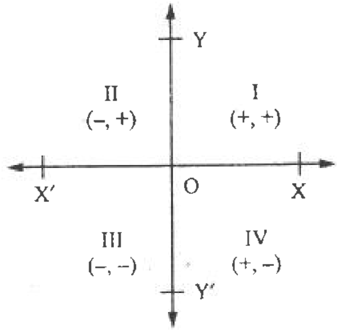
38. निदेशांक ज्यामिति
(COORDINATE GEOMETRY)

आवश्यक तथ्य एवं सूत्र



I. एक समतल में दिये गये बिन्दु की स्थितिः

दो परस्पर लम्बवत् रेखायें $X'OX$ तथा YOY' खींच कर हम कागज के समतल को चार बराबर भागों में बाँट लेते हैं. इन लम्बवत् रेखाओं को क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष कहते हैं.

समतल के चार बराबर भागों में से प्रत्येक को चतुर्थांश कहते हैं. समतल XOY, $X'OY$, $X'OY'$ तथा XOY' को क्रमशः I, II, III, IV चतुर्थांश कहते हैं.

समतल में स्थित किसी बिन्दु को एक क्रमित युग्म (a, b) से दर्शित किया जाता है, जहाँ a को इस बिन्दु का x-निदेशांक तथा b को y-निदेशांक कहा जाता है.

चतुर्थांश	x	y
I	+	+
II	–	+
III	–	–
IV	+	–

II. दो बिन्दुओं के बीच की दूरीः

यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ दो बिन्दु हों, तो $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

III. किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ की मूल बिन्दु O (0, 0) से दूरी $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

IV. यदि ΔABC के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ हों, तो इस त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$ वर्ग इकाई.

V. तीन बिन्दुओं के समरेख होने के लिए आवश्यक शर्तः

तीन बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ समरेख तभी होंगे जबकि

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

VI. किसी बिन्दु द्वारा दी गई रेखा को विभक्त करनाः

(*i*) यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $P(x, y)$ दो भागों में $m : n$ के अनुपात में विभक्त करे, तो $x = \frac{(mx_2 + nx_1)}{(m+n)}$, $y = \frac{(my_2 + ny_1)}{(m+n)}$.

(*ii*) यदि $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु $P(x, y)$ हो, तो

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \text{ तथा } y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

VII. ΔABC के शीर्ष बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ हैं. इस त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) के

निदेशांक होंगे $\left(\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right)$.

ध्यान रहे कि किसी त्रिभुज की मध्यिकाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को इस त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं.

VIII. विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज:

- एक चतुर्भज होगा:

(*i*) **आयत,** यदि इसकी विपरीत भुजायें बराबर हों तथा विकर्ण बराबर हों.

(*ii*) **एक समान्तर चतुर्भज परन्तु आयत नहीं,** यदि इसकी विपरीत भुजायें समान्तर तथा बराबर हों, तथा विकर्ण बराबर न हों.

(*iii*) **एक वर्ग,** यदि इसकी चारों भुजायें बराबर हों तथा विकर्ण बराबर हों.

(*iv*) **एक सम-चतुर्भज,** यदि इसकी चारों भुजायें बराबर हों परन्तु विकर्ण बराबर न हों.

IX. रेखाओं के समीकरण:

(*i*) x-अक्ष का समीकरण है, $y = 0$.

(*ii*) y-अक्ष का समीकरण है, $x = 0$.

(*iii*) y-अक्ष के समान्तर तथा इससे a दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण है, $x = a$.

(*iv*) x-अक्ष के समान्तर तथा इससे b दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण है, $y = b$.

(*v*) $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

ऐसी रेखा की ढ़ाल $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

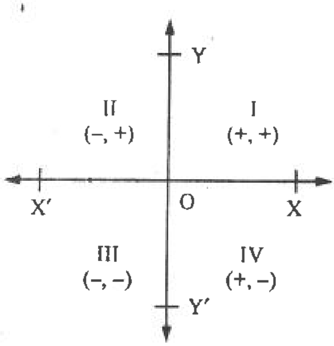
(*vi*) $y = mx + c$ ऐसी रेखा का समीकरण है जिसकी ढ़ाल m है तथा जो y-अक्ष पर intercept = c काटे.

साधित उदाहरण

प्रश्न 1. नीचे दिये गये बिन्दुओं में से प्रत्येक किस पाद में स्थित है ?

(*i*) (–4, 7) **(*i*) (– 3, – 8)**

(*iii*) (5, – 3) **(*iv*) (2, 5)**



हल : स्पष्ट है कि बिन्दु

(*i*) (–4, 7) द्वितीय पाद में है

(*ii*) (–3, – 8) तृतीय पाद में है

(*iii*) (5, – 3) चतुर्थ पाद में है

(*iv*) (2, 5) प्रथम पाद में है

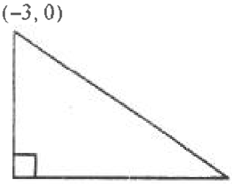
प्रश्न 2. बिन्दुओं $A(-3, 6)$ तथा $B(3, -6)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए.

हल : $AB = \sqrt{(3+3)^2+(-6-6)^2} = \sqrt{6^2+(-12)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = \sqrt{36\times5} = 6\sqrt{5}$ इकाई.

