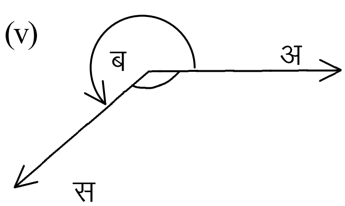
(iii)



(iv)

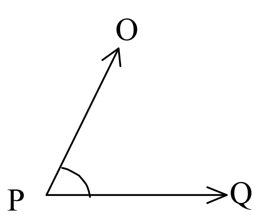


(v)



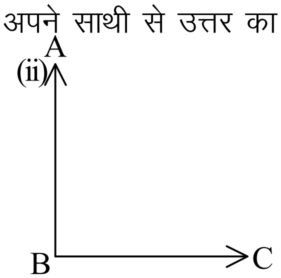
2. चाँदे की सहायता से कोण माप कर लिखिए तथा अपने साथी से उत्तर का मिलान करिए–

(i)



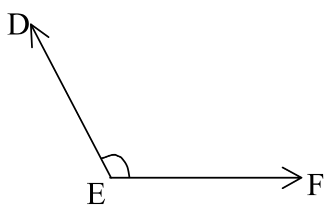
∠OPQ = ...

(ii)



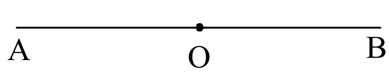
∠ABC = ...

(iii)



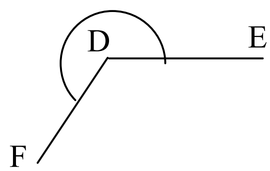
∠DEF = ...

(iv)



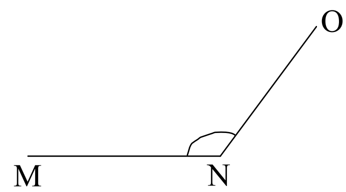
∠AOB = ...

(v)



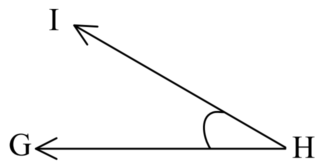
$\angle EDF = ...$

(vi)



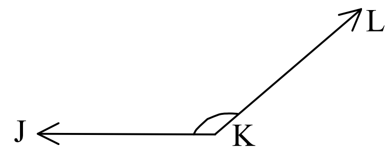
$\angle MNO = ...$

(vii)



$\angle GHI = ...$

(viii)



$\angle JKL = ...$

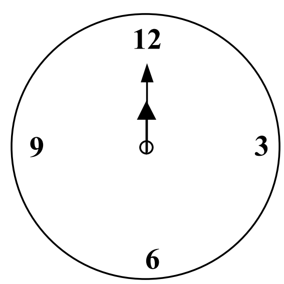
3. चाँदे की सहायता से निम्न कोण बनाएं –

(i) 45° (ii) 75° (iii) 90° (iv) 120° (v) 155°
(vi) 210°

4. 6 बजे घड़ी की दोनों सुईयों (घंटा एवं मिनट) के बीच कितना कोण बनेगा।

कोणों के प्रकार

क्या आप बता सकते हैं कि घड़ी में जब ठीक 12 बज रहे हों तो घंटा और मिनट सुई के बीच कितने अंश का कोण बनता है?



कोण का माप ....

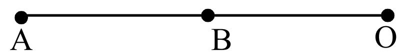
चित्र 53

क्या आप बता सकते हैं कि 12 घंटे में कितनी बार घड़ी की बड़ी सुई (मिनट) छोटी सुई (घंटा) को ढंक लेगी?

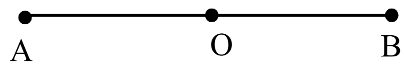
क्या आप बता सकते हैं जब एक सुई दूसरी सुई को ढंक लेगी तब उनके बीच झुकाव कितने अंश का होगा?

इसी प्रकार जब एक रेखा दूसरी रेखा को ढंक ले तो उनके बीच शून्य अंश का कोण बनता है। अब घड़ी में 2 बज कर 45 मिनट की स्थिति को देखिए तथा बताइए कि दोनों सुईयों के बीच कितने अंश का कोण बनेगा?

चित्र 54 में $\angle AOB = 0°$ अर्थात् OA रेखा खण्ड के ठीक ऊपर OB रेखाखण्ड है जिससे उनके बीच का झुकाव शून्य अंश का है। चित्र 55 में $\angle BAO$ का मान क्या होगा?

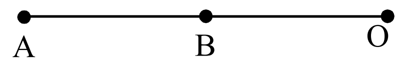


चित्र 54



चित्र 55

1. **शून्य कोण** : वह कोण जिसका माप 0° हो शून्य कोण कहलाता है

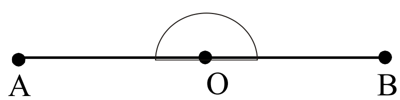


$\angle AOB = 0°$

चित्र 56

परन्तु चित्र 55 में OA और OB दोनों रेखाखण्ड विपरीत दिशा में हैं और मिलकर एक बड़ा रेखाखण्ड बना रहे हैं, ऐसी स्थिति में $\angle AOB = 180°$ इसे **सरल कोण** के नाम से जानते हैं।

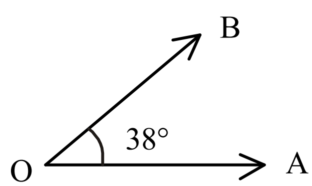
(2) **सरल कोण** : वह कोण जिसका माप 180° हो सरल कोण कहलाता है।



$\angle AOB = 180°$

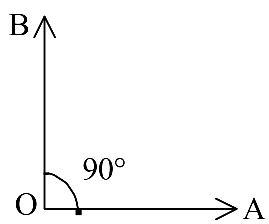
चित्र 57

(3) **न्यूनकोण** : वह कोण जो 0° से बड़ा तथा 90° से छोटा हो, न्यूनकोण कहलाता है।



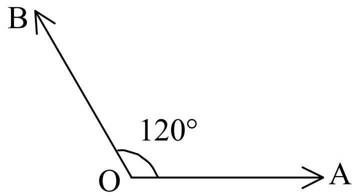
चित्र 58

(4) **समकोण** : वह कोण जिसकी माप 90° हो समकोण कहलाता है। समकोण में एक भुजा दूसरी भुजा पर लम्ब होती है।



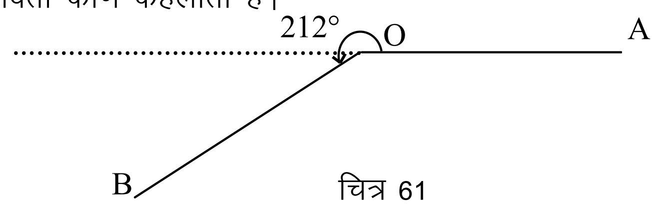
चित्र 59

(5) **अधिक कोण** : एक कोण जिसका माप 90° से अधिक परन्तु 180° से कम हो अधिक कोण कहलाता है।



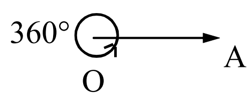
चित्र 60

(6) **प्रतिवर्ती कोण (वृहत् कोण)** : वह कोण जिसका माप समकोण 180° से अधिक तथा 360° से कम हो, प्रतिवर्ती कोण कहलाता है।



चित्र 61

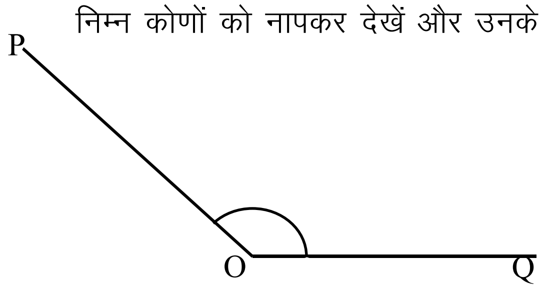
(7) **सम्पूर्ण कोण** : यदि कोई किरण अपने प्रारम्भिक बिन्दु के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाने के बाद अपने प्रारम्भिक स्थिति से सम्पाती हो जाए तो इस प्रकार बना कोण सम्पूर्ण कोण कहलाता है। यह कोण 360° का होता है।

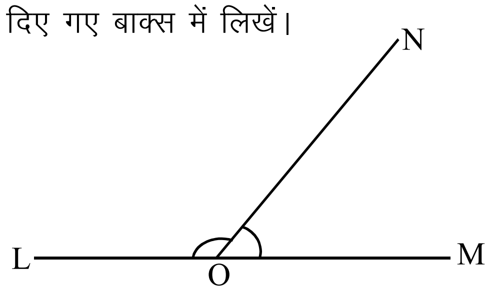


चित्र 62

✍ क्रियाकलाप 9.

निम्न कोणों को नापकर देखें और उनके प्रकारों को दिए गए बाक्स में लिखें।





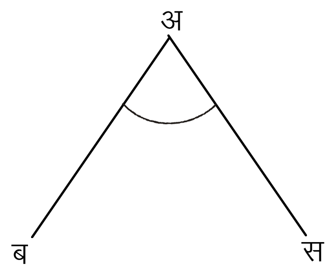
जैसे : ∠ POQ = अधिक कोण

∠ LON = ☐

∠ MON = ☐

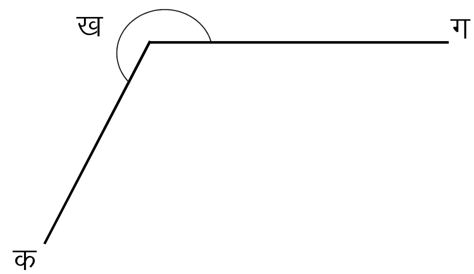
चित्र 63

चित्र 64



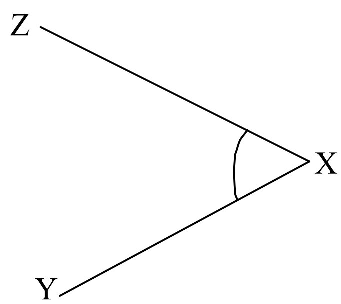
∠ब अ स = ☐

चित्र 65



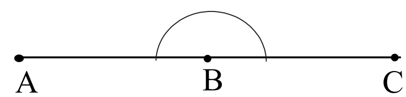
∠क ख ग = ☐

चित्र 66



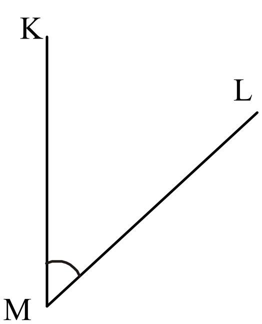
∠ZXY = ☐

चित्र 67



∠ABC = ☐

चित्र 68



∠KML = ☐

चित्र 69

∠ABO = ☐

चित्र 70

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1. सत्य कथन को छाँटिए। असत्य को सुधार कर लिखिए।

2NH6AK

(i) सरल कोण 180° का होता है।

(ii) अधिक कोण 180° से अधिक का होता है।

(iii) न्यूनकोण 90° के कम का होता है।

(iv) तीन बजे घड़ी की घंटा एवं मिनट दोनों सुईयों के मध्य समकोण बनेगा।

(v) $\frac{2}{3}$ समकोण बराबर 60° का कोण होता है।

(vi) कोण जिसका माप 90° से अधिक किन्तु 180° से कम हो, अधिक कोण है।

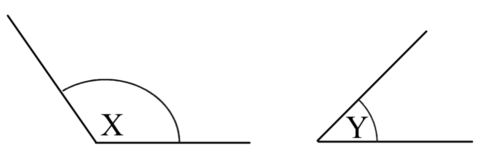
(vii) चाँदा में कुल 180° के कोणों को दर्शाया जाता है।

प्रश्न 2. नीचे दिए कोणों में से न्यूनकोण, समकोण, अधिक कोण, सरल कोण छाँटिए –

(i)	120°	(ii)	30°	(iii)	90°
(iv)	180°	(v)	70°	(vi)	105°
(vii)	72°	(viii)	36°	(ix)	15°
(x)	75°				

प्रश्न 3. निम्न कोण–युग्मों की तुलना कोणों को माप कर कीजिए –

(1)



$\angle X$ ☐ $\angle Y$

(2)

$\angle X$ ☐ $\angle Y$

(3)

$\angle X$ ☐ $\angle Y$

(4)

$\angle X$ ☐ $\angle Y$

हमने सीखा

1. दो भुजाओं के बीच फैलाव या झुकाव को कोण का माप कहते हैं।
2. किसी कोण को मापने की इकाई अंश या डिग्री है। इसे किसी संख्या के ऊपर "º" से दर्शाया जाता है। जैसे – 30º, 45º, 90º, 180º, 360º
3. एक कोण जिसका मान

   0° हो शून्य कोण कहलाता है।

   0° और 90° के बीच हो न्यूनकोण कहलाता है।

   90° के बराबर हो समकोण कहलाता है।

   90° और 180° के बीच हो अधिक कोण कहलाता है।

   180° हो तो वह सरल कोण कहलाता है।

   180° और 360° के बीच हो प्रतिवर्ती कोण कहलाता है।

   360° हो तो वह सम्पूर्ण कोण कहलाता है।

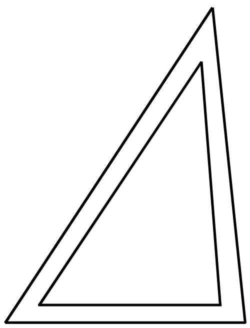
9

त्रिभुज एवं चतुर्भुज

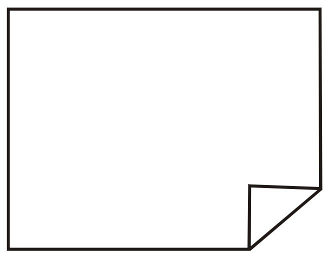
2NR2C8

आपने पूजा स्थल पर लगी पताका, स्वतंत्रता दिवस एवं गणतंत्र दिवस में शाला को सजाने के लिये उपयोग किया गया तोरण तथा पराठा जैसी अनेक रचनाएँ देखी हैं। इन्ही से मिलती जुलती कुछ और आकृतियों को देखें:–

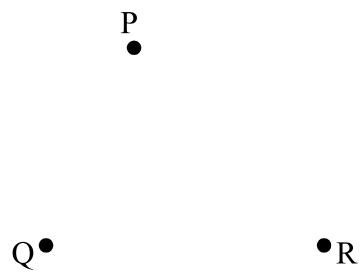
1. कम्पास बाक्स में रखा सेट स्क्वायर (चित्र 1)
2. कापी के पन्ने का मुड़ा हुआ भाग (चित्र 2)
3. चित्र 3 में दिये गये तीनों बिन्दुओं को रेखा खण्डों द्वारा मिलाने पर बनी आकृति।



चित्र–1



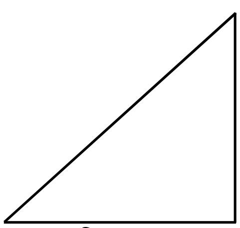
चित्र–2



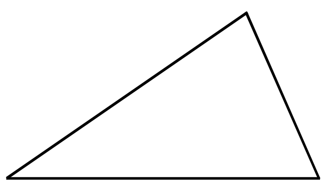
चित्र–3

इन आकृतियों में क्या समानता है?

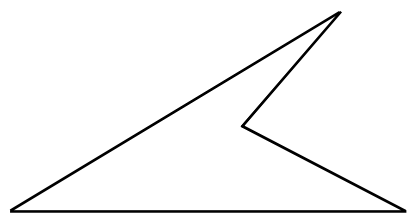
क्या आपने आस–पास इस तरह की और आकृतियाँ देखी हैं? कहाँ–कहाँ देखी हैं, लिखिए। ऐसी आकृतियाँ नीचे दिखाए गए चित्रों में भी ढूँढ़िए:–



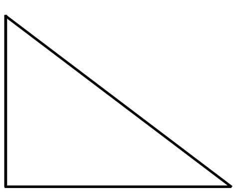
चित्र–4



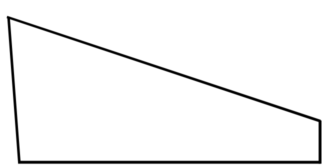
चित्र–5



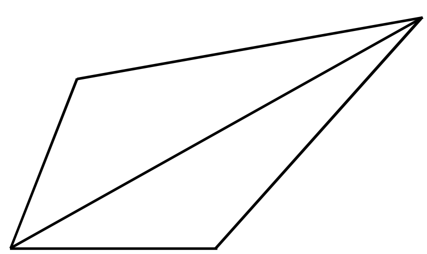
चित्र–6



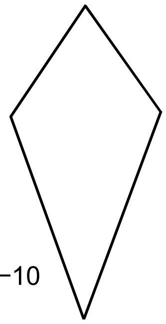
चित्र–7



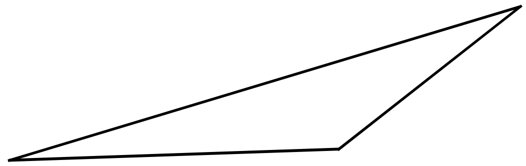
चित्र–8



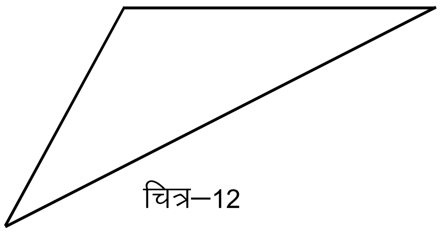
चित्र–9



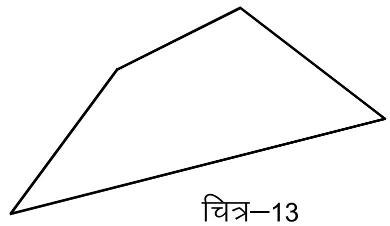
चित्र–10



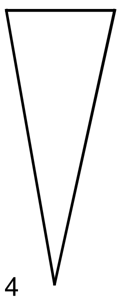
चित्र–11



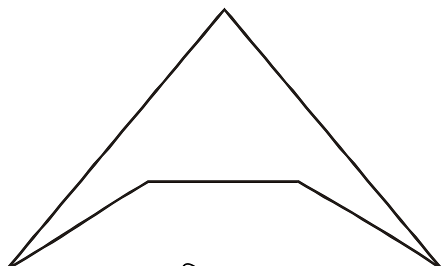
चित्र–12



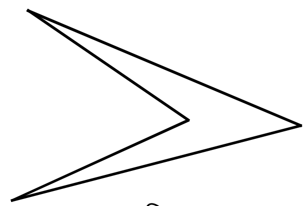
चित्र–13



चित्र–14



चित्र–15

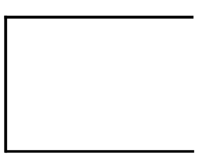


चित्र–16

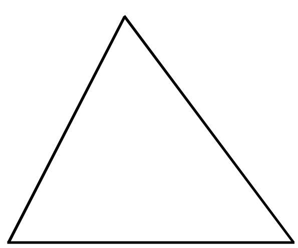
आपने इन आकृतियों को किस आधार पर छाँटा है?

छाँटी गई सभी आकृतियों में यह समानता है कि इनमें तीन भुजाएँ और तीन शीर्ष हैं, इसलिये इन्हें त्रिभुज कहते हैं।

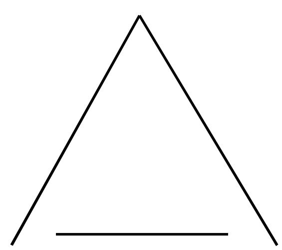
नीचे चित्र 17 से 23 तक सभी आकृतियाँ तीन भुजाओं से बनी हुई हैं परन्तु उनमें से सभी त्रिभुज नहीं हैं, त्रिभुज नहीं होने के कारण पर विचार कीजिए।



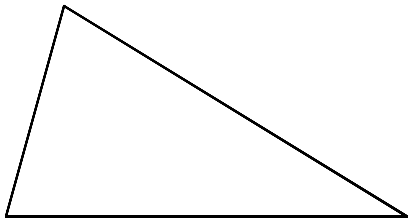
चित्र–17



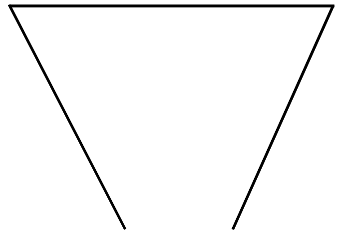
चित्र–18



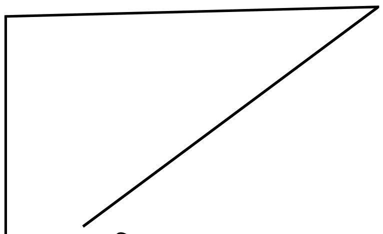
चित्र–19



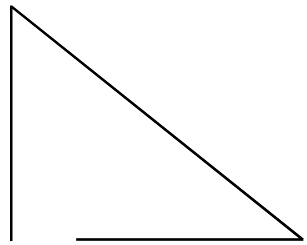
चित्र–20



चित्र–21



चित्र–22

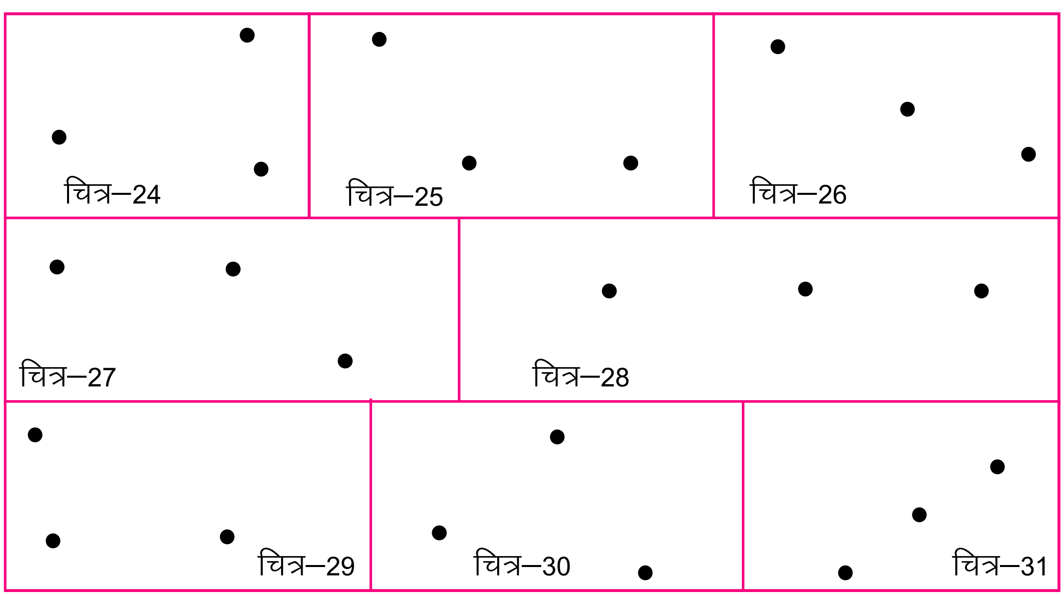


चित्र–23

आपने रेखाखण्ड के पाठ में बन्द और खुली आकृति के बारे में पढ़ा है। ऊपर दिए गये चित्रों में भी चित्र 18 और 20 बन्द आकृतियाँ है। बाकी सभी खुली आकृतियाँ हैं। जो बन्द हैं उनमें तीन रेखाखण्डों से तीन कोण भी बन रहे हैं, खुली आकृतियों में तीन भुजाएँ तो है परन्तु यह तीन भुजाएँ तीन कोण नहीं बना रही हैं। इसलिये तीन रेखाखण्डों से बनी सभी आकृतियाँ त्रिभुज नहीं हैं। **तीन रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति ही त्रिभुज है।**

✍ क्रियाकलाप 1.

नीचे प्रत्येक चित्र में तीन–तीन बिन्दु दिए गए हैं। क्या इन तीन बिन्दुओं को रेखाखण्ड द्वारा मिलाकर आप त्रिभुज बना सकते हैं?

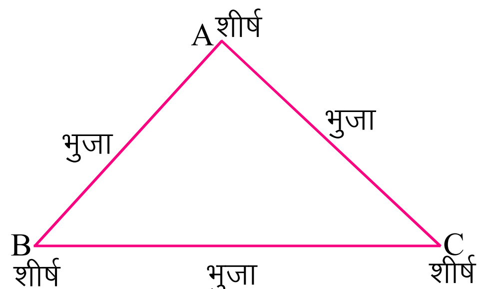


चित्र–24 चित्र–25 चित्र–26 चित्र–27 चित्र–28 चित्र–29 चित्र–30 चित्र–31

दिए गए चित्रों में आपने देखा कि जहाँ तीनों बिन्दु एक सरल रेखा में हैं उन्हें तीन रेखाखण्डों द्वारा नहीं जोड़ा जा सकता। अतः वे त्रिभुज नहीं बना रहे हैं। अर्थात् **"तीन ऐसे बिन्दु जो एक सरल रेखा में न हों, उन्हें रेखाखण्डों द्वारा मिलाने पर जो बन्द आकृति बनती है वही त्रिभुज है।"**

त्रिभुज के भाग

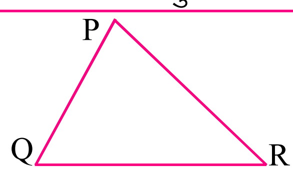
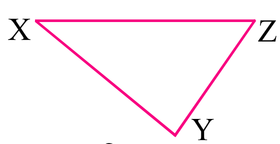
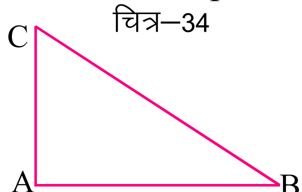
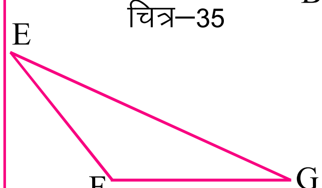
त्रिभुज ABC में A, B और C शीर्ष हैं तथा AB, BC और CA भुजाएँ हैं। ∠ABC, ∠BCA और ∠CAB तीन कोण है।



चित्र–32

क्रियाकलाप 2.

ऊपर चित्र में प्रत्येक शीर्ष पर दो भुजाएँ मिल रही है और एक कोण बन रहा है। नीचे दिये गए त्रिभुजों में शीर्ष भुजा एवं कोणों के नाम लिखिए –

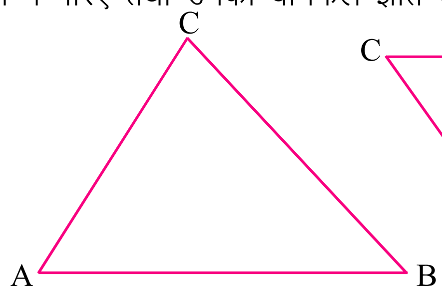
क्र.	त्रिभुज	शीर्ष	भुजा	कोण
1	 चित्र–33	______ ______ ______	______ ______ ______	______ ______ ______
2	 चित्र–34	______ ______ ______	______ ______ ______	______ ______ ______
3	 चित्र–35	______ ______ ______	______ ______ ______	______ ______ ______
4	 चित्र–36	______ ______ ______	______ ______ ______	______ ______ ______

त्रिभुज के अन्तःकोण

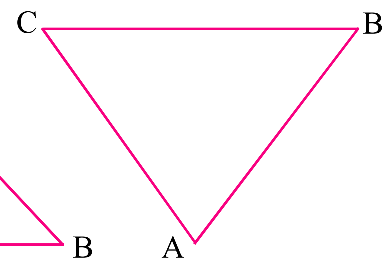
किसी त्रिभुज की तीन भुजाओं द्वारा घिरे हुए क्षेत्र में जो कोण बनते हैं वे सभी अन्तःकोण कहलाते हैं। चित्र क्र. 33, 34, 35 एवं 36 में आपने जितने कोणों के नाम लिखे हैं वे सभी अन्तःकोण है।

क्रियाकलाप 3

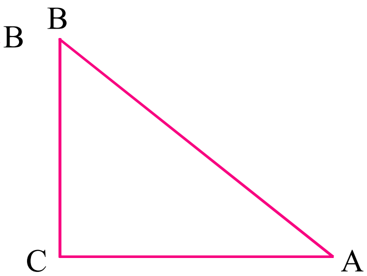
निम्न त्रिभुजों चित्र क्र. 37, 38, 39, 40 में अन्तःकोणों को चाँदे की सहायता से नापकर उनका माप तालिका में भरिए तथा उनका योगफल ज्ञात कीजिए:–



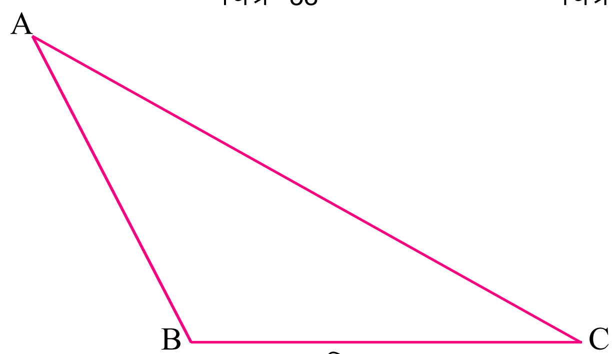
चित्र–37



चित्र–38



चित्र–39



चित्र–40

चित्र क्र.	∠A	∠B	∠C	∠A + ∠B + ∠C (तीनों कोणों के मापों का योगफल)
37				
38				
39				
40				

उपरोक्त तालिका से यह प्राप्त हो रहा है कि त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योगफल लगभग 180° है।

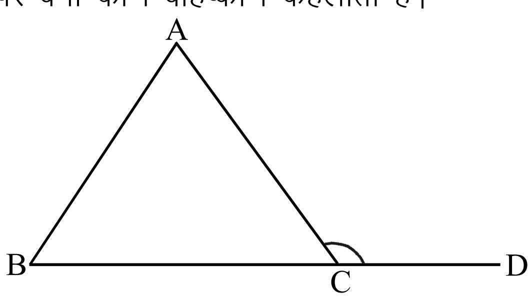
त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग 180° के बराबर होता है। इसे सिद्ध करने का तरीका हम अगली कक्षाओं में देखेंगे।

किसी त्रिभुज में दिये गये दो कोणों के आधार पर तीसरे कोणो का मान ज्ञात कीजिए –

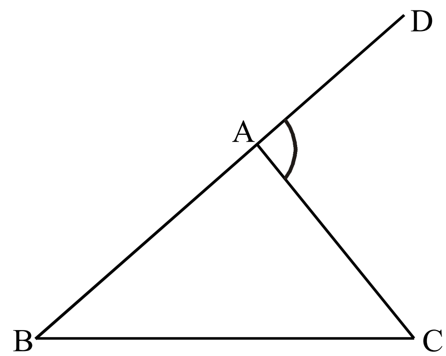
क्र.	पहले कोण का मान	दूसरे कोण का मान	तीसरे कोण का मान = 180^0–(पहला कोण + दूसरा कोण)
01	40^0	60^0	$180^0 - (40^0 + 60^0) = 80^0$
02	40^0	30^0	....
03	45^0	95^0	....
04	70^0	50^0	....

त्रिभुज के बहिष्कोण

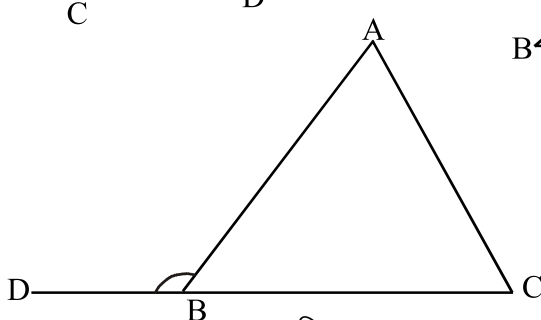
तीनों भुजाओं से घिरे क्षेत्र के बाहर त्रिभुज की किसी एक भुजा को किसी एक दिशा में आगे बढ़ाने पर बना कोण बहिष्कोण कहलाता है।



चित्र–41



चित्र–42



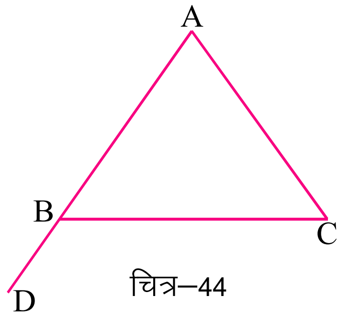
चित्र–43

उपरोक्त चित्रों में प्रत्येक त्रिभुज की एक भुजा को D तक बढ़ाया गया है, जिससे क्रमशः ∠ACD, ∠CAD और ∠ABD प्राप्त होते हैं, ये सभी बहिष्कोण हैं। प्रत्येक बहिष्कोण एक अंतःकोण से जुड़ा हुआ है, जिसे बहिष्कोण का सम्पूरक कोण भी कह सकते हैं। बहिष्कोण से जुड़ा यही अंतःकोण बहिष्कोण का **"निकटस्थ अंतःकोण"** कहलाता है। जैसेः–

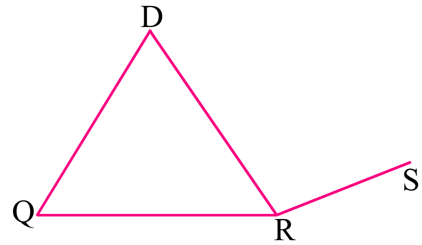
चित्र संख्या	बहिष्कोण	निकटस्थ अंतःकोण
41	∠ACD	∠ACB
42	∠CAD	∠CAB
43	∠ABD	∠ABC

बहिष्कोण से जुड़ा अंतःकोण निकटस्थ अंतःकोण कहलाता है और त्रिभुज के बचे हुए दो अंतःकोण दूरस्थ अंतःकोण कहलाते हैं। चित्र 41 में ∠BAC और ∠CBA, चित्र 42 में ∠ABC और ∠BCA तथा चित्र 43 में ∠BCA एवं ∠CAB दूरस्थ अंतःकोण हैं।

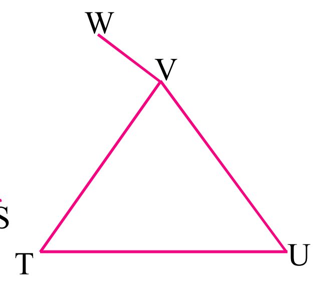
निम्न चित्रों में बहिष्कोण एवं बहिष्कोण के निकटस्थ अंतःकोणों को छाँटिये। यदि किसी चित्र में बहिष्कोण नहीं बन रहे हैं, तो क्यों ?



चित्र–44



चित्र–45

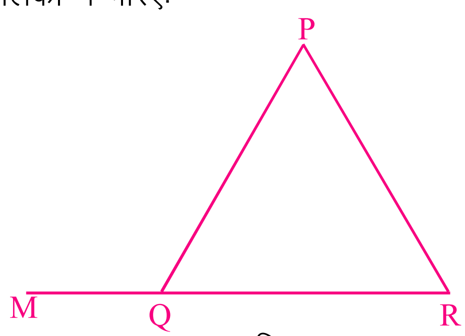


चित्र–46

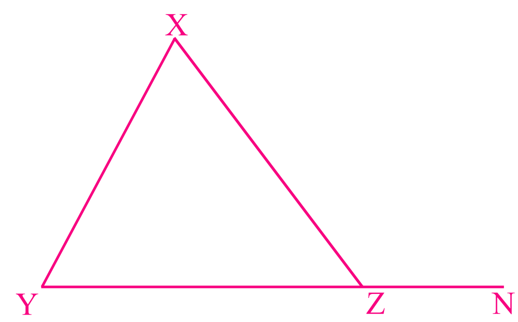
चित्र 45 और 46 में बहिष्कोण नहीं बन रहे हैं क्योंकि QRS और UVW सरल रेखाएँ नहीं है।

क्रियाकलाप 4.

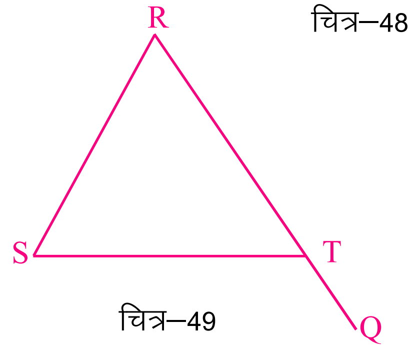
आप निम्न आकृतियों में त्रिभुज के निकटस्थ अंतःकोण दूरस्थ अंतःकोण एवं बहिष्कोणों को छाँटकर दी गई तालिका में भरिएः–



चित्र–47



चित्र–48



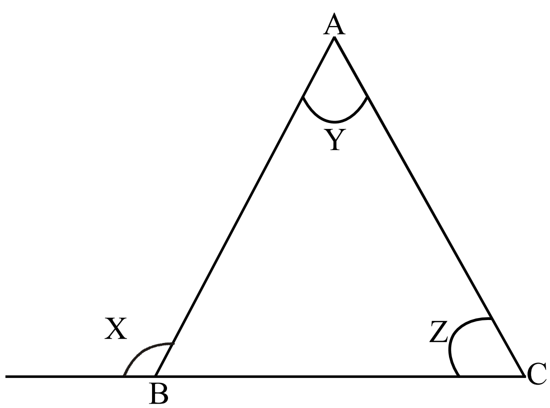
चित्र–49

चित्र क्र.	त्रिभुज का नाम	बहिष्कोण का नाम	निकटस्थ अंतःकोण	दूरस्थ अंतःकोण	
				I	II
47					
48					
49					

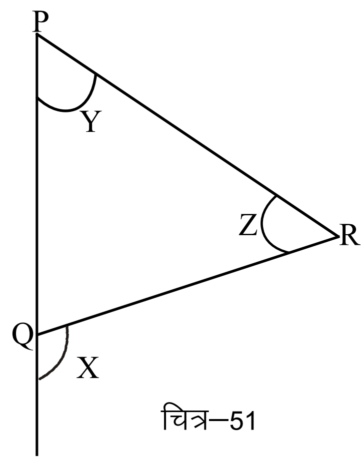
किसी त्रिभुज के बहिष्कोण तथा निकटस्थ एवं दूरस्थ अंतःकोणों को आपने पहचान लिया है। आइए, इन्हीं कोणों से सम्बन्धित एक और क्रियाकलाप करें:–

✍ क्रियाकलाप 5.

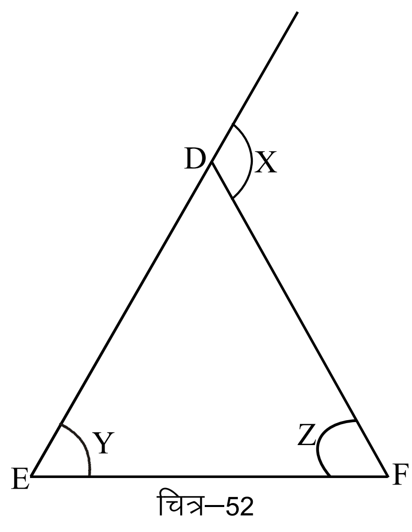
निम्न त्रिभुजों में $\angle X$, $\angle Y$, तथा $\angle Z$ का मान ज्ञात कीजिए तथा नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए:–



चित्र–50



चित्र–51



चित्र–52

चित्र क्र.	$\angle X$	$\angle Y$	$\angle Z$	$\angle Y + \angle Z$
50				
51				
52				

$\angle X$ तथा $\angle Y + \angle Z$ में क्या संबंध है?

उपरोक्त तालिका से यह स्पष्ट है कि **त्रिभुज के किसी एक बहिष्कोण का मान उसके दूरस्थ अंतःकोणों के माप के योग के बराबर होता है।**

त्रिभुज का वर्गीकरण

आपने अभी तक विभिन्न आकृति के त्रिभुजों को देखा है। भुजाओं एवं कोणों के आधार पर त्रिभुज को निम्नानुसार वर्गीकृत किया जा सकता है:

1. भुजाओं के मापों के आधार पर त्रिभुज का वर्गीकरण:

(अ) वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ असमान माप की हों, **विषमबाहु त्रिभुज** कहलाता है।

(ब) वह त्रिभुज जिस की कोई भी दो भुजाएँ बराबर माप की हों तथा तीसरी भुजा अलग माप की हो, **समद्विबाहु त्रिभुज** कहलाता है।

(स) वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर माप की हों, **समबाहु त्रिभुज** कहलाता है।

अभ्यास

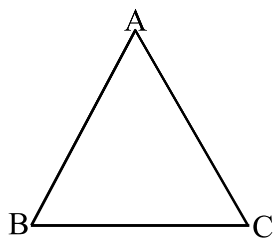
निम्नलिखित तालिका में त्रिभुज की भुजाओं के माप दिए गए हैं। माप के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए –

अभ्यास

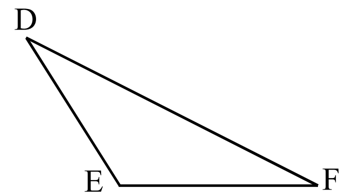
क्र.	भुजाओं का माप	त्रिभुज का प्रकार
1.	4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी	
2.	7 सेमी, 7 सेमी, 7 सेमी	
3.	6 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी	
4.	7.2 सेमी, 7.2 सेमी, 6 सेमी	

✍ क्रियाकलाप 6.

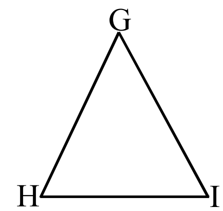
निम्न चित्रों में भुजाओं को मापकर त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए:–



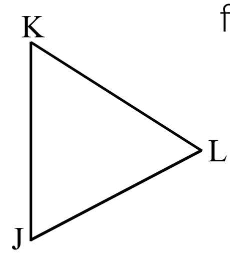
चित्र–53



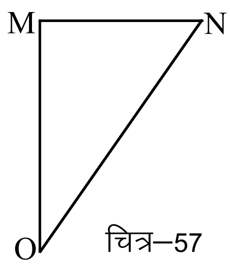
चित्र–54



चित्र–55



चित्र–56



चित्र–57

चित्र क्र.	भुजाओं की लम्बाई			त्रिभुज का प्रकार
	1	2	3	
53				
54				
55				
56				
57				

2. कोणों के आधार पर वर्गीकरण

(अ) **न्यूनकोण त्रिभुज** – जिसका प्रत्येक कोण न्यूनकोण होता है।

(ब) **समकोण त्रिभुज** – जिसका एक कोण समकोण होता है।

(स) **अधिक कोण त्रिभुज** – जिसका एक कोण अधिक कोण होता है।

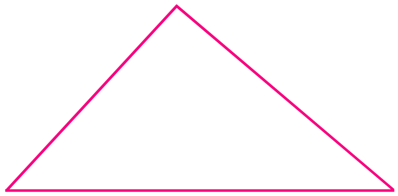
✍ क्रियाकलाप 7.

दिये गए कोणों के माप के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण कर नीचे दी गई तालिका में लिखिए:

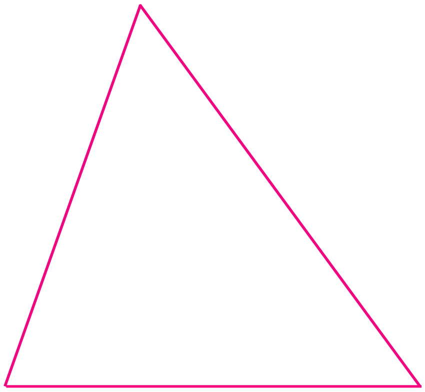
क्र.	त्रिभुज के कोणों का माप	त्रिभुज का प्रकार
1.	30° 30° 120°	
2.	60° 90° 30°	
3.	45° 40° 95°	
4.	30° 70° 80°	
5.	60° 60° 60°	

✍ क्रियाकलाप 8.