प्रश्न 3. बिन्दु $A(8, -8)$ की मूल बिन्दू से दूरी कितनी है ?

हल : अभीष्ट दूरी = $\sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = \sqrt{64\times2} = 8\sqrt{2}$.

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(-3, 0)$, $B(1, -3)$ तथा $C(4, 1)$ एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु हैं.



हल : स्पष्ट है कि:

$AB^2 = (-3-1)^2 + (0+3)^2 = (-4)^2 + 3^2 = (16+9) = 25;$

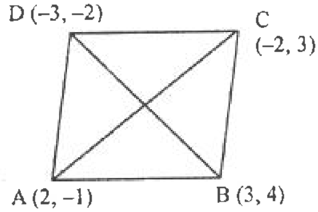
$BC^2 = (4-1)^2 + (1+3)^2 = (3^2+4^2) = (9+16) = 25;$

$AC^2 = (4+3)^2 + (1-0)^2 = (7^2+1^2) = (49+1) = 50.$

स्पष्ट है कि $AB = BC = \sqrt{25} = 5$ इकाई तथा $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

$\therefore$ ΔABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है.

प्रश्न 5. यदि एक समतल में स्थित चार बिन्दु $A(2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 3)$ तथा $D(-3, -2)$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि $ABCD$ एक समचतुर्भुज है परन्तु वर्ग नहीं.



हल : $AB^2 = (3-2)^2 + (4+1)^2 = (1^2 + 5^2) = 26$,

$BC^2 = (-2-3)^2 + (3-4)^2 = (-5)^2 + (-1)^2 = 26$,

$CD^2 = (-3+2)^2 + (-2-3)^2 = (-1)^2 + (-5)^2 = 26$,

$AD^2 = (2+3)^2 + (-1+2)^2 = 5^2 + 1^2 = 26$.

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA = \sqrt{26}$ इकाई.

विकर्ण $AC^2 = (-2-2)^2 + (3+1)^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32$

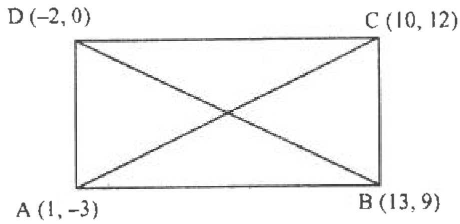
$\Rightarrow AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

विकर्ण $BD^2 = (-3-3)^2 + (-2-4)^2 = (-6)^2 + (-6)^2 = (36 + 36) = 72 \Rightarrow BD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$\therefore$ विकर्ण $AC \neq$ विकर्ण BD.

अतः $ABCD$ एक समचतुर्भुज है.

प्रश्न 6. सिद्ध करो कि $A(1, -3)$, $B(13, 9)$, $C(10, 12)$, तथा $D(-2, 0)$ क्रमशः एक आयत के शीर्ष बिन्दु हैं.



हल : $AB^2 = (13-1)^2 + (9+3)^2 = (12)^2 + (12)^2$

$= 144 + 144 = 288$,

$BC^2 = (13-10)^2 + (9-12)^2 = 3^2 + (-3)^2$

$= (9 + 9) = 18$,

$CD^2 = (10+2)^2 + (12-0)^2 = (12)^2 + (12)^2$

$= 144 + 144 = 288$,

$AD^2 = (-2-1)^2 + (0+3)^2 = (-3)^2 + 3^2$

$= (9 + 9) = 18$.

$\therefore$ $AB = CD = \sqrt{288} = \sqrt{144 \times 2} = 12\sqrt{2}$ तथा $BC = AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

विकर्ण $AC^2 = (10-1)^2 + (12+3)^2 = 9^2 + (15)^2 = (81 + 225) = 306$.

विकर्ण $BD^2 = (-2-13)^2 + (0-9)^2 = (-15)^2 + (-9)^2 = (225 + 81) = 306$.

$\therefore$ विकर्ण $AC =$ विकर्ण $BD = \sqrt{306} = \sqrt{9 \times 34} = 3\sqrt{34}$

$\therefore$ $ABCD$ एक आयत है.

प्रश्न 7. ΔABC के शीर्ष बिन्दु $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$ तथा $C(-3, -4)$ हैं. ΔABC का क्षेत्रफल कितना है ?

हल : यहाँ $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ तथा $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -4$.

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 \cdot (3+4) - 2(-4-2) - 3(2-3)\} = \frac{1}{2} \cdot \{7 + 12 + 3\} = 11 \text{ वर्ग इकाई.}$$

प्रश्न 8. k के किस मान के लिए बिन्दु $A(1, 5)$, $B(k, 1)$ तथा $C(4, 11)$ समरेख हैं ?

हल : यहाँ $x_1 = 1, x_2 = k, x_3 = 4$ तथा $y_1 = 5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 11$.

दिये गये बिन्दु समरेख तभी होंगे जबकि $\Delta = 0$.

अब, $\Delta = 0 \Leftrightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

$\Leftrightarrow 1.(1 - 11) + k(11 - 5) + 4(5 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -10 + 6k + 16 = 0 \Rightarrow 6k = -6 \Leftrightarrow k = -1$.

प्रश्न 9. यदि A (4, –3) तथा B (9, 7) दो बिन्दु हों तो बिन्दु P के निदेशांक क्या होंगे जबकि यह बिन्दु AB को 3 : 2 के अनुपात में बाँटे ?

हल : अभीष्ट बिन्दु $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$,

जहाँ $x_1 = 4,\ x_2 = 9,\ y_1 = -3,\ y_2 = 7,\ m = 3$ तथा $n = 2$.

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $P\left(\frac{3\times9+2\times4}{3+2}, \frac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}\right)$ अर्थात् $P\left(\frac{35}{5}, \frac{15}{5}\right)$ अर्थात् P (7, 3).

प्रश्न 10. बिन्दु P (2, –5) बिन्दुओं A (–3, 5) तथा B (4, –9) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में काटता है ?

हल : माना अभीष्ट अनुपात $= k : 1$ है. तब $P\left(\frac{4k-3}{k+1}, \frac{-9k+5}{k+1}\right) = (2, -5)$

$$\Rightarrow \quad \frac{4k-3}{k+1} = 2 \text{ तथा } \frac{-9k+5}{k+1} = -5 \Rightarrow 4k-3 = 2k+2 \Rightarrow 2k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}.$$

अभीष्ट अनुपात $= \frac{5}{2} : 1 = 5 : 2$.

प्रश्न 11. उस रेखा की ढ़ाल कितनी है जिसका क्षैतिज रेखा से कोण है:

(i) 30° (ii) 120° (iii) 135° (iv) 90°

हल : (i) $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) $m = \tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

(iii) $m = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$.

(iv) $m = \tan 90°$, जो परिभाषित नहीं है.

प्रश्न 12. उस रेखा का क्षैतिज रेखा से कोण कितना है जिसकी ढ़ाल है:

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) 1 (iv) – 1

हल : (i) $\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$.

(ii) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30°$.

(iii) $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$.

(iv) $\tan\theta = -1 = -\tan 45° = \tan(180° - 45°) = \tan 135° \Rightarrow \theta = 135°$.

प्रश्न 13. उस रेखा की ढ़ाल कितनी है जो बिन्दुओं A (–2, 3) तथा B (4, –6) से गुजरती है ?

हल : AB की ढ़ाल $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{(-6-3)}{(4+2)} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$.

प्रश्न 14. एक रेखा का समीकरण $4x + 3y - 7 = 0$ है. इसकी ढ़ाल कितनी है ?

हल : $4x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow 3y = -4x + 7 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + \frac{7}{3}$.

इस रेखा की ढ़ाल $= \frac{-4}{3}$.

प्रश्न 15. यदि रेखायें $2x + 3y - 5 = 0$ तथा $kx + 6y + 7 = 0$ समान्तर हों, तो k का मान कितना होगा ?

हल : $2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 5 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$.

$kx + 6y + 7 = 0 \Rightarrow 6y = -kx - 7 \Rightarrow y = \frac{-k}{6}x - \frac{7}{6}$.

रेखायें समान्तर होने के लिए, $m_1 = m_2$.

$\therefore \quad \frac{-k}{6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow k = \left(\frac{2}{3} \times 6\right) = 4.$

प्रश्न 16. यदि $5x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - ky + 2 = 0$ परस्पर लम्बवत् हों, तो k का मान क्या होगा ?

हल : $5x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 3y = -5x - 6 \Rightarrow y = \frac{-5}{3}x - 2.$

$3x - ky + 2 = 0 \Rightarrow ky = 3x + 2 \Rightarrow y = \frac{3}{k}x + \frac{2}{k}.$

रेखायें लम्बवत् होने के लिए, $m_1 m_2 = -1.$

$\therefore \quad \frac{-5}{3} \times \frac{3}{k} = -1 \Rightarrow -3k = -15 \Rightarrow k = 5.$

प्रश्न 17. एक सरल रेखा x-अक्ष से 45° का कोण बनती है तथा y-अक्ष पर intercept 3 इकाई काटती है. इस रेखा का समीकरण क्या है ?

हल : दिया है $m = \tan 45° = 1$ तथा $c = 3.$

$\therefore$ इस रेखा का समीकरण है : $y = 1 \cdot x + 3$ अर्थात् $y = x + 3.$

प्रश्न 18. एक सरल रेखा y-अक्ष के समान्तर दायीं ओर 4 इकाई दूरी पर है. इस रेखा का समीकरण क्या है ?

हल : स्पष्ट है कि दी गई रेखा का समीकरण $x = 4$ है.

प्रश्न 19. एक सरल रेखा x-अक्ष के समान्तर x-अक्ष के नीचे 3 इकाई दूरी पर है. इस रेखा का समीकरण क्या है ?

हल : स्पष्ट है कि दी गई रेखा का समीकरण $y = -3$ अर्थात् $y + 3 = 0$ है.