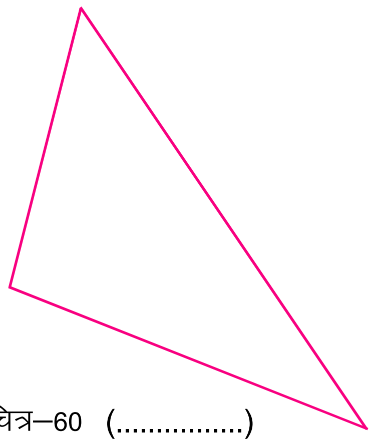
निम्नलिखित चित्रों में त्रिभुज के कोणों को माप कर त्रिभुज का वर्गीकरण कोणों के आधार पर कीजिए एवं रिक्त स्थानों में त्रिभुज का प्रकार लिखिए:–



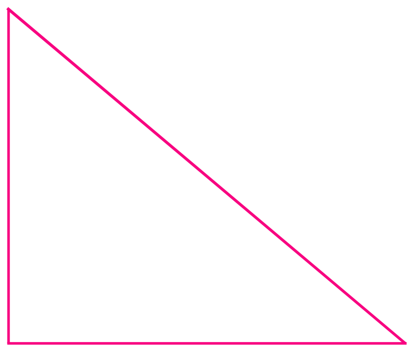
चित्र–58 (................)



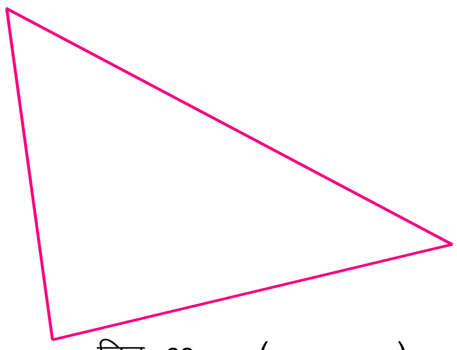
चित्र–59 (................)



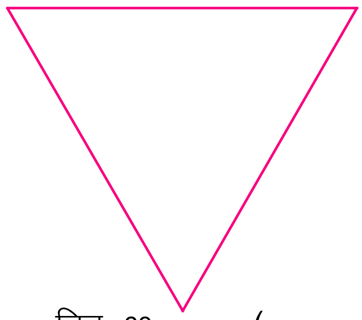
चित्र–60 (................)



चित्र–61 (................)



चित्र–62 (................)



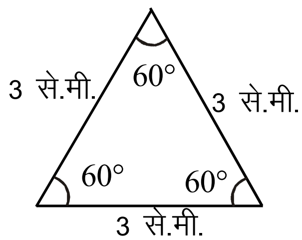
चित्र–63 (................)

विभिन्न त्रिभुज बना कर उनके कोण व भुजाएँ मापें व उनको उनके प्रकार के अनुसार छाँटें।

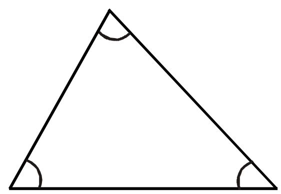
3. कोण एवं भुजाओं के आधार पर वर्गीकरण

✍ क्रियाकलाप 9.

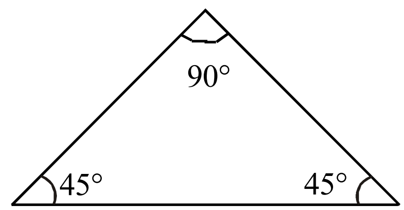
निम्न चित्रों में आप भुजाओं एवं कोणों को अलग–अलग माप कर तालिका में लिखें। भुजा एवं कोणों के आधार पर निम्न त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए :–



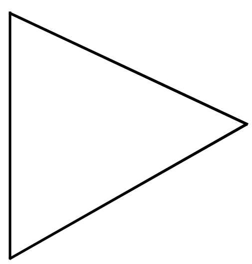
चित्र–64



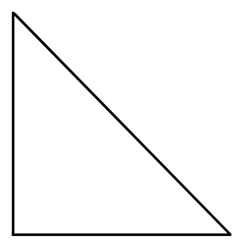
चित्र–65



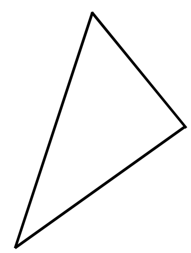
चित्र–66



चित्र–67



चित्र–68



चित्र–69

क्र.	तीनों भुजाओं के माप			तीनों कोणों के माप			त्रिभुज का प्रकार	
	1	2	3	1	2	3	कोण के आधार पर	भुजा के आधार पर
64	3 सेमी	3 सेमी	3 सेमी	60°	60°	60°	न्यूनकोण त्रिभुज	समबाहु त्रिभुज
65								
66								
67								
68								
69								

इन परिणामों से निम्नलिखित निष्कर्ष निकलते हैं :–

(1) विषमबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाओं का माप अलग–अलग है तथा तीनों कोणों के माप भी अलग–अलग हैं।

(2) समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएँ और दो कोण बराबर हैं।

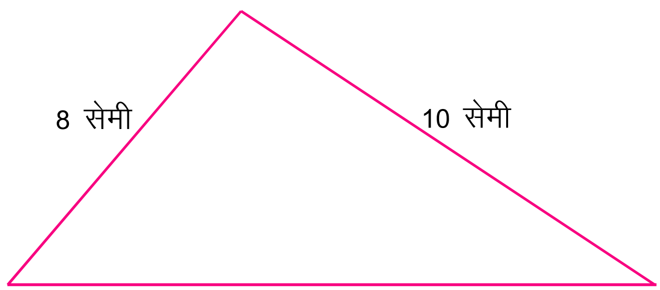
(3) समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ और तीनों कोण बराबर हैं।

✍ क्रियाकलाप 10

निश्चित माप की सीकें लेकर नीचे दिये गये मापों के आधार पर त्रिभुज बनाएं :

8 सेमी, 10 सेमी एवं 12 सेमी लम्बी भुजाएँ।

पहले हम 8 सेमी, 10 सेमी, एवं 12 सेमी माप की तीन सींकें लेते हैं तथा सींकों के सिरे से सिरे को सटाकर निम्न प्रकार से त्रिभुज बनाने का प्रयास करते हैं:



चित्र–70

आप देख रहे हैं कि दिये गये मापों से त्रिभुज बनाना संभव है।

ऊपर समझाए गए तरीके से निम्न मापों के त्रिभुज बनाइए, तथा यह देखिए कि क्या सभी स्थितियों में त्रिभुज बन पा रहा है। यदि नहीं तो कारण पता लगाएं।

1. 8 सेमी 10 सेमी और 12 सेमी
2. 5 सेमी 9 सेमी और 3 सेमी
3. 6 सेमी 8 सेमी और 9 सेमी
4. 5 सेमी 7 सेमी और 12 सेमी
5. 15 सेमी 5 सेमी और 12 सेमी

इनसे प्राप्त निष्कर्षों का मिलान करें।

1. यदि त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो तभी त्रिभुज बनेगा।
2. यदि त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से कम हो या बराबर हो तो त्रिभुज नहीं बनेगा। जैसा उदाहरण. 2 और 4 की स्थिति।

<u>उदा. 2 की स्थिति :–</u> त्रिभुज की दो भुजाओं का योग 5 सेमी + 3 सेमी = 8 सेमी सबसे बड़ी भुजा की माप 9 सेमी से कम होने के कारण त्रिभुज नहीं बनता है।

<u>उदा. 4 की स्थिति :–</u> त्रिभुज की दो भुजाओं का योग 5 सेमी + 7 सेमी = 12 सेमी त्रिभुज की तीसरी भुजा की माप 12 सेमी के बराबर होने के कारण त्रिभुज नहीं बनता।

ऐसे विभिन्न मापों का त्रिभुज बनाकर छात्र स्वयं जांचे और अपने मित्रों से भी बनवाएं।

प्रश्नावली 9.1

प्र.1 जूली ने निम्नलिखित कथन लिखे। इनमें से आप सत्य एवं असत्य कथन छाँट कर लिखिए। असत्य कथनों को सुधार कर लिखिए।

(i) किसी त्रिभुज में एक भुजा शेष दो भुजाओं के योग से छोटी नहीं हो सकती।

(ii) किसी त्रिभुज में तीन भुजाएँ, तीन शीर्ष व तीन अंतःकोण होते हैं।

(iii) किसी त्रिभुज की एक भुजा शेष दो भुजाओं के योग के बराबर होती है।

(iv) किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण होता है तो त्रिभुज को अधिक कोण त्रिभुज कहते है।

(v) किसी त्रिभुज में दो कोण 90° के हो सकते हैं।

(vi) न्यून कोण त्रिभुज में तीनों कोणों का माप न्यूनकोण होना जरूरी नहीं है।

(vii) त्रिभुज के दो कोणों के माप दिये हो तो तीसरा कोण निकाला जा सकता है।

(viii) समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ बराबर होती है परन्तु तीनों कोण बराबर नहीं होते।

(ix) समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।

(x) समबाहु त्रिभुज सदैव न्यूनकोण त्रिभुज होता है।

प्र.2 त्रिभुज के दो कोण 65° एवं 75° के हैं, तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

प्र.3 समकोण त्रिभुज का एक कोण 45° है तो दूसरे कोण का मान ज्ञात कीजिए।

प्र.4 समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण का माप कितना होता है।

प्र.5 यदि किसी त्रिभुज के एक कोण का माप अन्य दो कोणों के मापों के योग के बराबर हो तो क्या वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा ?

प्र.6 क्या निम्नलिखित स्थितियों में त्रिभुज की रचना की जा सकती है – हां या नहीं, में उत्तर दीजिए।

(i) यदि दो कोण समकोण हों।

(ii) यदि दो कोण अधिक कोण हों।

(iii) सभी तीनों कोण 60° के बराबर हों।

(iv) सभी कोण 60° से अधिक हों।

(v) तीनों कोण न्यूनकोण हों।

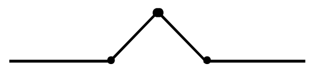
(vi) सभी कोण 60° से कम हों।

चतुर्भुज

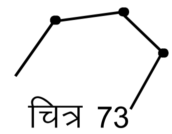
2NZXDV

यदि आप चार सीकों को उनके सिरों से आपस में जोड़ कर रखें तो कई प्रकार की आकृतियाँ बन सकती है इनमें से कुछ आकृतियाँ निम्नानुसार हो सकती हैः–

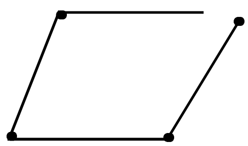
चित्र 71



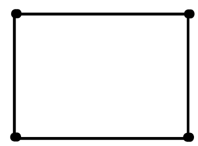
चित्र 72



चित्र 73



चित्र 74



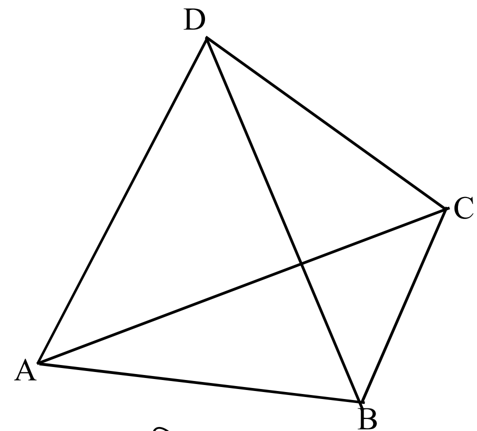
चित्र 75

चित्र क्रमांक 71 से 74 तक बनी सभी आकृतियाँ खुली हुई हैं, परन्तु चित्र क्रमांक 75 में बनी आकृति चारों ओर से घिरी एक बंद आकृति है। ऐसी आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है। इसमें चार भुजाएँ होती हैं। पतंग, कबड्डी का मैदान, पुस्तक कॉपी इत्यादि चतुर्भुज के उदाहरण हैं।

"चार भुजाओं से घिरी हुई बंद आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।"

चतुर्भुज के अंग

निम्नांकित चित्र को ध्यान पूर्वक देखें–



चित्र 76

उपरोक्त चित्र में निम्नांकित बातें दिखाई पड़ती हैं।

(1) AB, BC, CD व DA चतुर्भुज की चार भुजाएँ हैं।

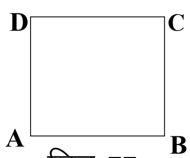
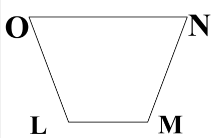
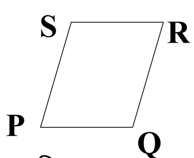
(2) दो भुजाएँ जहाँ मिलती हैं वह बिन्दु चतुर्भुज का भीर्श कहलाता है। A,B,C, और D चतुर्भुज के चार भीर्ष हैं।

(3) आसन्न शीर्षो को छोड़कर अन्य शीर्षो को जोड़ने वाला रेखाखण्ड विकर्ण कहलाता है। AC तथा BD चतुर्भुज के दो विकर्ण हैं।

(3) प्रत्येक भीर्ष पर एक–एक अन्तः कोण बन रहा इस प्रकार कुल चार अन्तः कोण $\angle$BAD, $\angle$ADC, $\angle$DCB एवं $\angle$CBA बने हैं।

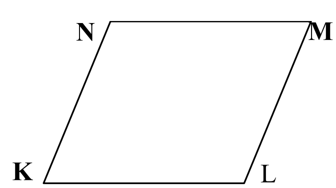
कियाकलाप 11

नीचे दिये चित्रों में भुजाओं, भीर्षों तथा अन्तः कोणों को पहचान कर उचित स्थान पर लिखिए:–

क्र.	चित्र	भीर्षों के नाम	भुजाओं के नाम	कोणों के नाम	विकर्णो के नाम
1	 चित्र 77	(I) A (II) B (III)C (IV)...............	(I) AB या BA (II) BC या CB (III)CD या DC (IV)...............	(I)$\angle$BAD या $\angle$DAB (II)$\angle$ABC या$\angle$CBA (III)$\angle$BCD या$\angle$DCB (IV)...............	(I) ACया CA (II) BDयाDB
2	 चित्र 78	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I) .... (II) ....
3	 चित्र 79	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I).................. (II)................ (III)............... (IV)...............	(I) .... (II) ....

चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ एवं सम्मुख भुजाएँ

संलग्न चित्र में चतुर्भुज KLMN में शीर्ष K पर NK, KL भुजाएँ मिल रही हैं ऐसी भुजाएँ संलग्न भुजाएँ कहलाती हैं।



चित्र 80

इसी प्रकार भुजाएँ KL और LM भीर्ष L पर मिल रही हैं अतः KL एवं LM संलग्न भुजाएँ हैं।

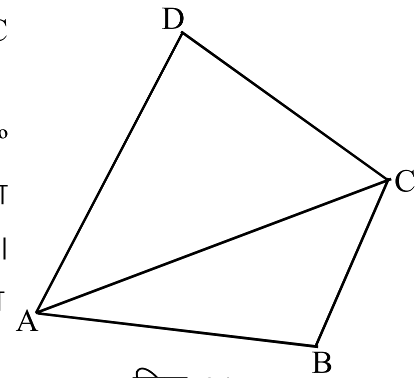
बताइए इस चतुर्भुज में अन्य संलग्न भुजाओं के नाम क्या हैं ?

चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग

चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC उसे दो त्रिभुजों ΔDAC तथा ΔABC में बाँटता है।

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों की मापों का योग 180° होता है। स्पष्ट है चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों की मापों का योग दोनों त्रिभुजों के अन्त कोणों की मापों के कुल योग के बराबर होगा।

इस प्रकार चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों की मापों का योग $= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$



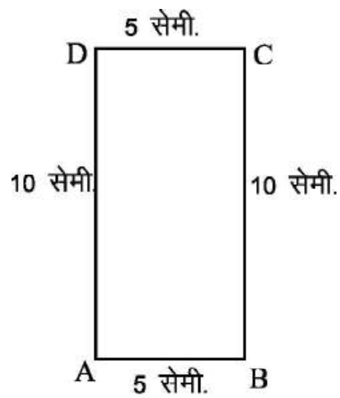
चित्र 81

चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों की मापों का योगफल 360º या चार समकोण होता है।

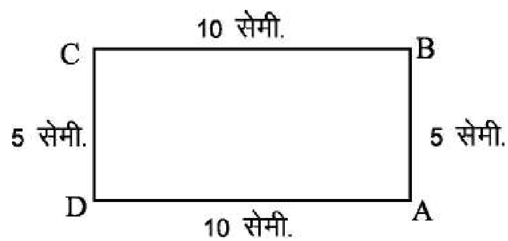
चतुर्भुज के प्रकार

10 सेमी., 5 सेमी., 10 सेमी. 5 सेमी. माप वाली चार सींके लीजिए तथा उनके सिरों को मिलाते हुए विभिन्न आकृतियों वाले चतुर्भुज बनाइए –

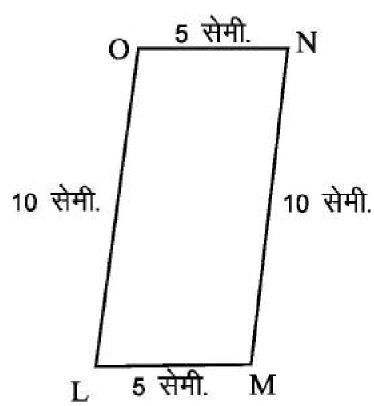
इन सींको से बनने वाली कुछ चतुर्भुज आकृतियाँ नीचे दी गई हैं।



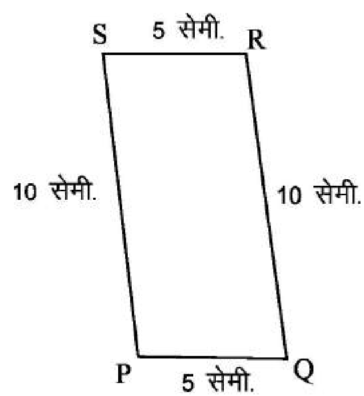
चित्र 82



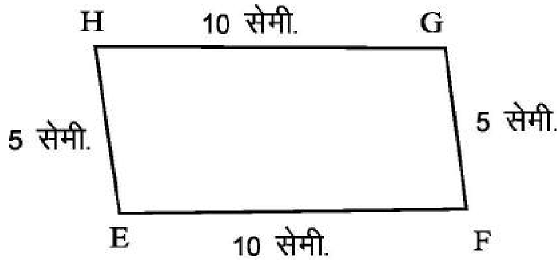
चित्र 83



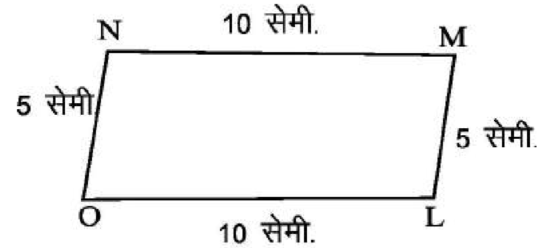
चित्र 84



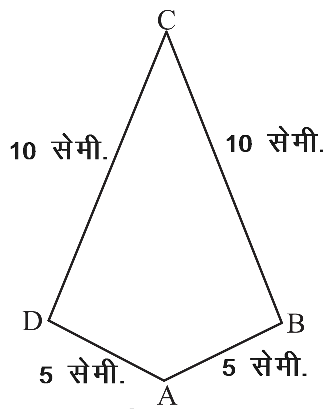
चित्र 85



चित्र 86



चित्र 87



चित्र 88

उपरोक्त में से चित्र क्रमांक 82,83,84,85,86 और 87 में चतुर्भुजों की भुजाएँ समान्तर एवं बराबर हैं। ये चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज कहलाते हैं।

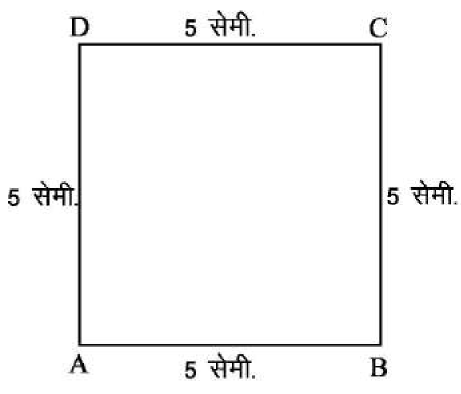
"वे चतुर्भुज जिनकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर समान्तर एवं बराबर हों समान्तर चतुर्भुज कहलाते हैं।"

चित्र क्रमांक 82 और 83 ऐसे समान्तर चतुर्भुज हैं जिनमें प्रत्येक कोण 90^0 का है, इन्हे आयत कहते हैं,

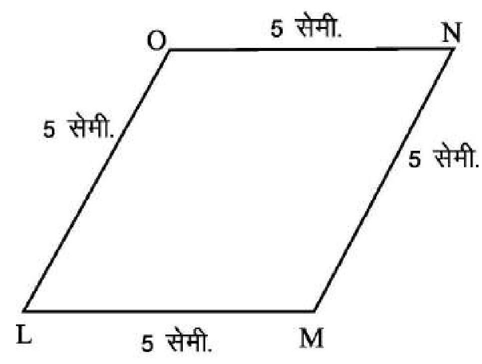
"वह समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90^0 का हो आयत (Rectangle) कहलाता है।"

चित्र क्रमांक 88 में चतुर्भुज के शीर्षों A एवं C स्थित संलग्न भुजाओं के युग्म बराबर हैं ऐसा चतुर्भुज पतंगाकार चतुर्भुज कहलाता है।

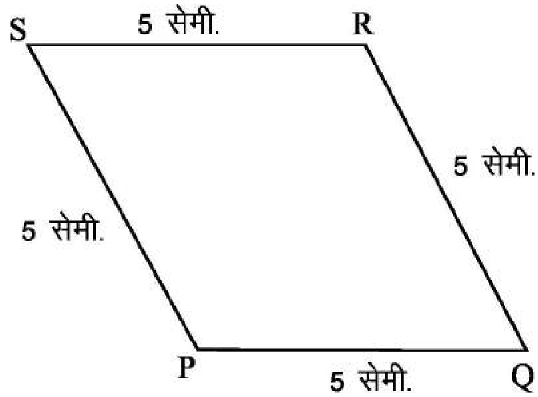
अब 5 सेमी. लम्बाई की चार सींके लेकर चतुर्भुज बनाइए : –



चित्र 89



चित्र 90



चित्र 91

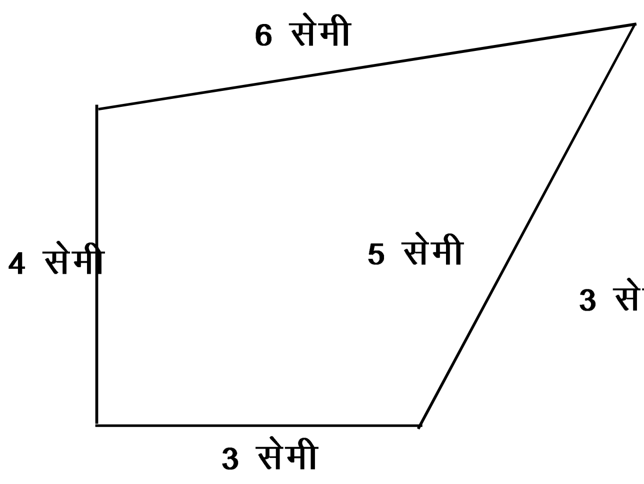
उपरोक्त सभी चतुर्भुज ऐसे समान्तर चतुर्भुज हैं, जिनकी सभी भुजाएँ बराबर हैं, ऐसे चतुर्भुजों को सम चतुर्भुज कहते हैं।

"वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई बराबर हो सम चतुर्भुज (Rhombus) कहलाता है"

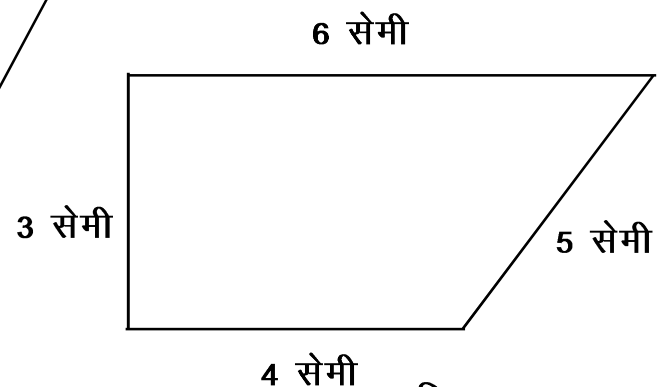
चित्र क्रमांक 89 में प्रदर्शित चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90^0 का है।

ऐसा सम चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90^0 का हो वर्ग (Square) कहलाता है।

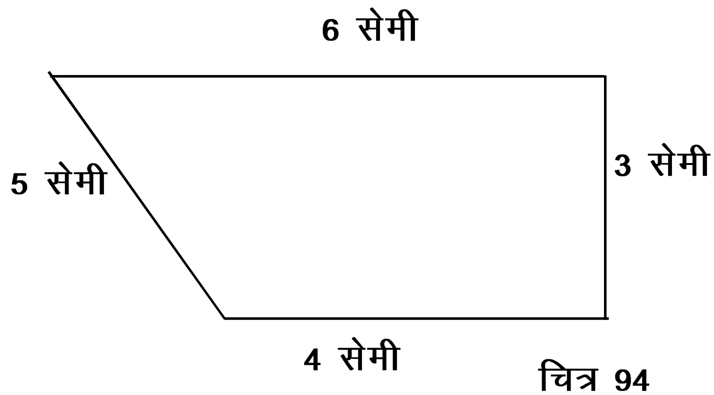
अब आप चार अलग–अलग लम्बाइयों की सींके लेकर चतुर्भुज बनाइए। आपके द्वारा बनाए गए चतुर्भुजों में से कुछ इस प्रकार के हो सकते हैं।



चित्र 92



चित्र 93

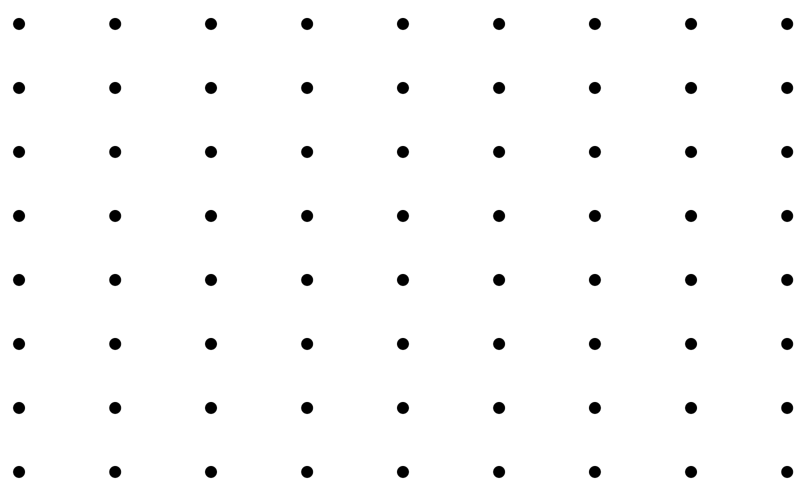


चित्र 94

चित्र कमांक 92 में चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा अलग–अलग माप की है तथा सम्मुख भुजाएँ समान्तर नहीं हैं। ऐसे चतुर्भुज विषमबाहु चतुर्भुज कहलाते हैं। चित्र कमांक 93 एवं 94 में चतुर्भुजों की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर है ऐसे चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज कहलाते हैं।

क्रियाकलाप 12 (अ)

नीचे दिये गये ग्रिड (जालक) बिन्दुओं को जोड़कर निर्देशानुसार चतुर्भुज बनाकर नाम लिखिए



(1) एक चतुर्भुज जिसकी कोई भी भुजा बराबर नहीं है तथा कोई भी युग्म समान्तर नहीं है।

(2) एक चतर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समान्तर है।

(3) एक चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर हैं।

क्रियाकलाप 12 (ब)

अपने आस–पास की 5 वस्तुओं के नाम बताइए जो चतुर्भुज आकार की हों।

प्रश्नावली 9.2

प्रश्न 1 खाली स्थान भरिए

2P9TFI

(i) वह चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएं आपस में बराबर हों.......................कहलाता है।

(ii) वर्ग का प्रत्येक कोण ....अंश का होता है।

(iii) समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ.......................एवं समान्तर होती हैं।

(iv) ....चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समान्तर होता है।

(v) ऐसा चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ असमान हों................चतुर्भुज कहलाता है।

प्रश्न 2 सत्य/असत्य कथन छांटिए

(i) समलम्ब चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90^0 का होता है।

(ii) प्रत्येक आयत एक वर्ग होता है।

(iii) आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iv) समचतर्भुज का प्रत्येक कोण सदैव समकोण होता है।

(v) कबड्डी का मैदान आयताकार होता है।

हमने सीखा

1. त्रिभुज तीन भुजाओं से घिरा क्षेत्र है।
2. त्रिभुज एक बन्द आकृति है। यदि तीनों भुजाएँ मिलकर बन्द आकृति नहीं बनाती तो त्रिभुज नहीं बन सकता।
3. शीर्ष, भुजा एवं कोण त्रिभुज के भाग हैं।
4. त्रिभुज में तीन कोण होते हैं।
5. त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों के मापों का योग दो समकोण (180^0) के बराबर होता है।
6. त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाने पर बना हुआ बहिष्कोण, त्रिभुज में स्थित दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योग के बराबर होता है।
7. भुजाओं की माप के आधार पर त्रिभुजों को समबाहु, समद्विबाहु तथा विषमबाहु त्रिभुज में वर्गीकृत किया जाता है।
8. कोणों के आधार पर त्रिभुजों को न्यूनकोण, समकोण तथा अधिक कोण त्रिभुज में वर्गीकृत किया जाता है।
9. विषमबाहु त्रिभुज के तीनों भुजाओं की माप तथा तीनों काणों के माप अलग अलग होती है।
10. समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएँ एवं दो कोण बराबर होते हैं।
11. समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ और तीनों कोण बराबर होते है।
12. त्रिभुज में दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से अधिक हो तभी त्रिभुज बन सकता है।
13. चार भुजाओं से घिरी बंद आकृति चतुर्भुज कहलाती है।

14 चतुर्भुज के अंगों में शीर्ष, भुजा, विकर्ण व कोण सम्मिलित हैं।

15 चतुर्भुज के चारों अन्तःकोणों की मापों का योग 360^o होता है।

16 वह चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर समान्तर एवं बराबर हों, समान्तर चतुर्भुज कहलाता है।

17 वह समातंर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90^o का हो, आयत कहलाता है।

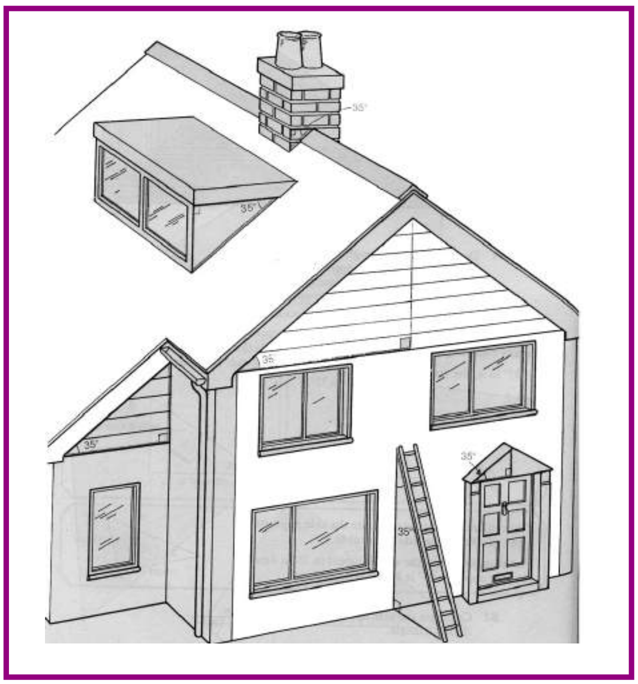
18 ऐसा चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ अलग–अलग माप की हों तथा सम्मुख भुजाएँ समान्तर न हों विषमबाहु चतुर्भुज कहलाता है।

19 ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो, समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।

20 वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों समचतुर्भुज कहलाता है।

21 ऐसा सम चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90^o का हो, वर्ग कहलाता है।

22 पतंगाकार चतुर्भुज में दो आसन्न भुजाओ के युग्म बराबर होते हैं।



2PIPH6

10
अनुपात

मोहन और रमा सुबह कप से दूध पीते हैं। मोहन दो कप दूध में तीन चम्मच शक्कर डालता है। रमा एक कप दूध में दो चम्मच शक्कर डालती है। दोनों के दूध में शक्कर की तुलना कैसे करें ?

दैनिक जीवन में किसी वस्तु की खरीददारी करनी हो, खेल खेलना हो, या किन्हीं दो विकल्पों में से ज्यादा उपयुक्त विकल्प चुनना हो, इन जैसे सभी कार्यों में तुलना की आवश्यकता होती है। कौन सी सब्ज़ी बेहतर है, दामों में कितना अन्तर है जैसे निर्णय हमें कई बार लेना पड़ता है। एक उदाहरण देखिए – श्याम आलू खरीदने बाज़ार जाता है। एक दुकानदार आलू की कीमत बताता है – 20 रूपये के तीन किलो। दूसरा दुकानदार कीमत बताता है – ''पाँच किलो 30 रूपये में।'' अब श्याम सोच में पड़ जाता है कि कौन सा विकल्प बेहतर है। ऐसी स्थितियों में अनुपात की जरूरत महसूस होती है। क्या आपके सामने कभी ऐसी स्थिति आई है जहाँ आपको बेहतर विकल्प सोचने की जरूरत पड़ी? ऐसी कुछ परिस्थितियों के बारे में सोचिए एवं लिखिए।

अनुपातों को विभिन्न तरीकों से व्यक्त किया जाता है। अनुपात को हम '**:**' चिह्न से दर्शाते हैं।

उदाहरण के लिए एक दुकानदार कहता है कि, ''इस वर्ष बिक्री दुगुनी हुई।'' इसका अर्थ यह निकला कि इस वर्ष में बिक्री पिछले वर्ष की अपेक्षा दो गुनी हुई, अर्थात् इस वर्ष और पिछले वर्ष की बिक्री का अनुपात 2 : 1 है।

एक और उदाहरण लें – किसी विद्यालय में प्रत्येक 45 छात्रों पर एक अध्यापिका है। इसका मतलब यह हुआ कि छात्राओं तथा अध्यापिकाओं का अनुपात 45 : 1 है। अब यदि हम कहें कि विद्यालय में 90 छात्राएं हैं तो स्पष्ट है कि विद्यालय में दो अध्यापिकाएं हैं। अर्थात् विद्यार्थी तथा अध्यापिका का अनुपात 45 : 1 या 90 : 2 है।

रीता ने कहा कि, ''विद्यालय में अध्यापिका संख्या तथा छात्राओं की संख्या का अनुपात 1 : 45 है।'' क्या उसका यह कहना सही है? अनुपात में हमें यह देखना होता है कि हम किसकी तुलना किससे कर रहे हैं। जैसे – यदि हम अध्यापिका संख्या की तुलना छात्राओं की संख्या से करते हैं तो अनुपात होगा 1 : 45 और यदि हमें छात्राओं की तुलना अध्यापिका से करनी है तो अनुपात 45 : 1 होगा। अब यदि उस विद्यालय में कुल 5 अध्यापिकाएं हैं तो बताइए कि विद्यालय की कुल छात्राओं की संख्या कितनी है?

✍ क्रियाकलाप 1.

(1) निम्न कथनों को अनुपात में लिखिए :

(i) किसी हॉल में पुरूषों की संख्या 150 है तथा महिलाओं की संख्या 100 है। पुरूषों तथा महिलाओं की संख्या के बीच अनुपात लिखिए। [150 : 100]

(ii) शर्माजी की उम्र 40 वर्ष है तथा उनकी पत्नी की उम्र 35 वर्ष है। दोनों की उम्र के बीच का अनुपात लिखिए। [ ]

(2) किसी कक्षा में 20 लड़के तथा 25 लड़कियाँ हैं। निम्न अनुपात बताइए –

(i) लड़कियाँ तथा लड़कों के बीच [ ]

(ii) लड़कों तथा लड़कियों के बीच [ ]

(iii) लडकियों तथा कुल विद्यार्थियों के बीच [ ]

(iv) लड़कों तथा कुल विद्यार्थियों के बीच [ ]

3. रमेश एक घंटे में 6 किलोमीटर पैदल चलता है। तारा 1 घंटे में 4 किलोमीटर पैदल चलती है। रमेश की गति तथा तारा की गति के बीच का अनुपात क्या है? [ ]

4. राम की आयु 30 वर्ष है तथा श्याम की आयु 20 वर्ष है। राम की आयु और श्याम की आयु के बीच अनुपात क्या होगा? [ ]

श्याम तथा राम की आयु के बीच अनुपात क्या होगा ? [ ]

एक और बात पर विचार कीजिए :

यदि एक वर्ष में वर्षा का मौसम 20 सप्ताह तक रहा और दूसरे वर्ष 120 दिन रहा। इन दोनों वर्षों में वर्षा के दिनों का अनुपात क्या होगा? क्या आप इसे 20 : 120 लिख सकते हैं? कारण बताइए।

एक और उदाहरण देखिए :

रानी अपने घर से विद्यालय तक की दूरी 50 मिनट में तय करती है। उमा वही दूरी 1 घंटे में तय करती है। तो रानी द्वारा लिए गए समय और उमा द्वारा लिये गये समय का अनुपात क्या होगा? क्या इसे हम 50 : 1 लिख सकते है? इस पर विचार कीजिए।

इसी प्रकार के और सवाल आप स्वयं बनाकर अपने मित्रों से हल करवाइये।

दैनिक जीवन में हमारे सामने इस प्रकार की समस्याएं अनेक बार आती हैं जब हम भिन्न नापों की आपस में तुलना करते हैं। ऐसी स्थितियों में जहाँ सीधे–सीधे तुलना करना संभव नहीं होता है, वहाँ राशियों को समान इकाइयों या समान मात्रक में बदलना पड़ता है।

वर्षा का उदाहरण देखिए – एक वर्ष में वर्षा का मौसम 20 सप्ताह का है और दूसरे वर्ष में 120 दिनों का। यहाँ हम समान मात्रक में बदलने के लिए 20 सप्ताह को दिनों में बदलेंगे जो कि इस प्रकार होगा –

1 सप्ताह में 7 दिन

$\therefore$ 20 सप्ताह में 7×20 दिन   अर्थात् 140 दिन

अब दोनों वर्षों में वर्षा का अनुपात ज्ञात करना आसान हो गया क्योंकि हमारे सामने दोनों मात्रक समान हैं अर्थात् 140 दिन तथा 120 दिन। पहले वर्ष की वर्षा के दिनों तथा दूसरे वर्ष की वर्षा के दिनों का अनुपात हुआ 140 : 120 जिसका सरलतम रुप 7 : 6। अब आप रानी तथ उमा द्वारा विद्यालय जाने में लगे समय का अनुपात ज्ञात कीजिए ?

क्रियाकलाप 2.

निम्न कथनों को अनुपात के रुप में लिखिए –

(i) पेड़ के चित्र की लम्बाई 25 सेमी है तथा पेड़ की लम्बाई 13 मीटर है।

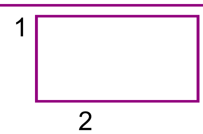
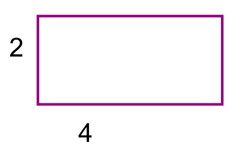
(ii) राम को गृहकार्य करने में 40 मिनट लगते हैं तथा श्याम को 1 घंटा लगता है।

(iii) आनन्द 15 माह बाद रायपुर आया तथा अमीना 2 वर्ष बाद।

कुछ और असमान मात्रक वाले सवाल स्वयं खोजिए तथा उनके अनुपात लिखिए।

अनुपात में जिन दो राशियों की तुलना करते हैं उन्हें पद कहते हैं – पहला पद तथा दूसरा पद। जैसे यदि हम 'a' की तुलना 'b' से कर रहे हैं तो इसे अनुपात रूप में लिखेंगे a : b जहाँ 'a' पहला पद है तथा 'b' दूसरा पद है और यदि 'b' की तुलना 'a' से करते हैं तो 'b' पहला पद तथा 'a' दूसरा पद होगा तथा उनका अनुपात b:a होगा।

एक अन्य उदाहरण में नीचे दर्शाए गए आयत के चित्र में भुजा के माप दर्शाए गए है–

क्रमांक	चित्र	भुजा	क्षेत्रफल
1		लम्बाई = 2 इकाई चौड़ाई = 1 इकाई लम्बाई अनुपात चौड़ाई = 2 : 1	A= 2 X 1 = 2 वर्ग इकाई
2		लम्बाई = 4 इकाई चौड़ाई = 2 इकाई लम्बाई अनुपात चौड़ाई = 4 : 2	A = 4 X 2 = 8 वर्ग इकाई

उपरोक्त चित्रों में आयत (क्रमांक 1) में लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 2 : 1 है व चित्र क्रमांक 2 के आयत में लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 4 : 2 है।

यहाँ दोनों आयतों के क्षेत्रफल का अनुपात होगा 2 : 8 या 1 : 4

आपने भारत का मानचित्र तो देखा होगा। भारत जैसे विशाल देश को छोटे मानचित्र में दर्शाना कैसे संभव है? आप इस पर विचार करें।

किसी भी मानचित्र के नीचे एक पैमाना (स्केल) लिखा होता है, 1 सेमी = 100 किमी अर्थात् 100 किमी की दूरी को मानचित्र में एक सेमी से दर्शाया गया है। इस प्रकार यह भी एक प्रकार का अनुपातिक चित्र हैं।

अर्थात् दो राशियों के बीच तुलना के लिए अनुपात का प्रयोग किया जाता है। चूंकि राशियों के आँकड़े बहुत बड़े अथवा बहुत छोटे हो सकते हैं इसलिए तुलना में सुविधा के लिए अनुपात को सरल रूप में दर्शाया जाता है।

अनुपात का प्रयोग करने के पहले ध्यान रखें कि राशियों में समान इकाई का उपयोग हो।

कियाकलाप 3.