प्रश्नमाला 38

निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रश्न में ठीक उत्तर को चिन्हांकित (√) कीजिए:

1. बिन्दु (–2, – 4) किस चतुर्थपाद में स्थित है ?
   (*a*) प्रथम (*b*) द्वितीय (*c*) तृतीय (*d*) चतुर्थ
2. बिन्दु (3, – 5) किस चतुर्थपाद में स्थित है ?
   (*a*) प्रथम (*b*) द्वितीय (*c*) तृतीय (*d*) चतुर्थ
3. बिन्दु (5, 3) किस चतुर्थपाद में स्थित है ?
   (*a*) प्रथम (*b*) द्वितीय (*c*) तृतीय (*d*) चतुर्थ
4. बिन्दु (–4, 6) किस चतुर्थपाद में स्थित है ?
   (*a*) प्रथम (*b*) द्वितीय (*c*) तृतीय (*d*) चतुर्थ
5. बिन्दु (3, 0) किस अक्ष पर स्थित है ?
   (*a*) x-अक्ष (*b*) y-अक्ष (*c*) इनमें से किसी पर नहीं
6. बिन्दु (0, –4) किस अक्ष पर स्थित है ?
   (*a*) x-अक्ष (*b*) y-अक्ष (*c*) इनमें से किसी पर नहीं
7. बिन्दु (6, – 8) मूल बिन्दु से कितनी दूरी पर है ?
   (*a*) 2 इकाई (*b*) 14 इकाई (*c*) 10 इकाई (*d*) इनमें से कोई नहीं
8. बिन्दु (–6, 0) की मूल-बिन्दु से कितनी दूरी है ?
   (*a*) 6 इकाई (*b*) $\sqrt{6}$ इकाई (*c*) $2\sqrt{3}$ इकाई (*d*) इनमें से कोई नहीं
9. बिन्दुओं A (b, 0) तथा B (0, a) के बीच की दूरी कितनी है ? **(रेलवे परीक्षा, 2006)**
   (*a*) $(a - b)$ (*b*) $(b - a)$ (*c*) $\sqrt{a+b}$ (*d*) $\sqrt{a^2+b^2}$
10. बिन्दुओं A (8, 5) तथा B (4, 2) के बीच की दूरी कितनी है ?
    (*a*) 7 इकाई (*b*) 5 इकाई (*c*) 4 इकाई (*d*) 3 इकाई

11. बिन्दुओं $A (2, 2)$ तथा $B (2, -3)$ के बीच की दूरी कितनी है ?
(*a*) 2 इकाई (*b*) 3 इकाई (*c*) 4 इकाई (*d*) 5 इकाई

12. यदि बिन्दु $P (x, y)$ की बिन्दु $A (a, 0)$ से दूरी $(a + x)$ हो, तो $y^2 = ?$
(*a*) $2ax$ (*b*) $4ax$ (*c*) $6ax$ (*d*) $8ax$

13. x-अक्ष पर स्थित एक बिन्दु y-अक्ष के दायीं ओर y-अक्ष से 3 इकाई दूरी पर है. इस बिन्दु के निदेशांक हैं:
(*a*) (3, 0) (*b*) (0, 3) (*c*) (3, 3) (*d*) (–3, 3)

14. y-अक्ष पर एक बिन्दु A, x-अक्ष से 4 इकाई दूरी पर x-अक्ष के नीचे स्थित है. इस बिन्दु के निदेशांक हैं:
(*a*) (4, 0) (*b*) (0, 4) (*c*) (–4, 0) (*d*) (0, –4)

15. बिन्दु $A (0, 6)$, $B (-5, 3)$ तथा $C (3, 1)$ कैसी त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु हैं ?
(*a*) समद्विबाहु (*b*) समबाहु (*c*) विषमबाहु (*d*) समकोण

16. बिन्दु $A (-3, 0)$, $B (1, -3)$ तथा $C (4, 1)$ कैसी त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु हैं ?
(*a*) समबाहु त्रिभुज (*b*) विषमबाहु त्रिभुज
(*c*) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज (*d*) इनमें से किसी के नहीं

17. बिन्दु $A (1, 2)$, $B (5, 4)$, $C (3, 8)$ तथा $D (-1, 6)$ को क्रम से लिये जाने पर ये शीर्ष बिन्दु निम्न में से कैसी चतुर्भुज के हैं ?
(*a*) आयत (*b*) वर्ग (*c*) समबाहु चतुर्भुज (*d*) इनमें से किसी के नहीं

18. बिन्दु $A (1, -3)$, $B (13, 9)$, $C (10, 12)$ तथा $D (-2, 0)$ को क्रम से लिये जाने पर ये निम्न में किस चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु हैं ?
(*a*) आयत (*b*) समबाहु चतुर्भुज (*c*) वर्ग (*d*) इनमें से किसी के नहीं

19. एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष बिन्दु हैं $A (0, 0)$, $B (4, 4)$, $C (4, 8)$ तथा $D (0, 4)$. तब $ABCD$ है एक
(*a*) वर्ग (*b*) समबाहु चतुर्भुज (*c*) आयत (*d*) समान्तर चतुर्भुज

20. एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु क्रमशः $A (4, 4)$, $B (3, -2)$ तथा $C (-3, 16)$ हैं. इस त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना है ?
(*a*) 36 वर्ग इकाई (*b*) 37 वर्ग इकाई (*c*) 38 वर्ग इकाई (*d*) इनमें से कोई नहीं