1. कक्षा के छात्र एक–एक करके अपनी ऊँचाई ज्ञात करेंगे।
2. छात्र दोनों हाथ फैलाकर हाथों के सिरों के बीच की दूरी का मापन करेंगे।
3. प्रत्येक छात्र की ऊँचाई तथा उसके दोनों हाथ के सिरों के बीच के दूरी के मध्य क्या संबंध प्राप्त हो रहा है? निश्कर्श निकालिए।

सारणी पूरी कीजिए –

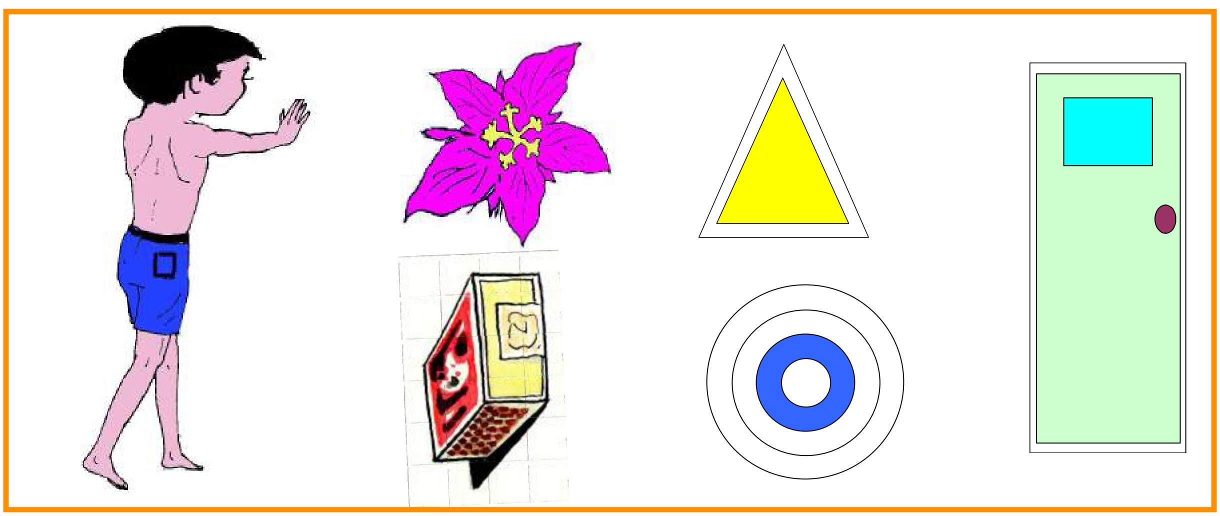
क्रमांक	छात्र का नाम	ऊँचाई (H)	दोनों हाथ के सिरों के बीच की दूरी (फैलाकर) (D)	अनुपात (H:D)	सरलतम रुप
1					
2					
3					
4					

अनुपातिक चित्रों में सौंदर्य बोध

अनुपात केवल संख्याओं में ही नहीं वरन् हमारे दैनिक जीवन से जुड़े कई पहलुओं में देखने को मिलता है।

उदाहरण के लिए – यदि किसी चित्र में बने व्यक्ति की टांगे बहुत अधिक लंबी हैं, या शरीर की तुलना में सिर अधिक बड़ा है, तो वह व्यक्ति कैसा लगेगा? जाहिर है कि वह कुछ अटपटा लगेगा। इसी प्रकार मान लीजिए आपकी कक्षा की एक दीवार है जिसकी लम्बाई एवं चौड़ाई कम है और उस छोटी सी दीवार पर एक बहुत बड़ी तस्वीर लगा रखी है। या दीवार बहुत अधिक बड़ी है और उस पर एक कोने में या बीच में छोटी सी तस्वीर लगी है। एक बहुत बड़ा फ्रेम है और उसमें छोटा सा चित्र लगा है। इनमें से बहुत सी परिस्थितियां हमें अटपटी प्रतीत होगी। क्योंकि इनमें अनुपात हीनता है। हमारी दृष्टि चीजों के बीच निश्चित अनुपात ढूंढती है।

नीचे कुछ उचित अनुपातिक तथा अनुपातहीन चित्र दिये गये हैं। इनमें से ऐसे चित्रों की पहचान कीजिए जिनमें अनुपात उचित लगता है और सोचिए कि आपने क्या देख कर बाकी चित्रों को छोड़ा है अर्थात् आप अपने उत्तर का कारण सोचिए।



दो राशियों की तुलना

चित्र अनुपातिक है या नहीं विभिन्न हिस्सों के आकारों की तुलना पर निर्भर है। उदाहरण के लिए दरवाजे का पल्ला बहुत ज्यादा लम्बा है और इसी तरह माचिस की डिब्बी लम्बाई भी बाकी भुजाओं की तुलना में बहुत अधिक है। मानों हम लम्बाई और चौड़ाई की तुलना करना चाहते हैं। इन दोनों राशियों की तुलना कई तरीके से की जा सकती है व तुलना करने के कई आधार हैं। सबसे सरल तो यह पता करना है कि पहली राशि दूसरी राशि से कितनी अधिक या कितनी कम है? इसकी जानकारी कई प्रकार से प्राप्त की जा सकती है।

1. परीक्षा में भाबाना को 40 अंक तथा रेणु को 20 अंक मिले तो रेणु को भाबाना से 20 अंक कम प्राप्त हुए।
2. भााला में 600 छात्रों में से 200 छात्र कम आए तो उस दिन भााला में 400 छात्र आए।
3. दो रेखाखंडों की लम्बाई 8 सेमी एवं 4 सेमी हो तो पहली रेखाखण्ड की लम्बाई दूसरे रेखाखण्ड से 4 सेमी अधिक है।
4. किसी दरवाजे की ऊँचाई 8 फिट है और इसकी चौड़ाई 2 फिट है तो इसकी ऊँचाई चौड़ाई से 6 फिट अधिक है। दरवाजे के संदर्भ में ऊँचाई व चौड़ाई का अंतर 6 फिट है बताने से वह कितना उपयुक्त है पता नहीं चलता। यदि किसी दरवाजे की ऊँचाई 18 फिट और चौड़ाई 12 फिट हो तो भी अन्तर 6 फिट है, जबकि दोनों में बहुत अंतर है। दोनों राशियों में तुलना का एक और आधार हो सकता है। हम यह भी देख सकते हैं कि पहली राशि दूसरी राशि के अथवा दूसरी राशि पहली राशि के कितने गुणा है। इससे पहले दरवाजे में ऊँचाई, चौड़ाई की तुलना में 4 गुणा है, जबकि दूसरे में ऊँचाई, चौड़ाई का डेढ़ गुणा है।

   नीचे सारणी में भी दो राशि लेकर उनकी तुलना की गई है।

पहली राशि	दूसरी राशि	दूसरी राशि पहली राशि से कितनी गुना है	पहली राशि दूसरी राशि से कितनी गुना है
2 सेमी	6 सेमी	3 गुना	1/3 गुना
500 ग्राम	1000 ग्राम	2 गुना	1/2 गुना
200 रूपये	1000 रूपये	5 गुना अथवा 5:1	1/5 गुना अथवा 1:5
5 लीटर	20 लीटर	4 गुना	1/4 गुना
4 मीटर	32 मीटर	8 गुना अथवा 8:1	1/8 गुना अथवा 1:8
3 मीटर	5 मीटर	5/3 गुना अथवा 5 : 3	3/5 गुना अथवा 3 : 5

आप दैनिक जीवन के कुछ उदाहरण बताइए जिसमें इसी प्रकार पता करना हो कि एक राशि दूसरी राशि के कितनी गुनी है। आपके कमरे की लम्बाई 30 फीट एवं चौड़ाई 15 फीट है अर्थात् कमरे की लम्बाई, चौड़ाई से दुगुनी है इसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है –

$$\frac{\text{कमरे की लम्बाई}}{\text{कमरे की चौड़ाई}} = \frac{30 \text{ फीट}}{15 \text{ फीट}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ गुना}$$

अर्थात् लम्बाई चौड़ाई से दुगुनी है या कमरे की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 2 : 1 है। यह भी कह सकते हैं कि चौड़ाई और लम्बाई का अनुपात 1 : 2 है।

अतः अनुपात परिमाण के आधार पर बना संबंध है।

1. 50 पुस्तकों एवं 10 पुस्तकों के मध्य अनुपात = 50 : 10 = 5 : 1
2. राम की उम्र 20 वर्श एवं भयाम की उम्र 30 वर्ष है। दोनों के उम्र के मध्य अनुपात = 20 : 30 = 2 : 3
3. 400 किलो गेहूं एवं 100 किलो गेहूं के मध्य अनुपात = 400 : 100 = 4 : 1
4. राशि a तथा राशि b के मध्य अनुपात = a : b

अभ्यास : 1

सारणी में शिक्षक एवं छात्र अनुपात ज्ञात करके सारणी पूर्ण कीजिए।

क्र.	शाला का नाम	शिक्षक संख्या	छात्र संख्या	अनुपात	सरलतम रुप
1	आदर्श माध्यमिक विद्यालय	06	150		
2	भगतसिंह पू. मा. विद्यालय	10	350		
3	पैरामाउंट पू. मा. भाला	15	600		
4	लक्ष्मीबाई कन्या भाला	08	264		

अनुपात के बारे में कुछ बातें

1. दो राशियों a तथा b के मध्य अनुपात को a : b से दर्शाते हैं जिसमें a पहला तथा b दूसरा पद है। (जहाँ a तथा b पूर्ण संख्याएँ हैं।)
2. अनुपात ज्ञात करते समय एक ही प्रकार की राशियों को समान इकाई से दर्शाया जाता है।

✍ कियाकलाप 4.

शैली और उसके परिवार के सदस्य एक पेड़ के पास खुले मैदान में खड़े थे। शैली ने परछाइयों को देखा और उनको नापने लगी। उसने परिवार के प्रत्येक सदस्य की परछाई की लंबाई और उनकी ऊँचाई को निम्नानुसार तालिका में दर्शाया –

क्र.	सदस्य	परछाई की लंबाई	सदस्य की ऊँचाई
1	पिताजी	92 सेमी	184 सेमी
2	माताजी	80 सेमी	160 सेमी
3	भाई	45 सेमी	90 सेमी
4	स्वयं	75 सेमी	150 सेमी
5	पेड़	215 सेमी	....

अब शैली के सामने एक समस्या आ गई। परिवार के सदस्यों की ऊँचाई तो उसे मालूम थी और उसने परछाई की लंबाई नाप ली, लेकिन पेड़ की ऊँचाई नहीं माप सकी। क्योंकि पेड़ की ऊँचाई ज्ञात करना मुश्किल था।

क्या वह परछाई देखकर पेड़ की ऊँचाई निकाल सकती है? आइए, देखें शैली ने इस समस्या को कैसे हल किया –

उसने तालिका में संख्याओं के बीच एक सम्बन्ध देखा, प्रत्येक व्यक्ति की ऊँचाई उसकी परछाई से दुगुनी है। उसने सोचा कि यदि उसी स्थान पर सभी सदस्यों की ऊँचाई एवं परछाई की लम्बाई का अनुपात 2 : 1 है तो पेड़ की ऊँचाई भी परछाई की लम्बाई की दुगुनी होगी। उसने इससे पता कर लिया कि पेड़ की ऊँचाई 430 सेमी है।

उदाहरण 1.

एक व्यक्ति ने 25 रूपये अपने पुत्र को एवं 36 रूपये अपनी पुत्री को दिये तो उनको दिए गए रूपयों का अनुपात ज्ञात कीजिए ?

हल : पुत्र का भाग = 25 रूपये

पुत्री का भाग = 36 रूपये

पुत्र का भाग : पुत्री का भाग = 25 : 36

उदाहरण 2.

एक डंडे की लंबाई 90 सेमी एवं एक बाँस की लम्बाई 4 मीटर 50 सेमी है तो डंडे एवं बाँस की लम्बाईयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : डंडे की लम्बाई = 90 सेमी

बाँस की लम्बाई = 4 मीटर 50 सेमी

= (400 + 50) सेमी { 1 मीटर = 100 सेमी }

= 450 सेमी

(यहां डंडे एवं बाँस की लम्बाई अलग–अलग इकाई में है अतः एक ही इकाई सेमी में बदलना आव यक है।)

अतः डंडे की लम्बाई : बाँस की लम्बाई = 90 : 450

= 1 : 5 (सरलतम रूप)

उदाहरण 3.

राजेश की एक महीने की आमदनी 12500 रुपये है। इसमें से वह 2500 रू. की बचत करता है। अनुपात ज्ञात कीजिए।

1. राजेश की आमदनी और उसके खर्च के बीच।
2. राजेश की आमदनी और उसकी बचत के बीच।

हल : राजेश की मासिक आमदनी = 12500 रूपये

राजेश की मासिक बचत = 2500 रूपये

राजेश का मासिक खर्च = 12500 – 2500 रूपये

= 10000 रूपये

अतः राजेश की आमदनी का उसके खर्च से अनुपात = 12500 : 10000

= 5 : 4

राजेश की आमदनी का उसकी बचत से अनुपात = 12500 : 2500

= 5 : 1

उदाहरण 4.

एक पेन के मूल्य और एक पेंसिल के मूल्य का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि पेनों का मूल्य 144 रु प्रति दर्जन एवं 10 पेंसिल का मूल्य 90 रु हो।

हल : यहां सबसे पहले एक पेन और एक पेंसिल का मूल्य ज्ञात करना होगा।

एक दर्जन या 12 पेनों का मूल्य = 144 रु

1 पेन का मूल्य $= \frac{144}{12}$ = 12 रु

10 पेंसिल का मूल्य = 90 रु

1 पेंसिल का मूल्य $= \frac{90}{10} =$ 9रु.

अतः 1 पेन का मूल्य : 1 पेंसिल का मूल्य $= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ = 4 : 3

उदाहरण 5.

छोटू एवं मिंटू के बीच 40 टॉफी को 4 : 1 के अनुपात में बाँटिए।

हल : कुल भागों की संख्या = 4 + 1 = 5

40 टॉफी को 5 भागों में बांटने पर 4 हिस्सा छोटू को एवं 1 हिस्सा मिन्टू को मिलेगा।

अतः छोटू का हिस्सा $= \frac{40}{5} \times 4$

= 32 टॉफी

और मिन्टू का हिस्सा $= \frac{40}{5} \times 1$

= 8 टॉफी

उदाहरण 6.

निम्नलिखित मापों का अनुपात ज्ञात कीजिए –

(अ) 5 रु तथा 50 पैसे

(ब) 500 सेमी तथा 10 मीटर

(स) 8 किग्रा तथा 640 ग्राम

हल : (अ) 5 रु तथा 50 पैसे का अनुपात –

5 रु $= 5 \times 100$ पैसे = 500 पैसे

$\therefore$ अनुपात $\frac{500}{50} = \frac{10}{1} = 10:1$

(ब) 500 सेमी तथा 10 मीटर का अनुपात

10 मीटर $= 10 \times 100$ सेमी

$\therefore$ अनुपात $= \frac{500}{10 \times 100} = \frac{1}{2} = 1:2$

(स) 8 किग्रा तथा 640 ग्राम का अनुपात

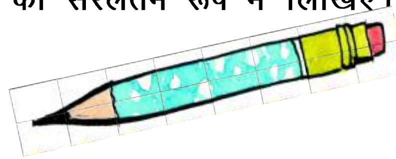
8 किग्रा $= 8 \times 1000$ ग्राम = 8000 ग्राम

$\therefore$ अनुपात $= \frac{8000}{640} = \frac{25}{2} = 25:2$

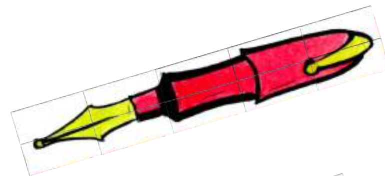
प्रश्नावली 10.1

1. अपने आस पास से निम्नलिखित वस्तुएं इकट्ठी कीजिए। उन वस्तुओं की लम्बाई ज्ञात कर लम्बाईयों के बीच अनुपात पता कीजिए? अनुपात को सरलतम रूप में लिखिए।

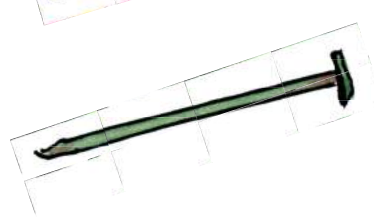
नई पेन्सिल ....



पेन ....



कील ....



आलपिन ....

(i) आलपिन का कील से.................................... (ii) कील का पेन्सिल से..................................

(iii) पेन का कील से .... (iv) कील का आलपिन से....................................

(v) आलपिन का पेन से .... (vi) पेन का पेन्सिल से ....

(vii) पेन्सिल का आलपिन से .... (viii) पेन का आलपिन से ....

2. निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) 15 मिनट का 1 घंटे से (ii) 250 ग्राम का 1 किलोग्राम से

(iii) 15 पैसे का 1 रूपये से (iv) 15 पैसे का 5 रूपये से

(v) 21/2 सेमी का 1 मीटर से (vi) 10 मीटर का 25 सेमी से

(vii) 40 सेमी का 2.5 मीटर से

3. निम्न मे से प्रत्येक अनुपात को उसके सरलतम रूप में लिखिए।

(i) 150 : 400 (ii) 85 : 255

(iii) एक दर्जन : एक कोरी (iv) 27 : 57

(v) 24 : 68 (vi) 250 : 375

(vii) 65 : 91 (viii) 2.5 : 7.5

(ix) 50 : 225 (x) 500 : 10000

4. वि ाखा की वार्शिक आमदनी 80000 रूपये है। उसने 5000 रूपये आयकर के रूप में दे दिए। निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए –

(i) आयकर : आय

(ii) आय : आयकर

5. मुन्नू और बुन्नू ने एक दौड़ में भाग लिया। निर्धारित समय में मुन्नू ने 210 मीटर की दूरी तय की और उतने ही समय में बुन्नू ने 180 मीटर की दूरी तय की । मुन्नू और बुन्नू के द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात क्या होगा?

6. सतीश एक वैज्ञानिक के रूप में कार्य करते हैं और उनकी आय 20000 रूपये प्रति माह है। उनकी पत्नि अनीता डॉक्टर है तथा उसकी आय 15000 रूपये प्रति माह है। निम्नलिखित अनुपातों को ज्ञात कीजिए –

    1. सतीश की आय : अनीता की आय
    2. सतीश की आय : उनकी कुल आय

7. एक स्कूल में कुल विद्यार्थियों की संख्या 1500 है। उसमें से लड़कियों की संख्या 600 है। लड़कों तथा लड़कियों की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए?

8. 20 गुब्बारों को दो बच्चों के बीच 2 : 3 के अनुपात में बांटिए। बताइए दोनों को कितने–कितने गुब्बारे मिले ?

9. राजेश और जावेद ने मिलकर एक दुकान खोली। दुकान में राजेश ने 45000 रु तथा जावेद ने 36000 रु लगाए। बताइए राजेश और जावेद द्वारा लगाई पूंजियों का मूल अनुपात क्या है ?

10. किसी परीक्षा में 117 परीक्षार्थियों में से 65 असफल हो गए तो सफल और असफल परीक्षार्थियों की संख्या में क्या अनुपात है ?

11. रत्ना और शीला ने मिलकर अपने चाचा के बगीचे से 18 आम तोड़े। दोनों अब इस आम को आपस में बाँटना चाहते हैं। रत्ना चाहती है कि उम्र के अनुपात में आमों को बांटना चाहिए। अब बताइए कि ऐसे बाँटने पर रत्ना और शीला को कितने–कितने आम मिलेंगे जबकि रत्ना की उम्र 15 वर्श तथा शीला की उम्र 12 वर्ष है।

12. वर्तमान में एक पिता तथा पुत्र की आयु 50 वर्ष एवं 20 वर्ष है। पिता की उम्र तथा पुत्र की उम्र का अनुपात ज्ञात कीजिए –

    (i) वर्तमान में पिता, पुत्र की आयु का अनुपात,

    (ii) दोनों की आयु में अनुपात जब पुत्र की आयु 10 वर्ष थी,

    (iii) दोनों की आयु में अनुपात जब पिता की आयु 35 वर्ष थी,

    (iv) दोनों की आयु में अनुपात जब पुत्र की आयु 40 वर्ष की होगी,

    (v) दोनों की आयु में अनुपात जब पिता की आयु 75 वर्ष की होगी।

13. राम और श्याम की आय का अनुपात 3 : 4 है। यदि उनकी कुल आय 21000 रू. है तो राम और श्याम की आय बताइए ?

14. A और C के बीच में बिन्दु B इस प्रकार है कि AB : BC = 7 : 3 के। यदि AC = 40 किमी है तो बताइए AB तथा BC का मान कितना होगा?

15, मेरे पास 6 समोसे हैं। इन्हें मैं अपने मित्रों में बांटना चाहता हूँ। यदि

    (i) मैं 1 : 1 में दो मित्र के मध्य बाँटू तो प्रत्येक को कितने–कितने समोसे मिलेंगे।

    (ii) मैं 2 : 1 : 3 में तीन मित्रों में बाँटू तो प्रत्येक को कितने–कितने समोसे मिलेंगे?

ऐकिक विधि

नीचे दी गई कुछ स्थितियों को देखिए –

1. आप बाजार जाते हैं और दो कॉपियाँ 20 रू में खरीदकर लाते हैं। अब यदि आपको और 5 कॉपियों की जरूरत है तो आपके पास कितने रुपये होने चाहिए?
2. श्याम के स्कूटर में 2 लीटर पेट्रोल है। उसे अन्दाज़ है कि वह इतने पेट्रोल से 50 किलोमीटर की दूरी आराम से तय कर सकता है। यदि उसे 100 किलोमीटर दूर जाना है तो उसके स्कूटर में कम से कम कितना पेट्रोल होना चाहिए?
3. आप अपने जन्मदिन पर अपने दोस्तों को तोहफा देना चाहते हैं। आप खिलौने की दुकान पर एक गाड़ी पसन्द करते हैं। यदि 75 रु में 3 गाड़ियाँ मिलती हैं और आपको 15 गाड़ियाँ खरीदनी है तो आपके पास कितने रुपये होने चाहिए ?

उपरोक्त स्थितियों के हल के बारे में सोचिए।

पहली स्थिति को देखिए –

दो कॉपियों की कीमत 20 रू है

rks1 dkWh dh dher gksxh = 10 रु

अब 1 कॉपी की कीमत 10 रु है

तो 5 कॉपियों की कीमत $= 10 \times 5 = 50$ रु

इसी विधि के अनुसार बाकी दो स्थितियों को हल करिए।

इस प्रकार के कुछ अन्य सवाल बनाकर अपने मित्रों से हल करवाइए।

जब अनेक वस्तुओं का मूल्य ज्ञात होने पर एक वस्तु का मूल्य ज्ञात करके वांछित वस्तुओं का मूल्य ज्ञात किया जाता है तो उसे ऐकिक विधि या ऐकिक नियम कहते हैं।

✍ क्रियाकलाप 5.

निम्नांकित सारणी का अवलोकन कीजिए एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

समय	पैदल तय की गई दूरी (किमी)	सायकल द्वारा तय की गई दूरी (किमी)	कार द्वारा तय की की गई दूरी (किमी)	रेल द्वारा तय की गई दूरी (किमी)
2 घंटे	8	20	70	120
1 घंटा	4	–	–	–
5 घंटे	20	–	–	–

हम देखते हैं कि

2 घंटे में तय की गई दूरी = 8 किमी

1 घंटे में तय की गई दूरी = $8/2 = 4$ किमी

5 घंटे में तय की गई दूरी = $4 \times 5 = 20$ किमी

यहाँ साइकिल, कार, रेलगाड़ी द्वारा 5 घंटे में तय की गई दूरी निकालने के लिए पहले प्रत्येक के द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी ज्ञात करनी पड़ेगी।

उदाहरण 7.

यदि एक छात्रावास में प्रति 10 बच्चों के लिए चावल की खपत 2 किलो है तो 30 बच्चों के लिए चावल की कितनी खपत होगी ?

हल : इस समस्या का हल दो चरणों में करेंगे।

चरण 1 – सबसे पहले ज्ञात करेंगे 1 बच्चे के लिए कितना चावल लगेगा।

जबकि 10 बच्चों के लिए चावल की खपत 2 कि.ग्रा. है।

इसलिए 1 बच्चों के लिए चावल की खपत $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ कि.ग्रा.

चरण 2 – इसमें हम 30 बच्चों के लिए चावल की खपत ज्ञात करेंगे।

जबकि 1 बच्चे के लिए चावल की खपत है $\frac{1}{5}$ कि.ग्रा.

इसलिए 30 बच्चों के लिए चावल की खपत $30\times\frac{1}{5}=6$ कि.ग्रा.

अतः 30 बच्चों के लिए 6 कि.ग्रा. चावल की खपत होगी।

उदाहरण 8.

एक हवाई जहाज 5 घंटे में 4000 किमी उड़ता है। वह तीन घंटे में कितना उड़ेगा?

हल :

पहले चरण में एक घंटे में हवाई जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात की जाएगी। तथा दूसरे चरण में पूछे गए समय (अर्थात् 3 घंटे) में दूरी कितनी होगी, ज्ञात की जाएगी।

चरण 1– 5 घंटे में तय की गई दूरी = 4000 किमी

1 घंटे में तय की गई दूरी = 4000 / 5 किमी = 800 किमी

चरण 2– 1 घंटे में तय की गई दूरी = 800 किमी

3 घंटें में तय की गई दूरी = 3 x 800 = 2400 किमी

इस प्रकार हवाई जहाज 2400 किमी दूरी तय करेगा।

उदाहरण 9.

एक महिला की 15 महीने की बचत 18000 रु. है।

1. उसकी सात महीने की बचत क्या होगी ?
2. कितने महीनों में उसकी बचत 30,000 रु. होगी ?

हल :

चरण 1– जबकि 15 महिने की बचत 18000 रु है।

इसलिए 1 महिने की बचत = 18000 / 15 = 1200 रुपये

चरण 2– 1 महीने की बचत 1200 रू. है।

7 महिने की बचत = 1200 X 7 = 8400 रुपये

1200 रु की बचत होती है 1 महीने में

30,000 रु की बचत होगी $\frac{30{,}000\times 1}{1200}=25$ महिने में

प्रश्नावली 10.2

1. तीन कॉपियों की कीमत 16.50 रू. है। तो 7 कॉपियों की कीमत ज्ञात कीजिए।
2. एक कार 3 घंटों में 165 किलोमीटर चलती है। तो वह कार,
   (i) 440 किलोमीटर की दूरी कितने समय में तय करेगी ?
   (ii) $6\frac{1}{2}$ घंटों में कितनी दूरी तय करेगी ?
3. 72 किताबों का वज़न 9 किलोग्राम है।
   (i) 80 किताबों का वज़न ज्ञात कीजिए।
   (ii) कितनी किताबों का वज़न 6 किलोग्राम होगा?
4. किसी मज़दूर की 25 दिनों की आय 1500 रु. है। उसकी 30 दिनों की आय ज्ञात कीजिए।
5. यदि 22 मीटर कपड़े का मूल्य 704 रु है तो 20 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा ?
6. सारिणी पूरी कीजिए :

किताबों की संख्या	मूल्य (रुपये में)
50	2500
75	—
—	100
—	3000

हमने सीखा

1. दो समान राशियों का अनुपात यह दर्शाता है कि एक राशि दूसरी राशि से कितनी गुनी है।
2. दो राशियों का अनुपात प्रायः उनके सरलतम रूप में व्यक्त किया जाता है। जैसे $na : nb$ को $a : b$ लिखा जाता है।
3. दी गई राशियों से पहले एक राशि का इकाई मान ज्ञात कर फिर वांछित संख्या में राशियों का मान ज्ञात करने की विधि को ऐकिक विधि कहा जाता है।

11
चर संख्या

आप अपने चारों ओर ऐसी कई चीजों को देखते हैं जिनमें कुछ के मान स्थिर होते हैं और कुछ के मान बदलते रहते हैं। जैसे– किसी कुर्सी का भार तो आज, कल या कुछ दिनों के बाद भी वही रहेगा परन्तु जब बीज का अंकुरण हम देखते हैं तो उससे निकले पौधे की लम्बाई धीरे–धीरे बदलती रहती है। इसी प्रकार कक्षा की लम्बाई एवं चौड़ाई स्थिर है परन्तु बारिश के दिनों में कुएँ के पानी का स्तर एक माह बाद कितना बदल जाएगा,यह नहीं बताया जा सकता।

आप अपनी कॉपी में इस तरह के 5 उदाहरण लिखिए जहाँ मान स्थिर रहते हैं एवं 5 उदाहरण ऐसे लिखिए जहाँ मान बदलते रहते हैं।

कक्षा में उदाहरणों को कॉपी में लिखते समय अनु ने रोहन से कहा, कि मैं तो यहाँ लिखूँगी कि मेरे पिताजी की उम्र तो बदल रही है परन्तु उनकी ऊँचाई स्थिर है। रोहन ने भी कहा कि मैं यहाँ लिखूँगा कि हमारे खेत का रकबा चार एकड़ है परन्तु उसमें पैदा होने वाली फसल कभी कम, तो कभी ज्यादा होती है।

उपरोक्त उदाहरणों में आपने देखा कि कुछ मान तो बदल रहे हैं परन्तु कुछ मान स्थिर हैं। नीचे आपको कुछ परिस्थितियाँ दी गई हैं, आप आपस में चर्चा कर रिक्त स्थानों में परिस्थिति के अनुसार मान स्थिर हैं अथवा बदल रहे हैं, लिखिए।

क्रियाकलाप – 1

क्रमांक	परिस्थितियाँ	मान स्थिर हैं/बदल रहे हैं।
1.	सप्ताह में दिनों की संख्या	
2.	माह जनवरी में दिन का तापमान	
3.	आपकी कक्षा में रोज़ आने वाले छात्रों की संख्या	
4.	हॉकी के खेल में खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या	
5.	1 किलोग्राम आलू में आलुओं की संख्या	

अंतिम उदाहरण को हल करते समय हमीदा ने अपने साथियों से कहा ''यदि आलू बड़े होंगे तो 1 किग्रा में कम आएँगे परन्तु यदि आलू छोटे होंगे तो 1 किग्रा में ज्यादा आएँगे। हम तो यह भी नहीं बता सकते कि एक थैले में आने वाले आलुओं की संख्या क्या होगी। ऐसा ही कुछ कल हमारे साथ घर में हुआ। पिताजी ने हम सभी भाई – बहनों को चक्कर में डाल दिया उनके रूमाल में कुछ टॉफियाँ बंधी हुई थी। उन्होंने पूछा, ''इस रूमाल में कितनी टॉफियाँ हैं?'' हमें टॉफियों की संख्या मालूम ही नहीं थी, तो कैसे बताते। क्या टॉफियों की संख्या बताने का कोई तरीका नहीं है ? इस पर राजू ने कहा कि चलो अपनी गणित शिक्षिका से पूछें।

शिक्षिका ने बच्चों की समस्या को सुना और एक नई समस्या बच्चों के सामने रख दी। उन्होंने पूछा कि इस चॉक के डिब्बे में कितने चॉक हैं? बच्चों ने अंदाज से अलग–अलग संख्या बतायी – हमीदा ने 12, राजू ने 18, अनु ने 16, रोहन ने 20 इत्यादि। शिक्षिका ने कहा, ''इसमें से यदि 5 चॉक निकाल दें तो आपके अनुसार डिब्बे में कितने चॉक बचेंगे?'' हमीदा, राजू, अनु और रोहन ने हिसाब लगाकर संख्या क्रमशः बताया $12—5 = 7$, $18—5 = 13$, $16—5 = 11$, $20—5 = 15$

चूँकि डिब्बे में चॉक की संख्या मालूम नहीं थी इसलिए उत्तर अलग–अलग आए। यदि इन संख्यात्मक मानों की जगह हम ''चॉक की संख्या —5'' लिखें तो सभी का उत्तर एक समान आ जाएगा।

किन्तु इस प्रकार लिखने से बार–बार चॉक की संख्या लिखनी पड़ेगी। क्या इसे संक्षेप में लिखने का कोई तरीका है?

यदि डिब्बे में चॉक की संख्या को हम "च" लिखें और इसमें से 5 चॉक निकाल दें तो डिब्बे में चॉक की संख्या = च—5 होगी। इसी तरह यदि इस डिब्बे में 3 चॉक डाल दें तो डिब्बे में चॉक की संख्या = च+3 होगी। आइए, इसे समझने के लिए एक और उदाहरण देखें–

टॉफी के पैकेट में 20 टॉफियाँ हैं, परन्तु पैकेट की कीमत मालूम नहीं है–

यदि 1 टॉफी का मूल्य 50 पैसा है तो पैकेट का मूल्य 20×0.50 रु. = 10 रुपये होगा

यदि 1 टॉफी का मूल्य 1 रुपया है तो पैकेट का मूल्य 20×1 रु. = 20 रुपये होगा

यदि 1 टॉफी का मूल्य 2 रुपया है तो पैकेट का मूल्य 20×2 रु. = 40 रुपये होगा

इस प्रकार यहाँ पैकेट का मूल्य = 20 × (1 टॉफी का मूल्य) होगा। यहाँ यदि 1 टॉफी के मूल्य के स्थान पर हम x रु. या y रु. या z रु. या कोई भी अक्षर लिखें तो पैकेट का मूल्य = $20x$ रु. या 20y रु. या 20z रु. होगा।

ऐसा ही एक और उदाहरण देखते हैं:

एक वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 2 इकाई है तो वर्ग का परिमाप = 4×2 इकाई। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 3 इकाई है तो वर्ग का परिमाप = 4×3 इकाई। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 7 इकाई है तो वर्ग का परिमाप = 4×7 इकाई। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई a इकाई है तो वर्ग का परिमाप = $4 \times a$ इकाई।

ऊपर के सभी उदाहरणों में आपने देखा कि कुछ राशियाँ तो स्थिर हैं, जैसे पैकेट का मूल्य $20x$ रु. में 20 तो स्थिर है परन्तु x रु. अर्थात् 1 टॉफी के मूल्य के बदलने पर पैकेट का मूल्य बदल जाता है। इसी प्रकार वर्ग का परिमाप 4a में 4 स्थिर है परन्तु भुजा का मान या a इकाई के बदलने पर वर्ग का परिमाप बदल जाता है। सभी उदाहरणों को देखने के बाद हमीदा ने सोचा कि सभी बदलने वाले मानों को किसी अक्षर द्वारा लिखा जाता है। इसलिए हम कह सकते हैं कि मेरे पिताजी के रूमाल में z टॉफी रही होंगी। z का मान हम कुछ और जानकारी मिलने पर ही निकाल सकते हैं, अन्यथा नहीं।

इस प्रकार ये बदलने वाली राशियाँ ही चर हैं। इनका कोई भी मान हो सकता है। इन्हें हिन्दी अथवा अंग्रेजी वर्णमाला के किसी भी अक्षर जैसे अ, ब, स, द, या क, ख, ग, घ या a, b, c या p, q, r या x, y, z द्वारा लिखा जा सकता है। इन्हीं अंकों को चरांक या बीजांक भी कहते हैं।

जब भी ऐसी संख्या, जिसका मान मालूम नहीं है, आती है तब उस संख्या के स्थान पर बीज अंक या चरांक का उपयोग किया जाता है। इन बीजांक या चरांकों के उपयोग से प्रश्न हल करना आसान हो जाता है।

इस प्रकार अंकगणित के व्यापकीकरण के लिए भी चरों का उपयोग किया जाता है जैसे

1. **किसी संख्या तथा उसके बाद आने वाली संख्या के बीच क्या संबंध है?** 4 के बाद आने वाली संख्या क्या है? यह संख्या 5 है अर्थात् 4+1, इसी प्रकार 1000 के बाद आने वाली संख्या क्या है? यह संख्या 1001 है अर्थात् 1000+1, अतः यदि कोई संख्या दी गई हो तो उसके बाद वाली संख्या दी गई संख्या में 1 जोड़कर प्राप्त की जाती है। यदि कोई संख्या x है तो उसके बाद आने वाली संख्या $x + 1$ होगी।
2. इसी प्रकार क्या आप किसी संख्या के पहले आने वाली संख्या के लिए नियम बना सकते हैं?
3. क्या आप सम संख्याओं को चरांक के रूप में लिख सकते हैं ? 2, 4, 6, 8, ..., इत्यादि सम संख्यायें हैं। इन सभी संख्याओं का एक गुणनखंड 2 है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक संख्या को 2 से गुणा कर सम संख्या प्राप्त की जा सकती है। मान लें कि n कोई प्राकृत/गणना संख्या है तो 2n एक सम संख्या के रूप में लिखी जा सकती है।
4. क्या आप विषम संख्याओं को चरांक के रूप में लिख सकते हैं ? यदि संख्याओं को देखें तो आप यह पाते हैं कि सम और विषम संख्याएँ एक के बाद एक आती हैं अर्थात् विषम, सम, विषम, सम,

विषम, ... जैसे 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...। यहाँ प्रत्येक सम के पहले वाली संख्या विषम है तथा बाद वाली संख्या भी विषम है। आपने इसके पहले सम संख्याओं को 2n से बताया है, किसी संख्या के पहले आने वाली संख्या $x - 1$ है तथा बाद में आने वाली संख्या $x + 1$ है तो किसी सम संख्या अर्थात् 2n के पहले आने वाली संख्या 2 n—1 होगी तथा बाद में आने वाली संख्या 2 n+1, होगी। इस प्रकार (2 n—1) या (2 n+1) विषम संख्या के लिए लिखा जा सकता है।

नीचे दी गई संख्यायें कुछ नियमों से जुड़ी हैं। आप इन्हें n वाँ पद के रूप में लिखिए –

क्र.	संख्यायें जो किसी नियम से जुड़ी हुई है।	पहला पद	दूसरा पद	तीसरा पद	सातवां पद	नौवां पद	nवां पद
1	3, 6, 9, 12, ... इत्यादि	3	6	12	21	27	3n
2	5, 8, 11, 14,...... इत्यादि	5	8	14	......	......	......
3	3, 7, 11, 15,...... इत्यादि	3	7	15	......	......	......

प्रश्नावली 11

32FQ21

प्रश्न 1 निम्नलिखित को संख्याओं, अक्षर संख्याओं तथा मूलभूत संक्रियाओं के चिह्नों की सहायता से दिखाइए। यह भी बताइए कि प्रत्येक अक्षर क्या बताता है?

(i) एक वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या से दोगुना है।

(ii) एक आयत का क्षेत्रफल उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई के गुणनफल के बराबर है।

(iii) विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य तथा लाभ के योगफल के बराबर होता है।

(iv) किसी संख्या में दूसरी संख्या को जोड़ा गया है।

(v) किसी संख्या में से 7 निकाले गए।

(vi) मिश्रधन, मूलधन तथा ब्याज के योगफल के बराबर होता है।

प्रश्न 2 सही/गलत कथन छाँटिए व गलत कथनों को सुधार कर लिखिए।

(i) संख्या a का परवर्ती a + 1 है।

(ii) x का मान परिस्थिति के अनुसार बदलता रहता है।

(iii) 2n एक विषम संख्या होगी।

(iv) m x n, दो अज्ञात संख्याओं का गुणनफल है।

(v) चरांकों को सामान्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से दर्शाते हैं।

हमने सीखा

1. जो अक्षर, संख्याओं को दर्शाने के काम में आते हैं, अक्षर संख्या कहलाते हैं।
2. ये अक्षर चरांक के रूप में संख्याओं को ही दर्शाते हैं, अतः वे उन सभी नियमों का पालन करते हैं जो संख्याओं द्वारा की जाती है।
3. वह राशि जिसका एक निश्चित संख्यात्मक मान हो, अचर राशि कहलाती है।
4. वह राशि जिसके कई संख्यात्मक मान हो सकते है, चर राशि कहलाती है।
5. अंकगणित में हम एक निश्चित मान वाली संख्या का उपयोग करते हैं, जबकि बीजगणित में ऐसे अक्षरों का प्रयोग करते हैं जिसका मान एक से अधिक हो सकता है।
6. किसी संख्या का बीजीय भाग चर राशि कहलाता है।

   $p = 4a$ में p और a चर राशि तथा 4 अचर राशि है।

32PL3N

12
बीजीय व्यंजक

पिछले पाठ में आपने चर राशियों के बारे में पढ़ा है, इन्हें चर अंकों या बीज अंकों के रूप में किस तरह लिखते हैं यह भी आप सीख चुके हैं। अब आप, बदलने वाली अथवा अज्ञात मान वाली राशि को चर अंक से एवं स्थिर रहने वाले मानों को स्थिर अंकों के द्वारा बड़ी आसानी से बता सकते हैं। इस प्रकार ''चरांक एवं स्थिरांक से बना हुआ व्यंजक ही बीजीय व्यंजक है।'' पिछले पाठ में आपने जहां भी चरांक का उपयोग किया है उन सभी को बीजीय व्यंजक भी कह सकते हैं।

आइए, दैनिक जीवन में बीजीय व्यंजकों का उपयोग कैसे होता है, देखें।

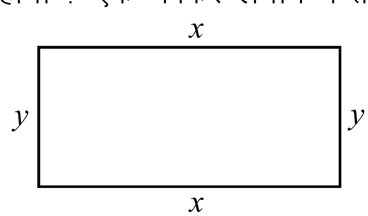
रज़िया की उम्र मालूम नहीं है। अब यदि कहा जाए कि 5 वर्ष पूर्व रजिया की उम्र क्या रही होगी या 3 वर्ष बाद रज़िया की उम्र कितनी होगी ? इन सभी प्रश्नों के उत्तर बीजीय व्यंजकों के रूप में दिये जा सकते हैं।

यदि रज़िया की उम्र को y वर्ष से दर्शाया जाए तो 5 वर्ष पहले रज़िया की उम्र $y-5$ वर्ष रही होगी तथा 3 वर्ष बाद $y+3$ वर्ष होगी। यहां $y-5$ तथा $y+3$ बीजीय व्यंजक हैं। आइए, बीजीय व्यंजक के रूप में कुछ और गणितीय समस्याओं को व्यक्त करें।

1. राधा के प्राप्तांक नेहा के प्राप्तांक से 3 कम हैं। यदि नेहा के प्राप्तांक x हैं तो राधा के प्राप्तांक x-3 होंगे।

2. आयत की लम्बाई, चौड़ाई से 4 इकाई अधिक है। यदि आयत की चौड़ाई y इकाई है तो लम्बाई $(y+4)$ इकाई होगी।

3. किसी आयताकार मैदान की लम्बाई x है तथा चौड़ाई y है तो उस मैदान के चारों ओर 1 चक्कर लगाने में तय की गई दूरी क्या होगी ? एक चक्कर लगाने में तय की गई दूरी $p = x + y + x + y$ होगी।



✍ क्रियाकलाप 1.

निम्नलिखित को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।

1. किसी संख्या का तीन गुणा।
2. किसी संख्या से 6 अधिक
3. किसी संख्या से 17 कम।
4. किसी संख्या का 5 वां भाग।
5. किसी संख्या के दुगुना से 12 अधिक।
6. किसी संख्या के सात गुणे से 3 कम।
7. किसी संख्या के चार गुणे का तीसरा भाग।

8. किसी संख्या में उसी संख्या का 7 गुणा जोड़ा जाए।
9. किसी संख्या के 5 गुणे से उसी संख्या का 6 गुणा घटाया जाए।
10. दूध के भरे डिब्बे से 5 लीटर दूध निकाल लिया तो कितने लीटर दूध बचा?

उपर्युक्त क्रियाकलापों में आपने देखा कि सभी बीजीय व्यंजक, चरांक और स्थिरांक से मिलकर बने हैं।

✍ क्रियाकलाप 2.

नीचे सारणी में चरांक तथा स्थिरांक को अलग–अलग छांटकर दिए गए स्थान पर लिखिए :–

क्रमांक	व्यंजक	चरांक	स्थिरांक
1.	z	z	1
2.	$x + 5$	x	1, 5
3.	$y - 8$	...	...
4.	$3x + 2y$	...	...
5.	$2xy - 3$	x, y	2, -3
6.	$7 - 3x$	...	...
7.	$33x$	...	...
8.	$y - x$	...	...

क्या ऊपर सारणी में सभी बीजीय व्यंजकों के पद समान हैं ?

यहां z एवं $33x$ में पद की संख्या 1 है तथा शेष कथनों में पदों की संख्या 2 है, जिसका अर्थ यह हुआ कि–

किसी बीजीय व्यंजक में अलग–अलग चरांक एवं स्थिरांक के बीच जितने बार + अथवा – चिह्न का उपयोग होता है, बीजीय व्यंजक में पदों की संख्या उससे 1 अधिक होगी।

✍ क्रियाकलाप 3.

निम्नलिखित रिक्त स्थानों पर बीजीय व्यंजकों के पदों की संख्या लिखिए।

1. $3x + 8$ (दो)
2. $3 + y - 7p$ (---)
3. $2x + 3xy + z$ (---)
4. $8x$ (---)
5. $9 + 3a - 3x + b$ (---)
6. $5xyz$ (---)

आपने चरांकों एवं स्थिराकों को जान लिया है, जैसे $3x + 8y + 7$ में x और y तो चरांक हैं परन्तु 3, 8 और 7 स्थिरांक हैं। जैसे आपने चर के पाठ में देखा है $3x$ वास्तव में x का तीन गुणा है, उसी प्रकार $8y$ भी y का 8 गुणा है। इसका अर्थ यह हुआ कि चरांक के साथ जो स्थिरांक है, वह चरांक को गुणा करने वाला अंक है, इसलिए हम इसे गुणांक कहते हैं। अतः $3x + 8y + 7$ में 3 गुणांक हैं x का, 8 गुणांक है y का तथा 7 स्थिरांक है। इसी प्रकार 9ab में ab चरांक है तथा 9 उनका गुणांक है।

✍ क्रियाकलाप 4.

निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों के गुणांक एवं चरांक को अलग कीजिए तथा समान चरांक वाले व्यंजकों को छाँटकर अलग लिखिए।

क्रमांक	व्यंजक	गुणांक	चरांक
1.	$8x$	8	x
2.	$9py$		
3.	xyz		
4.	18ab		
5.	yz		
6.	$-\frac{1}{2}yz$		
7.	$3xyz$		
8.	$32x$		
9.	$-3py$		
10.	$-\frac{3}{5}yz$		

उपर्युक्त क्रियाकलाप में आपने पाया कि $8x$ तथा $32x$ में चरांक का मान x है, उसी प्रकार $9py$ तथा $-3py$ में चरांक का मान py है, xyz तथा $3xyz$ में चरांक का मान xyz है, $yz, -\frac{1}{2}yz$ एवं $-\frac{3}{5}yz$ में चरांक का मान yz है। इस प्रकार समान चरांक वाली राशियों को ''सजातीय'' चरांक वाली राशियाँ कहते हैं।

सजातीय पद

ऐसे समस्त पद जिनमें चरांक या बीजांक वाला भाग समान होता है, ''सजातीय पद'' कहलाते हैं। उनका गुणांक वाला भाग अलग–अलग हो सकता है।

विजातीय पद

ऐसे समस्त पद जिनमें चरांक या बीजांक वाला भाग समान न हो उन्हें ''विजातीय पद'' कहलाते हैं।

✍ क्रियाकलाप 5

दिये गये बीजीय व्यंजकों के सम्मुख सारणी में दिए गए व्यंजकों में से सजातीय चुनकर घेरा लगाएं –

x के सजातीय	$6xy, 5y, \frac{2}{3}x, 5xz, 7z, 2x$
yz के सजातीय	$2y, 7xz, 5z, 2yz, -\frac{1}{2}yz, 6y$
a के सजातीय	$2a, \frac{6}{7}ab, \frac{7}{6}a, -3b, 6a, 2c$
lmn के सजातीय	$6l, 5mn, \frac{2}{3}lm, lmn, 2l, -6ln$
2pq के सजातीय	$6r, pqr, -5pq, 7qr, 2a, 2p$
st के सजातीय	$4rs, 7st, -14rt, 2rst, 6r, 4t$

32YH5B

प्रश्नावली 12

प्रश्न–1 निम्नलिखित व्यंजकों में एक पदीय और द्विपदीय व्यंजक पहचानकर लिखिए।

(i) $3x + 4y$ (ii) $9 + 3y$ (iii) 4a - 7b

(iv) $5x + 1$ (v) a - 30 (vi) 4ab

(vii) abc - 1 (viii) $3xy$ (ix) ab + bc

(x) a + abc

प्रश्न–2 निम्नलिखित व्यंजकों में से सजातीय व्यंजकों को चुनिए –

$$5xy, 7c, -\frac{4}{5}yz, -7bc, -\frac{9}{4}xy, \frac{2}{7}z, -2c, bc, -37pqr, \frac{11}{13}yz, 7z, 9pqr$$

हमने सीखा

1. संख्याओं के स्थान पर प्रयोग किये जाने वाले अक्षर, चर राशि कहलाते हैं। इन्हें बीजीय राशियाँ भी कहते हैं।
2. एक समान अक्षर संख्या एवं घात वाले पद को सजातीय पद कहते हैं।
3. असमान अक्षर संख्या एवं घात वाले पद को विजातीय पद कहते हैं।
4. चर एवं अचर अथवा चर एवं चर जब +, -, × अथवा ÷ चिह्न से जुड़ते हैं तो उन्हें बीजीय व्यंजक कहते हैं।
5. एक पद वाले बीजीय व्यंजक को एक पदीय व्यंजक कहते हैं।
6. दो पद वाले बीजीय व्यंजकों को द्विपदीय व्यंजक कहते हैं।

338D6Y

13
प्रतिशतता

कक्षा में कुछ छात्र व छात्राएं आपस में चर्चा कर रहे थे। मैरी ने कहा – आज मैं घर से आ रही थी तो कपड़े की दुकान पर बड़े–बड़े अक्षरों में लिखा था **''छूट, छूट, छूट, 10 प्रतिशत''** इसका क्या मतलब है ?

अरुण ने कहा – यदि 100 रु. का कपड़ा खरीदें तो उस पर 10 रु. की छूट मिलेगी। वह कपड़ा 90 रु. में मिलेगा।

मैरी – यदि 40 रु. का कपड़ा खरीदें तो कितने की छूट मिलेगी?

सलमा – 4 रु. की छूट मिलेगी अर्थात् 36 रु. देने पड़ेंगे।

मैरी – परीक्षा की अंक सूची में भी तो प्राप्तांक के साथ प्रतिशत अंक लिखे जाते हैं।

रमेश – प्रतिशत का उपयेाग और कहाँ–कहाँ होता है?

सलमा – चलो मिलकर इसकी सूची बनायें।

सभी छात्र सूची बनाने में जुट गए, सोच विचार कर उन्होंने कुछ उदाहरण लिखे –

1. परीक्षा में अनिल को 93 प्रतिशत अंक प्राप्त हुए।
2. पिछली वार्शिक परीक्षा में 87 प्रतिशत छात्राएँ एवं 76 प्रतिशत छात्र उत्तीर्ण हुए।
3. बैंक, जमा राशि पर 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज देता है।
4. व्यापार के क्षेत्र में लाभ तथा हानि को प्रतिशत में बताया जाता है।
5. देश के 70 प्रतिशत लोग गांव में रहते हैं।
6. ठंड के मौसम में बिकने वाले पंखों पर 15 प्रतिशत की छूट।

चलो, हम भी समझें कि प्रतिशत क्या है और इसकी क्या जरूरत है।

प्रतिशत की आवश्यकता क्यों?

एक परीक्षा में उमा को 10 में से 8 अंक प्राप्त हुए। विनय को 20 अंक में से 15 अंक प्राप्त हुए। क्या आप बता सकते हैं कि किसको ज्यादा अच्छे अंक प्राप्त हुए हैं ?

दोनों के अंकों की तुलना करने के लिए दोनों के हर समान करने होंगे।

अर्थात् उमा के प्राप्तांक $\frac{8}{10} = \frac{8 \times 2}{10 \times 2} = \frac{16}{20}$ हैं

तथा विनय के प्राप्तांक $\frac{15}{20}$ हैं।

अब क्योंकि दोनों भिन्नों के हर समान है, अतः इनकी तुलना कर सकते हैं।

अब हम कह सकते हैं कि उमा के प्राप्तांक अधिक हैं अर्थात् जब भी तुलना करनी हो हमें कितने में से मिला है उसे बराबर करना होता है।

यदि दोनों के प्राप्तांक इस प्रकार बदले जाएँ कि हर 100 हों तो –

उमा के प्राप्तांक $\frac{8}{10} = \frac{8 \times 10}{10 \times 10} = \frac{80}{100}$

चूंकि 10 में 8 अंक बराबर है 100 में 80 अंक के, इसलिए यह कहा जा सकता है कि उमा के प्राप्तांक 80 प्रतिशत हैं।

विनय के प्राप्तांक $\frac{15}{20} = \frac{15 \times 5}{20 \times 5} = \frac{75}{100}$

चूँकि 20 में 15 अंक बराबर हैं, 100 में 75 अंक के, इसलिए यह कहा जा सकता है कि विनय के प्राप्तांक 75 प्रतिशत हैं।

उमा के प्राप्तांक का प्रतिशत अधिक है।

इस प्रकार ऊपर उदाहरणों में आपने देखा होगा कि प्रतिशत का अर्थ 'प्रति सैंकडा' से है। यह आकड़ों की तुलना करने में उपयोगी है। एक समान आधार जो हर परिस्थिति में तुलना के काम आ सके, यह आधार सामान्यतः 100 लिया जाता है। जब प्राप्ताकों की तुलना 100 के आधार पर की जाती है, तब उनके 100 में से प्राप्तांकों को प्रति सैकड़ा कहते हैं। अतः प्रतिशत में 'प्रति' का अर्थ प्रत्येक और 'शत' का अर्थ सैकड़ा से है। प्रतिशत के लिए % चिन्ह का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित तालिका में प्राप्तांकों की तुलना करें कि किसे अधिक अंक प्राप्त हुए? इसके लिए हम पता करेंगे कि किसके अंकों का प्रतिशत अधिक है?

क्र. सं.	नाम	पूर्णांक	प्राप्तांक	(प्राप्तांक/पूर्णांक) के रूप में लिखने पर	प्राप्तांक प्रतिशत
1	गोलू	80	60	$\frac{60}{80}$	$\frac{60}{80} \times 100 = 75\%$
2	सलमा	100	90	$\frac{90}{100}$	$\frac{90}{100} \times 100 = 90\%$
3	जार्ज	150	120	$\frac{120}{150}$	$\frac{120}{150} \times 100 = 80\%$

सलमा के प्राप्तांक का प्रतिशत सबसे अधिक है। सोचिए कि यदि हम अन्य किसी तरीके से तुलना करना चाहें तो क्या वह इतना आसान होगा?

✍ क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई तालिका को भरिए तथा देखकर बताइए की किस विद्यालय का परीक्षाफल ज्यादा अच्छा है। इसके लिए भी आप प्रतिशत निकालेंगे।

विद्यालय का नाम	कक्षा 6वीं में दर्ज विद्यार्थियों की संख्या (अ)	उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या (ब)	100 में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या $\left(\frac{\text{अ}}{\text{ब}} \times 100\right)$	प्रतिशत परीक्षाफल
शासकीय हाईस्कूल जगदलपुर	500	450	$\frac{450}{500} \times 100$	[illegible]
शासकीय हाईस्कूल रायपुर	300	195	?	?
शासकीय हाईस्कूल सरगुजा	200	140	?	?

उपरोक्त क्रियाकलाप से यह स्पष्ट है कि दो या दो से अधिक परिस्थितियों के बीच तुलना प्रतिशत की सहायता से बड़ी आसानी से की जा सकती है।

यदि प्रतिशत 100 के आधार से तुलना है तो क्या कभी प्रतिशत में मान 100% से अधिक हो सकता है ? आइए देखें।

उदाहरण 1.

एक दिन सब्जी–बाजार में 300 किलोग्राम आलू की खरीदी की गयी, दूसरे दिन 750 किलोग्राम आलू की खरीदी की गयी तो बताइये कि आलू की खरीदी कितने प्रतिशत बढ़ी ?

चूंकि पहले दिन 300 किलोग्राम आलू की खरीदी की गयी।

दूसरे दिन 750 किलोग्राम आलू खरीदा गया।

इस प्रकार आलू की खरीदी में बढ़ोत्तरी –

= 750 किग्रा. – 300 किग्रा.

= 450 किग्रा.

अब 300 किग्रा. आलू की खरीदी में 450 किग्रा. में बढ़ोत्तरी हुई है।

$\therefore$ 1 कि ग्राम में $\frac{450}{300}$ किग्रा. आलू की खरीदी में बढ़ोतरी हुई।

अतः आलू की खरीदी में बढ़ा हुआ प्रतिशत

$$= \frac{450 \times 100}{300} = 150\%$$

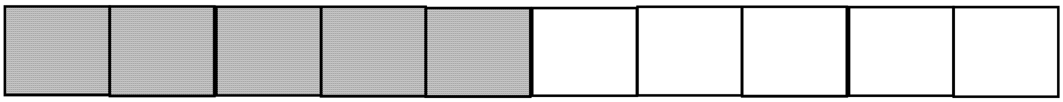
क्या आप दैनिक जीवन के ऐसे उदाहरण सोच सकते हैं जहाँ (i) प्रतिशत 100% से कम, (ii) बराबर और (iii) 100% से अधिक उपयोग में लाया जाता है।

पाँच–पाँच उदाहरण सोचें व अपने दोस्तों को बताएं।

✍ क्रियाकलाप 2.

निम्नलिखित चित्र के कितने प्रतिशत भाग को छायांकित किया गया है? तथा छायांकित भाग का भिन्नात्मक मान क्या है। दिए गए रिक्त स्थान में लिखिए।

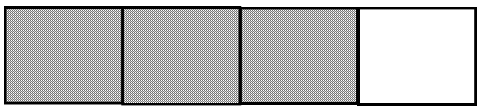
जैसे –



चित्र 1

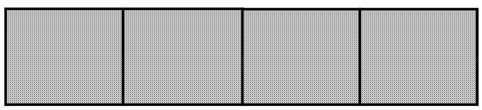
$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=50\%$$

चित्र 2



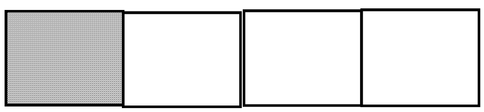
– – – – – – – – – – – –

चित्र 3

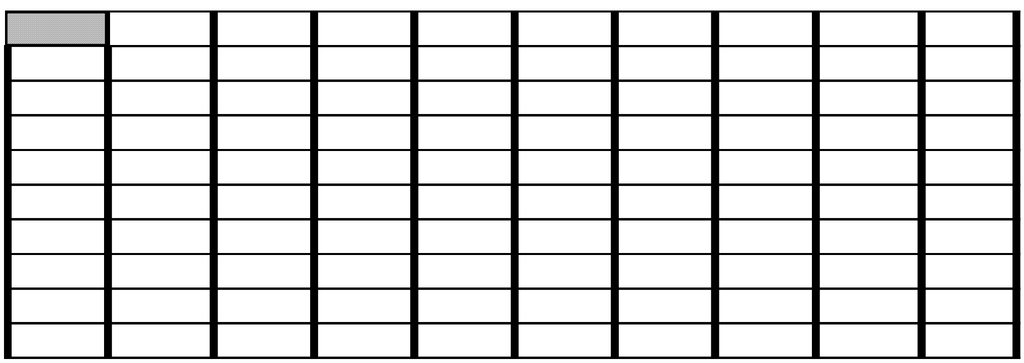


– – – – – – – – – – – –

चित्र 4

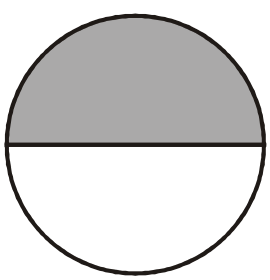


– – – – – – – – – – – –



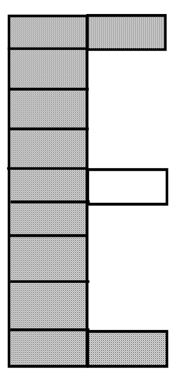
चित्र 5

....



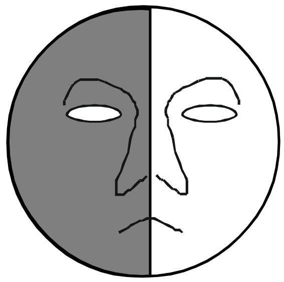
....

चित्र 6



....

चित्र 7



....

चित्र 8

आपने ऊपर बने चित्रों में प्रत्येक छायांकित भाग को प्रतिशत एवं भिन्न में बदलकर देखा है।
क्या प्रतिशत भिन्न का बदला हुआ एक रूप है?
आइए, कुछ उदाहरणों को हल करके देखें।

क्रियाकलाप 3.

आपने पूर्व में सीखा है कि किसी भिन्न का हर यदि 100 हो तो वह भिन्न, अंश के प्रतिशत के बराबर होता है। निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

क्र.	भिन्न	भिन्न $\times\frac{100}{100}$	$\frac{1}{100}$ के गुणा के रूप में	प्रतिशत
(i)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1\times100}{1\times100}$	$\frac{1}{100}\times100$	100%
(ii)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1\times100}{2\times100}$	$\frac{1}{100}\times50$	50%
(iii)	$\frac{1}{4}$			
(iv)	$\frac{3}{4}$			
(v)	$\frac{1}{10}$			
(vi)	$\frac{1}{100}$			

✍ क्रियाकलाप 4.

नीचे कुछ प्रतिशत को भिन्नों में बदला गया है शेष की पूर्ति कीजिए –

क्र.	प्रतिशत	$\frac{1}{100}$ के गुणा के रुप में	भिन्न
(i)	100%	$100 \times \frac{1}{100}$	$\frac{1}{1}$
(ii)	50%	$50 \times \frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$
(iii)	25%		
(iv)	75%		
(v)	10%		
(vi)	1%		

<u>शिक्षकों के लिए</u> : (यदि विद्यार्थी $\frac{1}{2}$ को प्रतिशत में बदलने के लिए सीधे $\frac{1}{2} \times 100$ करता है तो मूल नियम समझाते हुए उसे वैसा करने दें।)

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने देखा कि 100% का भिन्न रूप $\frac{1}{1}$ है।

इस प्रकार 50% का भिन्न रूप $\frac{1}{2}$ है।

अतः प्रतिशत भिन्न का ही एक रूप है।

उदाहरण 2.

एक शाला में 26 जनवरी के दिन कुल 200 लड्डू लाये गये। उनमें से 90% लड्डू छात्रों में बाँट दिये गये। बचे हुये लड्डुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

कुल लड्डू = 200

बांटे गये लड्डुओं की संख्या = 200 का 90%

$$= 200 \times \frac{90}{100}$$

बाँटे गए लड्डू = 180

शेष लड्डू = 200 – 180

= 20 लड्डू

उदाहरण 3.

एक गाँव की जनसंख्या 10,000 है। उसमें 60% महिलाएँ, 25% पुरुष और शेष बच्चे हैं। प्रत्येक की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :– गाँव की जनसंख्या = 10,000

चूंकि 60% महिलाएँ है अर्थात् 10,000 का 60% महिलाएँ

$\therefore$ महिलाओं की संख्या = $\frac{10000 \times 60}{100} = 6000$

अतः महिलाओं की संख्या = 6000

अब चूंकि 25% पुरुष है अर्थात् 10,000 का 25%

$\therefore$ पुरुषों की संख्या = $\frac{10000 \times 25}{100} = 2500$

अतः पुरुषों की संख्या = 2500

बच्चों की संख्या $= 10000 - (6000 + 2500)$

$= 10000 - 8500$

$= 1500$

उदाहरण 4.

भयामू ने एक दुकान से 50 रुपये की एक पुस्तक खरीदी। दुकानदार ने उसे 20 प्रतिशत की छूट दी तो भयामू को कितने रुपये दुकानदार को देने होंगे?

हल : 100 रूपये में 20 रूपये की छूट

$\therefore$ 1 रुपये में $\frac{20}{100}$ रुपये की छूट देता है

$\therefore$ 50 रुपये में = $\frac{50 \times 20}{100}$ = 10 रुपये की छूट देगा

अतः भयामू को 50 – 10= 40 रुपये दुकानदार को देने होंगे।

उदाहरण 5.

i. 650 रुपये का 50% ज्ञात कीजिए।

ii. 750 किग्रा. का 5% ज्ञात कीजिए ।

हल :

i. 650 रुपये का 50% = $\frac{650 \times 50}{100}$

= 325 रुपये

ii. 750 किग्रा. का 5% = $\frac{750 \times 5}{100}$ = 37.5 किग्रा.

उदाहरण 6.

धवल को वार्शिक परीक्षा में 500 में से 450 अंक मिले तथा य ा को 900 में से 675 मिले। दोनों में से किसका परीक्षाफल अच्छा है?

प्रश्नानुसार –

धवल को 500 में से 450 अंक प्राप्त होते हैं।

$\because$ 500 में प्राप्तांक $= 450$

$\therefore$ 1 में प्राप्त अंक $= \frac{450}{500}$

$\therefore$ 100 में प्राप्त अंक $= \frac{450}{500} \times \frac{100}{1} = 90$

प्राप्तांक = 90 %

यश को 900 में से 675 अंक प्राप्त होते हैं।

$\because$ 900 में प्राप्तांक $= 675$

$\therefore$ 1 में प्राप्त अंक $= \frac{675}{900}$

$\therefore$ 100 में प्राप्त अंक $= \frac{675}{700} \times \frac{100}{1} = 75$

प्राप्तांक = 75 %

उपरोक्त हल से स्पष्ट है कि धवल का परीक्षाफल यश से बेहतर है।

प्रश्नों को नयी विधि या अन्य विधि से भी हल करने का प्रयास करें। अपनी विधि पर अपने साथियों व शिक्षक महोदय से चर्चा करें।

33H98L

प्रश्नावली 13

1. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) $\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{3}{20}$

2. निम्नलिखित प्रतिशतों में प्रत्येक को भिन्न में व्यक्त कीजिए।

   (i) 50% (ii) 15% (iii) 2% (iv) 10%

3. 360 रु. का 60% ज्ञात कीजिए।
4. 480 किलोग्राम का 15% कितना होगा।
5. सीता को 500 में से 250 अंक प्राप्त हुए। उसके प्राप्तांक का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
6. राम को 10 रु. की गणित की पुस्तक में 10% छूट मिलती है तो वह पुस्तक उसे कितने में मिलेगी?
7. एक भााला में 15 अगस्त के दिन कुल 300 टॉफियाँ लायी गयी। उनमें से 99% टॉफियाँ छात्रों में बाँटी गयी। बची हुई टॉफियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. यदि रूपा को वार्शिक परीक्षा में 600 में से 390 अंक प्राप्त होते हैं तो उसे कितने प्रतिशत अंक प्राप्त हुए ?
9. यदि किसी रबर को खींचकर दुगुना लम्बा कर दिया जाता है, तो लम्बाई में वृद्धि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
10. किसी भाहर की कुल जनसंख्या का 40% पुरुष 35% महिलाएँ और शेष बच्चे हैं। यदि बच्चों की संख्या 18,000 हो तो पुरुषों और महिलाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
11. किसी गाँव की जनसंख्या 3000 है, पहले वर्ष 10% बढ़ती है। एक वर्श बाद उसमें 10% की कमी आती है तो जनसंख्या में होने वाली प्रतिशत बढ़ोतरी या कमी ज्ञात कीजिए।

12. एक व्यक्ति 630 रुपये का सामान खरीदता है। दुकानदार ने उससे केवल 567 रुपये लिए हों तो उस व्यक्ति को कितने प्रतिशत की छूट मिली ?
13. किसी संख्या का 75%, 600 रुपये है, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।
14. बैंक में एक व्यक्ति ने 5000 रुपये जमा कराये। कुछ वर्शों के बाद उसे 6000 रुपये मिले तो उसके धन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?
15. किसी कक्षा की दर्ज संख्या 40 है। इनमें 36 लड़के उत्तीर्ण हो गये हों तो उत्तीर्ण एवं अनुत्तीर्ण का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
16. किसी गांव में 90% व्यक्ति साक्षर हैं। यदि उस गांव की जनसंख्या 1600 है तो साक्षर एवं निरक्षर की संख्या ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. प्रतिशत का अर्थ ''प्रति सैंकड़ा'' से है।
2. प्रतिशत की सहायता से तुलना कर सकते हैं।
3. प्रतिशत को भिन्न, दशमलव तथा अनुपात में व्यक्त कर सकते हैं एवं भिन्न, दशमलव तथा अनुपात को भी प्रतिशत में व्यक्त कर सकते हैं।

14
समीकरण

33R5A9

आप दो संख्याओं की तुलना करने के लिए कहते हैं कि एक संख्या, दूसरी संख्या से बड़ी है, छोटी है या समान है।

✍ क्रियाकलाप 1.

नीचे तुलना पर आधारित कुछ कथन दिए गए हैं जो अपूर्ण हैं। खाली बॉक्सों में =, > या < के चिह्न का उपयोग कर कथनों को पूर्ण कीजिए –

जैसे : 1.	3 + 5	[>]	7	2.	8 + 7	[ ]	15
3.	4 + 6	[ ]	11	4.	13 + 8	[ ]	18
5.	23 + 7	[ ]	30				

आपने किस तरह इन चिह्नों का उपयोग किया है? अपने तर्कों के बारे में सोचें।

यहाँ पर दो पक्ष दिए गए हैं बाक्स के बाँयें तरफ बाँया पक्ष तथा दायें तरफ दायाँ पक्ष है। कथनों में 3 + 5 बायाँ पक्ष है, चूंकि यह दायाँ पक्ष 7 से बड़ा है, अतः $3 + 5 > 7$

जिन कथनों में = चिह्न का उपयोग किया गया है, उन्हें छाँटकर अपनी कॉपी में लिखिए।

जिन कथनों को आपने कॉपी में लिखा है उन्हें छोड़ बाकी असमानता के कथन हैं। आइए, कुछ और कथनों को देखें जिनमें चरांकों का उपयोग किया गया है।

जैसे : $x + 5 = 13$ में यदि $x = 5$ हो तो x के स्थान पर 5 रखने पर बायाँ पक्ष $= 5 + 5 = 10$ होता है, दायाँ पक्ष $= 13$ है। अतः यह कथन सही नहीं है, बायाँ पक्ष ≠ दायाँ पक्ष, परन्तु x के स्थान पर 8 रखने पर दोनों पक्ष बराबर हो जाते हैं और यह कथन सही हो जाता है।

✍ क्रियाकलाप 2.

नीचे कुछ कथन दिए गए हैं। उनके सामने x का मान दिया गया है। x के दिए गए मानों के लिए कथन सत्य हैं या असत्य बॉक्स में लिखिए –

1.	$x + 3 = 8$ यदि $x = 5$ तो कथन	[सत्य]	है।
2.	$x - 2 = 4$ यदि $x = 7$ तो कथन	[ ]	है।
3.	$x + 2 = 10$ यदि $x = 8$ तो कथन	[ ]	है।
4.	$7 = 12 - x$ यदि $x = 3$ तो कथन	[ ]	है।
5.	$3 = x - 9$ यदि $x = 5$ तो कथन	[ ]	है।

जो कथन असत्य हैं क्या वे x के किसी मान के लिए सत्य होंगे? यदि हाँ तो प्रत्येक के लिए x के मान को अपनी कॉपी में लिखिए । इस प्रकार उपरोक्त कथन तभी सत्य होंगे जब दोनों पक्ष आपस में बराबर होंगे। ऐसे कथन जिनमें चरांक शामिल हों और दोनों पक्ष बराबर हों, **समीकरण** कहलाते हैं, अर्थात् समानता वाले

वे कथन जिनमें एक या एक से अधिक बीजीय अंक होते हैं **''समीकरण''** कहलाते हैं। इसमें बराबर के बायीं ओर के समस्त चर और अचर पदों को समीकरण का ''बायाँ पक्ष'' और दायें ओर के समस्त पदों को समीकरण का ''दायाँ पक्ष'' कहते हैं।

समीकरण क्यों

एक दिन नरेश ने अपने साथियों से एक सवाल पूछा। दो टोकरियों में अमरूद रखे हुए हैं। दूसरी टोकरी में पहली टोकरी के 2 गुणे अमरूद हैं। यदि पहली टोकरी में 8 और अमरूद रख दिये जाएं तो दूसरी टोकरी में पहली टोकरी के बराबर अमरूद हो जाते हैं। क्या आप लोग दोनों टोकरियों में अमरूदों की संख्या बता सकते हो?

नरेश के सभी साथी हल सोचने लगे परन्तु उन्हें कुछ सूझ नहीं रहा था । तभी अनु ने बताया कि पहली टोकरी में 8 तथा दूसरी टोकरी में 16 अमरूद हैं। नरेश ने कहा कि उत्तर तो ठीक है परन्तु तुमने इसे कैसे हल किया?

अनु ने बताया – ''मैंने पढ़ा है कि किसी संख्या में यदि उसी संख्या को जोड़ दिया जाए तो उस संख्या का दो गुणा प्राप्त हो जाता है, चूँकि पहली टोकरी में रखे अमरूदों में 8 अमरूद और जोड़ने पर अमरूदों की संख्या दो गुणी हो जाती है तो वह संख्या 16 ही होगी क्योंकि 8 में 8 जोड़ने पर 16 होता है।''

नरेश ने बताया कि इसे एक और तरीके से हल कर सकते हैं –

पहली टोकरी में अमरूद	दूसरी टोकरी में अमरूद पहली टोकरी के 2 गुणा अमरूद

अमरूद (पहली टोकरी में) + 8 = पहली टोकरी का 2 गुणा अमरूद (दूसरी टोकरी में)

8 में 8 जोड़ने पर ही दो गुणा हो सकता है। अतः पहली टोकरी में 8 अमरूद हैं एवं दूसरी टोकरी में 16 अमरूद हैं।

तभी फरीदा ने कहा, ''हमने चर राशि वाले पाठ में पढ़ा है कि जब किसी संख्या का मान मालूम नहीं है तो उसे हम कोई भी चरांक मान सकते हैं।''

माना कि पहली टोकरी में x अमरूद हैं।

तो दूसरी टोकरी में $2x$ अमरूद होंगे।

अब पहली टोकरी में 8 अमरूद और मिलाने पर उसमें $x + 8$ अमरूद हो गए और यह दूसरी टोकरी के अमरूद के बराबर हैं।

अर्थात् $x + 8 = 2x$

नरेश ने कहा, ''अरे वाह! यह तो एक समीकरण बन गया और यहाँ x का मान 8 रखने पर यह कथन सत्य हो जाता है। इसका मतलब यही हुआ कि अज्ञात मान वाले सवालों को समीकरण की सहायता से बड़ी आसानी से हल किया जा सकता है।''

आपने भी देखा कि अज्ञात राशियों का मान निकालने के लिए समीकरण किस प्रकार उपयोगी हैं। आइए, अब हम समीकरण कैसे बनाया जाता है, देखें।

समीकरण कैसे बनाएं

एक खेल खेलते हैं। आप सब अपने मन में अपनी–अपनी उम्र सोचिए। इसमें 5 जोड़ दीजिए। योगफल को 2 से गुणा कर उसमें 10 घटाइए। जो अन्तर आया उसमें अपनी उम्र को घटा दीजिए। आपका उत्तर ही आपकी उम्र है।

नरेश का हल		शिक्षक के निर्देश		अनु का हल
12 वर्ष	←	अपनी उम्र सोचें	→	11 वर्ष
12 + 5 = 17 वर्ष	←	5 जोड़िये	→	11 + 5 = 16 वर्ष
17 x 2 = 34 वर्ष	←	2 से गुणा कीजिए	→	2 x 16 = 32 वर्ष
34 – 10 = 24 वर्ष	←	10 घटाइए	→	32 – 10 = 22 वर्ष
24 – 12 = 12 वर्ष	←	उम्र को घटाइए	→	22 – 11 = 11 वर्ष

इसी प्रकार सभी ने पाया कि उन्होंने जो अपनी उम्र सोची थी वही उत्तर के रूप में आ रही है। यह कैसे हुआ? आइए, इसे समझें –

माना कि सोची गई उम्र x वर्ष है

उम्र में 5 जोड़ा = $x + 5$

योगफल को 2 से गुणा किया $2(x+5) = 2x + 10$

10 घटाया $2x + 10 - 10 = 2x$

सोची गयी उम्र को घटाया $2x - x = x$

आप वही हल प्राप्त कर रहे हैं जो उम्र आपने सोची थी ।

इस हल को देखते ही राजू ने कहा, ''अब मैं भी समीकरण बनाने के प्रश्न पूछ सकता हूँ। किसी संख्या में 2 का गुणा कर 5 घटाने से 3 आता है तो समीकरण क्या होगी ? अनु ने तत्काल समीकरण बनाया – ''माना कि संख्या x है, 2 का गुणा करने पर आया $2x$। इसमें 5 घटाने पर मिला $2x - 5$ जो 3 के बराबर है अर्थात समीकरण होगा –

$2x - 5 = 3$

अनु ने कहा, ''अब मैं तुम्हें एक समीकरण दे रही हूँ। तुम इसे शब्द रूप में कैसे बदलोगे?

समीकरण : $7y - 5 = 9$

हमीदा ने तुरंत सोचा किसी संख्या में 7 का गुणा करके 5 घटाने पर 9 के बराबर है।

अब सभी विद्यार्थी समीकरण बनाने और समीकरण को शब्द रूप में बदलने में दिलचस्पी दिखाने लगे।

प्रश्नावली 14.1

प्रश्न 1 निम्नलिखित में से समीकरण छांटकर लिखिए –

i. $x - 4 = 10$
ii. $x - 4 - 10$
iii. $2y - 3 + 9$
iv. $5(2y - 3) = 15$
v. $3x + 4$
(vi) $7 = 2x - 5$
(vii) $3x - 2x = 2x$
(viii) $\frac{5}{x} = 3$
(ix) $4.5 + 3.2x + z$
(x) $ly + lx = px$

प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों का बायाँ एवं दायाँ पक्ष बताइए –

i. $x - 5 = 9$

ii. $2x - 3 = 7$

iii. $2y = 9 - y$

iv. $2y = 6$

v. $15 = 2a + 5$

प्रश्न 3. निम्नलिखित कथनों में अज्ञात संख्या y का प्रयोग करके समीकरण में बदलिए –

i. किसी संख्या के दुगुने में से 3 कम करने पर 17 आता है।

ii. किसी संख्या का छठा भाग 7 है।

iii. किसी संख्या एवं 5 का अन्तर 8 है।

iv. किसी संख्या में 7 का गुणा कर 5 घटाने से 9 बचता है।

प्रश्न 4 समीकरणों को कथन के रूप में लिखिए।

i. $x - 6 = 9$

ii. $7y - 14 = 0$

iii. $\frac{2x}{3} = 6$

iv. $\frac{x}{2} + 5 = 10$

v. $38 - 2x = 4$

समीकरण हल करना

आपने क्रियाकलाप 2 में यह देखा कि प्रत्येक कथन x के केवल एक मान के लिए ही सत्य है, जैसे– $x + 2 = 4$ में यदि $x = 7$, हो तब कथन असत्य है क्योंकि x का मान 7 रखने पर बायाँ पक्ष दायें पक्ष के बराबर नहीं होता। यह $x = 2$ रखने पर ही सत्य होता है अर्थात् इस प्रकार के प्रत्येक समीकरण का केवल एक ही हल है।

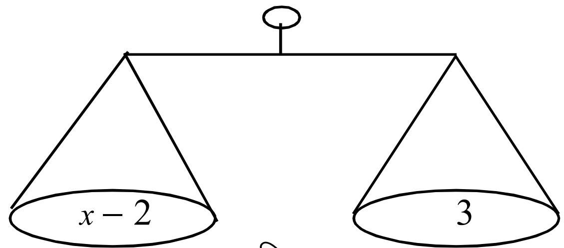
✍ क्रियाकलाप 3.

नीचे दी गई सारणी में x के चरांक वाले समीकरण दिए गए हैं। x के अलग–अलग मान के लिए इस समीकरण के दोनों पक्ष समान हैं या असमान उदाहरण के अनुसार भरिए –

क्र.	समीकरण	समीकरण का बायाँ पक्ष	समीकरण का दायाँ पक्ष	x के विभिन्न मानों के लिए बायाँ पक्ष < या, = या > है दाँयें पक्ष से					
				x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
1.	**x + 3 = 5**	**x + 3**	5	<	<	=	>	>	>
2.	**x - 2 = 3**								
3.	**x + 3 = 2x**								
4.	**x + 4 = 4**								
5.	**3x + 1 = 3 + x**								
6.	**x + 5 = 10**								

x के जिस मान के लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं, वही समीकरण का हल है। इस विधि को त्रुटि एवं प्रयास विधि कहा जाता है।

आइए, तराजू के माध्यम से समीकरण के कुछ गुणों को चित्रित करके देखें :



चित्र – 2

बायाँ पक्ष दाँया पक्ष

चित्र 2 के समीकरण $x-2=3$ में बायाँ पक्ष $x-2$ है तथा दायाँ पक्ष 3 है। यह तराजू संतुलन की अवस्था में है। अब यदि हम तराजू के बायें पलड़े में कुछ भार रखें तो संतुलन लाने के लिए दाएँ पक्ष में भी उतना ही भार रखना पड़ेगा। उसी प्रकार यदि दाएँ पक्ष से कुछ भार निकाल लें तो संतुलन के लिए बाएँ पक्ष से भी उतना ही भार निकालना पड़ेगा अर्थात् यदि किसी समीकरण के एक पक्ष में कोई संक्रिया की जाए तो दूसरे पक्ष में भी वही संक्रिया करनी होगी। तभी समीकरण के दोनों पक्ष बराबर रहेंगे।

यह ज्ञात है कि $(-2)+(2)=0$ होता है, उपरोक्त समीकरण में बायें पक्ष में यदि 2 जोड़ दिया जाए तो x बचेगा, चूंकि बायें पक्ष में दो जुड़ रहा है तो समीकरण को संतुलन में रखने के लिए दाएँ पक्ष में भी 2 जोड़ना पड़ेगा।

अर्थात् – $x-2=3$

$$x-2+2=3+2$$

$$x+[(-2)+(2)]=5$$

$$x=5$$

इसी प्रकार, यदि $\mathbf{7}x = 21$ हो,

7 में 7 का भाग दिया जाए तो 1 प्राप्त होता है, यदि $7x$ में 7 का भाग दें तो x प्राप्त होगा। चूंकि बाएँ पक्ष में 7 का भाग दिया जा रहा है तो दाएँ पक्ष में भी 7 का भाग देना पड़ेगा।

अर्थात् – $7x = 21$

$$\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$$

$$x = 3$$

उदाहरणों में आपने सीखा कि किसी समीकरण के दोनों पक्षों में यदि कोई स्थिरांक जोड़ दिया जाए या किसी स्थिरांक को घटा दिया जाए अथवा किसी स्थिरांक से गुणा किया जाये या भाग दिया जाए तो समीकरण के संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता।

✍ क्रियाकलाप 4.

नीचे दी गयी सारणी में समीकरणों के दोनों पक्षों में क्या जोड़ें, घटायें, गुणा करें या भाग दें कि चर का मान प्राप्त हो जाए। दिए गए उदाहरण के अनुसार रिक्त खानों को भरिए –

क्र.स.	समीकरण	दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए कि चरांक के पक्ष से स्थिरांक हट जाए	संक्रिया करने पर समीकरण	हल करने पर चर का मान
1.	$x + 3 = 5$	3 घटाने पर	$x + 3 - 3 = 5 - 3$	$x = 2$
2.	$x - 5 = 7$			
3.	$2x = 6$			
4.	$x/3 = 5$			
5.	$x + 7 = 2$			
6.	$7 = z - 4$			
7.	$5 + x = 9$			
8.	$4 + x = 2$			
9.	$-7 = 3 + y$			
10.	$4 = 8y$			

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

i. $x + 3 = 10$

ii. $6 = y + 4$

iii. $S + 6 = 15$

iv. $7 + t = 25$

✍ क्रियाकलाप 5

आपने सरल समीकरण (जिसमें संक्रिया एक ही बार करनी पड़ रही है) को हल करना सीख लिया है। आइए, अब कुछ ऐसे समीकरण हल करें जिसमें दो संक्रिया करनी पड़ रही है।

क्र. सं.	समीकरण	दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए कि चरांक वाले पक्ष से स्थिरांक हट जाए	पहली संक्रिया करने पर समीकरण	x के गुणांक को हटाने के लिए दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए	दूसरी संक्रिया करने पर समीकरण	x का मान
1.	$2x+3=9$	3 घटाने पर	$2x+3-3=9-3$ या $2x=6$	$2x=6$ दोनों पक्षों में 2 से भाग देने पर	$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}=3$	$x=3$
2.	$18x-11=61$					
3.	$\frac{x}{7}-13=1$					
4.	$1+\frac{x}{5}=3$					
5.	$\frac{x}{4}-5=-6$					
6.	$0=\frac{x}{14}-\frac{1}{7}$					

अभ्यास 1

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

(i)	$3x + 8 = 20$	(ii)	$4x + 10 = 30$
(iii)	$5x - 7 = 8$	(iv)	$6x - 7 = 11$
(v)	$3x + \frac{21}{7} = 0$	(vi)	$29 = 7x + 1$
(vii)	$60 - 8x = -4$	(viii)	$19x + 7 = 45$

समीकरण बनाना एवं हल करना तो आप भली भाँति सीख चुके हैं। कुछ संख्याओं से सम्बन्धित समस्याओं को समीकरण के द्वारा हल करें।

उदाहरण 1. किसी संख्या में 5 की वृद्धि की जाए तो संख्या 20 हो जाती है वह संख्या क्या होगी?

हल :

माना कि वह संख्या x है। तो संख्या में 5 जोड़ने पर = $x + 5$

समस्या अनुसार,

अब $x + 5 = 20$

दोनों पक्षों में 5 घटाने पर

$x + 5 - 5 = 20 - 5$

$\Rightarrow \quad x = 15$

सत्यापन –

बायाँ पक्ष = $x + 5$

= $15 + 5$ (x का मान रखने पर)

= 20

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 2. किसी संख्या में 6 की कमी करने पर वह संख्या 10 हो जाती है। वह संख्या क्या होगी?

हल : मानाकि वह संख्या x है।

तो प्रश्नानुसार संख्या में 6 की कमी करने पर संख्या $x - 6$ हो जाती है जो 10 के बराबर है।

अर्थात् $x - 6 = 10$

दोनों पक्षों में 6 जोड़ने पर $x - 6 + 6 = 10 + 6$ (यहाँ $-6 + 6 = 0$ और $10 + 6 = 16$)

$x = 16$

सत्यापन :– बायाँ पक्ष = $x - 6 = 16 - 6$ (x का मान रखने पर)

= 10

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 3. किसी संख्या के दुगुने में 7 जोड़ने पर संख्या 37 हो जाती है। वह संख्या क्या होगी?

हल : माना कि वह संख्या x है ।

तो प्रश्नानुसार उस संख्या के दुगने में 7 जोड़ने पर संख्या 37 हो जाती है।

पहला चरण : संख्या का दो गुणा $= 2x$

दूसरा चरण : $2x$ में 7 जोड़ने पर $2x + 7$

तीसरा चरण : कथनानुसार, $2x + 7 = 37$

$2x + 7 - 7 = 37 - 7$ (दोनों पक्षों में 7 घटाने पर)

$2x = 30$

$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)

$x = 15$

सत्यापन :

बायाँ पक्ष $= 2x + 7 = 2 \times 15 + 7$ (x का मान रखने पर)

$= 30 + 7$

$= 37$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 4. किसी संख्या का एक तिहाई करने पर वह संख्या 11 हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि वह संख्या x है।

प्रश्नानुसार

इस संख्या का एक तिहाई अर्थात् $\frac{x}{3}$ बराबर है 11 के।

अर्थात् $\frac{x}{3} = 11$

x का मान निकालने के लिए समीकरण के बायें पक्ष के हर से 3 को हटाना होगा।

इसलिए दोनों पक्षों में 3 का गुणा करने पर,

$$\frac{x}{3} \times 3 = 11 \times 3$$

$$x = 33$$

सत्यापन : 33 का एक तिहाई $= \frac{33}{3} = 11$

उदाहरण 5. मालती एवं उसके पिता की आयु का योग 49 वर्ष है। यदि मालती की आयु 12 वर्ष हो तो उसके पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि मालती के पिता की आयु x वर्ष है।

प्रश्नानुसर, मालती की आयु 12 वर्ष है।

दोनों की आयु का योग $= x + 12$

चूंकि दोनों की आयु का योग 49 वर्ष है ।

अतः $x + 12 = 49$

$x + 12 - 12 = 49 - 12$ (दोनों पक्षों में 12 घटाने पर)

$x + 0 = 37$

$\Rightarrow x = 37$

पिता की आयु 37 वर्ष है ।

सत्यापन – पिता की आयु एवं मालती की आयु का योग

$= 37 + 12$

$= 49$ वर्ष

उदाहरण 6. शिवांगी के पर्स में केवल 50 पैसे के सिक्के हैं । यदि पर्स में 25 रु. हों तो सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए–

हल : मान लो कि सिक्कों की संख्या x है

प्रत्येक सिक्के का मूल्य $= 50$ पैसे $= \frac{1}{2}$ रुपये

x सिक्कों का मूल्य $= \frac{1}{2}x$ रुपये

अतः प्रश्नानुसार $\frac{1}{2}x = 25$

$\frac{1}{2}x \times 2 = 25 \times 2$ (दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर)

$x = 50$

अतः शिवांगी के पर्स में 50 पैसे के 50 सिक्के हैं।

जाँच : 50 सिक्कों का मूल्य $= 50 \times 50$

$= 2500$ पैसे

$= 25.00$ रु.