(एम०बी०ए० परीक्षा, 2002)

21. एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु क्रमशः $A (3, 8)$, $B (-4, 2)$ तथा $C (5, -1)$ हैं. ΔABC का क्षेत्रफल कितना है ?
(*a*) $28\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (*b*) $37\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (*c*) 57 वर्ग इकाई (*d*) 75 वर्ग इकाई

22. यदि बिन्दु $A (2, 3)$, $B (5, k)$ तथा $C (6, 7)$ समरेख हों, तो $k = ?$
(*a*) 4 (*b*) 6 (*c*) $\frac{-3}{2}$ (*d*) $\frac{11}{4}$

23. यदि बिन्दु $P (1, -1)$, $Q (5, 2)$ तथा $R (k, 5)$ समरेख हों, तो $k = ?$
(*a*) 6 (*b*) –3 (*c*) 9 (*d*) 4

24. एक वृत्त के व्यास के अन्तिम सिरे $A (4, -1)$ तथा $B (-2, -5)$ हैं. इसके केन्द्र के निदेशांक क्या होंगे ?
(*a*) (1, –3) (*b*) (2, –4) (*c*) (–1, 2) (*d*) (–2, 3)

25. एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु $A (-3, 0)$, $B (5, -2)$ तथा $C(-8, 5)$ हैं. इसके केन्द्रक के निदेशांक होंगे:
(*a*) (–1, 2) (*b*) (–2, 1) (*c*) (1, 2) (*d*) (2, –1)

26. ΔABC के दो बिन्दु $A (6, 4)$ तथा $B (-2, 2)$ हैं तथा इसके केन्द्रक के निदेशांक $G (3, 4)$ हैं. बिन्दु C के निदेशांक क्या होंगे ?
(*a*) (4, 5) (*b*) (5, 3) (*c*) (5, 6) (*d*) (–3, 3)

27. ΔABC के दो कोने $B (-3, 1)$ तथा $C (0, -2)$ हैं एवं इसका केन्द्रक मूल बिन्दु है. तीसरे कोने A के निदेशांक हैं:
(*a*) (3, 1) (*b*) (2, 3) (*c*) (–1, 2) (*d*) (–2, 3)

28. $A(1, 3)$ तथा $B(2, 7)$ को मिलाने पर बने रेखाखण्ड पर बिन्दु C इसे $3 : 4$ में विभक्त करता है. बिन्दु C के निदेशांक हैं: **(रेलवे परीक्षा, 2006)**

(*a*) $\left(\frac{5}{3}, 5\right)$ (*b*) $(-2, -9)$ (*c*) $\left(\frac{10}{7}, \frac{33}{7}\right)$ (*d*) $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

29. रेखाखण्ड AB के अन्तिम बिन्दु $A(-5, 4)$ तथा $B(7, -8)$ हैं. AB के मध्य बिन्दु के निदेशांक क्या होंगे ?

(*a*) $C(1, -2)$ (*b*) $C(2, -1)$ (*c*) $C(2, -3)$ (*d*) $C(2, -2)$

30. बिन्दुओं $A(-3, 5)$ तथा $B(4, -9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $P(2, -5)$ किस अनुपात में विभक्त करेगा ?

(*a*) $2 : 3$ (*b*) $4 : 3$ (*c*) $5 : 1$ (*d*) $5 : 2$

31. बिन्दुओं $A(6, 3)$ तथा $B(-2, -5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को x-अक्ष किस अनुपात में विभक्त करेगा ?

(*a*) $3 : 2$ (*b*) $3 : 5$ (*c*) $2 : 3$ (*d*) $2 : 5$

32. बिन्दुओं $A(-4, 2)$ तथा $B(8, 3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को y-अक्ष किस अनुपात में विभक्त करेगा ?

(*a*) $3 : 1$ (*b*) $1 : 3$ (*c*) $2 : 1$ (*d*) $1 : 2$

33. क्षैतिज रेखा की ढ़ाल कितनी है ?

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) -1 (*d*) इनमें से कोई नहीं

34. उर्ध्वाधर रेखा की ढ़ाल कितनी है ?

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) परिभाषित नहीं (*d*) इनमें से कोई नहीं

35. यदि किसी रेखा की ढ़ाल $m = \tan\theta > 0$ हो, तो

(*a*) $\theta = 0$ (*b*) θ न्यून कोण है (*c*) $\theta = 90°$ (*d*) θ अधिक कोण है

36. यदि किसी रेखा की ढ़ाल $m = \tan\theta < 0$ हो, तो

(*a*) θ न्यून कोण है (*b*) θ अधिक कोण है (*c*) $\theta = 90°$ (*d*) इनमें से कोई नहीं

37. यदि किसी रेखा की ढ़ाल $m = \tan\theta = 0$ हो, तो यह रेखा होगी:

(*a*) क्षैतिज (*b*) उर्ध्वाधर (*c*) तिर्यक (*d*) इनमें से कोई नहीं

38. एक रेखा दो बिन्दुओं $A(-2, 3)$ तथा $B(-6, 5)$ से गुजरती है. इस रेखा की ढ़ाल कितनी है ?