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

3411BH

i. $x - 3 = -4$

ii. $z - 8 = 0$

iii. $3y = 9$

iv. $16 = 3y + 7$

v. $5 + \frac{x}{3} = 7$

vi. $9z - 7 = 14$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं अपने उत्तर की जाँच कीजिए –

(i) $3(2 + x) = 12$

(ii) $10 - z = 6$

(iii) $\frac{x}{5} = 15$

(iv) $7 - 4y = 3$

3. किसी संख्या का दोगुना 10 है संख्या क्या होगी ?
4. किसी संख्या के दुगने में 35 जोड़ा जाए तब 85 प्राप्त होता है। वह संख्या क्या होगी ?
5. 25 पैसे के कितने सिक्के 10 रु. के बराबर होगें ?

6. किसी संख्या के आधे में से यदि 4 घटाये तब 6 प्राप्त होता है संख्या क्या होगी ?
7. उमा के पास कुछ मीटर कपड़ा है। उसमें से 2–2 मीटर कपड़े के वह 4 पर्दे बना देती है उसके बाद भी उसके पास 5 मीटर कपड़े बचे रहते है तब प्रारंभ में उसके पास कितने मीटर कपड़े थे ?

हमने सीखा

किसी भी समस्या को समीकरण के द्वारा हल करने के लिए निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए –

1. समस्या को अच्छी तरह पढ़िए एवं निर्धारित कीजिए कि कौन–कौन सी ज्ञात राशि एवं कौन–कौन सी अज्ञात राशि है।
2. अज्ञात राशि को x, y, z इत्यादि से व्यक्त कीजिए।
3. समस्या को एक–एक भाब्द के अनुसार जहाँ तक संभव हो, गणितीय कथन में परिवर्तित कीजिए।
4. वे राशियाँ निर्धारित कीजिए जो बराबर हों और उनसे एक उचित समीकरण बनाइए।
5. समीकरण को अज्ञात राशि के लिए हल कीजिए।
6. यह जाँच कीजिए कि आपका उत्तर समस्या में दी हुई भार्तों को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

15
रेखा गणितीय रचनाएँ

स्केल का उपयोग

आप जब कपड़ा खरीदने बाजार जाते हैं तो दुकानदार अक्सर एक लोहे की छड़ से नाप कर कपड़ा देता है। आपने भी लम्बाई नापने के लिए कई बार अपने कम्पास बॉक्स में रखे स्केल का उपयोग किया है। अपने कम्पास बॉक्स में रखे स्केल को देखिए तथा नीचे पूछे गए सवालों का जवाब ढूंढ़िए—

स्केल में मापने के लिए दो प्रकार के पैमाने होते हैं। पता करें कि दोनों पैमानों की इकाई कितने—कितने छोटे खण्डों में बंटी है? सबसे छोटे खण्ड की माप क्या है?

स्केल का उपयोग आप समय—समय पर करते रहते हैं, क्या अपनी कॉपी पर ऐसे तीन रेखाखण्ड खींच सकते हैं, जिनकी लम्बाई क्रमशः 3.5 सेमी, 4.2 सेमी और 8.9 सेमी हो

और भी ऐसे विभिन्न मापों के रेखाखण्ड खींचे।

स्केल का उपयोग आप जीवन में कहाँ—कहाँ करते हैं, सूची बनाएं।

वृत्त बनाना

वृत्त बनाने के लिए आपने परकार का उपयोग तो किया ही होगा। आप यह भी जानते हैं कि वृत्त क्या होता है? कौन—सी आकृतियां वृत्ताकार हैं। चलिए आस—पास की वृत्ताकार चीजों की सूची बना लें। यह सूची आपने पहले भी बनाई होगी, इस बार और लम्बी सूची बनाएं।

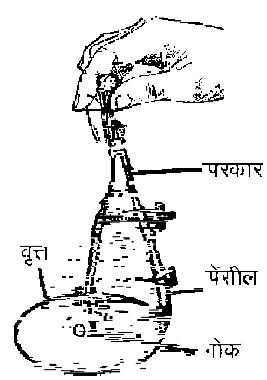
परकार के बारे में जानना

(1) एक परकार की कितनी भुजाएँ होती हैं?

(2) क्या यह भुजाएँ समान लम्बाई की है?

(3) नोकवाली भुजा का क्या उपयोग है? क्या नोक तिरछी होनी चाहिए?

(4) वृत्त बनाते समय यदि नोंक वाली भुजा अपने स्थान से खिसक जाए तो क्या वृत्त ठीक बनेगा?



चित्र 1

आप परकार की बनावट एवं उपयोग करने का तरीका समझते हैं। अपनी कॉपी पर 3.2 सेमी, 4.7 सेमी और 5.1 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाएं? कुछ और भी वृत्त अपने मन से सोच कर बनाएं।

ज्यामितीय बॉक्स के अन्य उपकरण

रेखा खण्ड के अध्याय में आपने डिवाइडर का उपयोग भी किया है। क्या आप बता सकते हैं कि परकार और डिवाइडर का उपयोग क्या—क्या है?

इस प्रकार आपके ज्यामिति बॉक्स में एक चाँदा भी रखा हुआ है। इसे ध्यान से देखिए और दिए गए

प्रश्नों का उत्तर दीजिए –

(1) चाँदा की आकृति कैसी है?

(2) चाँदा का अर्द्धवृत्ताकारनुमा भाग कुल कितने खण्डों में बँटा है।

(3) क्या आप अपनी कॉपी पर 47º, 95º तथा 170º का कोण बना सकते हैं?

अपने ज्यामिति बॉक्स में रखे स्केल, परकार, डिवाइडर और चाँदा से तो परिचित हो ही चुके हैं। क्या आपके ज्यामिति बॉक्स में और कोई उपकरण भी है?

जो दो त्रिभुजाकर उपकरण बचे हैं उन्हें निकाल कर अपनी कॉपी पर रखिए एवं प्रत्येक से सटा कर पेन्सिल को इस प्रकार चलाइए कि उपकरणों की बाहरी आकृति कॉपी पर उभर आए।

दोनों उपकरणों के प्रत्येक कोण को मापिये।

अब तो आप समझ ही चुके हैं कि प्रत्येक त्रिभुजाकार उपकरण का एक कोण 90º है तथा बाकी दोनों कोण एक में 45º-45º के हैं एवं दूसरे में 30º एवं 60º के हैं।

इन दोनों उपकरणों को सेट स्क्वायर (गुनिया) कहा जाता है।

आप सेट स्क्वायर की सहायता से किसी रेखा पर 90º का कोण बनाइए एवं चाँदे की सहायता से कोण को मापकर जाँच कीजिए।

यदि सेट स्क्वायर से बनाये गए कोण का माप ठीक 90º का नहीं है तो कितना अलग है? इस अंतर का कारण सोचिए?

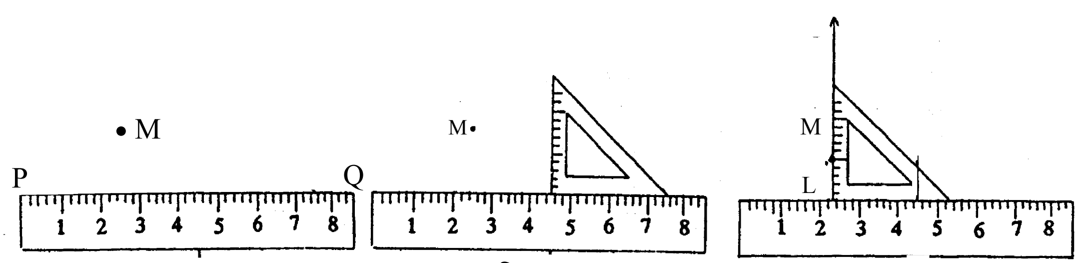
सेट स्क्वायर की सहायता से रचनाएँ करना

किसी दी हुई रेखाखण्ड पर ऐसे बिन्दु से लम्ब खींचना जो रेखा पर स्थित नहीं है:

PQ कोई रेखाखण्ड है तथा M इस रेखाखण्ड के बाहर कोई बिन्दु है

रचना के पद

1. स्केल के इस प्रकार रखिए कि उसका एक किनारा PQ अनुदिश रहे।(चित्र–2)
2. स्केल से सटा कर सेटस्क्वायर की एक लम्बवत भुजा को रखिए। ध्यान रहे कि स्केल हिल न पाये। दूसरी भुजा स्केल के लम्बवत है।
3. स्केल को कसकर दबाए रहिए तथा सेटस्क्वायर को स्केल से रगड़ते हुए इस प्रकार चलाइए कि सेटस्क्वायर की दूसरी लम्बवत भुजा दिए गए बिन्दु M को छूने लगे। (चित्र–4)
4. बिन्दू M को छू रही सेटस्क्वायर की भुजा के अनुदिश रेखाखण्ड खींचिए।
5. यह ML रेखाखण्ड PQ पर लम्ब होगी।



चित्र 2 चित्र 3 चित्र 4

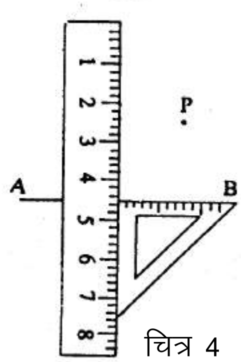
सेट स्क्वायर और स्केल की सहायता से समान्तर रेखाएं खींचना

आपने यह पढ़ा है कि दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरी हमेशा समान होती है। आपने सेट स्क्वायर से किसी सरल रेखा पर लम्ब खींचना सीख लिया है। क्या आप सेट स्क्वायर और स्केल की सहायता से अपनी कॉपी पर दी गई सरल रेखा के समान्तर कोई सरल रेखा खींच सकते हैं? प्रयास करके देखिए। आपने किस तरीके से समान्तर रेखा खींची है वह भी लिखिए।

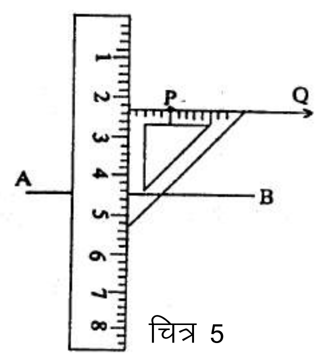
किसी रेखा के बाहर स्थित बिन्दु से इस रेखा के समान्तर दूसरी रेखा खींचना।

रचना के पद :–

AB रेखा के बाहर कोई बिन्दु P है, बिन्दु P से AB के समान्तर एक रेखा खींचनी है।



चित्र 4



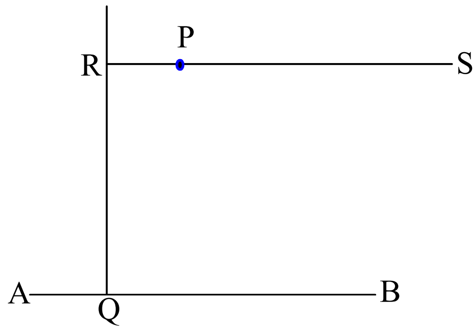
चित्र 5

1. AB रेखा के अनुदिश सेट स्क्वायर की लम्बवत भुजाओं में से एक भुजा को रखिए।
2. सेटस्क्वायर हिलने न पाये, अब सेट स्क्वायर की दूसरे लम्बवत भुजा के अनुदिश सटाकर स्केल को रखिए (चित्र 4)।
3. स्केल को इस तरह से दबाए रहिए कि वह हिल न पाए।
4. स्केल से रगड़ते हुए सेटस्क्वायर को दिये गए बिन्दु की ओर तब तक ले जाइए जब तक कि सेटस्क्वायर की भुजा बिन्दु P को छूने न लगे (ध्यान रहे स्केल सरकने न पाये)
5. अंत में सेटस्क्वायर को उसी बिन्दु पर स्थिर रखकर P से होकर सेटस्क्वायर की भुजा के अनुदिश एक सरल रेखा खीचें। यह PS सरल रेखा AB के समान्तर होगी। चाहे तो अलग–अलग जगह पर AB और PS के बीच की दूरी को माप कर जाँच लें।

किसी रेखा के समान्तर रेखा खींचने का अर्थ यह है कि उस रेखा पर एक लम्ब रेखा खींचना तथा लम्ब रेखा पर फिर से एक लम्ब खींचना। जैसे चित्र में दर्शाया गया है, AB रेखा पर RQ लम्ब है, RQ पर RS फिर से एक लम्ब है। अब AB तथा RS समान्तर है।

किसी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर दूसरी समान्तर रेखा खींचना।

मान लीजिए AB रेखा से 6 सेमी दूर एक समान्तर रेखा खींचना है।



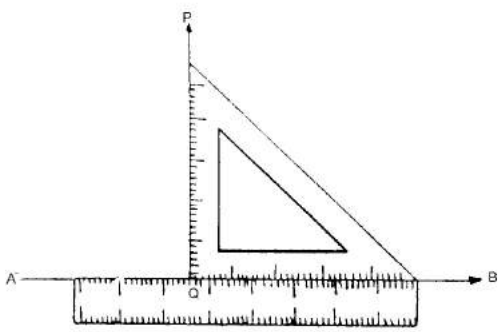
चित्र 6

रचना के पद : (1) AB रेखा खींचिए।

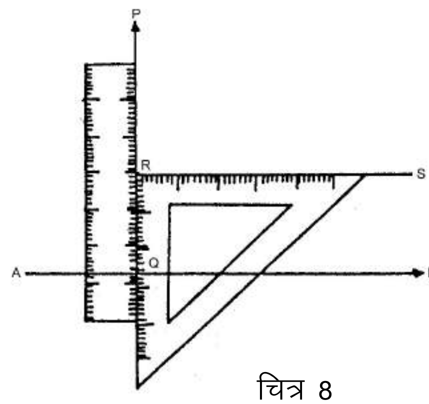
(2) सेटस्क्वायर और स्केल का प्रयोग कर AB पर एक लम्ब खींचिए। (चित्र 7)

(3) PQ पर कोई बिन्दु R इस प्रकार लीजिए कि Q से R की दूरी 6 सेमी हो।

(4) सेटस्क्वायर की सहायता से R पर लम्ब RS खींचिए। RS ही AB के समान्तर होगी तथा AB से 6 सेमी की दूरी पर होगी।



चित्र 7



चित्र 8

अभ्यास 1

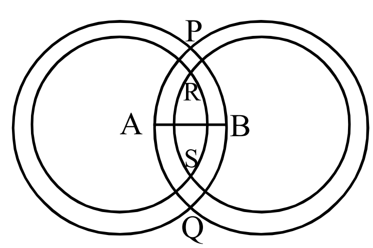
1. 3 सेमी का रेखाखण्ड खींचकर उससे निम्नलिखित दूरी पर समान्तर रेखा खींचिए।
   (i) 1.5 सेमी (ii) 2.0 सेमी (iii) 2.2 सेमी (iv) 3.1 सेमी

परकार और स्केल की सहायता से रेखाखण्ड का समद्विभाजक खींचना :

आइए, एक क्रियाकलाप करें –

✍ क्रियाकलाप 1.

किसी माप का एक रेखाखण्ड AB खींचिए, A बिन्दु पर परकार रखकर B तक फैलाइए और A को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। अब इसी नाप का एक वृत्त B को केन्द्र मानकर खींचिए। दोनों वृत्त जिन बिन्दुओं पर कटते हैं उन्हें चिह्नांकित करें एवं नाम दीजिए।



चित्र 9

अब परकार के फैलाव को कुछ कम करके पुनः A बिन्दु पर रखकर एक वृत्त तथा B बिन्दु पर रखकर उसी नाप का दूसरा वृत्त खींचिए ये दोनों वृत्त ऊपर नीचे जिन बिन्दुओं पर एक दूसरे को काटते हैं उन बिन्दुओं को पुनः चिह्नांकित कर R एवं S नाम दीजिए।

इसी प्रकार परकार के फैलाव को कम करते जाइए तथा A एवं B बिन्दुओं से वृत्त बनाते जाइए तथा समान नाप के वृत्तों के कटान बिन्दुओं को चिह्नांकित करते जाइए। नीचे पूछे गए सवालों का जवाब ढूंढ़िए –

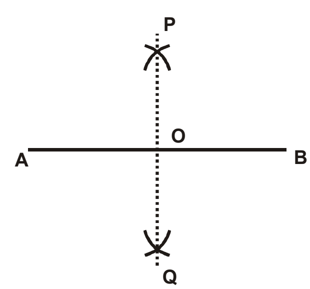
1. आप वृत्तों को क्रमशः छोटा करते जा रहे हैं, क्या दो समान नाप के वृत्त जो बिन्दु A एवं बिन्दु B से खींचे जा रहे हैं, हमेशा एक दूसरे को काटेंगे? यदि नहीं तो किस नाप तक A और B बिन्दुओं से खींचे गए वृत्त एक दूसरे को काटेंगे।
2. आपने जो P, Q, R, S, T, U, ... इत्यादि बिन्दु प्राप्त की हैं, क्या वे सभी समरेख हैं? क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?
3. रेखा AB को रेखा PQ किस अनुपात में काटती है।
4. रेखा AB रेखा PQ के साथ कितने अंश का कोण बनाती है।

उपरोक्त क्रियाकलाप को हल करते समय आपने पाया होगा कि जैसे ही A और B बिन्दुओं से खींचे गए समान आकार के वृत्त की त्रिज्या, रेखाखण्ड की लम्बाई के आधे से कम हो जाती है तो वे एक दूसरे को नहीं काटते। P, Q, R, S, T, U,...... इत्यादि सभी बिन्दु समरेख हैं एवं PQ रेखा AB रेखा को समद्विभाजित करती है तथा इन दोनों रेखाखण्ड के मध्य 90^o का कोण बनता है।

इस प्रकार आप कह सकते है कि किसी दी गई माप की रेखा खण्ड का यदि लम्ब समद्विभाजक खींचना है तो परकार को रेखा की लम्बाई के आधे से ज्यादा फैलाइए तथा रेखाखण्ड के प्रारम्भिक एवं अंतिम बिन्दुओं पर परकार रख वृत्त या वृत्त खण्ड बनाइए। अब दोनों वृत्त या वृत्त खण्डों की जो कटान बिन्दुएं होंगी उन्हें मिलाने पर रेखा का लम्ब समद्विभाजक प्राप्त होगा।

क्रियाकलाप 2.

1. अपनी कॉपी में A एवं B को दो बिन्दु लीजिए और उन्हें मिलाइये। A •——————• B
2. बिन्दु A पर परकार की नोक रखकर ABरेखाखण्ड के आधे से अधिक माप लेकर रेखा AB के दोनों ओर माप (वृत्तखण्ड) बनाइये।
3. परकार की नोक को अब B बिन्दु पर रखकर उसी नाप से पुनः AB के दोनों ओर चाप बनाइये जो पूर्व में बनाए गए चाप को काटते है, इन्हें P एवं Q का नाम दीजिए।

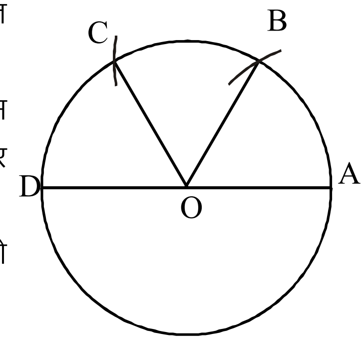


4. अब PQको मिलाइए।
5. रेखाखण्ड PQ, AB को जिसे बिन्दु पर काटता है उसे O का नाम दीजिए। अब AO एवं OB का माप कर देखिए। क्या AO = OB ?
6. $\angle POB$ को मापिए। क्या $\angle POB=90^0$,इस प्रकार प्राप्त रेखा PQ रेखा AB का लम्ब समद्विभाजक होगा।

परकार की सहायता से अलग–अलग नाप के कोण बनाना :

✍ क्रियाकलाप 3.

1. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचकर उसके केन्द्र को चिह्नित कीजिए।
2. वृत्त पर कोई बिन्दु A लीजिए। A पर परकार को रखकर, जिस त्रिज्या का आपने वृत्त बनाया है, उसी त्रिज्या का एक चाप वृत्त पर काटिए।
3. जिस बिन्दु पर चाप कटा है उस बिन्दु पर परकार को रखकर उसी त्रिज्या का चाप पुनः काटिए।
4. वृत्त पर चाप काटने की इस प्रक्रिया को दोहराइए।



चित्र 10

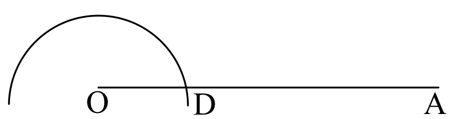
नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर ढूंढिए।

1. वृत्त को उसकी त्रिज्या के नाप वाले कितने चापों में बाँट सकते हैं?
2. केन्द्र से सभी चापों के कटान बिन्दु को मिलाइए। दो क्रमागत कटान बिन्दुओं द्वारा केन्द्र के साथ जो कोण बनाया जा रहा है उनका माप क्या है?
3. क्या सभी कोण समान माप के हैं?
4. यदि सभी कोण समान माप के हैं तो एक कोण का माप क्या होगा?

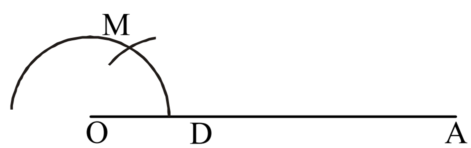
उपरोक्त क्रियाकलाप के प्रश्नों का उत्तर ढूंढ़ते हुए आपने पाया कि किसी वृत्त पर उसकी त्रिज्या के बराबर माप वाले छः चाप कट सकते हैं। क्रमागत कटान बिन्दुओं द्वारा बनाया गया प्रत्येक कोण 60^o का है।

क्या अब आप स्केल और परकार की सहायता से 60^o कोण बना सकते हैं?

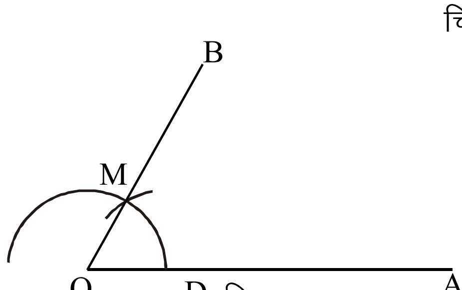
आइए, स्केल और परकार की सहायता से 60^0 का कोण बनायें :–



चित्र 11



चित्र 12



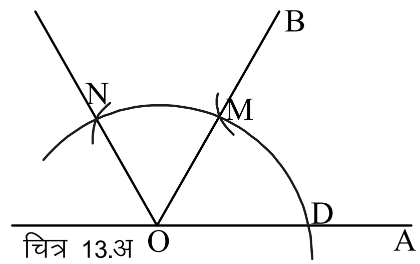
चित्र 13

1. एक रेखाखण्ड खींचिए तथा इसके बिन्दु O पर एक ऐसा अर्द्धवृत्त बनाइए जो OA को D पर काटता है (चित्र 11)।

2. D पर परकार को रखकर जिस त्रिज्या का अपने अर्द्धवृत्त खींचा है, उसी त्रिज्या का चाप अर्द्धवृत्त पर कटान बिंदु M प्राप्त कीजिए (चित्र 12)।

3. OM को मिलाते हुए B तक बढ़ाइए (चित्र 13)।

4. $\angle AOB = 60^o$ होगा।



चित्र 13.अ

आपने पहले भी वृत्त को उसकी त्रिज्या के बराबर समान छः भागों में बाँटा है तथा यह भी देखा है कि प्रत्येक भाग केन्द्र से 60^o का कोण बनाता है। ऊपर आपने एक बार चाप काटकर 60^o का कोण प्राप्त किया है। इसी चाप को लेकर यदि आप एक बार M बिन्दु से आगे पुनः चाप काटेंगें, तो आपको 120^o का कोण मिलेगा तथा तीन बार काटने पर 180^o।

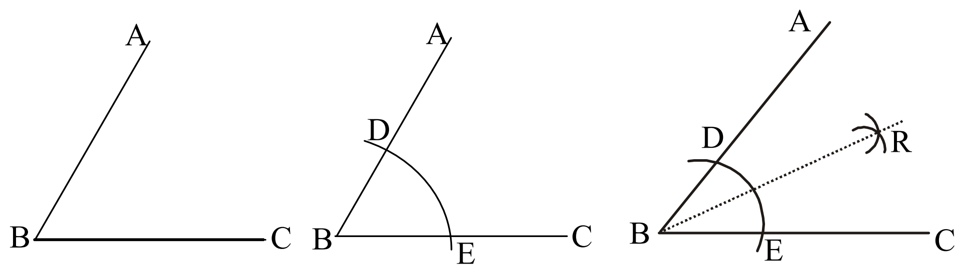
अभ्यास 2

1. परकार और स्केल की सहायता से 120^o का कोण बनाइए।

कोण का समद्विभाजक खींचना

रचना के पद :

1. $\angle ABC$ के बिन्दु B को केन्द्र मानकर एक चाप इस प्रकार काटिए कि वह AB को D बिन्दु पर तथा BC को E बिन्दु पर काटे। (ध्यान रहे कि चाप न ही बहुत छोटी हो और न ही बहुत बड़ी)



चित्र 14 चित्र 15 चित्र 16

2. D को केन्द्र मानकर एक चाप बनाइए पुनः उसी त्रिज्या का चाप E से इस प्रकार बनाइए कि दोनों चाप एक दूसरे को R पर काटें। (चित्र **16**)

3. B को R से मिलाते हुए आगे बढ़ाइए।

4. रेखा BR ही $\angle ABC$ का समद्विभाजक है।

अभ्यास 3

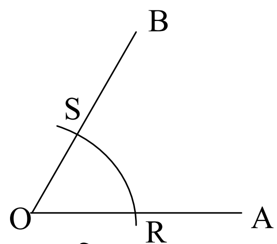
1. 52^o का कोण बनाकर उसका समद्विभाजक खींचिए।

2. 170^o का कोण बनाकर इसका समद्विभाजन कीजिए।

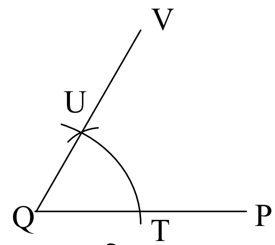
3. 60^o का कोण बनाकर इसका समद्विभाजन कीजिए और नाप कर बताइये कि यह कोण कितने अंश का है।

दिए गए कोण के बराबर कोण की रचना करना।

मान लीजिए ∠AOB दिया हुआ है, ∠AOB के बराबर एक दूसरी कोण की रचना करनी है।



चित्र 17



चित्र 18

रचना के पद –

1. QP रेखा खींचिए। Q बिन्दु पर ∠AOB के बराबर कोण बनाना है।
2. परकार को थोड़ा सा फैलाकर O बिन्दु पर रखिए तथा इस प्रकार का एक चाप काटिये जो OA और OB दोनों भुजाओं को क्रमशः R एवं S पर काटता है।(चित्र 17)
3. इसी नाप का चाप Q बिन्दु पर परकार रखकर भी काटिए जो QP को T पर काटता है।
4. परकार को R पर रखकर S तक फैलाइए एवं उसी माप का चाप T पर रखकर TU काटिए और U प्राप्त कीजिए (चित्र 18)
5. QV को मिलाते हुए R तक आगे बढ़ाइए।
   ∠PQV = ∠AOB

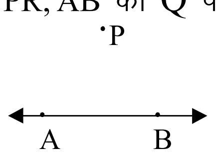
अभ्यास 4

1. चाँदा की सहायता से 55^o का एक कोण बनाइए तथा इसके बराबर एक कोण परकार एवं स्केल की सहायता से बनाइए।
2. चाँदा की सहायता से 120^o का कोण बनाकर इसके बराबर एक कोण परकार एवं स्केल की सहायता से बनाइए।

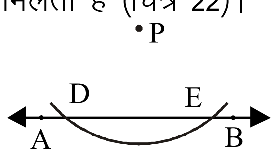
रेखाखंड के बाहर किसी बिन्दु से रेखाखंड पर लम्ब खींचना

रचना के चरण

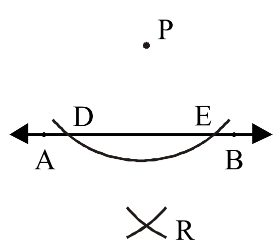
1. एक रेखा A B खींचिए और इसके बाहर बिन्दु P लीजिए।
2. P को केन्द्र मानकर सुविधाजनक त्रिज्या का एक चाप काटिए जो A B को D और E पर काटे। (चित्र 20)
3. D और E को केन्द्र मानकर सुविधाजनक त्रिज्या से दो चाप काटिए जो एक दूसरे को R पर काटें। (चित्र 21) PR को मिलाकर बढ़ाइए।
   इस प्रकार PR ⊥ AB
4. PR, AB को Q पर मिलता है (चित्र 22)।



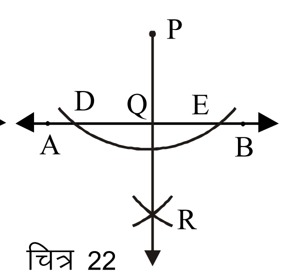
चित्र 19



चित्र 20



चित्र 21

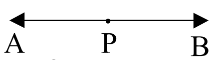


चित्र 22

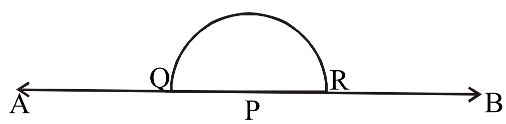
रेखाखंड पर स्थित बिन्दु से रेखाखंड पर लम्ब खींचना।

रचना के चरण :

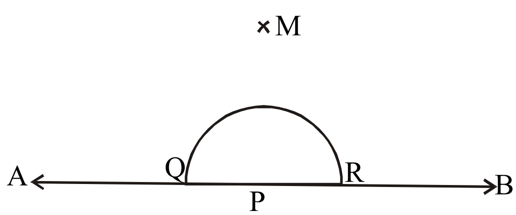
1. सर्वप्रथम एक रेखाखंड AB खींचिए जिस पर बिन्दु P चिह्नित कीजिए।
2. बिन्दु P पर परकार की नोक रखिए तथा किसी भी नाप की त्रिज्या लेकर रेखाखंड AB पर अर्द्धवृत्त काटिए जो कि रेखाखंड AB को दो बिन्दुओं Q तथा R पर काटता है। (चित्र 24)



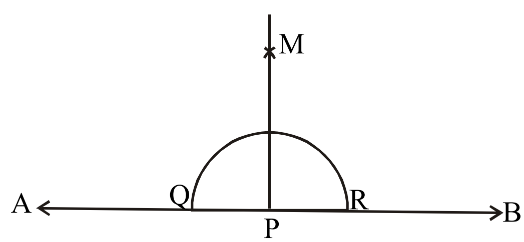
चित्र 23



चित्र 24



चित्र 25



चित्र 26

3. अब R पर परकार रखिए और किसी भी माप की त्रिज्या लेकर अर्द्धवृत्त के ऊपर की ओर एक चाप काटिए। पुनः 'Q' पर परकार रखकर उसी चाप की त्रिज्या लेकर अर्द्धवृत्त के ऊपर ओर एक और चाप काटिए, जो आपस में बिन्दु M पर काटते हैं। (चित्र 25)
4. बिन्दु M को P से मिला दीजिए। (चित्र 26)

   प्राप्त रेखाखंड PM ही वह लम्ब रेखा है।

   अर्थात् $PM \perp AB$

प्रश्नावली 15

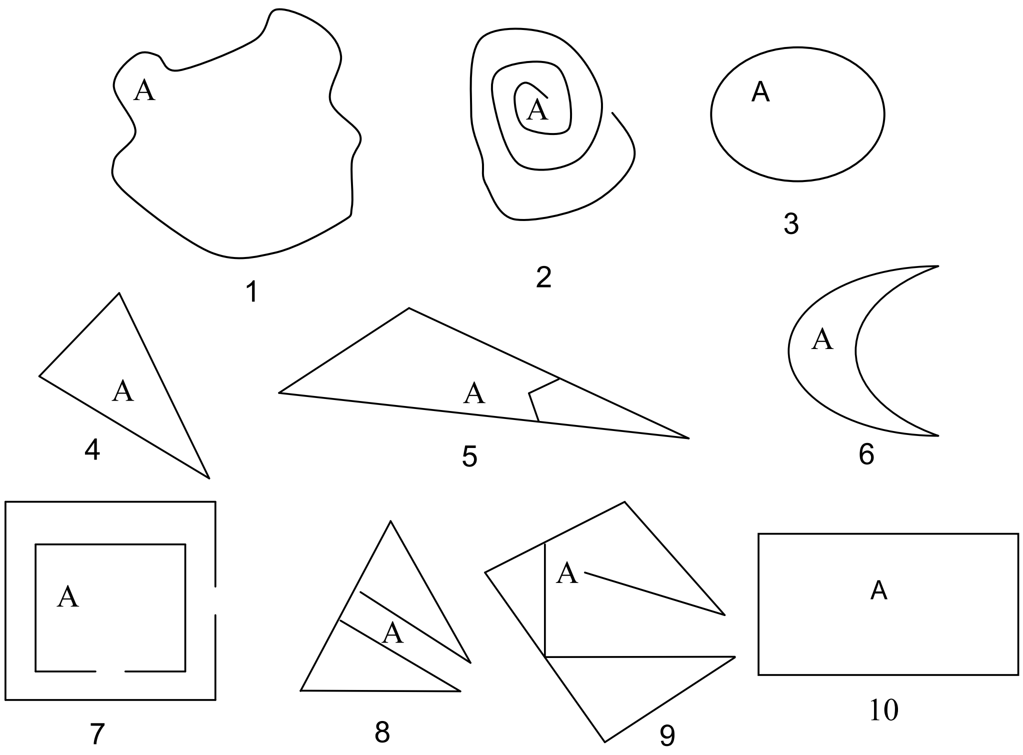
34ISF7

1. 5 सेमी का एक रेखाखंड खींचिए इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।
2. सेटस्क्वायर की सहायता से निम्नलिखित कोणों की रचना कीजिए।
   (i) 45° (ii) 60° (iii) 30° (iv) 90° (v) 120°
3. निम्नलिखित नाप का रेखाखंड लेकर उसका समद्विभाजन कीजिए।
   (i) 5 सेमी (ii) 4.5 सेमी (iii) 3.6 सेमी (iv) 5.4 सेमी
4. परकार व स्केल की सहायता से निम्नलिखित कोण बनाइये।
   (i) 60° (ii) 90° (iii) 120° (iv) 150°
5. परकार व स्केल की सहायता से उपरोक्त कोणों का समद्विभाजक कीजिए।
6. चाँदें की सहायता से निम्नलिखित नाप का कोण बनाइये एवं परकार व स्केल की सहायता से उसके समान कोण की रचना कीजिए।
   (i) 68° (ii) 92° (iii) 108° (iv) 126° (v) 153°

34SNGU

16
क्षेत्रमिति–1
क्षेत्रफल

आपने अध्याय 2 में बन्द एवं खुली आकृतियों को समझा है। दैनिक जीवन में कई आकृतियों को देखते रहते हैं। निम्नलिखित आकृतियों को ध्यान से देखिए।



चित्र 1

ऊपर बनी आकृतियों में आकृति के किसी बिंदु या छोर से प्रारंभ कर बिना पेंसिल उठाये एवं किसी हिस्से पर दुबारा चले बिना फिर उसी बिंदु या छोर पर पहुँच सकते हैं? यदि पहुँच सकते हैं तो यह एक बंद आकृति होगी और यदि नहीं तो यह एक खुली आकृति होगी।

अर्थात् बंद आकृति का कोई अंतिम बिंदु नहीं होता।

क्या आप बता सकते हैं कि निम्नलिखित मैदानों की आकृतियाँ खुली हैं या बंद है ?

1. खो – खो का मैदान
2. फुटबाल का मैदान

3. गिल्ली डंडा जिस मैदान में खेला जाता है वह मैदान।
4. कबड्डी खेल का मैदान।
5. बिल्लस जिस क्षेत्र में खेला जाता है वह क्षेत्र।

352JIH

क्षेत्रफल (Area)

सभी बंद आकृतियों के अंदर कुछ जगह होती है। इन आकृतियों के बाहर स्थित किसी बिंदु से इनके अंदर स्थित किसी बिंदु तक आकृति की रेखा को काटे बिना नहीं जा सकते। बंद आकृतियों के अंदर की जगह ही उसका क्षेत्र हैं। कुछ आकृतियों में ज्यादा जगह होती है। जिनमें ज्यादा जगह होती है वही बड़ी होती है।

कोई वस्तु/आकृति समतल पर जितनी जगह घेरती है, वह उसका क्षेत्रफल कहलाता है।

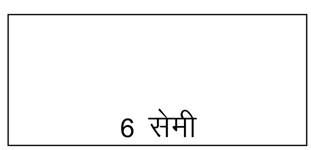
ग्राफ पेपर की सहायता से किसी आकृति का क्षेत्रफल नापना –

आयत का क्षेत्रफल

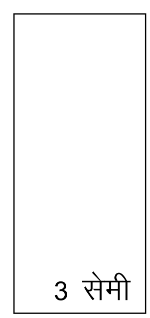
कक्षा 5वी में आपने आयत के बारे में पढ़ा होगा। यह एक चतुर्भुज है, जिसके आमने सामने की भुजा बराबर है तथा प्रत्येक कोण समकोण हैं।

✍ क्रियाकलाप 1.

1. एक आयत है जिसकी लम्बाई 6 सेमी एवं चौड़ाई 3 सेमी है। प्रत्येक भुजा पर एक–एक सेमी की दूरी पर लम्बाई तथा चौड़ाई की ओर चिह्न लगावें।



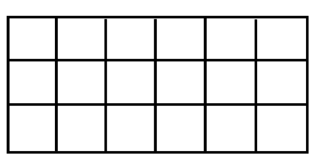
आयत आड़ी स्थिति में



आयत खड़ी स्थिति में

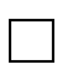
चित्र 4

2. आयत को 1 सेमी × 1 सेमी के खण्डों में निम्नानुसार बांटें –



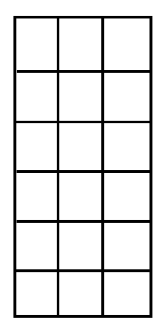
3 सेमी

6 सेमी



1 सेमी

1 सेमी



6 सेमी

3 सेमी

चित्र 5

दर्शाए गए चित्र में 1 सेमी x 1 सेमी के बन रहे वर्गों को गिनिए।

वर्गों की संख्या = 18

1 वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग सेमी

18 वर्ग का क्षेत्रफल = 18 वर्ग सेमी

निष्कर्ष : जितना बड़ा आयत होगा 1 वर्ग सेमी के वर्गों की संख्या उतनी ही अधिक होगी।

क्षेत्रफल = 18 वर्ग सेमी

= 6 सेमी × 3 सेमी या 3 सेमी × 6 सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

चूंकि गुणा की संक्रिया क्रम विनिमय के नियम का पालन करता है अतः –

आयत का क्षेत्रफल = चौड़ाई x लम्बाई, भी लिख सकते हैं।

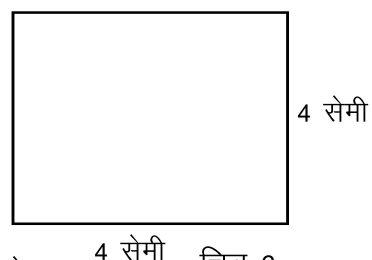
अभ्यास

1. आपकी गणित की पुस्तक द्वारा घेरे गए स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. चाक के डिब्बे और श्यामपट्ट द्वारा घेरे गए स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. अपने आस–पास की किन्हीं दो आयताकार वस्तुओं द्वारा घेरे गए स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

वर्ग का क्षेत्रफल

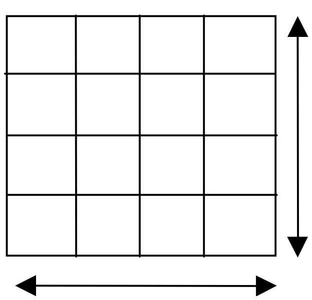
वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है।

जिसकी भुजाएं समान हैं अर्थात् लम्बाई तथा चौड़ाई बराबर है।



चित्र 6

4 सेमी × 4 सेमी भुजा वाले वर्ग को 1 सेमी × 1 सेमी वाले वर्गों में बाँटने पर –


चित्र 7

1 वर्ग सेमी = 1 सेमी × 1 सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग खण्डों की संख्याएँ

= 16

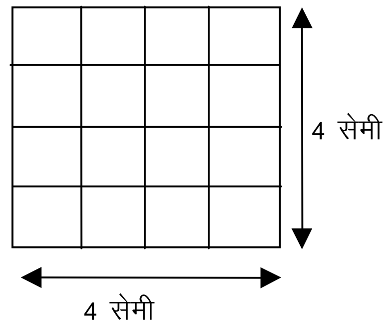
1 वर्गखण्ड का क्षेत्रफल = 1 वर्ग सेमी

16 वर्गखण्डों का क्षेत्रफल= 16 वर्ग सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = 16 वर्ग सेमी

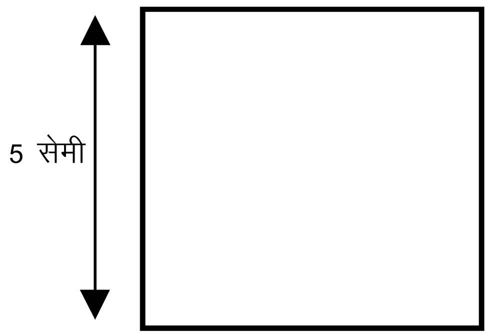
वर्ग का क्षेत्रफल = 4 सेमी x 4 सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा = $(\text{भुजा})^2$



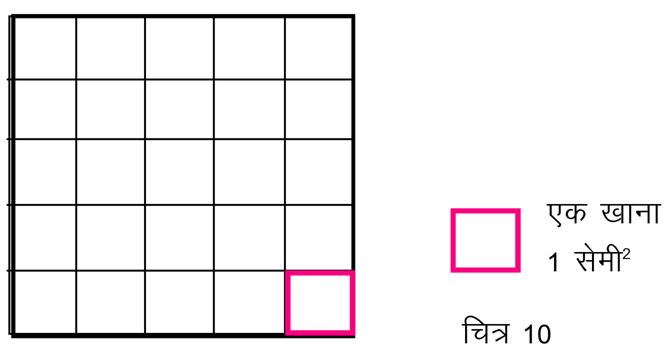
चित्र 8

उदाहरण 1. यदि एक वर्ग की भुजा 5 सेमी है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?



चित्र 9

चित्र में 5 सेमी भुजा का एक वर्ग दिखाया गया है। प्रत्येक भुजा पर 1–1 सेमी दूरी पर चिह्न अंकित कीजिए।



चित्र 10

अब आमने–सामने के सभी बिन्दुओं को मिलाकर आड़ी और खड़ी रेखाएँ खींचिए।

इस वर्ग के भीतर 1 सेमी लम्बे व 1 सेमी चौड़े खानों को गिनिये।

वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग के भीतर 1 सेमी लम्बे व 1 सेमी चौड़े खानों की संख्या।

= 25 = 25 × 1 खाने का क्षेत्रफल

= 25 × 1 वर्ग सेमी = 25 वर्ग सेमी

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग की लम्बाई × वर्ग की चौड़ाई

= भुजा का वर्ग

उदाहरण 2. एक आयत की लम्बाई 7 सेमी व चौड़ाई 3 सेमी है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ आयत की लम्बाई = 7 सेमी

आयत की चौड़ाई = 3 सेमी

इसलिये आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौडाई

= 7 सेमी x 3 सेमी = 21 सेमी^{2} या 21 वर्ग सेमी

उदाहरण 3. एक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 8 सेमी लम्बी है।

हल :

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 8 सेमी x 8 सेमी

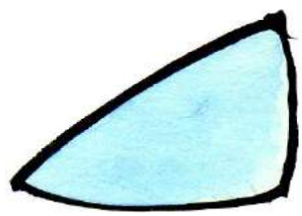
= 8 सेमी x 8 सेमी

= 64 सेमी^{2} या 64 वर्ग सेमी

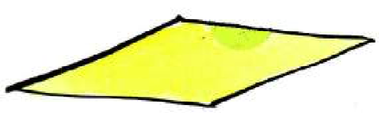
प्रश्नावली 16

(1) निम्नलिखित में से बन्द आकृतियों को पहचानिये –

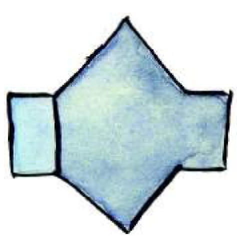
(i)

(ii)


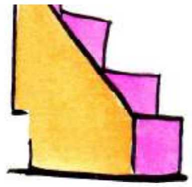
(iii)

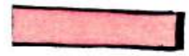
(iv)


(v)

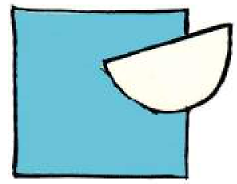
(vi)


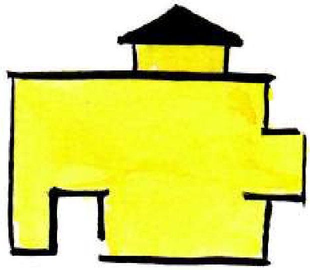
(vii)

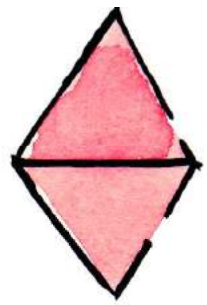
(viii) 

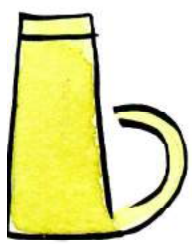
(ix) 

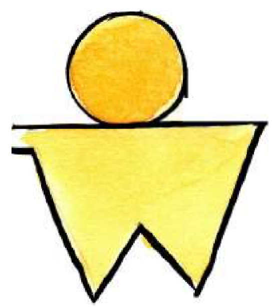
(x)

(xi) 

(xii) 

(xiii) 

(xiv) 

(xv) 

(2) प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, लम्बाई व चौड़ाई निम्नानुसार है –

- (i) लम्बाई – 6 सेमी, चौड़ाई – 2 सेमी
- (ii) लम्बाई – 10 सेमी, चौड़ाई – 1 सेमी
- (iii) लम्बाई – 12 सेमी, चौड़ाई – 6 सेमी
- (iv) लम्बाई – 13.5 सेमी, चौड़ाई – 10 सेमी

(3) निम्नलिखित वर्गों जिनकी भुजा निम्नानुसार है का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए –

- (i) 6 सेमी
- (ii) 12 सेमी
- (iii) 13 सेमी
- (iv) 3.5 सेमी

(4) निम्न आयतों में से प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उसमें प्रत्येक भुजा पर 1–1 सेमी की दूरी पर आड़ी व खड़ी रेखाओं को खींचकर ज्ञात कीजिए तथा सूत्र की सहायता से अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

(i) लम्बाई – 5 सेमी, चौड़ाई – 4 सेमी

(ii) लम्बाई – 12 सेमी, चौड़ाई – 2 सेमी

(5) एक वर्ग की भुजा 6 सेमी है। इसके प्रत्येक भुजा पर 1–1 सेमी की दूरी पर आड़ी व खड़ी रेखाओं को खींचकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और प्रश्न (3) के एक से अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

हमने सीखा

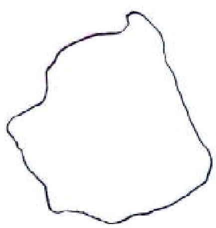
1. किसी समतल पर कोई वस्तु जितना स्थान घेरती है वह उसका क्षेत्रफल होता है।
2. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई
3. वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा = $(\text{भुजा})^2$
4. क्षेत्रफल का मात्रक वर्ग इकाई होता है।

:– प्रायोजना कार्य :–

अपनी सभी विषयों की पुस्तकों की लंबाई और चौड़ाई नापिए तथा बताइये कि कौन सी पुस्तक मेज़ पर सबसे अधिक स्थाना घेरती है।

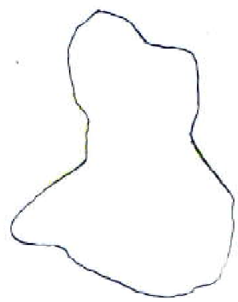
17
क्षेत्रमिति–2
परिमाप

निम्नलिखित धागे से बनी आकृतियों को देखिएः–



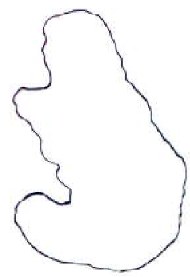
A

चित्र–1



A

चित्र–2



A

चित्र–3

उपरोक्त चित्रों में यदि A से चलना प्रारम्भ करें और पूरा चक्कर लगाकर पुनः A पर पहुँचे तो तय की गई दूरी आकृति को बनाने में उपयोग किए गए धागे की लम्बाई के बराबर होगी। यही आकृति के घेरे की भी लम्बाई है।

इसी प्रकार धागे से अथवा तार से विभिन्न आकृतियाँ बनाकर उसके घेरे की लम्बाई ज्ञात की जा सकती है। इसे ही क्षेत्र का परिमाप कहते हैं।

किसी भी बंद आकृति के पथ पर एक चक्कर लगाने के लिए तय की गई दूरी उस आकृति का परिमाप कहलाती है।

जैसा आपने देखा कि किसी क्षेत्र की सीमा पर एक चक्कर ही परिमाप है अतः किसी क्षेत्र को तार से घेरने अथवा चारों ओर अहाता बनाते समय परिमाप की आवश्यकता पड़ती है।

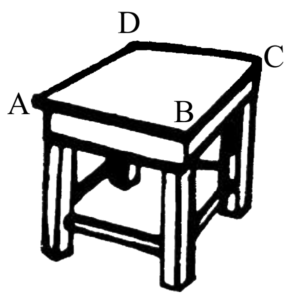
परिमाप (Perimeter)

दैनिक जीवन में कई वस्तुएँ उपयोग में आती हैं। जिनका आकार वृत्ताकार, त्रिभुजाकार, आयताकार होता है। आपने भी इन सभी आकार की वस्तुओं को देखा है। आपकी कॉपी का पन्ना, शतरंज का बोर्ड, कैरम का बोर्ड इत्यादि आयताकार हैं।

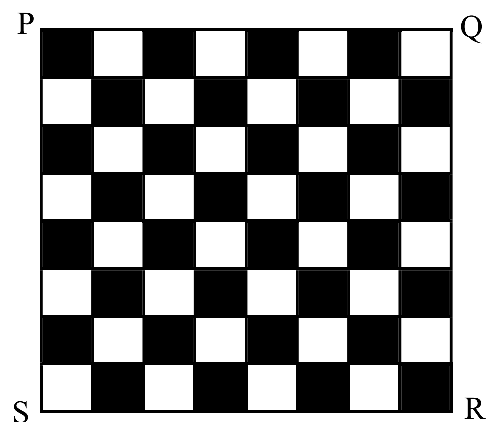
हमारी कॉपी का पन्ना, शतरंज का बोर्ड, पुस्तक, श्याम पट्ट आदि सभी आयताकार है। इनमें से कुछ आयताकार वस्तुएं वर्गाकार भी हैं। अपने आस–पास आयताकार वस्तुएं छांटिए और उनमें से उन आकृतियों को अलग कीजिए जो वर्गाकार भी हैं। नीचे दिए गए स्थान पर इनकी सूची बनाइए।

सिर्फ आयताकार हैं	वर्गाकार भी हैं
1. आपकी कॉपी का पन्ना	1. शतरंज का बोर्ड
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.

अब इन आकृतियों के किनारों पर ध्यान दीजिए और बताइये कि इनमें कितने किनारे हैं?



चित्र–4



चित्र–5

यहाँ आप देख रहे हैं कि टेबल के किनारों की संख्या 4 है। इसी प्रकार शतरंज बोर्ड के किनारों की संख्या भी 4 है।

आइए, अब कुछ आयताकार तलों का परिमाप निकालें।

✍ क्रियाकलाप 1.

टेबल के ऊपरी तल के किनारों को स्केल की सहायता से नापिये और लिखिये।

किनारे AB=…………….. सेमी, BC=……………………… सेमी

CD= …..……….. सेमी DA=…………………….. सेमी

अब इन सभी किनारों की लम्बाई को जोड़िए और लिखिए ।

टेबल के चारों किनारों का योग

= AB + BC + C D + DA = ... + ... + ... + ...+

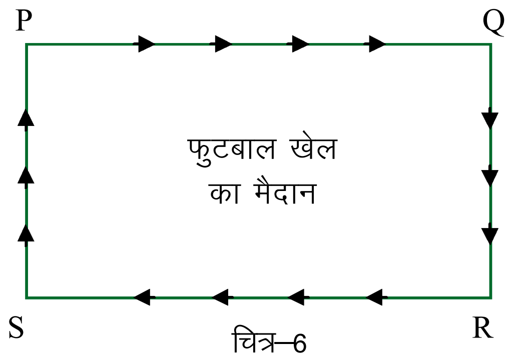
= .... सेमी

✍ क्रियाकलाप 2.

इसी प्रकार शतरंज बोर्ड के बाहरी किनारे नापिये और उन्हें जोड़िए

PQ + QR + RS + SP = ……………+……………+……………+…………… = …………… सेमी

✍ क्रियाकलाप 3.



चित्र–6

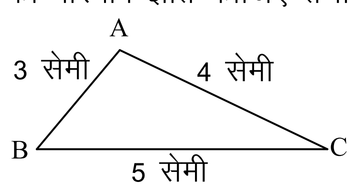
चित्र 6 में एक फुटबाल खेल का मैदान P Q R S दिखाया गया है ।

6वीं कक्षा का एक छात्र गोलू रोज़ाना सुबह 5 बजे उठकर इस फुटबाल मैदान के किनारे पर एक चक्कर लगाता है। अब बताइये कि गोलू रोज़ाना कितना चलता है?

गोलू द्वारा एक चक्कर में चली गयी कुल दूरी = PQ की लम्बाई + QR की लम्बाई + RS की लम्बाई +SP की लम्बाई।

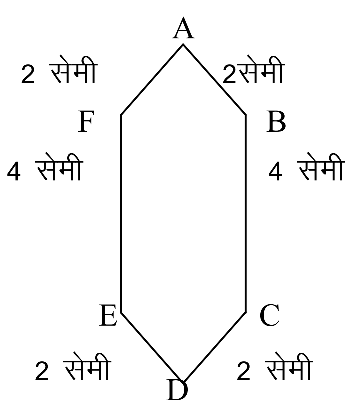
इन सभी क्रियाकलापों (1), (2) और (3) में आपने देखा कि आकृति के सभी किनारों की लम्बाई का योग उस आकृति का परिमाप है।

निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए तथा रिक्त स्थानों में लिखिए ।



परिमाप =……………

चित्र–7

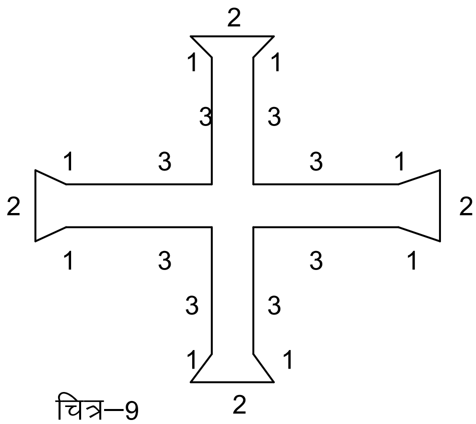


चित्र–8

AB + BC + CD + DE + EF + FA

= — + — + — + — + — + —

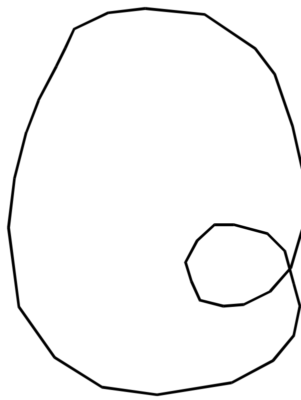
परिमाप = ……… सेमी



परिमाप =..............

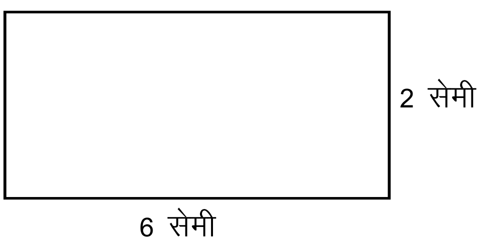
चित्र–9

चित्र के ऊपर धागा रख कर धागे की लम्बाई ज्ञात कीजिए वही परिमाप होगा।



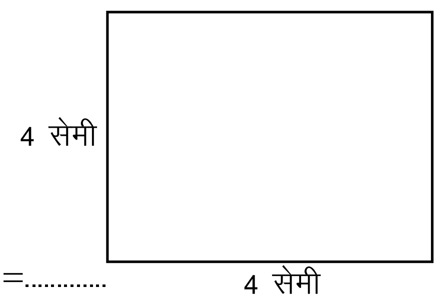
परिमाप =..............

चित्र–10



परिमाप =..............

चित्र–11



परिमाप =............

चित्र–12

अभ्यास 17.1

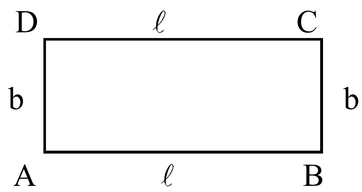
1. एक आयताकार बगीचे की लम्बाई 6 मीटर और चौड़ाई 3 मीटर है। इसमें चारों ओर तार का घेरा लगाना है, तो आवश्यक तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. एक आयताकार मैदान की लम्बाई 100 मीटर व चौड़ाई 50 मीटर है। इसके चारों ओर दो चक्कर लगाने में कुल तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

परिमाप कैसे पता करेंगे :– अब आपके समझ में आ गया होगा कि

आयत का परिमाप = उसके चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

अब यदि किसी आयत की लम्बाई ℓ इकाई और चौड़ाई b इकाई हो तो



आयत की परिमाप = उसकी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

= AB की लम्बाई + BC की लम्बाई +CD की लम्बाई + DA की लम्बाई

= ℓ इकाई + b इकाई + ℓ इकाई + b इकाई

= ℓ इकाई + ℓ इकाई + b इकाई + b इकाई

= $(\ell + \ell)$ इकाई + (b + b) इकाई

= 2 ℓ इकाई + 2 b इकाई

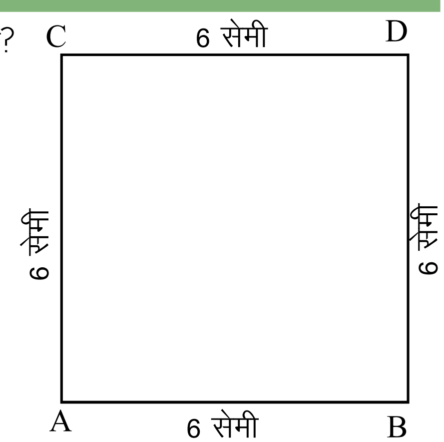
= 2 $(\ell + b)$ इकाई

अतः ℓ इकाई लम्बे b इकाई चौड़े आयत की परिमाप = 2 $(\ell + b)$ इकाई

आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

वर्ग का परिमाप

एक वर्ग के भुजा की लम्बाई 6 सेमी है। उसका परिमाप क्या होगा?



वर्ग का परिमाप = वर्ग के चारों भुजाओं की कुल लम्बाई

= 6 सेमी + 6 सेमी + 6 सेमी + 6 सेमी

= 4 × 6 सेमी (6 सेमी वर्ग की एक भुजा)

अतः वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लम्बाई

वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

परिमाप का मात्रक

परिमाप किसी भी बंद आकृति के कुल घेरे की लम्बाई है, अतः इसका मात्रक क्या होना चाहिए ? चूँकि परिमाप वास्तव में लम्बाई ही है अतः इसका मात्रक और लम्बाई का मात्रक एक ही होगा।

निम्न सारणी में रिक्त स्थानों को भरिये–

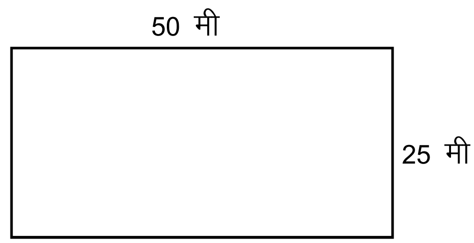
सारणी–1

क्रमांक	आयत की लम्बाई ℓ	आयत की चौड़ाई b	आयत के चारों भुजाओं का योग	आयत की परिमाप	आयत/वर्ग का परिमाप सूत्र की सहायता से
1.	10 सेमी	5 सेमी	10 सेमी +5सेमी +10 सेमी +5 सेमी = 30 सेमी	30 सेमी	2 (10+5) सेमी = 2 × 15 सेमी = 30 सेमी
2.	5 सेमी	5 सेमी	5 सेमी+5सेमी+5सेमी+ 5 सेमी = 20 सेमी	20 सेमी	4 × 5 = 20 सेमी
3.	6 मीटर	4 मीटर			
4.	7 सेमी	7 सेमी			

आइए, दैनिक जीवन से सम्बन्धित कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण 1.

एक आयताकार मैदान की लम्बाई 50 मीटर एवं चौड़ाई 25 मीटर है । एक धावक इसके चारों ओर 10 चक्कर लगाता है । ज्ञात कीजिए उसने कितनी दूरी तय की है



हल : यहाँ आयत की लम्बाई (ℓ) = 50 मी

आयत की चौड़ाई (b) = 25 मी

आयत का परिमाप = $2(\ell + b)$

= 2 (50 मी + 25 मी)

= 150 मी

इस प्रकार धावक एक चक्कर में 150 मीटर दूरी तय करता है।

$\therefore$ धावक 10 चक्कर में 10 × 150 मीटर = 1500 मीटर दूरी तय करेगा।

उदाहरण 2. यदि एक वर्ग का परिमाप 200 मीटर है तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हलः यहाँ परिमाप = 200 मीटर

4 × वर्ग के एक भुजा की लम्बाई = 200 मीटर

वर्ग के एक भुजा की लम्बाई = $\frac{200}{4}$ मीटर

= 50 मीटर

अब वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

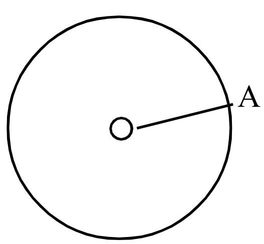
= 50 मीटर × 50 मीटर

= 2500 वर्गमीटर या 2500 मीटर^2

वृत्त का परिमाप ज्ञात करना

वृत्त के पाठ में आपने वृत्त के चारों ओर का घेरा निकालने से संबधित क्रियाकलाप किया है, तथा यह भी देखा है कि वृत्त के चारों ओर के घेरे की लम्बाई और वृत्त के व्यास के बीच का अनुपात π के बराबर होता है, जहाँ π स्थिरांक है। इस संबंध को निम्नानुसार लिख सकते है–

$$\frac{\text{वृत्त के चारों ओर के घेरे की लम्बाई}}{\text{वृत्त का व्यास}} = \pi$$



वृत्त के चारों ओर का घेरा ही वृत्त का परिमाप है, जिसे वृत्त की **परिधि** कहते है।

यदि वृत्त की त्रिज्या = r हो तो व्यास = 2r होगा

अतः $\frac{\text{वृत्त की परिधि}}{2r} = \pi$

या वृत्त की परिधि = $2\pi r$ जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$

वृत्त की परिधि (C)= $2\pi r$

उदाहरण 3. किसी वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

$C = 2\pi r$

$C = \dfrac{2 \times 22 \times 7}{7} = 44$ सेमी

उदाहरण 4. किसी वृत्त का एक चक्कर 1 किमी का है। उस वृत्त की त्रिज्या क्या होगी?

$C = 2\pi r$

$1000 = \dfrac{2 \times 22 \times r}{7}$ [$\because$ 1 कि.मी. = 1000 मीटर]

$\Rightarrow 7 \times 1000 = 2 \times 22 \times r$

$\Rightarrow \dfrac{7 \times 1000}{2 \times 22} = r$

$\Rightarrow r = \dfrac{1750}{11}$ मी

$\Rightarrow r = 150.9$ मी

अभ्यास 17.2

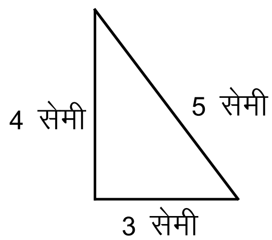
1. विभिन्न वृत्तों की त्रिज्या निम्नलिखित है। परिधि की गणना कीजिए:
   1. 3.5 सेमी
   2. 10.5 सेमी
   3. 17.5 सेमी
2. विभिन्न वृत्तों की परिधि की लंबाई दी गई है। त्रिज्या ज्ञात कीजिए:
   1. 500 मी
   2. 100 मी
   3. 22 सेमी
   4. 11 सेमी
3. एक पहिए की त्रिज्या ½ मी है । ग्यारह किमी दूरी तय करने के लिए पहिए को कितने चक्कर घूमना होगा?

3H8G4Z

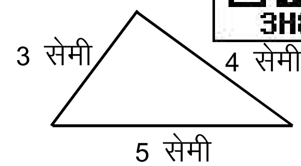
प्रश्नावली 17

(1) निम्न में से बन्द आकृतियों को छाँटकर उनकी परिमाप ज्ञात कीजिए ।

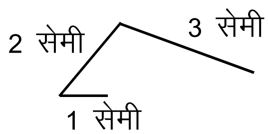
(i)



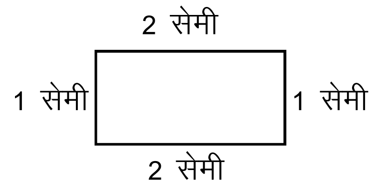
(ii)



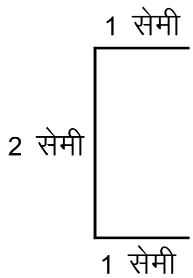
(iii)



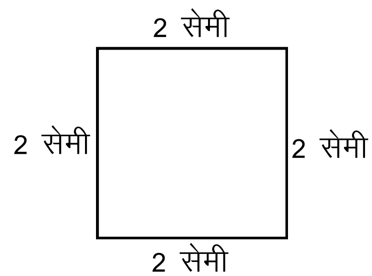
(iv)



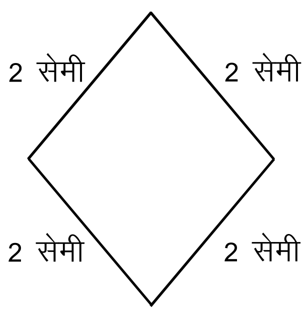
(v)



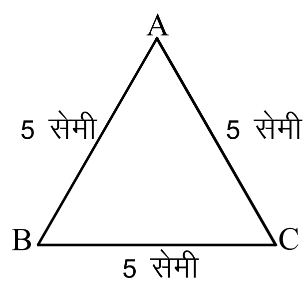
(vi)



(vii)



(viii)



(2) निम्न आयतों में से प्रत्येक का परिमाप ज्ञात कीजिए। लम्बाई, चौड़ाई निम्नानुसार है

(i) लम्बाई = 15 सेमी चौड़ाई = 6 सेमी

(ii) लम्बाई = 12 सेमी चौड़ाई = 6 सेमी

(iii) लम्बाई = 3.5 सेमी चौड़ाई = 2.5 सेमी

(iv) लम्बाई = 100 सेमी चौड़ाई = 50 सेमी

(3) नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य, प्रत्येक कथन के सामने दिए गए कोष्ठक में लिखिए तथा असत्य कथनों को सुधार कर कॉपी में लिखिए –

(i) प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है। ( )

(ii) प्रत्येक आयत एक वर्ग होता है। ( )

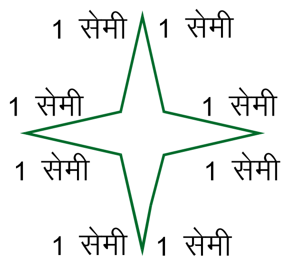
(iii) आयत की प्रत्येक भुजा सेमी में मापी गयी हो तो इसका परिमाप मीटर में होगा। ( )

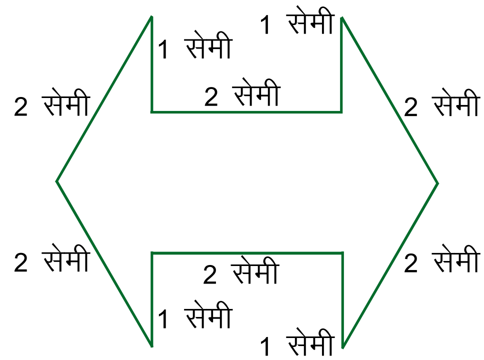
(iv) आयत का परिमाप उसके चारों भुजाओं के योग के बराबर होता है। ( )

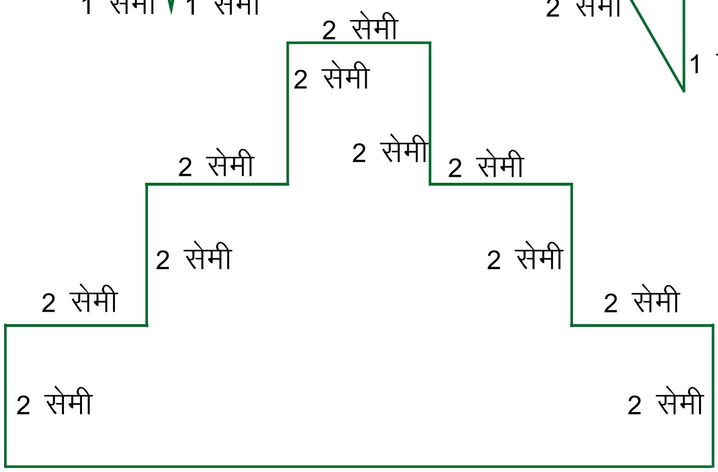
(4) एक वर्ग की भुजा 15 सेमी है इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

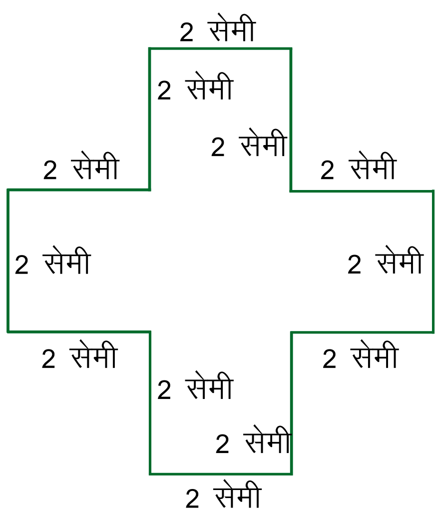
(5) एक आयत की लम्बाई 20 सेमी और चौड़ाई 0.5 मीटर है तो इसका परिमाप सेमी व मीटर में ज्ञात कीजिए ।

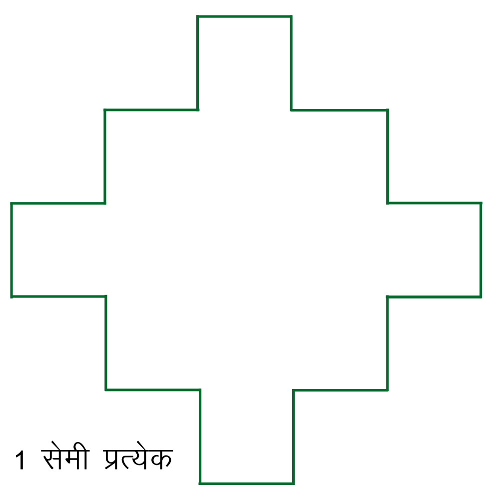
(6) निम्न आकृतियों का नाप सेमी में दिया गया है, उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

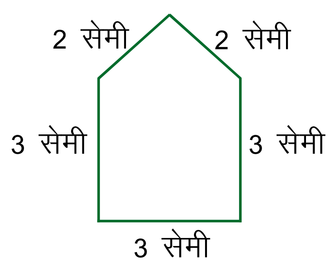
(i)


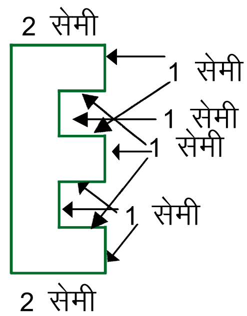
(ii)


(iii)


(iv)


(v)


(vi) 

(vii) 

(7) एक आयताकार मैदान की लम्बाई 25 मीटर व चौड़ाई 10 मीटर है इसके किनारे किनारे एक खिलाड़ी चार चक्कर पूरे करता है उसने कितनी दूरी तय की है।

हमने सीखा

1. परिमाप व क्षेत्रफल केवल बंद आकृतियों का ही संभव है।
2. बंद आकृतियाँ वह होती हैं जो बिना दुहराए अपने प्रारंभिक बिन्दु पर समाप्त होती हैं।
3. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
4. आयत का क्षेत्रफल = आयत के अन्तः भाग का क्षेत्रफल
5. प्रत्येक वर्ग आयत हो सकता है परंतु प्रत्येक आयत वर्ग नहीं हो सकता
6. वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$
7. आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)
8. वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा
9. 1 वर्ग मीटर = 1 मीटर × 1 मीटर
   = 100 सेमी × 100 सेमी = 10,000 वर्ग सेमी = 10,000 सेमी^2

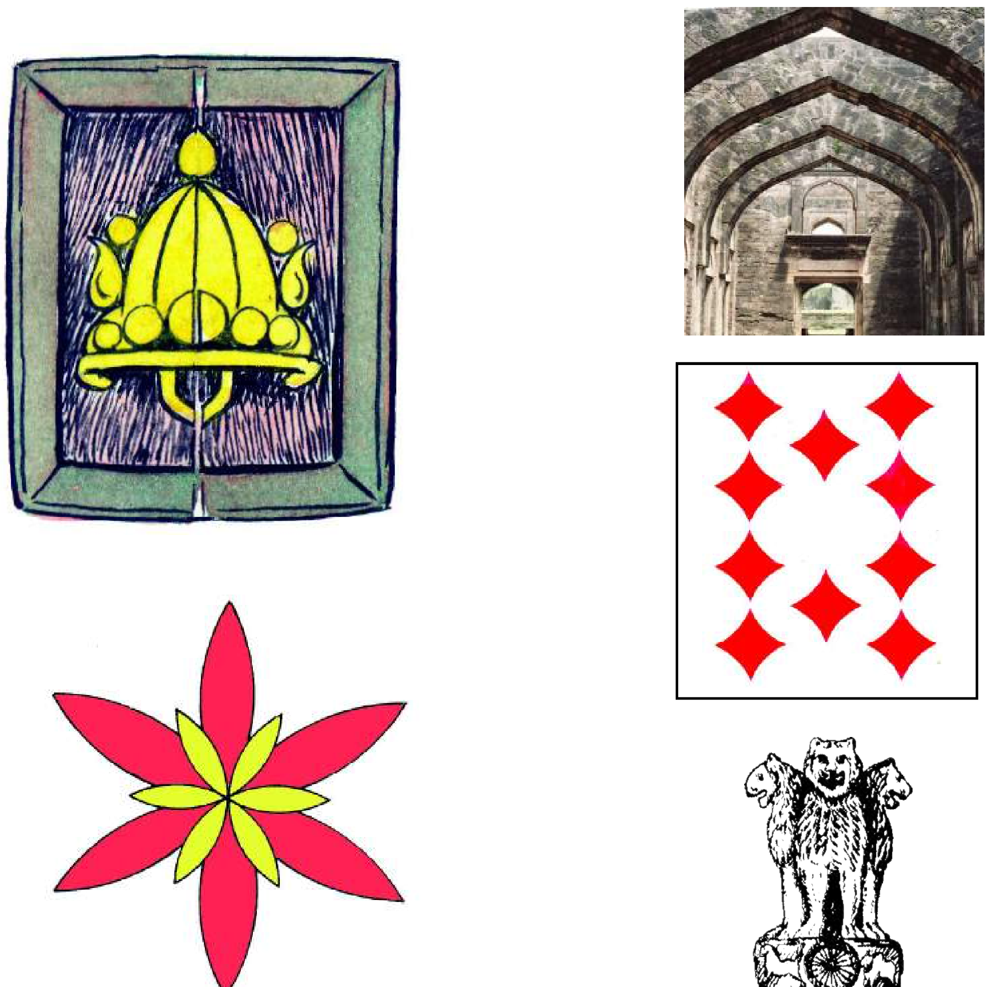
:– प्रायोजना कार्य :–

अपनी कक्षा की लंबाई और चौड़ाई माप कर परिमाप ज्ञात कीजिए।

18
सममिति

हमारे आसपास बहुत सी आकृतियाँ हैं। हम फूलों को देखते हैं, सुन्दर चित्रों, इमारतों और अन्य चीज़ों को देखते हैं। इन सभी में हमें सुडौलपन व एक प्रकार की तारतम्यता दिखती है। इनमें से कई आकृतियाँ संतुलित अनुपात में हैं। कई ऐसी भी हैं जो कई जगहों में एक सी दिखती हैं। कई ऐसी भी है जो अपने आप में दो एक जैसी आकृतियों से मिल कर बनी दिखती हैं। ये सब आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।

दिन–प्रतिदिन हर जगह जब हम ऐसी आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हों तब हम कहते हैं, ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।



चित्र 1

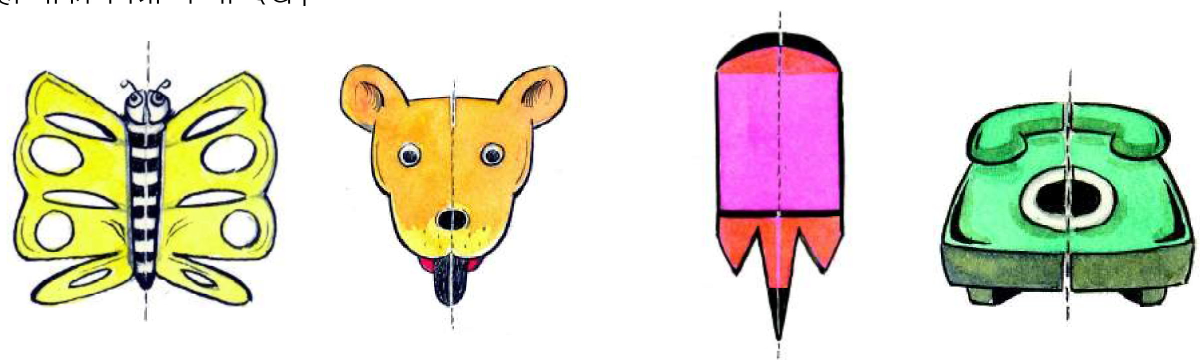
ये सब आकृतियाँ सुन्दर लगती हैं। इनकी बनावट में संतुलित अनुपात है और सममिति है।

क्रियाकलाप 1

सममिति अक्ष

दी गई आकृतियों को देखें। यदि हम इनमें से किसी एक आकृति को इस तरह मोड़ पाएं कि इसका आधा बायाँ भाग, आधे दायें भाग से अथवा आधा ऊपर का भाग, नीचे के आधा भाग से पूर्णतया मिलता जुलता हो, तब हम कहेंगे कि आकृति में सममिति की रेखा है। ऐसे में दोनों आधे भाग एक दूसरे के प्रतिबिम्ब हैं।

चित्र 2 (क) देखें। टूटी रेखा पर मोड़ने पर चित्र के दोनों हिस्से ठीक एक दूसरे को ढक लेंगे। ऐसा ही बाकी चित्रों में भी देखें।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 2

यदि हम मोड़ने वाली रेखा पर एक समतल दर्पण रख दें तो भी सममित आकृतियों में आकृति के एक भाग का प्रतिबिम्ब दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़क लेगा। इन चित्रों में मोड़ (वास्तविक या काल्पनिक रेखा) बनाएं व एक दर्पण लेकर सभी चित्रों में टूटी लाइन पर रखकर देखें।

क्या दर्पण में दिखी आकृति चित्र के बाकी हिस्से के समान ही थी? यह दर्पण रेखा, आकृति की सममिति की रेखा (या सममिति अक्ष) कहलाती है।

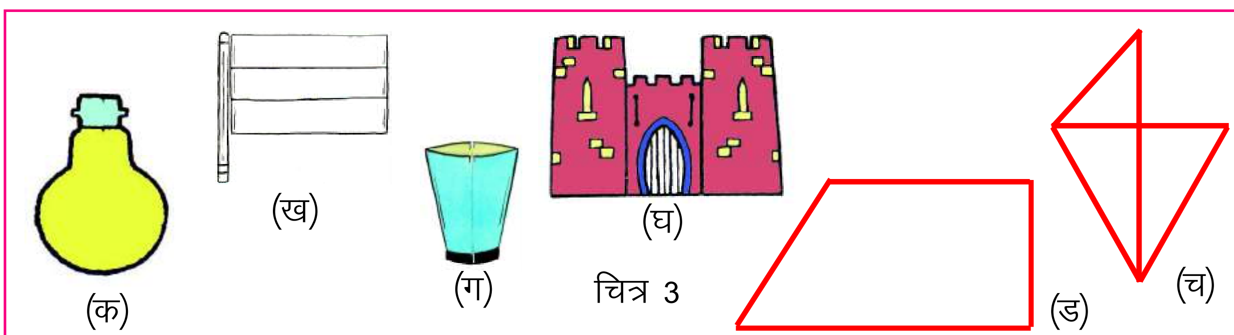
रोहन का कहना है कि ऊपर जो भी आकृतियाँ बने हैं, वे सभी सममित आकृतियाँ हैं। क्या आप इससे सहमत है? क्यों?

आप भी पाँच सममित आकृतियाँ बनाइये और उनके सममिति अक्ष खींचिये।

क्रियाकलाप 2

सममित आकृतियाँ पहचानियें

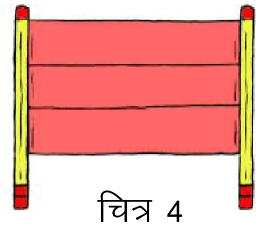
नीचे दी आकृतियों में से कौन–कौन सी आकृतियाँ सममित है?



चित्र 3

सममित आकृतियों को आपने कैसे पहचाना?

अब उनके सममिति अक्ष भी बनाएं। क्या जो आकृतियाँ सममित नहीं है उनमें आप कुछ जोड़ कर सममित आकृतियाँ बना सकते हैं? कोई एक आकृति लेकर सोचो।



चित्र 4

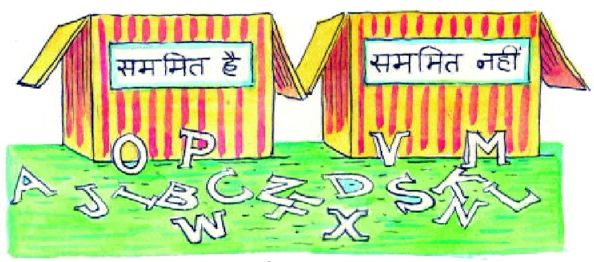
सममित आकृतियों में आकृति का आधा भाग सममित अक्ष पर दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढँक लेता है।

आकृति क्रमांक 3 (ख) सममित आकृति नहीं है किन्तु उसमें यदि एक और खम्भा जोड़ दिया जाए तो फिर नई आकृति सममित होगी। इसका सममिति अक्ष कहाँ है? बाकी आकृतियाँ जो सममित नहीं है उन्हें भी इसी प्रकार सममित बनाएं।

क्रियाकलाप 3

कौन से अक्षर सममित हैं ?

आप मोटे कागज़ के टुकड़े में से A,B,C,D ..... Y, Z के रूप काटिए। दो डिब्बे लेकर एक पर सममित है एवं दूसरे पर सममित नहीं हैं, की पर्ची चिपका दें।



चित्र 5

अब A,B,C,D.... को एक–एक करके देखिए। पता करें कि क्या उस अक्षर का आधा भाग सममित अक्ष पर शेष आधे भाग को पूरी तरह ढक लेता है या नहीं?

जिस अक्षर में दोनों भाग एक दूसरे को ढक लेते हैं, उसे किस डिब्बे में डालेंगे?

सममित वाले डिब्बे में कौन–कौन से अक्षर आए?

किसमें ज्यादा अक्षर हैं?

यही अभ्यास क,ख,ग,..... ह अक्षर काट कर भी करो। कौन से अक्षर सममित मिले?

क्रियाकलाप 4

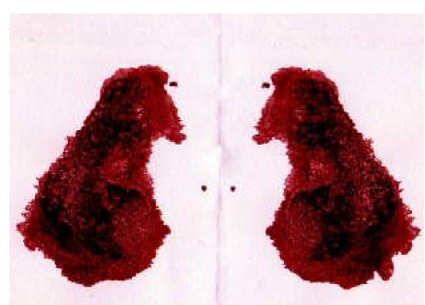
ऐसी भी सममिति :

एक कागज़ लो एवं उसे दो समान भागों में मोड़िये। एक आधे भाग पर स्याही या रंग की कुछ बूंदे डालिए। दूसरे भाग को मोड़ कर पहले भाग पर रखकर दबाइए। आप क्या देखते हैं?

क्या प्राप्त आकृति सममित है? यदि हाँ तो इसकी सममिति रेखा कहाँ है।

क्या ऐसी कोई अन्य रेखा भी है, जहाँ से मोड़ने पर दो समान भाग प्राप्त हो सकते हो?

ऐसे ही कुछ और प्रतिरूपों को बनाने का प्रयास कीजिए।

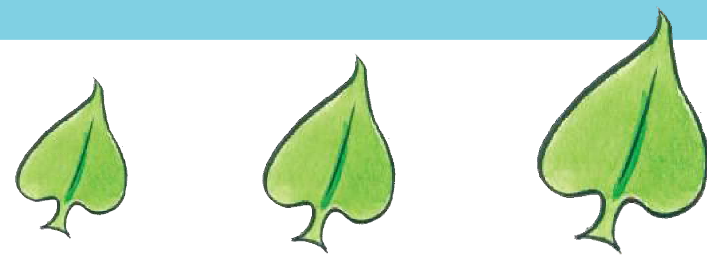


चित्र 6

आप अपनी कक्षा में उपलब्ध वस्तुओं को देखें। उनमें सममित आकृति वाली वस्तुओं की सूची बनाइए, जैसे श्याम पट्ट, मेज की ऊपरी सतह, आपकी कॉपी आदि–आदि। क्या पंखे के पंख की आकृति भी सममित है? चर्चा करके अपनी सूची गुरूजी को दिखाए। प्रत्येक सममित वस्तु का चित्र बनाकर उसमें सममिति रेखा भी खीचिए।

क्रियाकलाप 5

अब इन चित्रों को देखिए –



(क) (ख) (ग)

चित्र 7

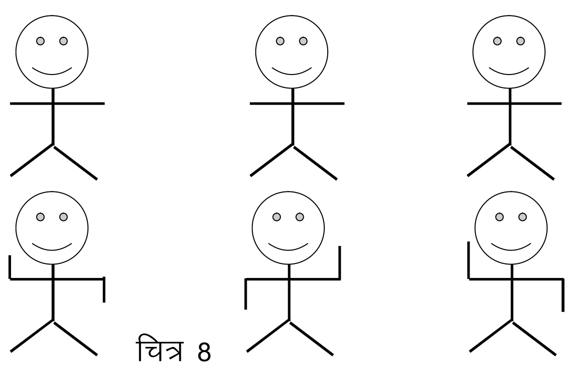
क्या ये सममित हैं?