(*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $\frac{3}{4}$ (*c*) $\frac{-1}{2}$ (*d*) -1

39. बिन्दुओं $A(4, -3)$ तथा $B(6, -3)$ से गुजरने वाली रेखा की ढ़ाल कितनी है ?

(*a*) 2 (*b*) ∞ (*c*) 0 (*d*) इनमें से कोई नहीं

40. बिन्दुओं $A(3, -1)$ तथा $B(3, 2)$ से गुजरने वाली रेखा की ढ़ाल कितनी है ?

(*a*) 0 (*b*) 3 (*c*) परिभाषित नहीं है (*d*) इनमें से कोई नहीं

41. यदि $A(2, 5)$ तथा $B(x, 3)$ से गुजरने वाली रेखा की ढ़ाल 2 हो, तो x का मान होगा:

(*a*) 1 (*b*) -1 (*c*) 2 (*d*) -2

42. यदि बिन्दुओं $A(x, -3)$ तथा $B(2, 5)$ को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज रेखा से $135°$ का कोण बनाये, तो $x = ?$

(*a*) 5 (*b*) -5 (*c*) 8 (*d*) 10

43. बिन्दुओं $A(-1, 1)$ तथा $B(2, -4)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है:

(*a*) $3x + 5y + 2 = 0$ (*b*) $5x + 3y + 2 = 0$ (*c*) $2x + 3y + 5 = 0$ (*d*) इनमें से कोई नहीं

44. बिन्दु $(3, -4)$ से गुजरने वाली तथा x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण क्या है ?

(*a*) $y - 4 = 0$ (*b*) $y - 1 = 0$ (*c*) $y + 4 = 0$ (*d*) इनमें से कोई नहीं

45. यदि रेखायें $x + 2y - 9 = 0$ तथा $kx + 4y + 5 = 0$ समान्तर हों, तो k का मान कितना होगा ?

(*a*) $k = 2$ (*b*) $k = 1$ (*c*) $k = -1$ (*d*) $k = -2$

46. यदि रेखायें $2x + ky + 7 = 0$ तथा $27x - 18y + 25 = 0$ परस्पर लम्बवत् हों, तो k का मान कितना होगा ?

(*a*) $k = -1$ (*b*) $k = 2$ (*c*) $k = 3$ (*d*) $k = -2$

47. रेखा $x+\sqrt{3}y-6=0$ का x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बना कोण कितना है ?

(*a*) 30° (*b*) 60° (*c*) 120° (*d*) 150°

48. रेखायें $x+2y-9=0$ तथा $3x+6y+8=0$ हैं परस्पर

(*a*) समानान्तर (*b*) लम्बवत् (*c*) संपाती (*d*) इनमें से कोई नहीं

49. रेखायें $3x-4y+6=0$ तथा $4x+3y-10=0$ हैं परस्पर

(*a*) संपाती (*b*) समानान्तर (*c*) लम्बवत् (*d*) इनमें से कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (*c*)	**2.** (*d*)	**3.** (*a*)	**4.** (*b*)	**5.** (*a*)	**6.** (*b*)	**7.** (*c*)	**8.** (*a*)	**9.** (*d*)	**10.** (*b*)
11. (*d*)	**12.** (*b*)	**13.** (*a*)	**14.** (*d*)	**15.** (*a*)	**16.** (*c*)	**17.** (*b*)	**18.** (*b*)	**19.** (*d*)	**20.** (*d*)
21. (*b*)	**22.** (*b*)	**23.** (*c*)	**24.** (*a*)	**25.** (*b*)	**26.** (*c*)	**27.** (*a*)	**28.** (*c*)	**29.** (*a*)	**30.** (*d*)
31. (*b*)	**32.** (*d*)	**33.** (*a*)	**34.** (*c*)	**35.** (*b*)	**36.** (*b*)	**37.** (*b*)	**38.** (*c*)	**39.** (*c*)	**40.** (*c*)
41. (*a*)	**42.** (*d*)	**43.** (*b*)	**44.** (*c*)	**45.** (*a*)	**46.** (*c*)	**47.** (*d*)	**48.** (*a*)	**49.** (*c*)	

दिये गये प्रश्नों के हल

1. बिन्दु $A(-2,-4)$ तृतीय पाद में है.

2. बिन्दु $B(3,-5)$ चतुर्थ पाद में है.

3. बिन्दु $C(5,3)$ प्रथम पाद में है.

4. बिन्दु $D(-4,6)$ द्वितीय पाद में है.

5. बिन्दु $E(3,0)$ x-अक्ष पर स्थित है.

6. बिन्दु $F(0,-4)$ y-अक्ष पर स्थित है.

7. अभीष्ट दूरी = $\sqrt{(0-6)^2+(0+8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ इकाई.

8. अभीष्ट दूरी = $\sqrt{(0+6)^2+(0-0)^2}=\sqrt{36}=6$ इकाई.

9. $AB=\sqrt{(b-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

10. $AB=\sqrt{(8-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ इकाई.

11. $AB=\sqrt{(2-2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{0+25}=\sqrt{25}=5$ इकाई.

12. $(x-a)^2+(y-0)^2=(a+x)^2 \Rightarrow y^2=(x+a)^2-(x-a)^2=4ax$.

13. अभीष्ट बिन्दु = $(3,0)$.

14. अभीष्ट बिन्दु = $(0,-4)$.

15. $AB=\sqrt{(0+5)^2+(6-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$, $BC=\sqrt{(-5-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$,

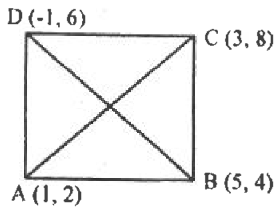
$CA=\sqrt{(3-0)^2+(1-6)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

$\therefore$ ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है.

16. $AB=\sqrt{(-3-1)^2+(0+3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, $BC=\sqrt{(1-4)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$,

$AC=\sqrt{(-3-4)^2+(0-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$.

$\therefore$ $AB=BC$ तथा $AC^2=AB^2+BC^2$. अत: ΔABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है.



17. $AB^2=(5-1)^2+(4-2)^2=(16+4)=20$,

$BC^2=(5-3)^2+(4-8)^2=(4+16)=20$,

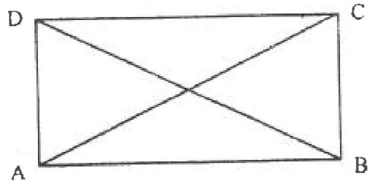
$CD^2=(3+1)^2+(8-6)^2=(16+4)=20$,

$AD^2=(1+1)^2+(2-6)^2=(4+16)=20$.

$AC = \sqrt{(1-3)^2+(2-8)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$, $BD = \sqrt{(5+1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$ तथा विकर्ण AC = विकर्ण BD.

अत: $ABCD$ एक वर्ग है.



18. $AB = \sqrt{(13-1)^2+(9+3)^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(10+2)^2+(12-0)^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(13-10)^2+(9-12)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

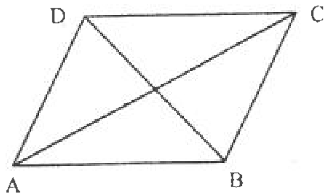
$AD = \sqrt{(1+2)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

विकर्ण $AC = \sqrt{(10-1)^2+(12+3)^2} = \sqrt{81+225} = \sqrt{306}$,

विकर्ण $BD = \sqrt{(13+2)^2+(9-0)^2} = \sqrt{225+81} = \sqrt{306}$.

$\therefore$ $AB = CD$, $BC = AD$ तथा विकर्ण AC = विकर्ण BD.

अत: $ABCD$ एक आयत है.



19. $AB = \sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,

$BC = \sqrt{(4-4)^2+(4-8)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$,

$CD = \sqrt{(4-0)^2+(8-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,

$DA = \sqrt{(0-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16} = 4$.

विकर्ण $AC = \sqrt{(4-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, विकर्ण $BD = \sqrt{(4-0)^2+(4-4)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$.

$\therefore$ $AB = CD$, $BC = AD$ तथा विकर्ण $AC \neq$ विकर्ण BD.

$\therefore$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है.

20. यहाँ $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$, $y_1 = 4$, $y_2 = -2$ तथा $y_3 = 16$.

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{4(-2-16) + 3(16-4) - 3(4+2)\} = \frac{1}{2}\{-72+36-18\}$$

$$= \frac{1}{2}|-90+36| = 27 \text{ वर्ग इकाई.}$$

21. यहाँ $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = 5$ तथा $y_1 = 8$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$.

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3(2+1) - 4(-1-8) + 5(8-2)\} = \frac{1}{2}(9+36+30) = 37\frac{1}{2} \text{ वर्ग इकाई.}$$

22. यहाँ $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$ तथा $y_1 = 3$, $y_2 = k$, $y_3 = 7$.

$\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\} = 0$

$\Rightarrow$ $2(k-7) + 5(7-3) + 6(3-k) = 0 \Rightarrow 4k = 24 \Rightarrow k = 6$.

23. यहाँ $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = k$ तथा $y_1 = -1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$.

$x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) = 0$

$\Rightarrow$ $1\cdot(2-5) + 5\cdot(5+1) + k(-1-2) = 0 \Rightarrow -3 + 30 = 3k \Rightarrow 3k = 27 \Rightarrow k = 9$.

24. केन्द्र के निदेशांक = $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$ अर्थात् $(1, -3)$.

25. केन्द्रक के निदेशांक = $\left(\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right) = \left(\frac{1}{3}(-3+5-8), \frac{1}{3}(0-2+5)\right) = (-2, 1)$.

26. माना तीसरा बिन्दु $C(x, y)$ है. तब

$$\frac{1}{3}(6-2+x)=3 \text{ तथा } \frac{1}{3}(4+2+y)=4 \Rightarrow x+4=9 \text{ तथा } y+6=12 \Rightarrow x=5,\ y=6.$$

$\therefore$ तीसरा बिन्दु $C(5, 6)$ है.

27. माना तीसरा कोना $A(x, y)$ है. तब

$$\frac{1}{3}(x-3+0)=0 \text{ तथा } \frac{1}{3}(y+1-2)=0 \Rightarrow x-3=0 \text{ तथा } y-1=0 \Rightarrow x=3, y=1.$$

$\therefore$ A के निदेशांक $(3, 1)$ हैं.

28. C के निदेशांक हैं $\left(\frac{3\times2+4\times1}{3+4}, \frac{3\times7+4\times3}{3+4}\right)$ अर्थात् $\left(\frac{10}{7}, \frac{33}{7}\right)$.

29. AB का मध्य बिन्दु है $C\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{4-8}{2}\right)$ अर्थात् $(1, -2)$.

30. माना अभीष्ट अनुपात $k:1$ है, तब $P\left(\frac{4k-3}{k+1}, \frac{-9k+5}{k+1}\right)$ होगा.

$\therefore$ $\frac{4k-3}{k+1}=2$ तथा $\frac{-9k+5}{k+1}=-5$

$\Rightarrow$ $4k-3=2k+2$ तथा $-9k+5=-5k-5 \Rightarrow k=\frac{5}{2}$.

अभीष्ट अनुपात $=\frac{5}{2}:1$ अर्थात् $5:2$.

31. माना अभीष्ट अनुपात $=k:1$. तब $P\left(\frac{-2k+6}{k+1}, \frac{-5k+3}{k+1}\right)$

$\therefore$ $\frac{-5k+3}{k+1}=0 \Rightarrow -5k+3=0 \Rightarrow 5k=3 \Rightarrow k=\frac{3}{5}$.

अभीष्ट अनुपात $=\frac{3}{5}:1=3:5$.

32. माना अभीष्ट अनुपात $=k:1$. तब $P\left(\frac{8k-4}{k+1}, \frac{3k+2}{k+1}\right)$ है.

$\therefore$ $\frac{8k-4}{k+1}=0 \Rightarrow 8k-4=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$.

अभीष्ट अनुपात $=\frac{1}{2}:1=1:2$.

33. क्षैतिज रेखा की ढ़ाल 0 है.

34. उर्ध्वाधर रेखा की ढ़ाल परिभाषित नहीं है.

35. $\tan\theta>0 \Rightarrow \theta$ न्यूनकोण है.

36. $\tan\theta<0 \Rightarrow \theta$ एक अधिक कोण है.

37. यदि $m=\tan\theta=0$ हो, तो यह रेखा उर्ध्वाधर होगी.

38. रेखा AB की ढ़ाल $=\frac{5-3}{-6+2}=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$.

39. रेखा AB की ढ़ाल $=\frac{-3+3}{6-4}=\frac{0}{2}=0$.

40. रेखा AB की ढ़ाल $=\frac{2+1}{3-3}=\frac{3}{0}$, जो परिभाषित नहीं है.

41. $\frac{3-5}{x-2}=2 \Rightarrow x-2=-1 \Rightarrow x=1$.

42. AB की ढ़ाल $=\frac{(5+3)}{(2-x)}=\frac{8}{(2-x)}$.

$\therefore$ $\frac{8}{(2-x)}=\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1 \Rightarrow x-2=8 \Rightarrow x=10$.

43. AB की ढ़ाल $=\frac{-4-1}{2+1}=\frac{-5}{3}$.

अभीष्ट समीकरण $\frac{y-1}{x+1}=\frac{-5}{3} \Rightarrow -5x-5=3y-3 \Rightarrow 5x+3y+2=0$.

44. दी गई रेखा का समीकरण है $\frac{y+4}{x-3} = \tan 0 = 0 \Rightarrow y + 4 = 0.$

45. $x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2y = 9 - x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$

$kx + 4y + 5 = 0 \Rightarrow 4y = -kx - 5 \Rightarrow y = \frac{-k}{4}x - \frac{5}{4}.$

$\therefore \quad m_1 = -\frac{1}{2}$ तथा $m_2 = \frac{-k}{4}.$

दी गई रेखायें समान्तर हैं. अत: $\frac{-k}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow K = 2.$

46. $2x + ky + 7 = 0 \Rightarrow ky = -2x - 7 \Rightarrow y = \frac{-2}{k}x - \frac{7}{k}.$

$27x - 18y + 25 = 0 \Rightarrow 18y = 27x + 25 \Rightarrow y = \frac{27}{18}x + \frac{25}{18} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{25}{18}.$

$\therefore \quad m_1 = \frac{-2}{k}$ तथा $m_2 = \frac{3}{2}$

चूँकि दी गई रेखायें परस्पर लम्बवत् हैं, अत: $m_1 m_2 = -1.$

$\therefore \quad \frac{-2}{k} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow k = 3.$

47. $x + \sqrt{3}y - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y = -x + 6 \Rightarrow y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}}.$

$\therefore \quad m = \tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tan 30° = \tan(180° - 30°) = \tan 150°.$

अत: $\theta = 150°.$

48. $x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 9 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$

$3x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow 6y = -3x - 8 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}.$

$\therefore \quad m_1 = m_2 = \frac{-1}{2}.$

अत: दी गई रेखायें परस्पर समानान्तर हैं.

49. $3x - 4y + 6 = 0 \Rightarrow 4y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}.$

$4x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow 3y = -4x + 10 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + \frac{10}{3}.$

$\therefore \quad m_1 = \frac{3}{4}, m_2 = \frac{-4}{3} \Rightarrow m_1 m_2 = \frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1.$