आपने अपने घर की दीवार या गाँव के अन्य घरों की दीवार में बने हुए चित्र देखें हैं। अपनी कॉपी में भी ऐसे ही चित्र बनाइए।

क्या वे चित्र सममित होते हैं? उनके सममिति अक्ष बनाएं।

क्रियाकलाप 6

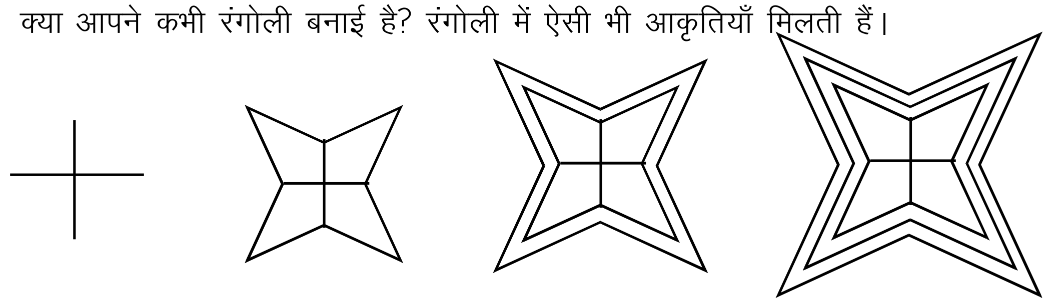
सममिति पहचानिए :



चित्र 8

इनमें से कौन से चित्र सममित है? जो सममित नहीं है उन्हें सममित में बदल कर बनाओ।

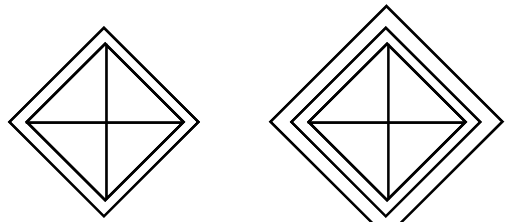
क्या आपने कभी रंगोली बनाई है? रंगोली में ऐसी भी आकृतियाँ मिलती हैं।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 9

इनमें अलग–अलग घेरों में अलग–अलग तरह से रंग भरे जा सकते हैं।



(क) (ख)

चित्र 10

रंग भरने पर यह सुन्दर लगती हैं। क्या इनमें भी कोई सममिति अक्ष हैं? हरेक आकृति में देखें। क्या किसी आकृति में एक से अधिक सममिति अक्ष हैं?

क्रियाकलाप 7

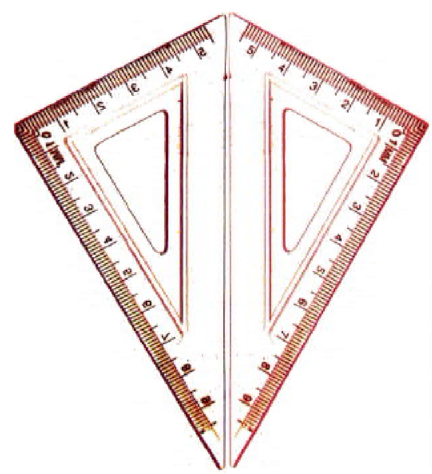
आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वायर में से एक के कोणों की माप 90^o, 60^o और 30^o है। ऐसे ही दो समान सेट स्क्वायर लीजिए।

इन्हें आपस में मिलाकर रखिए और एक पतंग जैसी बनाइए। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इस आकृति में कितनी सममिति रेखाएँ हैं?

इसी प्रकार अब दूसरे प्रकार के दो सेट स्क्वायर (कोणों की माप 90^o, 45^o और 45^o) लीजिए और पहले की तरह साथ–साथ जोड़ कर रखिए।

कैसी आकृति बनी?

इसमें कितनी सममिति रेखाएँ हैं?



चित्र 11

ऐसी और आकृतियाँ सोचो जिनमें एक से अधिक सममिति रेखाएँ हों।

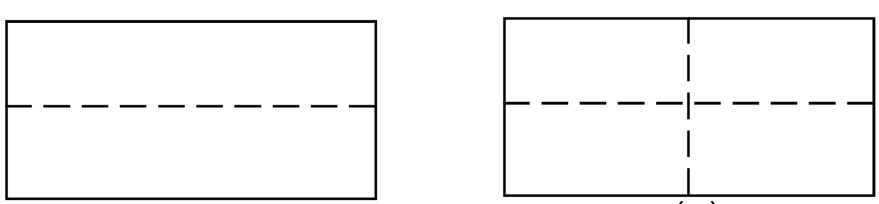
क्रियाकलाप 8

आयत और सममिति

एक पोस्टकार्ड लीजिए। उसे लम्बाई की ओर से मोड़िए (चित्र 12 क), जिससे कि एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढँक ले। क्या यह मोड़ एक सममिति की रेखा है?

अपने उत्तर का कारण बताओ।

इसे खोलिए और पुनः एक बार चौड़ाई की ओर से समान तरीके से मोड़िए (चित्र 12 ख)।



(क) चित्र 12 (ख)

क्या यह दूसरा मोड़ भी सममिति की रेखा है?

क्या आपको लगता है इसमें सममिति की दो ही रेखाएँ हैं?

ऊपर सेट–स्क्वायर से बने वर्ग के बारे में फिर से सोचो। इसमें सममिति की कितनी रेखाएं हैं।

क्रियाकलाप 9

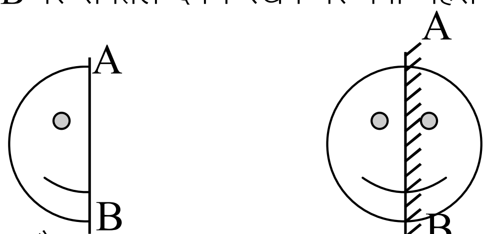
दर्पण और सममिति

नीचे एक छाते का चित्र 13 (क) है। चित्र 13 (ख) में छतरी के आधे हिस्से को समतल दर्पण के सामने खड़ा दिखाया गया है। दर्पण के चमकदार हिस्से की ओर से सामने का आधा हिस्सा और उसके प्रतिबिंब को ध्यान से देखें। क्या छतरी का चित्र पूरा प्रतीत होता हैं ?

चित्र 13

क्रियाकलाप 10

चित्र में आधा चेहरा है। रेखा A B पर समतल दर्पण रखने पर क्या चेहरा पूर्ण प्रतीत होता है?



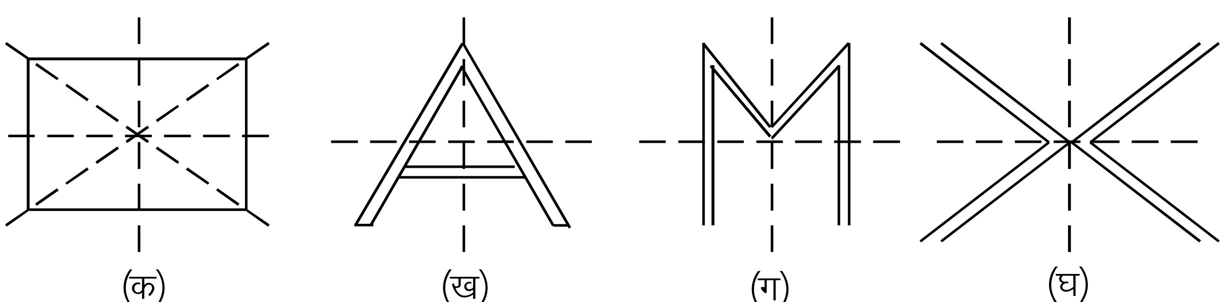
AB पूर्ण आकृति का सममिति अक्ष है।

चित्र 14

क्रियाकलाप 11

ऐसी कौन–कौन सी आकृतियाँ हैं जिनमें सममिति अक्ष पर समतल दर्पण रखने पर दोनों तरफ के हिस्से प्रतिबिंबित होते है ?

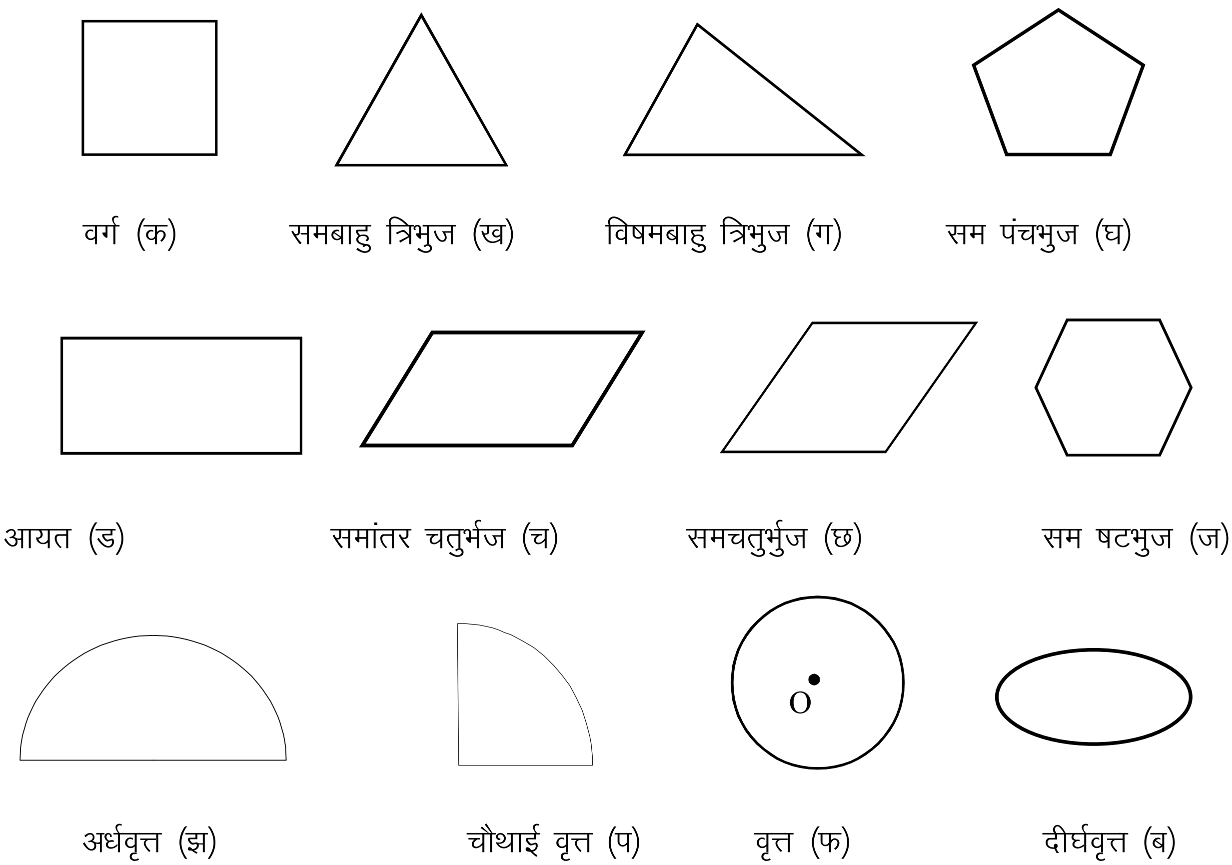
इन आकृतियों को देखिए तथा टूटी रेखाओं पर समतल दर्पण की ऐसी स्थिति का पता लगाइए जहाँ रखने पर प्रतिबिंब आकृति और वास्तविक आकृति एक जैसी हैं।



चित्र 15

प्रश्नावली 18.1

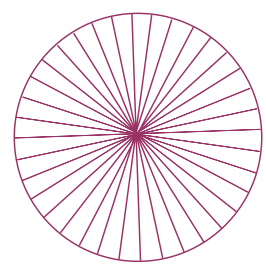
निम्न आकृतियों में कौन–कौन सी सममित हैं? इनमें सममिति अक्ष ढूंढ़िए। सममित आकृति में सममिति अक्षों की संख्या लिखें व सममिति अक्ष दर्शाएं।



चित्र 16

वृत्त में सममिति अक्षों की संख्या कितनी है?

वृत्त अपने प्रत्येक व्यास के सापेक्ष सममित है। अर्थात् किसी भी व्यास पर से काटने पर दोनों हिस्से बराबर होते हैं।

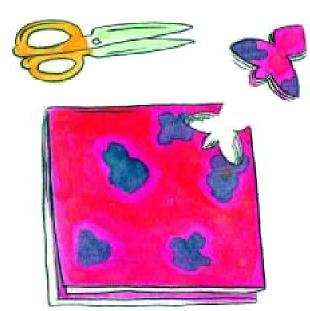


चित्र 17

क्रियाकलाप 12

एक वर्गाकार कागज़ लो। इसे एक बार ऊपर से नीचे एवं पुनः एक बार बायें से दायें मोड़िए। अब दी गई आकृति के अनुसार डिज़ाइन बनाइए। जैसा कि दिखाया गया है। जो आकृति बनाई गई है उस पर से काटिए और मोड़ खोल कर कागज़ को फैलाएं।

इनमें कितनी सममिति रेखाएँ हैं?



चित्र 18

क्रियाकलाप 13

सममित रेखाएँ

तीन बॉक्स लो। तीनों पर कागज़ की चिट चस्पा कर दो। पहले बॉक्स पर एक सममिति रेखा, दूसरे पर दो सममिति रेखाएँ एवं अन्य पर तीन या तीन से अधिक रेखायें लिखा हुआ हो।

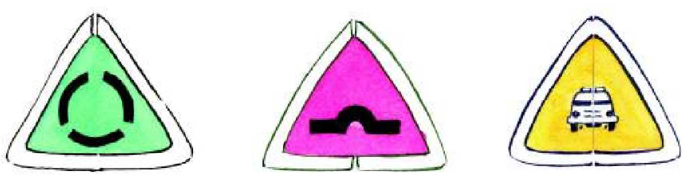
आप अपने A,B,C,... Y,Z के टुकड़ों को देखें एवं मालूम करें कि इनमें कितनी सममिति रेखाएँ हैं। जिन A,B,C,D.... में एक सममिति रेखा है उसे एक के बॉक्स में, जिनमें दो सममिति रेखाएँ हैं उन्हें दो के बॉक्स में एवं जिनमें तीन या अधिक सममिति रेखाएँ हैं उन्हें उस बॉक्स में डालें। अपने साथियों से चर्चा करें।

क्या अब आप बता सकते हैं कि सबसे ज्यादा सममिति रेखाएँ अंग्रेजी के किस अक्षर में हैं? ऐसे और भी चित्रों व आकृतियों को इसी प्रकार सममिति अक्ष के आधार पर छांटिएं।

चित्र 19

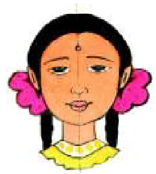
सममिति और कहाँ–कहाँ

1. बस में सफर करते वक्त रोड साइन (मार्ग सूचक) संकेत या चिह्न को देखते हैं। इन रोड साइन में से वे जिनमें सममिति की रेखाएँ होती है इन्हें पहचानो एवं अपनी कॉपी में लिखो।

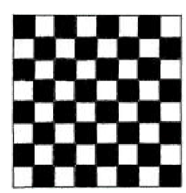


(i) (ii) (iii)

2. पेड़ों/पत्तियों/डंठल को देखों क्या इनमें सममिति की रेखाएँ होती हैं?

3.  क्या दिये गये चित्र में सममिति की रेखा है?

4. क्या ताश के पत्तों में भी सममिति की रेखाएँ हैं ? किस पत्ते में कितनी सममिति रेखा है, एक है, दो हैं, तीन हैं या अधिक हैं, बताइए।

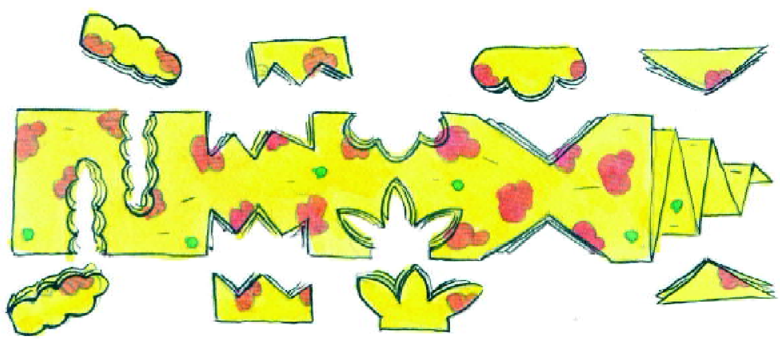


5. खेलों के मैदानों एवं बोर्ड में भी सममिति की रेखाएं होती हैं। आप ऐसे मैदानों एवं बोर्ड की सूची बनाएं एवं अध्यापक को बताएं।

6. सभी प्रकार के वाहनों में भी सममिति होती है। जैसे बस ट्रक।

कागज़ों द्वारा बनावट

एक आयताकार रंगीन कागज़ लो, इसे कई बार मोड़िए एवं इसे चित्र में दी गई आकृति के अनुसार काट लो, अब खोल कर देखो।



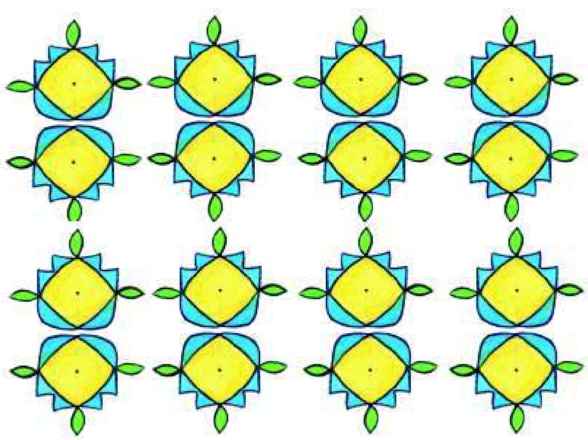
चित्र 20

इसको अपनी कॉपी पर रखकर इसमें विभिन्न रंग भर कर देखो। क्या इन चित्रों में सममिति दिखाई देती है?

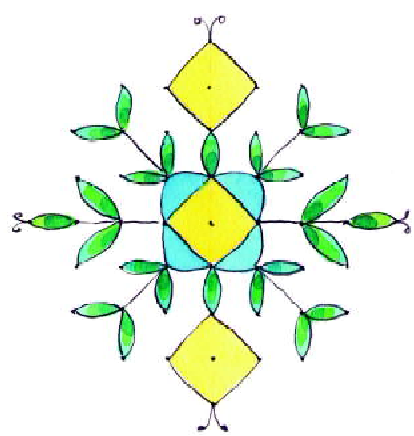
रंगोली

क्या आपने कभी त्यौहारों के अवसर पर घर पर कभी रंगोली बनाई है?

क्या इनमें सममिति का प्रयोग होते देखा है? इस प्रकार के विभिन्न रंगोली पैटर्न को कागज़ पर उतार कर एक एलबम बनाएं।



चित्र 21



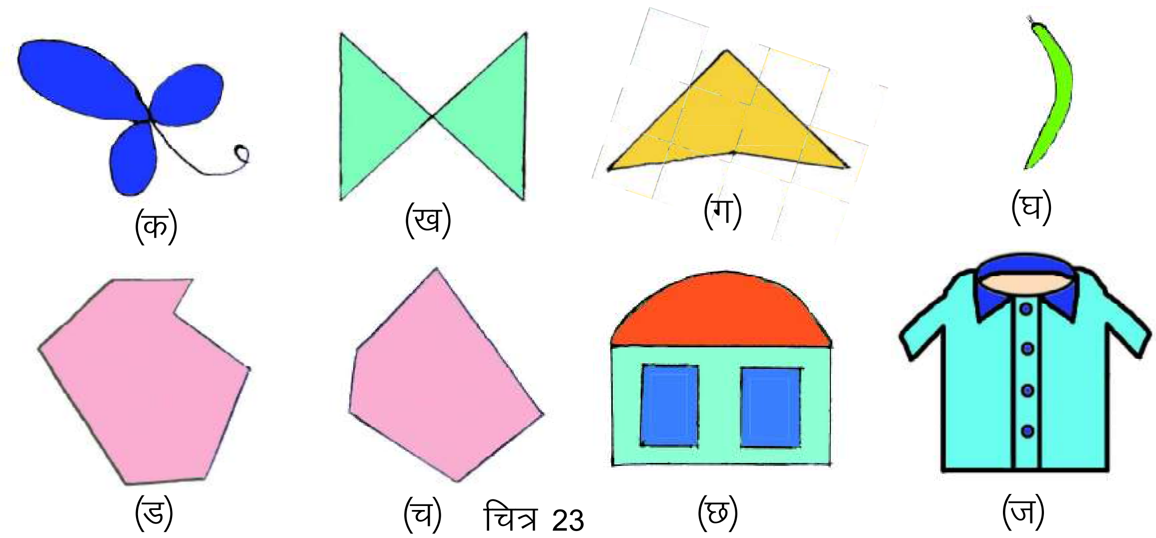
चित्र 22

मेंहदी

घरों में महिलाओं को मेंहदी लगाते हुए देखा है। क्या मेंहदी में भी सममिति होती हैं। अपनी कक्षा की लड़कियों के साथ चर्चा करो।

प्रश्नावली 18.2

प्र.1. नीचे दी गई आकृतियों में पता लगाइए कि कौन सी सममित है एवं कौन सी असममित है।



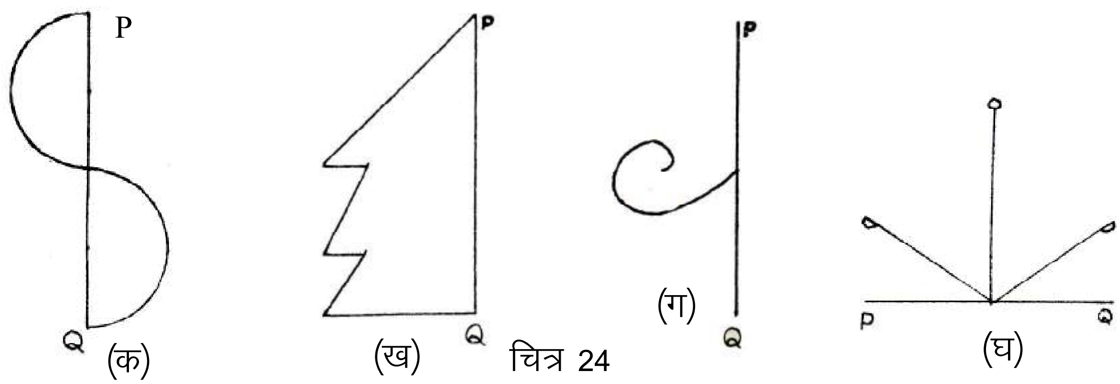
चित्र 23

प्र.2. अपने आसपास में स्थित 5 असममित आकृतियों के नाम लिखो जो इस पुस्तक में नहीं आई हों।

प्र.3. 90^o का कोण बनाइए और उस पर सममिति रेखा खींचिए।

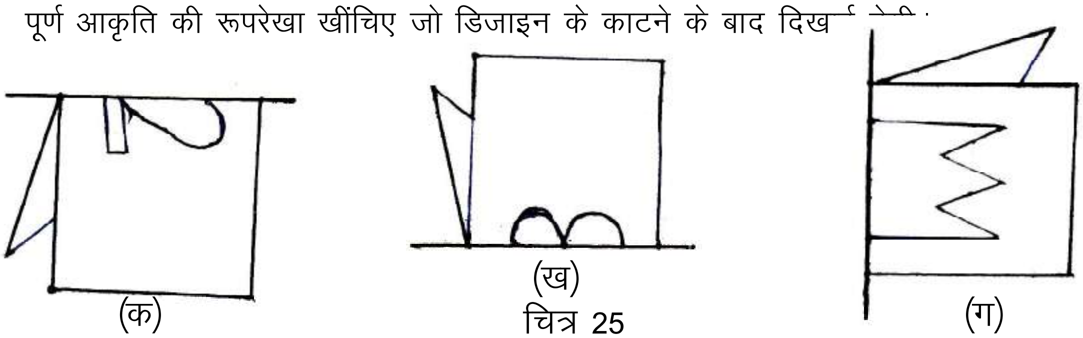
प्र.4. 6 cm का एक रेखाखण्ड़ खींचिए और उसका सममिति अक्ष बनाइए।

प्र.5. नीचे दी गई आकृतियाँ अधूरी है जिनका सममिति अक्ष PQ है। इन्हें पूरी कीजिए।



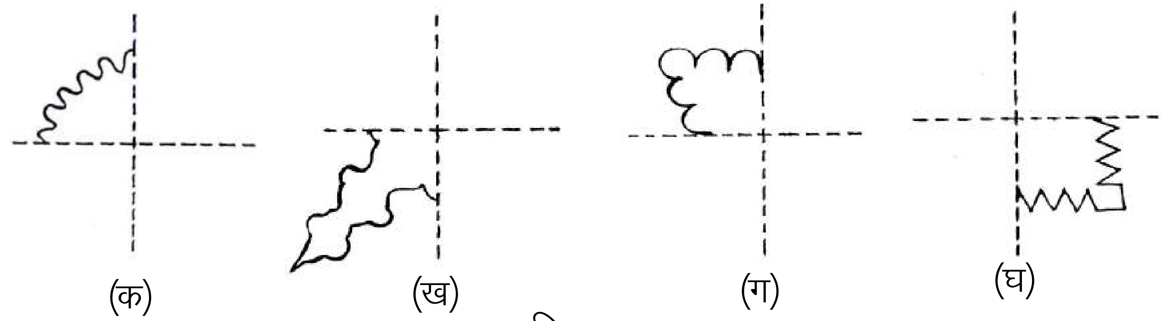
चित्र 24

प्र.6. नीचे कुछ मुड़ी हुई शीट की आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिजाइन के काटने के बाद दिख[illegible]



चित्र 25

प्र.7. नीचे दी गई आकृतियों को एक चार तह वाले वर्गांकित कागज़ पर बनाते तो कैसी दिखती? सोच कर वैसी ही आकृति अपनी कॉपी में बनाओ। यदि नहीं सोच पाते तो कागज़ काट कर पता लगाओ।



चित्र 26

प्र.8. 1 से 100 तक की संख्याओं में से सममित संख्याएँ कौन–कौन सी है? पता लगाओ एवं अपनी कॉपी में लिखो।

त्रिविमीय आकृतियाँ

3HR88A

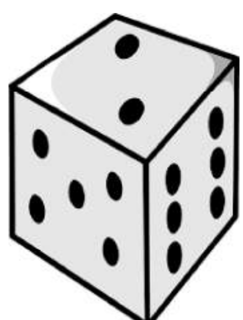
हम अपने दैनिक जीवन में कुछ ऐसी ठोस वस्तुओं को देखते हैं जिनका आकार सपाट नही होता है।

केन : बेलनाकार

पुस्तकः घनाभ का आकार

आइसक्रीमः शंकु का आकार

गेंदः गोलाकार

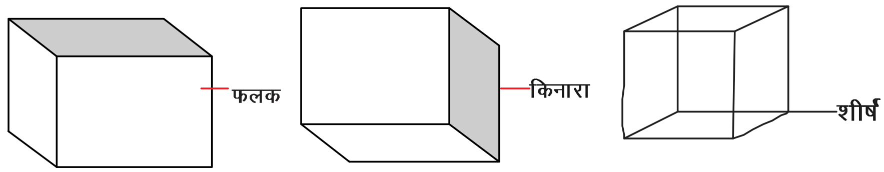


पासाःघन का आकार

चित्र 27

फलक किनारे और शीर्ष

त्रिविमीय आकारों में हम उनके फलकों, किनारों और भीर्षों को सरलता से पहचान सकते हैं।



चित्र 28

उदाहरण के लिए, एक घन को लीजिए। घनाभ की प्रत्येक उपरी सपाट (आयताकार) सतह एक फलक है। इसके दो संलग्न फलक एक रेखाखण्ड में मिलते हैं जो घनाभ का किनारा कहलाता है। घनाभ के तीन संलग्न किनारे एक बिन्दु पर मिलते हैं, जिसे घनाभ का भीर्ष कहते हैं।

इस प्रकार एक घनाभ में 6 आयताकार फलक, 12 किनारे और 8 भीर्श होते हैं।

अभ्यास

1. उचित संबंध जोड़िए

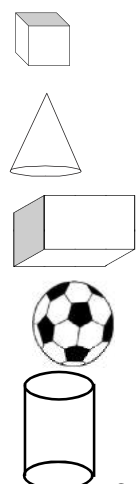
(i) भांकु (i)

(ii) गोला (ii)

(iii) बेलन (iii)

(iv) घन (iv)

(v) घनाभ (v)



चित्र 29

2. निम्न वस्तुएँ किस आकार की हैं –

(i) चॉक का डिब्बा

(ii) टेनिस बॉल

(iii) पाइप

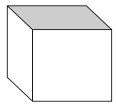
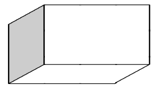
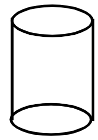
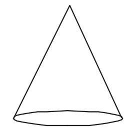
(iv) जोकर की टोपी

(v) पासा

3. किन्ही चार वस्तुओं के नाम बताइए जो एक घनाभ आकार से मिलती जुलती हों।

4. किन्ही ऐसी तीन वस्तुओं के नाम बताइये जो बेलन के आकार से मिलती जुलती हों।

5. नीचे दी गयी गई सारणी में त्रिविमीय आकृतियों के फलक, किनारे व शीर्षों की संख्या लिखिए –

आकृति						
फलक	समतल					
	वक्र					
किनारे	सीधे					
	वक्र					
शीर्ष						

हमने सीखा

1. हम फूलों को देखते हैं, सुन्दर चित्रों को, इमारतों को और अन्य चीज़ों को देखते हैं। ये सब आकृतियाँ सममित आकृतियाँ है।
2. सममितता से वस्तुएँ सुन्दर लगती हैं।
3. दिन प्रतिदिन हर जगह जब हम ऐसी आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हों तब हम कहते हैं, ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।
4. हमारे आस–पास कई प्रकार की त्रिविमीय आकृतियाँ होती हैं। इनमें से कुछ घन, घनाभ, गोला, बेलन और शंकु हैं।

19
सांख्यिकी

भूमिका

शाला में कक्षा सजावट का कार्यक्रम आयोजित होना था। कक्षा 7वीं के विद्यार्थी यह तय नहीं कर पा रहे थे कि कक्षा के अंदर दीवारों की पुताई किस रंग से कराई जाये। उनकी शाला में हल्का पीला, गुलाबी, हल्का हरा एवं आसमानी मात्र चार रंग ही उपलब्ध थे। कक्षा नायक के कहने पर सभी विद्यार्थियों ने अपना नाम एवं पसंदीदा रंग एक पन्ने पर लिख दिया। जो निम्नांकित सारणी में प्रदर्शित है:—

सारणी—1

क्र.	विद्यार्थी का नाम	रंग
1.	राजेश	हल्का पीला
2.	रूचि	गुलाबी
3.	मीना	हल्का पीला
4.	रहीम	आसमानी
5.	हमीदा	हल्का पीला
6.	जुली	हल्का हरा
7.	अनिता	हल्का हरा
8.	फ्रांसिस	आसमानी

क्र.	विद्यार्थी का नाम	रंग
9.	केशव	हल्का पीला
10.	बसंत	आसमानी
11.	शेखर	हल्का हरा
12.	रीता	गुलाबी
13.	सुनील	हल्का पीला
14.	अनामिका	हल्का पीला
15.	बलवन्त	गुलाबी
16.	रघु	हल्का पीला

इन सूचनाओं के आधार पर क्या आप यह निर्णय ले सकते हैं कि दीवार पर कौन—से रंग से पुताई करानी है? तभी रीता को एक तरीका सूझा। उसने बोर्ड पर रंगों के नाम लिखे तथा प्रत्येक रंग को पसंद करने वाले विद्यार्थी को अपनी पसन्द के रंग के सामने अपना नाम लिखने को कहा।

अब सूची इस प्रकार बनी:—

चित्र—1

सारणी—2

रंग	विद्यार्थियों के नाम
गुलाबी	रूचि, रीता, बलवन्त
हल्का पीला	राजेश, मीना, हमीदा, केशव, सुनील, अनामिका, रघु
हल्का हरा	जूली, अनिता, शेखर
आसमानी	रहीम, बसंत, फ्रांसिस

चूंकि हल्का पीला रंग पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या अधिक थी, इस कारण इसी रंग से पुताई कराने का निर्णय लिया गया।

दैनिक जीवन में क्या आपने निर्णय लेने के लिए कभी यह तरीका अपनाया है?

आप, अपनी कक्षा में त्रैमासिक परीक्षा में प्रत्येक विषय में 34% से अधिक और 34% से कम अंक प्राप्त करने वालों की सूची बनाइए। क्या इस आधार पर आप बता सकते हैं कि किस विषय का परीक्षाफल सबसे अच्छा है और किस विषय का सबसे खराब?

आँकड़े (Data)

कोई भी निर्णय लेते समय आपको कुछ न कुछ जानकारियों की आवश्यकता होती है। इन आवश्यक संख्यात्मक जानकारियों को ही आँकड़े कहते हैं।

माना, आपको अपनी कक्षा के विद्यार्थियों के पढ़ने के लिए एक समाचार पत्र खरीदना है। आप कौनसा समाचार पत्र खरीदेंगे, जिसे अधिक से अधिक विद्यार्थी पढ़ना पसंद करें? यह निर्णय आप कैसे लेंगे?

सभी विद्यार्थियों ने एक सारणी तैयार की जिसमें पसंद के समाचार पत्र के सामने सभी ने अपना–अपना नाम लिखा। फिर जिस समाचार पत्र को पसन्द करने वालों की संख्या सर्वाधिक है, उसे ही खरीदने का निर्णय लिया गया।

जूली सारणियों को बार–बार देख रही थी और सोच रही थी कि इन सारणियों में नाम लिखने का कोई मतलब ही नहीं है। हमें तो मात्र यह गिनना है कि चाही गई जानकारी के पक्ष में कितने छात्र हैं। नाम न लिखकर उसके स्थान पर किसी संकेत का भी उपयोग किया जा सकता है।

क्या आप जूली की सोच से सहमत हैं? क्या ऐसा कोई तरीका सोच सकते हैं जिसमें नाम के स्थान पर केवल संकेत चिन्ह का उपयोग करके ही गणना की जा सके?

बसंत ने एक सुझाव दिया कि क्यों न प्रत्येक नाम के स्थान पर एक–एक खड़ी लकीर का उपयोग किया जाए और अन्त में सभी खड़ी लकीरों की गिनती कर ली जाए। सभी विद्यार्थी इससे सहमत थे।

अनिता ने कहा ''चलो हम खेलों की लोकप्रियता का क्रम पता लगावें।'' अनिता ने बोर्ड में 4 खेलों के नाम लिखे और अपने–अपने पसंद के खेल के सामने प्रत्येक विद्यार्थी को एक खड़ी लकीर खींचने को कहा। सारणी कुछ इस प्रकार बनीः–

सारणी–3

खेल का नाम	टेली चिन्ह (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबाल	|||	3
क्रिकेट	|||||||	7
वॉलीबाल			1
कबड्डी	|||||	5

परन्तु इस प्रकार की सारणी में ज्यादा खड़ी लकीरों को गिनने में असुविधा होती है, इसलिए जिस प्रकार से आपने छोटी कक्षाओं में गिनती सीखते वक्त दस–दस के बण्डल बनाए थे उसी प्रकार यदि पाँच–पाँच के बण्डल बना लें तो आपको गिनने में आसानी रहेगी। हम चार खड़ी लकीर खींचकर पाँचवे के लिए इन चारों लकीरों को काटते हुए एक तिरछी लकीर (दर्शाये अनुसार) खींचते हैं। जैसे 5 के लिए–

5 के लिए : 𝍸

19 के लिए : 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

इससे गिनने में सरलता होती है।

उपरोक्त तालिका के अनुसार क्रिकेट पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 𝍸 || अर्थात् 7 हैं। इसे ही **बारम्बारता** (Frequency) कहते हैं। प्रत्येक मान के लिए एक खड़ी लकीर खींचने की प्रक्रिया को **टैली** (Tally) लगाना कहते हैं तथा इस विधि को **टैली विधि** (Tally method) द्वारा **आंकड़ों का संकलन** (Collection of Data) कहते हैं एवं इससे प्राप्त सारणी को **बारम्बारता सारणी** (Frequency Table) कहते हैं।

आप भी इस विधि का उपयोग कर अपने आसपास के आंकड़ों को एकत्रित करने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण–1 एक गांव के 20 घरों में बच्चों की संख्या इस प्रकार हैः–

सारणी–4

मकान नं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
बच्चों की संख्या	2	3	2	1	3	2	0	1	3	4	2	2	1	1
मकान नं.	15	16	17	18	19	20								
बच्चों की संख्या	2	4	3	2	0	3								

इन आँकड़ों के द्वारा टैली विधि का प्रयोग कर उपयुक्त बारम्बारता सारणी का निर्माण कीजिए?

हल प्रत्येक घर में बच्चों की संख्या, उनके लिए टेली चिन्ह तथा बारम्बारता के लिए कॉलम बनाते हैं तथा प्रत्येक मान के लिए उसके सामने टैली चिन्ह लगाते हैं। पाँचवे चिन्ह को सुविधा के लिए प्रारंभिक चार चिन्हों को काटते हुए तिरछा लगाते हैं।

सारणी – 5

बच्चों की संख्या	टैली चिन्ह	बारम्बारता
0	||	2
1	||||	4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸	5
4	||	2

इस सारणी में आपने बच्चों की संख्या के लिए केवल शून्य से चार तक के अंकों को ही क्यों लिखा है ?

यदि इसे 1 से शुरू किया जाता तो क्या होता ?

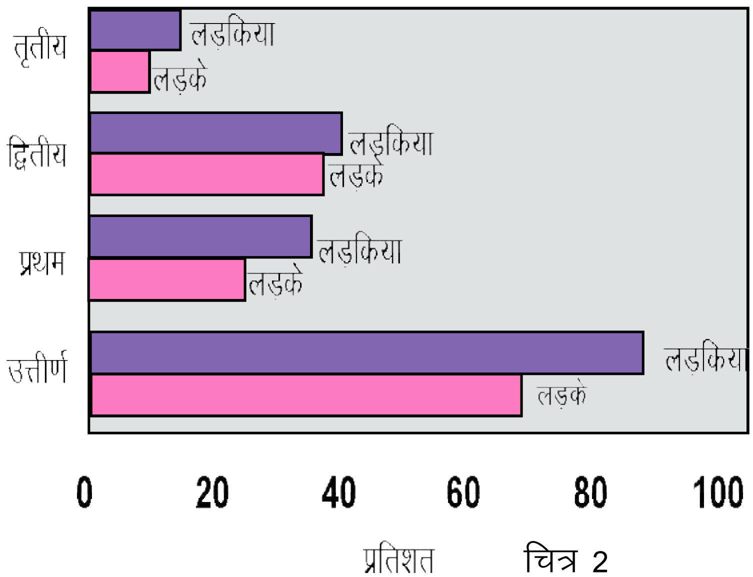
यदि सारणी में बच्चों की संख्या 0,1,2,3,4,5,6,7 तक लिखते तो क्या होता ?

आँकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन

राजेश आज का समाचार पत्र पढ़ रहा था, जिसमें लिखा था:–

''लड़कियों ने लड़कों से बाजी मारी''

इस वर्ष की 8वीं बोर्ड की परीक्षा में लड़कियाँ सभी क्षेत्रों में लड़कों से आगे रहीं।

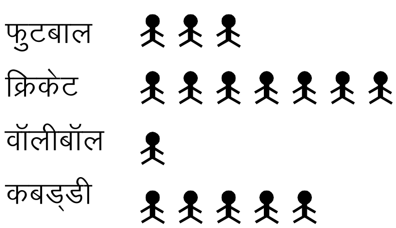


चित्र 2

राजेश चित्रों को देखकर सोचने लगा– ''यह तो आंकड़ों के प्रदर्शन का अच्छा तरीका है। इन चित्रों को देखकर बड़े आसानी से यह समझा जा सकता है कि छात्राओं का परीक्षाफल छात्रों से सभी प्रकार से अच्छा है।'' ऐसा ही कुछ हम जब प्रार्थना में लाइन बनाकर खड़े होते हैं, तब देखने को मिलता है। लाइनों की लम्बाई की सहायता से कक्षा के छात्र संख्या की तुलना की जा सकती है? राजेश ने अपने साथियों से कहा– ''क्यों न सारणी–3 में एकत्रित आँकड़ों की मदद से खेलों की लोकप्रियता को चित्र रूप में प्रदर्शित किया जाए?''

सारणी–3 में कुल विद्यार्थियों की संख्या 16 थी। इनमें से फुटबाल का खेल पसंद करने वाले 3, क्रिकेट पसंद करने वाले 7, वॉलीबॉल पसंद करने वाले 1, कबड्डी पसंद करने वाले 5, विद्यार्थी थे। इन्हें चित्र रूप में किस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है?

जूली ने कहा, ''यदि हम प्रत्येक छात्र के लिए एक चित्र बनाएं, तो फुटबाल के आगे 3 चित्र, क्रिकेट के आगे 7 चित्र, वॉलीबॉल के आगे 1 और कबड्डी के आगे 5 चित्र बनेंगे–



चित्र–3

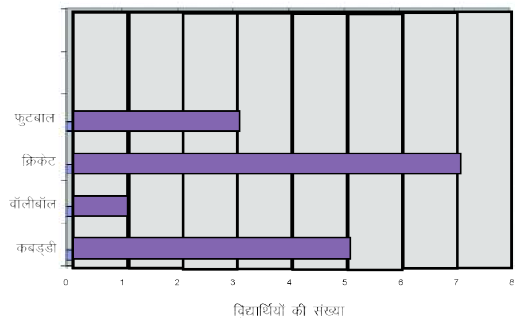
इसी प्रकार चित्रों के द्वारा प्रदर्शन को **चित्र आरेख (pictograph)** कहा जाता है। यह आसानी से समझने योग्य होता है एवं चित्रों को देखकर निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

3I9ZBK

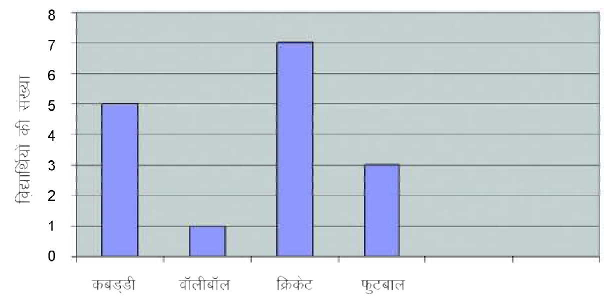
दण्ड आरेख

चित्र आरेख की विधि से प्रदर्शन में हमें बहुत से चित्रों को बनाने की आवश्यकता होती है जो कभी–कभी अव्यावहारिक हो जाती है। किन्तु यदि हम प्रत्येक छात्र के लिए 1 सेमी लम्बाई लेकर यदि दण्ड बनाएं तब आंकड़ों के प्रदर्शन में और सरलता होगी तथा इन दण्डों को क्षैतिज अथवा उर्ध्वाधर दोनों तरीकों से बनाया जा सकता है।

क्षैतिज दण्ड आरेख
(Horizontal Bar Graph)



उर्ध्वाधर दण्ड आरेख
(Vertical Bar Graph)



चित्र 4

इन आरेखों में दण्डों की चौड़ाई समान रखी गयी है। इन दण्ड आलेखों को देखकर इन खेलों की लोकप्रियता का अन्दाजा आसानी से लगाया जा सकता है। उक्त निरूपण में विद्यार्थियों की संख्या कम थी अतः प्रत्येक विद्यार्थी के लिए दण्ड की लम्बाई 1 सेमी लेकर उसे कॉपी में आसानी से दर्शाया जा सकता है।

किन्तु यदि विद्यार्थियों की संख्या अधिक हो तो ऐसी स्थिति में उसे कॉपी पर कैसे दर्शाएंगे?

ऐसी स्थिति में दण्डों की ऊँचाई का निर्धारण करना मुख्य समस्या है।

आइए, इस पर विचार करें—

राजेश जिस मोहल्ले में रहता है वहां 750 पुरुष, 660 महिलाएं एवं 140 बच्चे हैं। हमें इसे आरेख के द्वारा प्रदर्शित करना है।

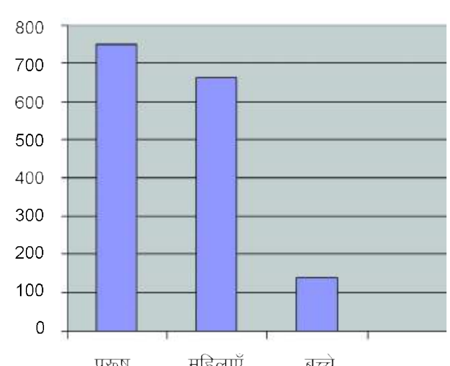
इन आँकड़ों के दण्ड के रूप में प्रदर्शित करने के लिए दण्डों की ऊँचाई क्या होनी चाहिए?

यदि हम प्रत्येक व्यक्ति के लिए 1 सेमी की ऊँचाई लें तो पुरुषों के लिए 750 सेमी, महिलाओं के लिए 660 सेमी एवं बच्चों के लिए 140 सेमी का दण्ड बनाना होगा। किन्तु इसे अपने कॉपी में बनाना संभव नहीं है।

यदि हम प्रति 10 व्यक्तियों के लिए 1 सेमी. का दण्ड लें तब ये दण्ड क्रमशः 75 सेमी, 66 सेमी एवं 14 सेमी के दण्ड बनेंगे, किन्तु इसे भी हम अपनी कॉपी में प्रदर्शित नहीं कर सकेंगे।

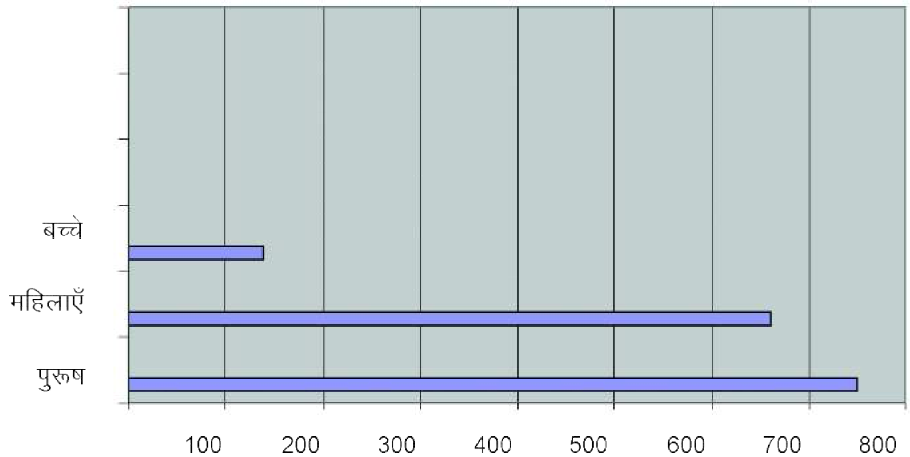
यदि हम प्रति 100 व्यक्तियों के लिए 1 सेमी का दण्ड लें तब दण्ड की लम्बाईयाँ क्रमशः 7.5 सेमी, 6.6 सेमी एवं 1.4 सेमी होगी। जो कि आसानी से हमारी कॉपी में बनाई जा सकती है। तो आइए, देखते हैं कि इसे किस प्रकार से हम एक दण्ड चित्र के माध्यम से दर्शाएंगे—

उर्ध्वाधर दण्ड आरेख



चित्र 5

इन आंकड़ों को प्रदर्शित करने में दण्ड को उर्ध्वाधर बनाया गया है इसे **उर्ध्वाधर दण्ड आरेख (Vertical Bar Graph)** कहते हैं। दण्डों को हम क्षैतिज रूप में भी प्रदर्शित कर सकते हैं।



चित्र 6

यदि हम दण्डों को क्षैतिज रूप में प्रदर्शित करें तो उसे **क्षैतिज दण्ड आरेख (Horizontal Bar Graph)** कहेंगे। (चित्र–6)

अनिता के मन में एक प्रश्न उठ रहा था कि दण्ड आरेख की क्या उपयोगिता है? क्योंकि बारम्बारता सारणी के अवलोकन से भी हमें वही जानकारी मिल जाती है जो दण्ड आरेख से मिलती है।

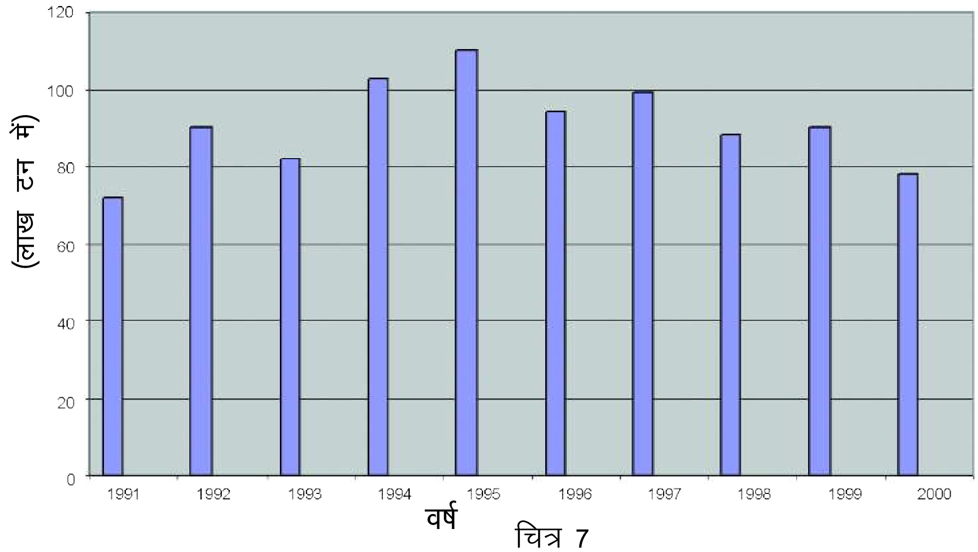
आइये अनिता के इस प्रश्न का हल ढूंढें।

नीचे वर्ष 1991 से वर्ष 2000 तक गेहूँ के उत्पादन के आंकड़े दिए गए हैंः–

सारणी–6

वर्ष	गेहूँ का उत्पादन (लाख टन में)
1991	72
1992	90
1993	82
1994	103
1995	110
1996	94
1997	99
1998	88
1999	90
2000	78

इन आंकड़ों को दण्ड–आरेख द्वारा इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :–



चित्र 7

इस दण्ड आलेख को देखकर क्या आप बता सकते हैं कि किस वर्ष में गेहूँ का उत्पादन सबसे कम और किस वर्ष में सबसे अधिक हुआ? इससे और क्या–क्या जानकारियां आपको मिल सकती है? लिखिए।

आप पायेंगे कि वर्ष 1995 में सबसे अधिक तथा वर्ष 1991 में सबसे कम गेहूँ का उत्पादन हुआ है। यह भी पाते हें कि 1992 एवं 1999 दोनों वर्षों में गेहूं उत्पादन एक समान हुआ है। क्या बारम्बारता सारणी को केवल देखकर ऐसा ही निष्कर्ष निकाल पायेंगे?

यह स्पष्ट है कि सिर्फ आंकड़ों को देखकर किसी निष्कर्ष में पहुंचना कठिन होता है। इसके लिए सभी दिये गए आंकड़ों का सूक्ष्म अध्ययन जरूरी है जबकि दण्ड आरेख को केवल देखकर ही कह सकते हैं कि किस वर्ष उत्पादन सबसे अधिक और किस वर्ष सबसे कम हुआ है। अतः दण्ड आरेख का मुख्य लाभ यह है कि इसे एक बार देखकर ही समझ में आ जाता है तथा अन्य आँकड़ों से तुलना बड़ी आसानी से की जा सकता है।

प्रश्नावली 19

3IIVD8

1. किसी कक्षा में 20 छात्रों ने गणित की जाँच परीक्षा में 5 में से निम्न अंक प्राप्त किए–

   3 2 5 4 0 1 2 3 5 2 2 3 5
   4 1 0 3 2 3 4

   इन प्राप्तांकों को टैली विधि से सारणीबद्ध कीजिए।

2. 1 अप्रेल 2005 से 15 अप्रेल 2005 तक किसी शहर का अधिकतम दैनिक तापमान डिग्री सेल्सियस में इस प्रकार रहा 37.8, 37.8, 37.9, 38.0, 37.9, 37.9, 38.0, 38.1, 38.1, 38.2, 38.3, 38.3, 38.2, 38.1, 38.2

   प्रत्येक दिन के तापमान को टैली विधि से सारणीबद्ध कीजिए।

3. नीचे दिए गए सारणी में कक्षा 6वीं के छात्रों के परीक्षाफल श्रेणीवार दिए गए हैं। इनका अवलोकन कर, दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:–

श्रेणी	छात्रों की संख्या
प्रथम श्रेणी	12
द्वितीय श्रेणी	14
तृतीय श्रेणी	10
अनुत्तीर्ण	04

(क) किस श्रेणी के छात्रों की संख्या सबसे अधिक है?

(ख) परीक्षा में बैठे छात्रों की कुल संख्या कितनी थी?

(ग) कुल कितने छात्र उत्तीर्ण हुए?

4. नीचे दी गई सारणी में किसी कंपनी की 5 वर्षो की वार्षिक आय दी गई है। आंकड़ों को दंड आरेख द्वारा दर्शाइए–

वर्ष	1996	1997	1998	1999	2000
वार्षिक आय (100000 रुपयों में)	10	20	15	12	22

5. निम्न सारणी अलग–अलग टी.वी. सेट के खरीददारों की सूचना देती है। इन आंकड़ों को दंड आरेख का रूप दीजिए।

ब्रांड	% खरीददार
p	25
q	30
r	15
S	10
T	10
अन्य	10

6. निम्न सारणी एक विद्यालय की वार्षिक परीक्षा में छात्रों के औसत प्राप्तांकों को दर्शाती है। आंकड़ों को दंड आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

विषय	छात्रों के औसत प्राप्तांक (%)
अंग्रेजी	55
गणित	60
विज्ञान	65
सामाजिक विज्ञान	90
हिन्दी	70

हमने सीखा

1. चित्र संकेतों द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों का ग्राफीय निरूपण आंकड़ों का चित्र आरेख कहलाता है।
2. दण्ड आरेख बराबर दूरी पर लिए गए एक समान चौड़ाई वाले क्षैतिज या उर्ध्वाधर दण्डों (आयतों) द्वारा संख्यात्मक आंकड़ों का चित्रीय निरूपण होता है।
3. दण्ड आरेख को देखकर बहुत से निष्कर्ष आसानी से निकाले जा सकते हैं।

उत्तर माला

प्रश्नावली 1

1. 1
2. 41600,
3. (i) > (ii) > (iii) = (iv) <
   (v) > (vi) >
4. 20 5. 9899

प्रश्नावली 2.1

1. 1 2. 0 3. 4 4. 46,47,48 5. 41806
6. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य
   (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) असत्य
7. (i) 24 (ii) 78 (iii) 519 (iv) 1099 (v) 52331
8. (i) 26 (ii) 521 (iii) 1101 (iv) 52333
9. 100000 10. 99999 11. 1
12. 18, 252,421,497, 557, 731
13. 617, 458, 225, 69, 59
14. (ii)
15. 6387

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 391 (ii) 40 (iii) 40 (iv) 39 (v) C
2. (i) (23589+411) + 1248=25248 (ii) (32+68)+(2546+544)= 3190
   (iii) (247+153)+376 = 776 (iv) (143+857)+456= 1456
   (v) (32958+12042)+5000= 50000
3. 0 4. दो पूर्ण संख्याओं का योग सदैव पूर्ण संख्या होता है।
5. (i) 4559 (ii) 0 (iii)

$$\begin{array}{r} 8\,7\,6 \\ -\ \boxed{2}\,3\,\boxed{9} \\ \hline 6\,\boxed{3}\,7 \end{array}$$

6. 1 7. 0 8. 1216 ÷76 = 16 9. 32
10. 20310
11. (i) भागफल = 215, शेषफल = 32 (ii) भागफल = 14, शेषफल = 735
    (iii) भागफल = 309, शेषफल = 145

12. (i) $$\begin{array}{r} 7\,3\,5 \\ -\;4\,2\,\boxed{9} \\ \hline \boxed{3}\boxed{0}6 \end{array}$$ (ii) $$\begin{array}{r} 4\,9\,3\,1 \\ -\;\boxed{3}\boxed{0}7\,8 \\ \hline 1\,8\boxed{5}\boxed{3} \end{array}$$

13. 390 रू	14. 3414 रू	15. 31825	16. 9
17. 780			

प्रश्नावली 3

1.	(i) सत्य	(ii) असत्य	(iii) सत्य	(iv) सत्य	(v) असत्य
2.	(i)	3. (i) AB व CD	(ii) RS व PQ	(iii) SR व TU	4. C एवं E

प्रश्नावली 4

1.	(i)	-2	(ii)	2	(iii)	-9
	(iv)	8	(v)	-4	(vi)	3
	(vii)	-5	(viii)	8		
2.	(i)	1028	(ii)	-266	(iii)	36
	(iv)	154				
3.	(i)	=	(ii)	<	(iii)	<
	(iv)	=	(v)	=	(vi)	>
4.	(i)	30	(ii)	90	(iii)	24
	(iv)	24	(v)	0	(vi)	42
5.	(i)	>	(ii)	=	(iii)	<
	(iv)	=	(v)	=	(vi)	<
	(vii)	=				
6.	13				7.	100
8.	(i)	15	(ii)	-10	(iii)	-4
	(iv)	अपरिभाषित	(v)	-14	(vi)	-19
9.	(i)	4	(ii)	-2	(iii)	-1
	(iv)	-12				
10.	(i)	-17	(ii)	23	(iii)	-68,
	(iv)	75				
11.	(i)	18	(ii)	-26	(iii)	-161
	(iv)	79				

प्रश्नावली 5

5. 44 सेमी

6.	(i)	त्रिज्या	(ii)	केन्द्र	(iii)	व्यास
	(iv)	केन्द्र	(v)	समान	(vi)	त्रिज्या
	(vii)	जीवा				

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 12 (ii) 18 (iii) 10 (iv) 27
2. (i) 36 (ii) 150 (iii) 24 (iv) 15
3. 1
4. (i) 361 / 64, (ii) 201 / 275 5. 17
6. 11 7. 44 8. 17, 113 ढेर 9. 30

प्रश्नावली 6.2

मौखिक

1. 4 2. 338 3. 24 4. 7 से बड़ा 5. नहीं

लिखित

1.. i. 28 ii. 324 iii. 180 iv. 2520
2. i. 56 ii. 1904 iii. 360 iv. 16560
3. 10 4. 15 बार 5. 23 जनवरी
6. 72 7. 221 8. 20 दिन
9. नहीं क्योंकि म. स. सदैव ल. स. का एक गुणनखण्ड होता है।
10. 4.15 सांय

प्रश्नावली 7

1. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य
   (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य
   (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) सत्य
2. (i) $\frac{8}{9} \rangle \frac{7}{8} \rangle \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{7}{6} > \frac{3}{4} > \frac{8}{12} > \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$
   (iii) $8 > .8 > .08 > .008 > .0008$ (iv) $.01 > .00992 > .0099 > .0012$
3. (i) $\frac{1}{3} < \frac{9}{24} < \frac{5}{8} < \frac{5}{6} < \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{1}{8} < \frac{2}{15} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
4. (i) $5\frac{19}{40}$ (ii) 8.0001 (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1 (v) $11\frac{5}{12}$
   (vi) $1\frac{5}{14}$
5. (i) 24 (ii) 77 (iii) 36 (iv) 8
6. उचित $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{3}{7}$ अनुचित $\frac{17}{4}$, $\frac{16}{13}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 8.1

1. (i) $\angle AOB$ (ii) $\angle LMN$ (iii) $\angle PQR$ (iv) $\angle STU$ (v) $\angle$ अ ब स
4. $180°$

प्रश्नावली 8.2

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) सत्य (vi) सत्य (vii) सत्य
2. (i) अधिक कोण (ii) न्यून कोण (iii) समकोण (iv) सरल कोण
   (v) न्यूनकोण (vi)अधिक कोण (vii) न्यून कोण (viii) न्यून कोण
   (ix) न्यून कोण (x) न्यून कोण

प्रश्नावली 9.1

1. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य
   (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) सत्य
2. 40^0 3. 45^0 4. 60^0 5. हाँ
6. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हां (iv) नहीं (v) हां (vi) नहीं

प्रश्नावली 9.2

उत्तर (1) (i) समचतुर्भुज (ii) 90^o (iii) बराबर
(iv) समलम्ब (v) विषमबाहु चतुर्भुज

उत्तर (2) (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य
(iv) असत्य (v) सत्य

प्रश्नावली 10.1

2. (i) 1 : 4 (ii) 1 : 4 (iii) 3 : 20 (iv) 3 : 100
   (v) 21 : 200 (vi) 40 : 1 (vii) 4 : 25
3. (i) 3 : 8 (ii) 1 : 3 (iii) 3 : 5 (iv) 9 : 19
   (v) 6 : 17 (vi) 2 : 3 (vii) 5 : 7 (viii) 1 : 3
   (ix) 2 : 9 (x) 1 : 20
4. (i) 1 : 16 (ii) 16 : 1
5. 7 : 6
6. (i) 4 : 3 (ii) 4 : 7 7. 3 : 2
8. 8 तथा 12 9. 5 : 4 10. 4 : 5
11 रत्ना को 10 आम,शीला को 8 आम
12. (i) 5 : 2 (ii) 4 : 1 (iii) 7 : 1 (iv) 7 : 4 (v) 5 : 3
13. राम को 9000 रूपये तथा श्याम को 12000 रूपये
14. AB = 28 किमी. BC = 12 किमी 15. (i) प्रत्येक को 3 (ii) 2, 1, 3

प्रश्नावली 10.2

1. 38.50 रू. 2. (i) 8 घंटे में (ii) 357.50 किलोमीटर
3. (i) 10 किलोग्राम (ii) 48 किताब 4. 1800 रूपये 5. 640 रूपये
6.

किताबों की संख्या	मूल्य (रुपये में)
50	2500
75	3750
2	100
60	3000

प्रश्नावली 11

1 (i) a=2r (ii) $A = l \times b$ (iii) $s = c + p$ (iv) $a + b$ (v) $x - 7$ (vi) $A = p + c$
2 (i) सही (ii) सही (iii) गलत (iv) सही (v) सही

प्रश्नावली 12

1. **एक पदी**–vi, viii **द्विपदी**–i, ii, iii, iv, v, vii, ix **एवं** x
2. $5xy$ एवं $\frac{9}{4}xy$, $7c$ एवं $2c$, $\frac{4}{5}yz$ एवं $\frac{11}{13}yz$

$7bc$ एवं bc, $\frac{2}{7}z$ एवं $7z$, $37pqr$ एवं $9pqr$

प्रश्नावली 13

1. (i) 150% (ii) 250% (iii) 20% (iv) 15%
2. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{20}$ (iii) $\frac{1}{50}$ (iv) $\frac{1}{10}$
3. 216 रुपये 4. 72 किलोग्राम 5. 50% 6. 9 रुपये
7. 3 टॉफियाँ 8. 65% 9. 100%
10. पुरुष 28,800 महिलाएँ 25,200 11. 1% की कमी
12. 10% 13. 800 14. 20% 15. उत्तीर्ण 90%, अनुत्तीर्ण 10%
16. साक्षर 1440, निरक्षर 160

प्रश्नावली 14.1

1. i, व iv, vi, vii, viii,ix व x का समीकरण है।
2. i. बायाँ $= x - 5$ दायाँ $= 9$ ii. बायाँ $= 2x - 3$ दायाँ $= 7$

iii. बायाँ = 2y दायाँ = 9 – y iv. बायाँ = 2y दायाँ = 6

v. बायाँ = 15 दायाँ = 2a + 5

3. i. $2y - 3 = 17$ ii. $\frac{y}{6} = 7$ iii. $y - 5 = 8$

iv. $3y + 11 = 44$ v. $7y - 5 = 9$

4. (i) संख्या में से 6 कम करने पर 9 प्राप्त होता है।

(ii) संख्या के 7 गुने में से 14 कम करने पर भून्य प्राप्त होता है।

(iii) संख्या के दुगुने में तीन का भाग देने पर 6 प्राप्त होता है। अथवा किसी संख्या का दो तिहाई 6 प्राप्त होता है।

(iv) संख्या के आधे में 5 जोड़ने से 10 प्राप्त होता है।

(v) 38 में से किसी संख्या का दुगुना कम करने पर 4 प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 14.2

1. (i) $x = -1$ (ii) $z = 8$ (iii) $y = 3$ (iv) $y = 3$ (v) $x = 6$

(vi) $z = \frac{7}{3}$

2. (i) $x = 2$ (ii) $z = 4$ (iii) $x = 75$ (iv) $y = 1$

3. 5

4. 25

5. 40

6. 20

7. 13 मीटर

प्रश्नावली 16

(1) बन्द आकृतियां –

(i) (ii) (iii) (iv) (v)

(vi) (ix) (xi) (xii)

(2) (a) 12 वर्ग सेमी (b) 10 वर्ग सेमी

(c) 72 वर्ग मीटर (d) 135 वर्ग मीटर

(3) (a) 36 वर्ग सेमी (b) 144 वर्ग सेमी

(c) 169 वर्ग सेमी (d) 12.25 वर्ग सेमी

(4) (a) 20 वर्ग सेमी (b) 24 वर्ग सेमी

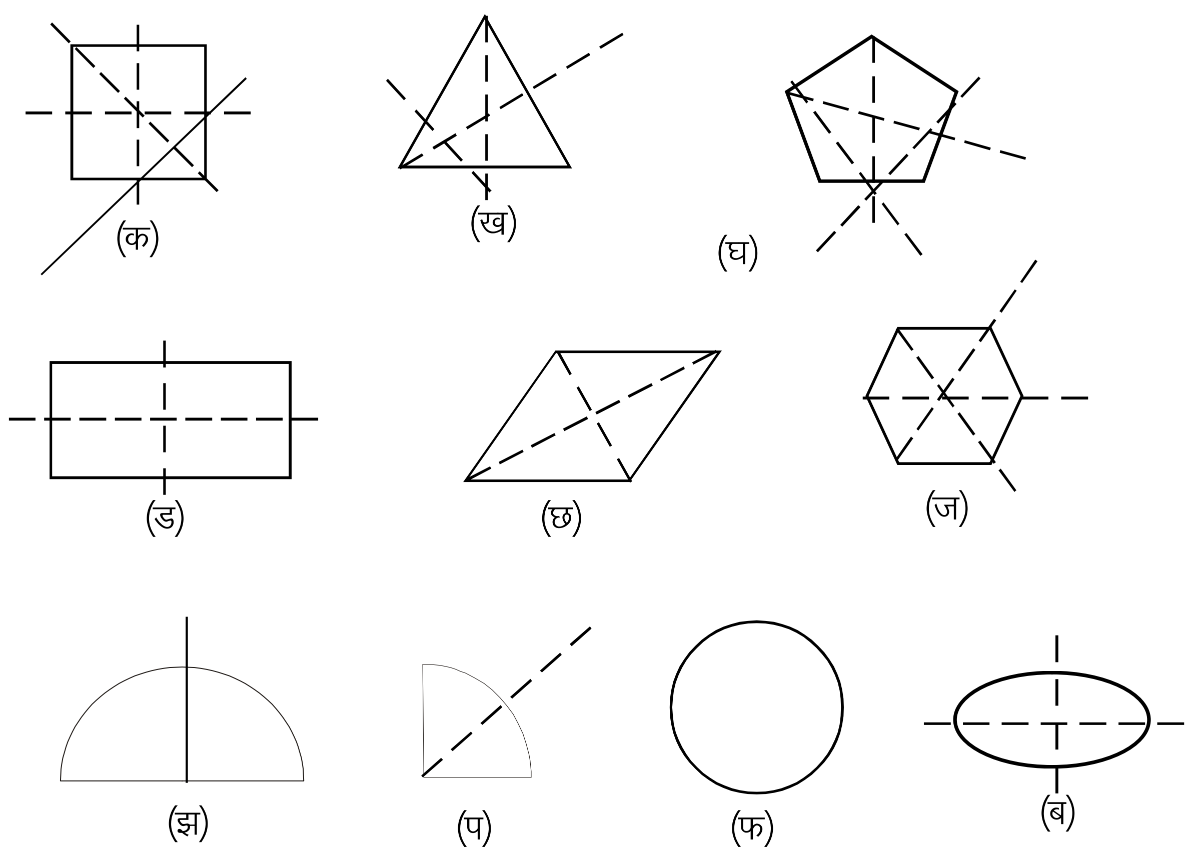
(5) 36 वर्ग सेमी

प्रश्नावली 17

1)	(i) 12 सेमी	(ii) 12 सेमी	(iv) 6 सेमी	
	(vi) 8 सेमी	(vii) 8 सेमी	(viii) 15 सेमी	
2)	(i) 42 सेमी	(ii) 36 सेमी		
	(iii) 12 सेमी	(iv) 3 मीटर या 300 सेमी		
3)	(i) सत्य	(ii) असत्य	(iii) असत्य	(iv) सत्य
4)	(i) 60 सेमी			
5)	1.4 मीटर			
6)	(i) 8सेमी	(ii) 16सेमी	(iii) 32 सेमी	(iv) 24 सेमी
	(v) 20 सेमी	(vi) 13 सेमी	(vii) 18 सेमी	
7)	280 मीटर			

उत्तरमाला 18.1

1.



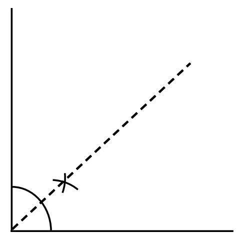
उत्तरमाला 18.2

प्र.1.

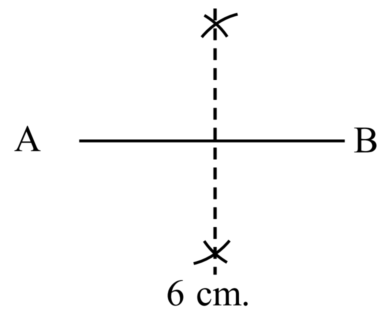
सममित	असममित
ख	क
ग	घ
छ	ङ
ज	च

प्र.2. स्वयं बताओ।

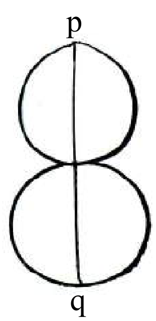
प्र.3.

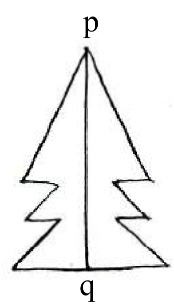


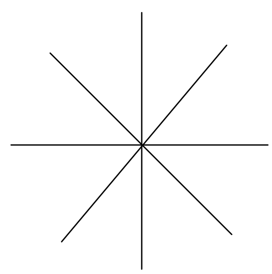
प्र.4.



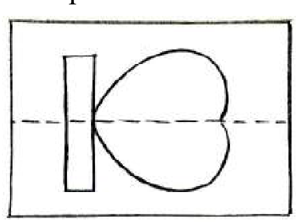
प्र.5.

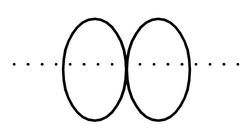


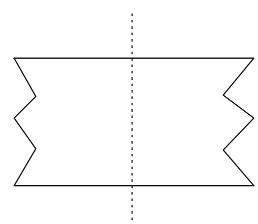




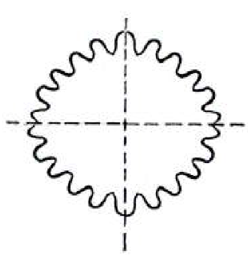
प्र.6.

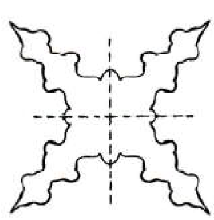
(क) 

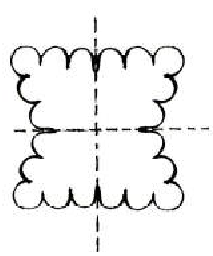
(ख) 

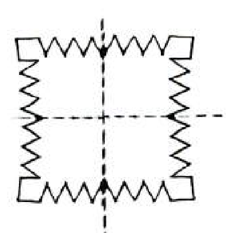
(ग) 

प्र.7.









प्र.8. 3, 8, 11, 13, 18, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 83, 38, 80,

उत्तरमाला 19

प्रश्न 1

अंक	टेली चिह्न	बारम्बारता
0	||	2
1	||	2
2	~~||||~~|	5
3	~~||||~~|	5
4	|||	3
5	|||	3

प्रश्न 2

तापमान	टेली चिह्न	बारम्बारता
37.8	||	2
37.9	|||	3
38.0	||	2
38.1	|||	3
38.2	|||	3
38.3	||	2

प्रश्न 3 (क) द्वितीय श्रेणी (ख) 40 (ग) 36

परिशिष्ट
वैदिक गणित की विधियाँ

3ISREV

आप पूर्णांक पाठ के अंतर्गत वैदिक गणित की विधियों से घटाना व गुणा करना सीखेंगे। इसे सीखने के पूर्व आपको वैदिक गणित की कुछ पूर्व अवधारणाओं को जानना आवश्यक है जिनकी चर्चा यहाँ की जा रही है –

अभी तक आपने जोड़ना, घटाना, गुणा एवं भाग करना सीख लिया है। इन संक्रियाओं को करने की कुछ सरल और मजेदार विधियाँ वैदिक गणित में भी हैं। यहाँ हम उन विधियों से आपका परिचय कराएँगे। इन विधियों के बारे में जानने के पहले आइए अंकों से परिचय कर लें –

अंक :– 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ये दस अंक हैं। इन्हीं अंकों का प्रयोग कर सभी संख्याएँ लिखी जाती हैं।

बीजांक :– वैदिक गणित में 1 से 9 तक के अंकों को बीजांक कहते हैं। किसी संख्या का बीजांक ज्ञात करने के लिए संख्या के अंकों का योग तब तक करते हैं, जब तक एक अंक की संख्या प्राप्त न हो जाए।

उदाहरण के लिए –

35 का बीजांक ज्ञात करने के लिए इसके अंकों को जोड़ेंगे।

$3 + 5 = 8$

अतः 35 का बीजांक 8 है।

इस प्रकार –

97 का बीजांक –

$9 + 7 = 16$ लेकिन 16 में 2 अंक हैं।

अतः इसके अंकों को भी जोड़ेंगे।

$1 + 6 = 7$

अतः 97 का बीजांक 7 है।

परम मित्र अंक :– जिन 2 अंकों का योग 10 होता है, वे आपस में (एक दूसरे के) परम मित्र कहलाते हैं।

जैसे : 1 + 9 = 10

अतः 1 का परम मित्र 9 है।

और 9 का परम मित्र 1 है।

आइए, अब थोड़ा अभ्यास करें।

अभ्यास

1. संख्याएँ लिखने के लिए कौन–कौन से अंकों का प्रयोग होता है?
2. नीचे लिखी संख्याओं के बीजांक बताइए –

(i) 12	(ii) 15	(iii) 17	(iv) 19
(v) 37	(vi) 44	(vii) 56	(viii) 67
(ix) 96	(x) 183		

3. इनके परम मित्र बताइए –

(i) 2	(ii) 3	(iii) 4	(iv) 5

एकाधिकेन पूर्वेण

एकाधिकेन पूर्वेण का मतलब है पहले की संख्या से एक अधिक

जैसे : 2 का एकाधिक है 3, इसी प्रकार 3 का एकाधिक है 4

क्या आप 1 से 9 तक प्रत्येक संख्या का एकाधिक बता सकते हैं?

एक न्यूनेन पूर्वेण

एक न्यूनेन पूर्वेण का अर्थ है पहले की संख्या से एक कम।

जैसे : 8 का एक न्यूनेन 7 है। इसी प्रकार 5 का एक न्यूनेन 4 है। अब आप 9 से 1 तक प्रत्येक संख्या का एक न्यूनेन बताइए।

वैदिक गणित की विधियों में अनेक स्थानों पर एकाधिकेन पूर्वेण और एक न्यूनेन पूर्वेण का उपयोग होता है।

अब बताइए

इन संख्याओं को दो बार एकाधिक करने पर कौन–कौन सी संख्याएँ प्राप्त होंगी?

(i) 22 (ii) 43 (iii) 30 (iv) 58

कभी–कभी संख्या का एक से अधिक बार एकाधिक अथवा एक न्यून करने की भी आवश्यकता होती है।

जैसे : 12 का एक बार एकाधिक करने पर 13, 13 से पुनः एकाधिक करने पर 14 अर्थात् 12 से दो बार एकाधिक करने पर संख्या 14 प्राप्त होती है।

आइए, अब 12 से ही दो बार एक न्यून करते हैं।

12 से एक बार एक न्यून करने से 11 मिला, 11 से एक बार एक न्यून करने पर 10 मिला, अर्थात 12 से दो बार एक न्यून करने पर संख्या 10 प्राप्त होती है।

इन संख्याओं को तीन बार एकाधिक करने पर कौन–कौन सी संख्याएँ प्राप्त होंगी?

(i) 23 (ii) 15 (iii) 36 (iv) 42

अपने मन से संख्याएँ लेकर उन संख्याओं का एकाधिक करने का अभ्यास कीजिए।

अब बताइए

नीचे लिखी संख्याओं को दो बार एक न्यून करने पर कौन–कौन सी संख्या प्राप्त होगी?

(i) 16 (ii) 30 (iii) 67 (iv) 75

इन्हीं संख्याओं को 3 एक बार न्यूनेन करने पर कौन–कौन सी संख्याएँ मिलेंगी?

अपने मन से कुछ संख्याएँ चुनकर दो एवं तीन बार एक न्यून करने का अभ्यास कीजिए।

परम मित्र की सहायता से जोड़ना

यदि किसी संख्या में 1, 2, 3 जोड़ना हो तो आवश्यकता के अनुसार एकाधिक कर जोड़ा जा सकता है।

परन्तु जब जोड़े जाने वाली दोनों संख्याएँ 5 से बड़ी हों तब परम मित्र की सहायता से जोड़ना आसान होता है।

आइए, इसका एक उदाहरण देखें –

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ हमें 9 और 7 को जोड़ना है। 9 का परम मित्र अंक 1 है,

अतः 7 से 1 लेकर 9 में मिला दिया।

अब 9 + 1 = 10

और 7 से 1 निकालने पर बचे 6

10 में 6 जोड़ने पर मिला 16

अर्थात्

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 7 \\ \hline 16 \end{array}$$

इसी प्रकार परम मित्र की सहायता से जोड़ने का अभ्यास कीजिए–

(i) 7 + 8 (ii) 8 + 6 (iii) 9 + 8 (iv) 6 + 9

इसी प्रकार 5 से बड़ी दो संख्याएँ लेकर उन्हें परम मित्र की सहायता से जोड़ने का अभ्यास कीजिए।

एकाधिक चिह्न (·) लगाकर जोड़ना।

आप हासिल लगाकर जोड़ने की विधि जानते हैं। आइए यहीं से शुरू करते हैं। एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 हल कीजिए –

$$\begin{array}{r} 5\ \ 4 \\ +1\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (1)\quad \\ 5\ \ 4 \\ +\ 1\ \ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

इकाई के अंकों को जोड़ने पर (4+8) 12 प्राप्त होता है।

इस योगफल की इकाई 2 को योगफल के रूप में लिखते हैं और हासिल 1 को दहाई के स्तम्भ में 5 के ऊपर लिखते हैं।

अब दहाई के स्तम्भ के सभी अंकों को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r} (1)\quad \\ 5\ \ 4 \\ +\ 1\ \ 8 \\ \hline 7\ \ 2 \end{array}$$

हासिल का 1+5 +1=7 इसे दहाई के योगफल के रूप में नीचे लिखते हैं योगफल 72 प्राप्त होता है।

यदि इकाई के अंकों के जोड़ से मिलने वाले
हासिल 1 को बिन्दु के रूप में दझाई के स्तम्भ में लगा लें तो भी योगफल वही प्राप्त होगा। एक बार फिर इसी जोड़ को देखें।

$$\begin{array}{r} 5\ \ 4 \\ +1\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

इकाई के 4 और 8 का जोड़ 12 मिला।

$$\begin{array}{r} 5\ \ 4 \\ +\dot{1}\ \ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

12 के 2 को योगफल के रूप में इकाई में लिखें और हासिल 1 को दहाई के 1 के ऊपर बिन्दु के रूप में अंकित करें। इस बिन्दु को ही एकाधिक चिह्न कहते हैं।

$$\begin{array}{r} 5\ \ 4 \\ +\dot{1}\ \ 8 \\ \hline 7\ \ 2 \end{array}$$

अब दहाई के अंको को जोड़ें 5 +(·) +1 = 7, { (·) को 1 गिनें।}

कुल योगफल 72 प्राप्त हुआ।

एक और उदाहरण देखें

उदाहरण 2 हल कीजिए –

$$\begin{array}{r} 4\ \ 6 \\ +2\ \ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\;\;6 \\ +\dot{2}\;\;4 \\ \hline 0 \end{array}$$

इकाई के 6 और 4 को जोड़ें 6+4=10 मिलेगा।

जोड़ 10 के 0 को योगफल के रूप में इकाई के स्तम्भ में लिखें।

हासिल 1 को एकाधिक (·) के रूप में 2 के ऊपर लगाएँ।

$$\begin{array}{r} 4\;\;6 \\ +\dot{2}\;\;4 \\ \hline 7\;\;0 \end{array}$$

अब दहाई का जोड़ करें। 4 +(·)+2=7

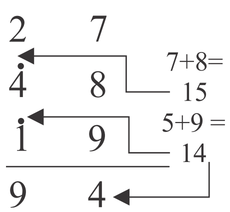
(·) को 1 गिनें।

कुल जोड़ 70 प्राप्त हुआ।

इस युक्ति से तब आसानी होती है जब संख्याएँ दो से अधिक हों।

उदाहरण 3 हल कीजिए –

$$\begin{array}{r} 2\;\;7 \\ 4\;\;8 \\ +1\;\;9 \\ \hline \end{array}$$



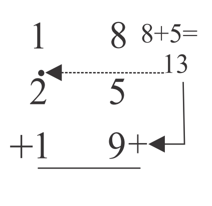
इकाई के 7 और 8 को जोड़ें। 15 मिलेगा।

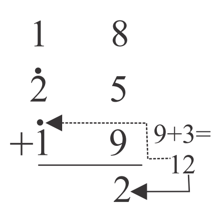
1 को एकाधिक चिह्न के रूप में 4 के ऊपर अंकित करें और 5 को 9 से जोड़ें। 14 मिलेगा। 14 के 1 को एकाधिक चिह्न के रूप में दहाई के 1 के ऊपर अंकित करें। 4 को योगफल के रूप में नीचे लिखें। अब दहाई के अंको को जोड़ें 2+(·)+4+(·)+1=9

उदाहरण 4 हल कीजिए –

$$\begin{array}{r} 1\;\;8 \\ 2\;\;5 \\ +1\;\;9 \\ \hline \end{array}$$

हल :–





$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ \dot{2} \quad 5 \\ +\dot{1} \quad 9 \\ \hline 6 \quad 2 \end{array} \qquad 1 + (\cdot) + 2 + (\cdot) + 1 = 6$$

3J2MGI

अभ्यास

एकाधिक चिह्न लगाकर योग करें–

1. $\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ +3 \quad 6 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 3 \quad 8 \\ +4 \quad 5 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 1 \quad 7 \\ +2 \quad 4 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ 1 \quad 7 \\ +2 \quad 8 \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \\ 2 \quad 8 \\ +1 \quad 9 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 2 \quad 8 \\ 1 \quad 7 \\ +3 \quad 6 \\ \hline \end{array}$

एकाधिक चिह्न (·) लगाकर घटाना –

घटाने के ऐसे सवाल जहाँ संख्याओं का पुनर्संयोजन (उधार लेने वाले प्रश्न) करना पड़ता है हम एकाधिक चिह्न लगाकर घटाते हैं। यहाँ हमें वैदिक गणित की एक और अवधारणा परममित्र का उपयोग करना होता है। (ऐसी दो संख्याएँ जिनका योग 10 होता हो एक दूसरे की परममित्र कहलाती हैं। जैसे 3 का परममित्र 7 है और 7 का परममित्र 3 क्योंकि 3+7=10, इसी तरह और 6 और 4 का परममित्र है। 5 स्वयं का परममित्र है।) आइए एक उदाहरण से घटाने की क्रिया समझते हैं।

उदाहरण 1 – हल करें $\begin{array}{r} 3 \quad 6 \\ -1 \quad 7 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 6^{+3} \\ -\dot{1} \quad 7 \\ \hline 9 \end{array}$$

6 से 7 को नहीं घटा सकते। 7 के परममित्र 3 को 6 से जोड़ें।

9 मिलेगा, इसे परिणाम के रूप में नीचे लिखें और 1 के ऊपर एकाधिक चिह्न (·) लगाएँ।

$$\begin{array}{r} 3 \quad 6 \\ -\dot{1} \quad 7 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

अब 3 में से (·) +1 याने 2 घटाएँ।

1 मिलेगा, इसे परिणाम के रूप में नीचे लिखें। हल 19 मिलेगा।

उदाहरण 2 हल कीजिए – $\begin{array}{r} 7 \quad 5 \\ -2 \quad 8 \end{array}$

7	5	+2
$-\dot{2}$	8	
	7	

5 में 8 नहीं घटा सकते। (8 के परममित्र 2 को 5 से जोड़ें, 7 मिलेगा।)

इसे परिणाम के रूप में नीचे लिखें।

2 के ऊपर एकाधिक चिह्न (·) लगाएँ।

7	5
$-\dot{2}$	8
4	7

7 में से (·)+2 याने 3 घटाएँ।

4 मिलेगा, इसे परिणाम के रूप में नीचे लिखें।

हल 47 मिलेगा।

3JBII6

अभ्यास

एकाधिक चिह्न लगाकर घटाएँ

1. $\begin{array}{r} 7\ 2 \\ -1\ 8 \end{array}$
2. $\begin{array}{r} 3\ 7 \\ -1\ 9 \end{array}$
3. $\begin{array}{r} 4\ 0 \\ -2\ 8 \end{array}$
4. $\begin{array}{r} 3\ 5 \\ -2\ 6 \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 4\ 6 \\ -2\ 8 \end{array}$
6. $\begin{array}{r} 6\ 8 \\ -3\ 9 \end{array}$

क्या आप जानते हैं इकबाल आपसे क्या कह रहा है?

इकबाल आपसे कह रहा है मैं कक्षा में प्रथम आया!

सांकेतिक भाषाः सामान्य परिचय

सांकेतिक भाषा का उपयोग श्रवण बाधित व्यक्ति द्वारा संप्रेषण हेतु किया जाता है। वाक् के अभाव में श्रवण बाधित सांकेतिक भाषा का उपयोग करते हैं। आमतौर पर लोगों की धारणा है कि सांकेतिक भाषा में व्याकरण का अभाव होता है परन्तु यह सही नहीं है, सांकेतिक भाषा में भी व्याकरण है। व्याकरण की दृष्टि से अमेरिकन सांकेतिक भाषा सबसे ज्यादा उन्नत है। अमेरिकन सांकेतिक भाषा फिंगर स्पेलिंग पर निर्भर है तथा वहां सिंगल हैण्डेड फिंगर स्पेलिंग का प्रयोग किया जाता है। इंडियन सांकेतिक भाषा में डबल हैंड़ेड फिंगर स्पेलिंग का प्रयोग किया जाता है। आइये अब हम डबल हैंड़ेड फिंगर स्पेलिंग जाने–

Copyright © 2008 ARUSHI. All rights reserved.

एक न्यूनतम स्वच्छ विद्यालय पैकेज

(स्वच्छ भारत स्वच्छ विद्यालय)

पेयजल है स्वच्छ, स्वच्छ है शौचालय,
स्वच्छ रहते हैं बच्चे, स्वस्थ है विद्यालय।

स्रोत – स्वच्छ भारत स्वच्छ विद्यालय, एक राष्ट्रीय मिशन, एक पुस्तिका, मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार