तरल
(FLUIDS)

11 CHAPTER

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

वे पदार्थ जिनमें बहने (flowing) का गुण होता है, तरल कहलाते हैं। पदार्थ की तीन अवस्थाओं में से द्रव तथा गैस सम्मिलित रूप से तरल है। द्रव तथा गैस को परस्पर विभेदित किया जा सकता है। द्रव असंपीड्य होता है तथा इसका अपना मुक्त पृष्ठ होता है, जबकि गैस संपीड्य होती है तथा यह उपलब्ध सम्पूर्ण आयतन को घेर लेती है।

स्थिर तरलों का अध्ययन द्रव स्थैतिकी (Hydrostatics) कहलाता है, जबकि गतिशील तरलों का अध्ययन द्रव गतिकी (Hydronamics) कहलाता है। तरलों का मूल गुण है कि वह अपरूपण (विरूपण) प्रतिबल का बहुत ही न्यून प्रतिरोध करते हैं। फलतः थोडे से विरूपण प्रतिबल लगाने से भी उनकी आकृति बदल जाती है।

इस अध्याय में हम तरलों के प्रवाह से सम्बन्धित गुणों तथा नियमों का अध्ययन करेंगे।

11.2 दाब (Pressure)

किसी पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित लम्बवत् बल को दाब कहते हैं। यदि पृष्ठ क्षेत्रफल A पर कार्यरत लम्बवत् बल F हो तो दाब

$$P = \frac{F}{A}$$

दाब की दिशा पृष्ठ के सदैव लम्बवत् होने के कारण इसे अदिश राशि माना जाता है। दाब का मात्रक SI पद्धति में न्यूटन/मी.^{2} = पास्कल (Pa) होता है तथा CGS पद्धति में डाईन/सेमी.^{2} होता है।

$$1 \text{ डाईन/सेमी.}^2 = 10^{-1} \text{ न्यूटन/मी.}^2 = 10^{-1} \text{ पास्कल}$$

दाब की विमाएँ $[ML^{-1} T^{-2}]$ होती है।

किसी पृष्ठ पर दाब निम्न दो कारकों पर निर्भर करता है–

(i) पृष्ठ पर आरोपित लम्बवत् बल तथा

(ii) पृष्ठ क्षेत्रफल

$$\because \text{ दाब} \propto \frac{1}{\text{क्षेत्रफल}}$$

अतः एक ही परिमाण का बल विभिन्न क्षेत्रफलों पर अलग–अलग दाब लगाता है। क्षेत्रफल बढ़ने पर दाब घटता है तथा क्षेत्रफल घटने पर दाब बढ़ता है। यही कारण है कि समान बल लगाने पर मोटी कील की अपेक्षा नुकीली कील दीवार में आसानी से घुस जाती है।

द्रवों का दाब–द्रव जिस पात्र में रखे जाते है, उसकी सभी दिशाओं में दाब डालते हैं। एकांक क्षेत्रफल पर लग रहे बल को ही दाब कहते हैं।

द्रव के किसी भी बिन्दु पर दाब, दिशा पर निर्भर नहीं करता, एक गहराई पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर दाब एक समान हो जाता है। द्रव में स्थित प्रत्येक्र बिन्दु पर दाब इस बिन्दु की गहराई पर निर्भर करता है।

घनत्व तथा आपेक्षिक घनत्व (Density and relative density)

किसी पदार्थ के एकांक आयतन के द्रव्यमान को घनत्व कहते हैं। यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान m तथा आयतन V हो तो

$$\text{पदार्थ का घनत्व } \rho = \frac{m}{V}$$

घनत्व की विमाएँ $[ML^{-3}]$ होती हैं।

घनत्व का SI मात्रक किग्रा./मी.^{3} तथा CGS मात्रक ग्राम/सेमी^{3} होता है।

$$1 \text{ ग्राम/सेमी.}^3 = 10^3 \text{ किग्रा./मी.}^3$$

यह एक धनात्मक अदिश राशि है। द्रव असंपीड्य होते है, अतः किसी द्रव का घनत्व सभी दाबों पर लगभग अचर रहता है। जबकि इसके विपरीत, गैसें दाब में परिवर्तन के साथ घनत्व में अत्यधिक परिवर्तन दर्शाती हैं।

पदार्थ के घनत्व तथा 4°C पर पानी के घनत्व के अनुपात को पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व कहते हैं। इसका कोई मात्रक नहीं होता है तथा यह विमाहीन धनात्मक अदिश भौतिक राशि है।

आपेक्षिक घनत्व (विशिष्ट गुरुत्व)

$$\rho_r = \frac{\text{पदार्थ का घनत्व}}{4°C \text{ पर पानी का घनत्व}} = \frac{\rho}{(\rho_W)_{4°C}}$$

$$\text{पानी का घनत्व } \rho_W = 1 \text{ ग्राम/सेमी.}^3 \approx 1000 \text{ किग्रा./मी.}^3$$

$$\text{NTP पर हवा का घनत्व } \rho_a = 1.29 \text{ किग्रा./मी.}^3$$

$$\text{पारे का घनत्व } \rho_m = 13.6 \text{ ग्राम/सेमी.}^3 = 13.6 \times 10^3 \text{ किग्रा./मी.}^3$$

उदा.1. दो उर्वास्थितियाँ (फीमर) जिनमें प्रत्येक की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 है, 40 kg संहति के मानव शरीर के ऊपरी भाग को सँभालती है। उर्वास्थितियों द्वारा सहन किए जाने वाले औसत दाब का आंकलन कीजिए।

हल–दिया है–

दोनों फीमरों का कुल अनुप्रस्थ काट

$$A = 2 \times 10 \text{ सेमी}^2 = 2 \times 10 \times 10^{-4} \text{ मी.}^2$$

$$\text{तथा आरोपित बल } F = mg = 40 \times 9.8 = 392 \text{ न्यूटन}$$

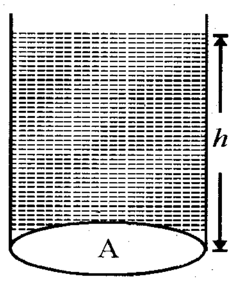
यह बल ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्य करता है। अतः यह उर्वस्थितियों पर अभिलम्बवत् लगता है।

अतः फीमरों पर औसत दाब $P_{av} = \frac{F}{A} = \frac{392}{2 \times 10 \times 10^{-4}}$
$= 1.96 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

11.2.1 तरल स्तभ के कारण दाब (Pressure due to a fluid column)

माना कि एक बेलनाकार पात्र में ρ घनत्व का एक द्रव भरा है। द्रव स्तम्भ की ऊँचाई h तथा आधार का क्षेत्रफल A है।

∵ पात्र में भरा द्रव, आधार तथा दीवारों पर दाब आरोपित करता है। अतः पात्र के आधार पर लम्बवत् बल h ऊँचाई के द्रव–स्तम्भ का भार होगा अर्थात्



चित्र 11.1

F = द्रव स्तम्भ के द्रव का द्रव्यमान × गुरुत्वीय त्वरण
= आयतन × घनत्व × g
$= Ah \times \rho \times g$

⇒ $F = Ah\rho g$

∴ h गहराई पर द्रव का दाब

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g$$

⇒ $P = h\rho g$ ...(1)

अतः **द्रव स्तम्भ का दाब** निम्न कारकों पर निर्भर करता है–

(i) द्रव–स्तम्भ की ऊँचाई (*h*)

(ii) द्रव–स्तम्भ का घनत्व (ρ) तथा

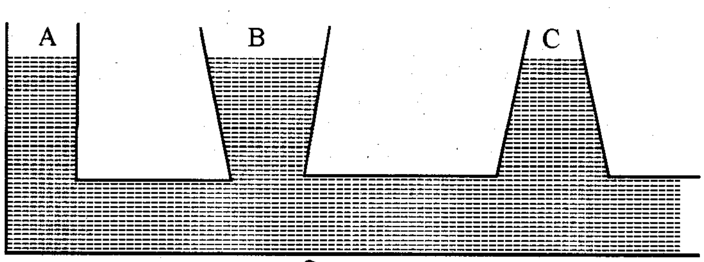
(iii) गुरुत्व जनित त्वरण (g)

द्रव–स्तम्भ का दाब पात्र की आकृति तथा आधार के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है। यदि द्रव के मुक्त पृष्ठ पर वायुमण्डलीय दाब P_a हो तब द्रव के मुक्त पृष्ठ से h गहराई पर

कुल दाब = वायुमण्डल का दाब + द्रव के स्तम्भ का दाब

$P = P_a + h\rho g$ ...(2)

समान क्षैतिज तल (समान गहराई) के सभी बिन्दुओं पर द्रव का दाब समान होता है। इसके लिए चित्रानुसार विभिन्न आकृतियों के तीन पात्रों A, B तथा C पर विचार करते हैं। जिन्हें आधार में एक क्षैतिज पाइप द्वारा जोड़ा गया है।



चित्र 11.2

जब पानी भरा जाता है तब तीनों पात्रों में पानी का तल समान रहता है। जबकि पात्रों में पानी की मात्रा भिन्न–भिन्न रहती है। इसका कारण है कि पात्रों के आधार पर दाब समान रहता है। यह तथ्य द्रव–स्थैतिक विरोधाभास (Hydrostatic Paradox) कहलाता है।

उदा 2. किसी झील के पृष्ठ से 10m गहराई पर किसी तैराक पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल–दिया है–

गहराई h = 10 मी.,
पानी का घनत्व ρ = 1000 किग्रा./मी.^{3}
गुरुत्वीय त्वरण g = 10 मी./से.^{2}
वायुमण्डलीय दाब $P_a = 1.01 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}
तैराक पर कुल दाब $P = P_a + h\rho g$
$= 1.01 \times 10^5 + 10 \times 1000 \times 10$
या $P = 2.01 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}
≈ 2 वायुमंडलीय

स्पष्टतः–

- 10 मी. गहराई पर जल में दाब खुले पृष्ठ की तुलना में दो गुना (100% वृद्धि) होता है।
- 1 किमी गहराई पर यह खुले पृष्ठ की तुलना में 101 गुना (100 वायुमण्डलीय दाब की वृद्धि) होता है। पनडुब्बियों के निर्माण में इस तथ्य को ध्यान में रखा जाता है।

11.2.2 पास्कल का नियम (Pascal's law)

इस नियम के अनुसार किसी तरल में किसी स्थान पर आरोपित दाब सभी दिशाओं में एक समान रूप से संचरित होता है तथा सदैव पात्र के अभिलम्ब रहता है। इसे द्रव का दाब के संचरण का नियम भी कहते हैं।

व्युत्पत्ति (Proof)–माना कि एक पात्र में द्रव भरा है। इसमें चार पिस्टन *a*, b, c तथा d लगे हुए हैं। इनके अनुप्रस्थ काट क्षेत्र क्रमशः A_1, A_2, A_3 तथा A_4 हैं। यदि पिस्टन *a* को बल F_1 की सहायता से धकेला जाता है तब पिस्टन *a* पर आरोपित दाब

$$= \frac{F_1}{A_1}$$

पास्कल के नियमानुसार दाब सभी दिशाओं में एक समान रूप से संचरित हो जाता है। इसका कारण यह पाया जाता है कि पिस्टन b, c व d को अपनी स्थिति में बनाए रखने के लिए क्रमशः F_2, F_3 व F_4 बल इस प्रकार आरोपित करने पड़ते हैं कि

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_3}{A_3} = \frac{F_4}{A_4} = \frac{F_1}{A_1}$$

यही पास्कल का नियम है।

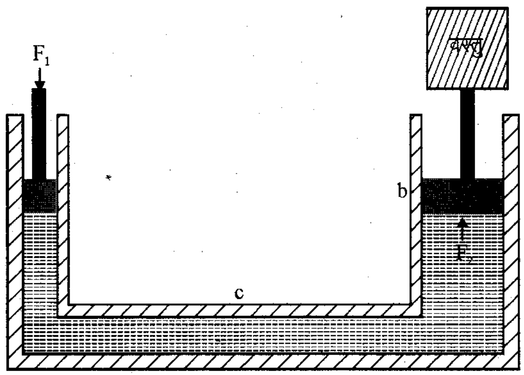
पास्कल के नियम के अनुप्रयोग (Applications of Pascal's law)

हाइड्रोलिक मशीनें जैसे हाइड्रोलिक प्रेस, हाइड्रोलिक ब्रेक तथा हाइड्रोलिक लिफ्ट पास्कल के नियम पर आधारित है। हाइड्रोलिक प्रेस का उपयोग बड़ी–बड़ी धातु की चादरों में छिद्र करने के लिए किया जाता है। यह रूई को दबाने तथा बीजों में से तेल निकालने में भी प्रयुक्त होती है।

हाइड्रोलिक ब्रेक का उपयोग भारी वाहनों की गति को कम करने में किया जाता है। इन युक्तियों में दाब संचरण के लिए तरलों का उपयोग किया जाता है।

हाइड्रोलिक लिफ्ट का उपयोग भारी वस्तुओं को उठाने में किया जाता है।

चित्रानुसार हाइड्रोलिक लिफ्ट में दो बेलनाकार पात्र a तथा b है, जिनमें पिस्टन लगे हैं। ये पात्र क्षैतिज नली c द्वारा परस्पर सम्बन्धित है। पात्रों के अनुप्रस्थ काट क्षेत्र क्रमशः A_1 व A_2 इस प्रकार है कि $A_1 < A_2$



चित्र 11.3 : द्रव चालित मशीन

पात्र के a पिस्टन पर आरोपित दाब

$$P = \frac{F_1}{A_1}$$

पास्कल के नियमानुसार पात्र के a पिस्टन के पर आरोपित दाब पात्र के b पिस्टन के द्रव में एक समान रूप से संचरित हो जाता है।

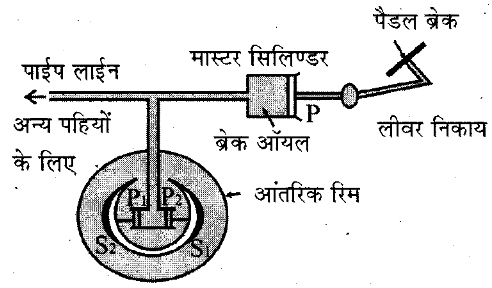
अतः पात्र के b पिस्टन पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर $F_2 = PA_2$ बल लगता है जिससे पिस्टन अधिक भार को संतुलित कर सकता है।

$$\therefore \qquad F_2 = PA_2 = \frac{F_1}{A_1} A_2 \qquad ...(1)$$

इस प्रकार A_1 पर आरोपित बल F_1. को परिवर्तित कर b पर स्थित भार को ऊपर या नीचे लाया जा सकता है। जिससे प्रयुक्त बल $\frac{A_2}{A_1}$ गुणक से बढ़ जाता है। (समी. (1) से) गुणक $\frac{A_2}{A_1}$ को युक्ति का **यांत्रिक लाभ** (mechanical advantage of the device) कहते हैं।

$\because A_1 < A_2$ अतः $F_2 > F_1$ अर्थात् कम क्षेत्रफल वाले पिस्टन पर कम बल लगाकर अधिक क्षेत्रफल वाले पिस्टन पर अधिक बल प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार यदि पात्र b के पिस्टन पर कोई बोझ रख दिया जाये तो उसे पात्र a के पिस्टन पर बहुत कम बल लगाकर ही ऊपर उठाया जा सकता है। यही हाइड्रोलिक लिफ्ट का सिद्धान्त है।

मोटर कार में द्रव चालित ब्रेक इसी सिद्धान्त पर कार्य करते हैं। द्रव चालित ब्रेक के उपयोग के लिए जब पैडल पर पैर से कम बल लगाया जाता है तो पिस्टन मास्टर बेलन के अंदर जाता है और उत्पन्न दाब ब्रेक तेल द्वारा पिस्टन के अधिक क्षेत्रफल पर संचारित होता है।



चित्र 11.4 तरल द्वारा रिम पर समान दाब का प्रसारण

जिससे पिस्टन पर अधिक बल कार्य करता है। इसके नीचे की ओर धकेले जाने पर ब्रेक शू फैल कर ब्रेक लाइन को दबाता है। इस प्रकार पैडल पर थोड़ा सा बल लगाने पर, पहिए पर अधिक बल लगता है जो मंदन उत्पन्न करता है। इसी प्रकार बाकी पहियों पर भी समान दाब संचरित होने से ब्रेक निकाय कार्य करता है।

उदा 3. भिन्न-भिन्न अनुप्रस्थ काट वाली दो पिचकारियों में (बिना सुई के) पानी भरा है और इन्हें पानी से भरी रबर नली से कसकर जोड़ दिया गया है। छोटे तथा बड़े पिस्टन के व्यास क्रमशः 1 सेमी. तथा 3 सेमी. हैं। (a) जब छोटे पिस्टन पर 10N का बल लगाया जाता है तो बड़े पिस्टन पर लगे बल का आंकलन कीजिए। (b) यदि छोटे पिस्टन को 6 सेमी. अंदर धक्का दिया जाता है तो बड़ा पिस्टन कितना बाहर चलेगा?

हल–दिया है–

छोटे पिस्टन की त्रिज्या $r_1 = \frac{1}{2}$ सेमी. $= \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ मी.

$\Rightarrow$ अनुप्रस्थ काट $A_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 10^{-4}$ मी.^{2}

बड़े पिस्टन की त्रिज्या $r_2 = \frac{3}{2}$ सेमी. $= \frac{3}{2} \times 10^{-2}$ मी.

$\Rightarrow$ अनुप्रस्थ काट $A_2 = \pi r_2^2 = \frac{9\pi}{4} \times 10^{-4}$ मी.^{2}

(a) छोटे पिस्टन पर बल $F_1 = 10$ न्यूटन,

पास्कल नियम से चूंकि द्रव दाब का सभी दिशाओं में समान रूप से संचरण होता है

अतः छोटे पिस्टन पर दाब = बड़े पिस्टन पर दाब

$$\Rightarrow \qquad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow \qquad F_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1}$$

$$= \frac{10 \times \frac{9\pi}{4} \times 10^{-4}}{\frac{\pi}{4} \times 10^{-4}} = 90 \text{ न्यूटन}$$

(b) छोटे पिस्टन को 6 सेमी अन्दर धकेलने पर, छोटे पिस्टन की ओर पानी के आयतन की जितनी कमी होगी उतनी ही बड़े पिस्टन की ओर वृद्धि होगी अतः

$$A_1 x_1 = A_2 x_2$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = \frac{A_1 x_1}{A_2} \qquad \text{जहाँ } x_1 = 6 \text{ सेमी.}$$

$= 6 \times 10^{-2}$ मी.

$$= \frac{\frac{\pi}{4}\times10^{-4}\times6\times10^{-2}}{9\frac{\pi}{4}\times10^{-4}}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{6}{9}\times10^{-2} = 0.67\times10^{-2}$ मी.

$= 0.67$ सेमी.

उदा.4. एक कार उत्थापक में छोटे पिस्टन जिसकी त्रिज्या 5 सेमी. है पर F_1 बल संपीड्य वायु लगाती है। यह दाब 15 cm त्रिज्या वाले दूसरे पिस्टन पर संचरित होता है। यदि उठाई जाने वाली कार की संहति 1350 kg हो तो F_1 का आंकलन कीजिए। इस कार्य को संपन्न करने के लिए आवश्यक दाब क्या है? ($g = 9.8\ ms^{-2}$)

हल–दिया है–

छोटे पिस्टन की त्रिज्या $r_1 = 5$ सेमी. $= 5\times10^{-2}$ मी.

$\Rightarrow \quad A_1 = \pi r_1^2 = 25\pi\times10^{-4}$ मी.^{2}

बड़े पिस्टन की त्रिज्या $r_2 = 15$ सेमी. $= 15\times10^{-2}$ मी.

$\Rightarrow \quad A_2 = \pi r_2^2 = 225\pi\times10^{-4}$ मी.^{2}

बड़े पिस्टन पर कार का बल $F_2 = mg = 1350\times9.8 = 13230$ न्यूटन

पास्कल नियम से $\quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

अतः बल $\quad F_1 = \frac{F_2A_1}{A_2}$

$$= \frac{13230\times25\pi\times10^{-4}}{225\pi\times10^{-4}}$$

$$= \frac{13230}{9} = 1470 \text{ न्यूटन}$$

$\approx 1.5\times10^3$ न्यूटन

इस बल के संगत वायु दाब $P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5\times10^3}{25\pi\times10^{-4}}$

$$= \frac{1.5\times10^7}{25\times3.14}$$

$= 1.91\times10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

यह वायुमण्डलीय दाब का लगभग दुगुना है।

11.2.3 वायुमण्डलीय दाब (Atmospheric pressure)

पृथ्वी के चारों ओर उपस्थित गैसीय आवरण द्वारा पृथ्वी की सतह पर आरोपित दाब वायुमण्डलीय दाब कहलाता है। किसी बिन्दु पर वायुमण्डलीय दाब उस वायु स्तम्भ के भार के तुल्य होता है जिसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल एकांक हो तथा जिसकी लम्बाई उस बिन्दु से प्रारंभ होकर वायुमण्डल के अन्त तक जाती हो।

समुद्र तल पर मानक या सामान्य वायुमण्डलीय दाब (मानक दाब) का मान 0°C ताप तथा 45° अक्षांश पर पारे के 76 सेमी. स्तम्भ के दाब के तुल्य होता है।

$\therefore$ 1 वायुमण्डलीय दाब (atm) $= 0.76\times13.6\times10^3\times9.8$

$= 1.013\times10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$= 1.013\times10^5$ पास्कल (Pa)

[$\because P = h\rho g$ तथा 0°C पर पारे का घनत्व $\rho = 13.6\times10^3$ किग्रा./मी.^{3}]

वायुमण्डलीय दाब के प्रायोगिक मात्रक–

1 टोर (torr) = 1 मिमी. पारे के स्तम्भ का भार

$= 10^{-3}\times13.6\times10^3\times9.8$ न्यूटन/मी.^{2}

$= 133$ न्यूटन/मी.^{2}

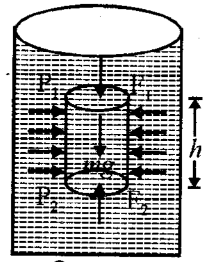
$= 133$ पास्कल (Pa)

1 बार (bar) $= 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$= 10^5$ पास्कल (Pa)

गहराई के साथ दाब में परिवर्तन (गेज दाब)

द्रव से भरे एक पात्र पर विचार करते हैं। यह द्रव साम्यावस्था में है। द्रव के भीतर, h ऊँचाई तथा A अनुप्रस्थ काट क्षेत्र के द्रव के एक बेलनाकार अवयव (द्रव स्तम्भ) पर विचार करते हैं। इस स्थिति में द्रव स्तम्भ पर कार्यरत् बल निम्न होंगे–



चित्र 11.5

(i) $F_1 = P_1A$ (द्रव–स्तम्भ के ऊपरी फलक पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

जहाँ P_1 = द्रव–स्तम्भ के ऊपरी फलक पर द्रव का दाब

(ii) $F_2 = P_2A$ (द्रव–स्तम्भ के निचले फलक पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)

जहाँ P_2 = द्रव–स्तम्भ के निचले फलक पर द्रव का दाब

(iii) $W = mg$ (द्रव–स्तम्भ का भार, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

$\because$ बेलनाकार द्रव–स्तम्भ साम्यावस्था में है अतः द्रव–स्तम्भ पर परिणामी बल शून्य होगा अर्थात्

$$F_1 + W - F_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_1A + mg - P_2A = 0$$

$$P_1A + mg = P_2A$$

$$\Rightarrow \quad P_2 = P_1 + \frac{mg}{A} \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad P_2 = P_1 + \frac{Ah\rho g}{A}$$

[$\because$ बेलनाकार द्रव–स्तम्भ का द्रव्यमान m = आयतन×द्रव का घनत्व]

= अनुप्रस्थ काट क्षेत्र × ऊँचाई × घनत्व = $Ah\rho$

$$\Rightarrow \quad P_2 = P_1 + h\rho g \quad ....(2)$$

$$\Rightarrow \quad P_2 - P_1 = h\rho g \quad ...(3)$$

समी. (3) h गहराई द्वारा भिन्न दो बिन्दुओं के मध्य दाबान्तर है।

इस समीकरण से स्पष्ट है कि–

1. $P_2 > P_1$ अर्थात् द्रव के भीतर, द्रव की खुली सतह की अपेक्षा दाब अधिक होता है।
2. यदि $g = 0$ अर्थात् गुरुत्व प्रभाव अनुपस्थित हो तो $P_2 - P_1 = 0$

   $P_2 = P_1$

   अर्थात् गुरुत्व को अनुपस्थित मानते हुए सन्तुलन में द्रव के प्रत्येक बिन्दु पर समान दाब होता है अतः हम कह सकते हैं कि द्रव के भीतर, ऊर्ध्वाधर रेखा में किन्हीं दो बिन्दुओं का दाबान्तर केवल गुरुत्व प्रभाव के कारण होता है।
3. द्रव के किसी बिन्दु पर दाब केवल उसकी ऊर्ध्वाधर गहराई व घनत्व पर निर्भर करता है, बर्तन के आकार पर नहीं।
4. विभिन्न द्रवों में समान गहराई पर दाब उनके घनत्वों के अनुपात में होता है।

महत्वपूर्ण–यदि h ऊँचाई के द्रव–स्तम्भ के शीर्ष फलक को वायुमण्डल

में खुला छोड़ दिया जाए तब $P_1 = P_a$ (वायुमण्डलीय दाब)

∴ समी. (2) से

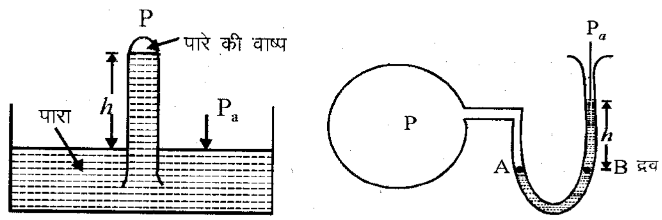
$$P_2 = P_a + h\rho g$$

यदि $P_2 = P$ मान लिया जाए तब परम दाब या कुल दाब

$$P = P_a + h\rho g \qquad ...(4)$$

इस प्रकार वायुमण्डल के लिए खुले पृष्ठ के नीचे दाब P वायुमण्डलीय दाब की अपेक्षा $h\rho g$ परिमाण से अधिक होगा। h गहराई पर स्थित किसी बिन्दु पर अतिरिक्त दाब $P - P_a = h\rho g$ उस बिन्दु पर **गेज दाब** कहलाता है।

बैरोमीटर (barometer) वायुमण्डलीय दाब मापने में तथा मैनोमीटर (manometer) दाबांतर मापने में प्रयोग में लाया जाता है।



(a) पारद वायु दाब मापी (बैरोमीटर) **(b) खुली नली मैनोमीटर (दाबांतर मापी)**

चित्र 11.6

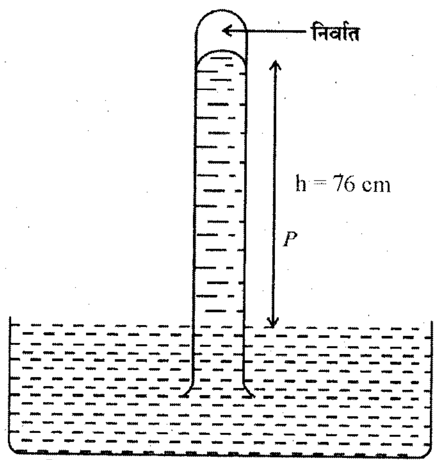
चित्र (*a*) तथा (*b*) के अनुसार,

बैरोमीटर में $P_a = h\rho g$

$$P << P_a$$

मैनोमीटर में $P - P_a = h\rho g$

इसे **गेज दाब** कहते है। कम दाबान्तर मापने के लिए कम घनत्व का द्रव जैसे तेल तथा अधिक दाबान्तर मापने के लिए अधिक घनत्व का द्रव जैसे पारा भरा जाता है तथा $P_A = P_B$



चित्र 11.7 टोरिसैली बैरोमीटर

महत्वपूर्ण तथ्य

1. **उत्प्लावन बल** (Force of buoyancy)–जब कोई ठोस पिण्ड किसी द्रव में आंशिक रूप से अथवा पूर्णतया डुबोया जाता है, तो पिण्ड एक उत्प्लावन बल का अनुभव करता है। इस उत्प्लावन बल का मान, ठोस द्वारा हटाये गये द्रव के भार के बराबर होता है।
2. **आर्किमिडीज का सिद्धान्त** (Principle of Archimedes)–जब कोई वस्तु किसी द्रव में पूर्णरूप से अथवा आंशिक रूप से डुबायी जाती है, तो उसके भार में कमी प्रतीत होती है। भार में यह आभासी कमी वस्तु द्वारा हटाये गये द्रव के भार के बराबर होती है।
3. यदि किसी स्थान पर भिन्न–भिन्न द्रवों के दाब मापियों को काम में लिया जाये जिनमें भरे द्रवों का घनत्व ρ_1 व ρ_2 हो और सम्बन्धित स्तम्भों की ऊंचाई क्रमशः h_1 व h_2 हो तो
$$P = h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$$
$$\Rightarrow \quad h_1\rho_1 = h_2\rho_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$
4. पास्कल × वर्ग मीटर = न्यूटन
5. समुद्र तल पर बैरोमीटर में पारे के स्तंम्भ की ऊंचाई 76 cm के लगभग होती है। जो एक वायुमण्डलीय दाब (1atm) के तुल्य है।
6. औषध विज्ञान तथा शरीर क्रिया विज्ञान में दाब के मात्रक के रूप में mm (Hg) तथा टॉर (torr) का उपयोग किया जाता है।
7. मौसम विज्ञान में दाब का सामान्य मात्रक बार (bar) तथा मिलिबार (millibar) लिया जाता है।
8. गेजदाब (या प्रभावी दाब) वास्तविक दाब तथा वायुमण्डलीय दाब का अन्तर होता है
$$P - P_a = P_g = h\rho g$$
9. वायुमण्डलीय दाब को प्रभावित करने वाले कारक–
(i) ऊँचाई का प्रभाव (ii) ताप का प्रभाव (iii) जल वाष्प का प्रभाव

उदा.5. समुद्र तल पर वायुमंडल का घनत्व 1.29 kg/m³ है। यह मानते हुए कि ऊँचाई के साथ घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, ज्ञात कीजिए कि वायुमंडल का विस्तार कितनी ऊँचाई तक है?

हल–दिया है–

वायु का घनत्व $\rho = 1.29$ किग्रा./मी.^{3}

$g = 9.8$ मी./से.^{2}

तथा हम जानते हैं कि वायुमण्डलीय दाब

$P_a = 1.01 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

अतः $P_a = h\rho g$ से

$$h = \frac{P_a}{\rho g} = \frac{1.01 \times 10^5}{1.29 \times 9.8}$$

$$= \frac{101 \times 10^5}{1264.2}$$

$\Rightarrow$ $h = 7.989 \times 10^3$ मी.

$\simeq 8$ किमी.

वास्तव में, न तो ऊँचाई के साथ वायु का घनत्व नियत होता है (इसमें कमी आती है) एवं न ही गुरुत्वीय त्वरण (इसमें भी कमी आती है) अतः वायुमंडल का विस्तार लगभग 100 किमी ऊँचाई तक होता है।

उदा.6. समुद्र के नीचे 1000m गहराई पर (a) परम दाब कितना है? (b) गेज़ दाब कितना है? (c) इस गहराई पर पनडुब्बी की 20cm × 20cm क्षेत्रफल वाली खिड़की (जिसके आंतरिक भाग का दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब के बराबर रखा गया है) पर आरोपित बल का आंकलन कीजिए। (समुद्र जल का घनत्व 1.03 × 10³ kg m⁻³, g = 10 m s⁻²)

हल– दिया है, $h = 1000$ मी,

पानी का घनत्व $\rho = 1.03 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3},

$g = 10$ मी./से.^{2}

(a) परम दाब या कुल दाब–यदि सतह पर वायुमंडलीय दाब P_a है तो

$$P_T = P_a + h\rho g$$
$$= 1.01 \times 10^5 + 1000 \times 1.03 \times 10^3 \times 10$$
$$P_T = 1.01 \times 10^5 + 103 \times 10^5$$
$$= 104.01 \times 10^5 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$
$$\simeq 104 \text{ वायुमंडलीय}$$

(b) गेज दाब–अर्थात् मापित दाब या 1 वायुमण्डलीय दाब के अतिरिक्त दाब

$$P_g = h\rho g = P_T - P_a$$
$$P_g = 104.01 \times 10^5 - 1.01 \times 10^5$$
$$= 103 \times 10^5 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$
$$\simeq 103 \text{ वायुमण्डलीय}$$

(c) पनडुब्बी की खिड़की पर आरोपित बल–

खिड़की का क्षेत्रफल $A = 20 \times 20 = 400$ सेमी.^{2}

$= 400 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

खिड़की पर आरोपित दाब = खिड़की के बाहर कुल दाब –आन्तरिक दाब

$= (P_a + h\rho g) - P_a = h\rho g$

$= P_g$ (गेज दाब)

अतः आरोपित बल $F = P_g A = 103 \times 10^5 \times 400 \times 10^{-4}$

$= 4.12 \times 10^5$ न्यूटन

11.3 श्यानता या विस्कासिता (Viscosity)

द्रवों की विभिन्न परतों के मध्य परस्पर आन्तरिक घर्षण बल कार्य करता है जो कि द्रव की गति में बाधा उत्पन्न करता है। जिस प्रकार ठोस पृष्ठों के मध्य लगने वाला घर्षण बल गति के विपरीत दिशा में होता है तथा पृष्ठ के स्पर्श रेखीय दिशा में कार्य करता है, उसी प्रकार द्रवों के मध्य लगने वाला आन्तरिक घर्षण बल परतों के स्पर्श रेखीय तथा गति के विपरीत दिशा में कार्य करता है जो कि द्रवों की परतों के मध्य होने वाली आपेक्षिक गति का विरोध करता है; यह बल **श्यान बल** कहलाता है।

द्रव का वह गुण जिसके कारण द्रव अपनी परतों के मध्य होने वाली आपेक्षिक गति का विरोध करता है, श्यानता कहलाता है। द्रव के परतों के मध्य की आपेक्षिक गति को बनाये रखने के लिए बाह्य बल लगाना पड़ता है अन्यथा आन्तरिक घर्षण बल के कारण द्रव की गति रूक जायेगी। यदि किसी पात्र में द्रव को विलोडित कर छोड़ दिया जाये तब जो द्रव सबसे पहले स्थिर होता है उसकी श्यानता सबसे अधिक होती है तथा जो द्रव सबसे बाद में रूकता है उसकी श्यानता सबसे कम होती है।

(1) ठोसों में श्यानता नहीं पायी जाती क्योंकि उसकी विभिन्न परतों में आपेक्षिक गतिशीलता नहीं होती है।

(2) गैसों में भी श्यानता बहुत कम होती है।

(3) द्रवों में श्यानता, अणुओं के मध्य लगने वाले ससंजक बलों के कारण होती है, जबकि गैसों में श्यानता, अणुओं द्वारा संवेग स्थानान्तरण के कारण होती है।

आदर्श द्रव (Ideal Liquid)–आदर्श द्रव वह द्रव है जिसमें निम्न गुण होते हैं–

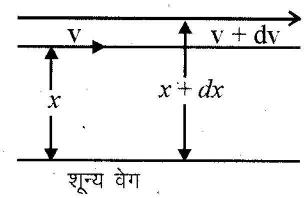
(i) अश्यानता–इससे तात्पर्य है कि द्रव की परतों के मध्य सापेक्ष गति होने पर आन्तरिक घर्षण बल कार्य नहीं करें। परन्तु व्यवहार में सभी तरलों में कुछ न कुछ श्यानता अवश्य होती हैं। श्यानता द्रवों में अधिक तथा गैसों में कम होती है।

(ii) असंपीड्यता–इससे तात्पर्य है कि द्रव को दबाने पर उसके घनत्व तथा आयतन में कोई अन्तर नहीं आये। व्यवहार में द्रवों की संपीड्यता बहुत कम होती है जबकि गैसों की संपीड्यता द्रवों की अपेक्षा बहुत अधिक होती है। आदर्श द्रव की संपीडयता शून्य होती है।

इस प्रकार व्यवहार में कोई तरल आदर्श तरल नहीं है केवल कल्पना मात्र है।

11.3.1 वेग प्रवणता (Velocity Gradient)

द्रव की परत जो किसी पृष्ठ के सम्पर्क में होती है वह स्थिर होती है जैसे–जैसे परतों की दूरी पृष्ठों से बढ़ती जाती है उनका वेग बढ़ता जाता है। द्रव की परतों के मध्य प्रवाह की दिशा के लम्बवत् एकांक दूरी के साथ वेग परिवर्तन को वेग प्रवणता कहते हैं।



चित्र 11.7

$$\text{वेग प्रवणता} = \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{दूरी}}$$

$$= \frac{(v + dv) - v}{(x + dx) - x} = \frac{dv}{dx}$$

वेग प्रवणता का मात्रक प्रति सेकण्ड तथा विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ होती है।

11.3.2 श्यानता गुणांक (Coefficient of Viscosity)

न्यूटन के अनुसार श्यान बल का मान निम्न कारकों पर निर्भर करता है–

(i) द्रव परत के सम्पर्क तल के क्षेत्रफल पर

$$F \propto A$$

(ii) द्रव परतों के सम्पर्क तलों के आपेक्षिक वेग प्रवणता पर

$$F \propto \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad F \propto A\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad F = -\eta A\frac{dv}{dx} \quad ...(1)$$

यहाँ η द्रव का श्यानता गुणांक कहलाता है। ऋणात्मक चिन्ह यह व्यक्त करता है कि श्यान बल की दिशा द्रव प्रवाह की दिशा के विपरीत होती है।

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dx} = \frac{\text{अपरूपण प्रतिबल}}{\text{विकृति दर}}$$

यदि $A = 1, \frac{dv}{dx} = 1$ हो तो $|F| = \eta$ अर्थात् **किसी द्रव का श्यानता गुणांक उस द्रव के भीतर एकांक क्षेत्रफल वाली दो परतों के बीच कार्य करने वाला श्यान बल है जबकि उन परतों के बीच एकांक वेग प्रवणता है।**

श्यानता गुणांक की विमा समी. (1) से $[M^1L^{-1}T^{-1}]$ प्राप्त होती है।

मात्रक (MKS पद्धति में)– न्यूटन–से./मी.^{2} या पास्कल सेकण्ड या किग्रा/मीटर × सेकण्ड = प्वाइजली (प्वाज) (Pas)

CGS पद्धति में–

ग्राम/सेमी. × सेकण्ड या प्वाइज

1 प्वाइजली = 10 प्वाइज

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(i) द्रवों की श्यानता, गैसों की श्यानता की तुलना में अत्यधिक (लगभग 100 गुनी) होती है अर्थात्– $\eta_L > \eta_G$

उदाहरण–जल की श्यानता = 0.01 प्वाइज जबकि वायु की श्यानता = 200 माइक्रोप्वाइज

(ii) दाब बढ़ाने पर, द्रवों (जल को छोड़कर) की श्यानता बढ़ती है। गैसों की श्यानता (व्यावहारिक रूप से) दाब पर निर्भर नहीं करती है। जल की श्यानता दाब बढ़ाने पर घटती है।

(iii) **श्यानता तथा ठोस घर्षण में अंतर**–श्यान बल परतों के सम्पर्क क्षेत्रफल, आपेक्षिक वेग तथा उनके मध्य दूरी पर निर्भर करता है जबकि घर्षण बल सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल, आपेक्षिक वेग तथा उनके मध्य दूरी पर निर्भर नहीं करता है।

(iv) अणुगति सिद्धान्त के आधार पर श्यानता के कारण संवेग स्थानान्तरित होता है जबकि विसरण व चालन के कारण क्रमशः द्रव्यमान व ऊर्जा स्थानान्तरित होती है।

(v) गाढ़े द्रवों जैसे शहद, ग्लिसरीन व कोलतार आदि की श्यानता, पतले द्रवों जैसे जल आदि से अधिक होती है।

(vi) द्रवों की श्यानता का कारण उसके अणुओं के मध्य ससंजक बल है जबकि गैसों की श्यानता का कारण विसरण है।

(vii) ताप बढ़ाने पर गैसों की श्यानता बढ़ती है क्योंकि ताप बढ़ाने पर विसरण की दर बढ़ जाती है।

(viii) ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता घट जाती है क्योंकि ताप बढ़ाने पर उनके अणुओं के मध्य ससंजक बल घट जाता है। श्यानता गुणांक व ताप में संबंध का एनड्रेड (Andrade) सूत्र

$$\eta = \frac{Ae^{ce/T}}{\rho^{-1/3}}$$

जहाँ T = द्रव का परम ताप ρ = द्रव का घनत्व

A व C नियतांक हैं।

(ix) अधिक श्यानता गुणांक के द्रवों का धारा रेखीय प्रवाह आसानी से होता है जबकि कम श्यानता गुणांक के द्रवों का धारा रेखीय प्रवाह कम वेग पर ही विक्षुब्ध हो जाता है।

(x) रक्त की आपेक्षिक श्यानता $\left(\frac{\eta}{\eta_{जल}}\right)$ ताप परिसर 0°C से 37°C के बीच अचर रहती है।

उदा.7. 100 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल की एक समतल प्लेट तथा एक बड़ी प्लेट के बीच ग्लिसरीन की 1मिमी. मोटी तह है। यदि ग्लिसरीन का श्यानता गुणांक 1.0 किग्रा./मीटर × से. हो तो प्लेट को 7 सेमी./से. के वेग से चलाने के लिए कितना बल चाहिये?

हल-प्लेट को एक निश्चित वेग से चलाने के लिये आवश्यक बल प्लेट पर कार्यशील श्यान बल F के बराबर होगा। सूत्रानुसार

$$F = -\eta A \frac{dv}{dx} = -\eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

प्रश्नानुसार

$\eta = 1.0$ किग्रा./मी. × से.

$A = 100$ सेमी.$^2 = 10^{-2}$ मी.^{2}

$\Delta v = -7 \times 10^{-2}$ मी./से.

$\Delta x = 1$ मिमी. $= 10^{-3}$ मी.

$$\therefore \quad F = \frac{1\times10^{-2}\times7\times10^{-2}}{10^{-3}}$$

= 0.7 न्यूटन

उदा.8.पानी की दो समान्तर परतों में सापेक्ष वेग 8.0 सेमी./से. है। यदि परतों के बीच की लम्बवत् दूरी 0.1 सेमी. हो तो वेग-प्रवणता ज्ञात कीजिये।

हल– वेग–प्रवणता $= \frac{\Delta v_x}{\Delta z}$

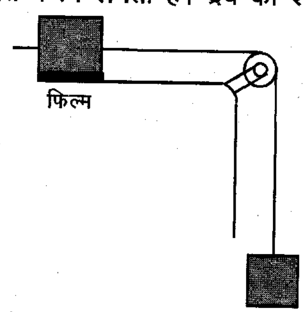
जहाँ Δv_x परतों के बीच सापेक्ष वेग है तथा Δz परतों के बीच दूरी है।

यहाँ $\Delta v_x = 8.0$ सेमी./से.

$\Delta z = 0.1$ सेमी.

$\therefore$ वेग प्रवणता $= \frac{8.0}{0.1} = 80$ प्रति सेकण्ड

उदा.9. 0.10m^2 क्षेत्रफल की कोई धातु की प्लेट किसी डोरी की सहायता से जो एक आदर्श घिरनी (जिसे संहति रहित, तथा घर्षण रहित माना गया है) के ऊपर से होकर जाती है, 0.010 kg संहति से चित्र की भांति जुड़ी है। कोई द्रव जिसकी फिल्म 0.30mm मोटाई की है, मेज तथा प्लेट के बीच रखी हुई है। मुक्त किए जाने पर प्लेट 0.085 ms^{-1} की अचर चाल से दायीं ओर गति करने लगती है। द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 11.8

हल–दिया है–

प्लेट का क्षेत्रफल $A = 0.10$ m^2,

मुक्त स्थिति में प्लेट की चाल $v = 0.085$ मी./से. (अचर)

∵ चाल अचर है अतः निकाय का त्वरण शून्य है अतः श्यान बल, आरोपित बाह्य बल mg के समान होगा।

अतः श्यान बल $F = mg = 0.010 \times 9.8 = 0.098$ न्यूटन

तथा फिल्म की मोटाई $dx = 0.30$ मिमी. $= 0.30 \times 10^{-3}$ मी.

अतः श्यानता गुणांक η = प्रतिबल/विकृति दर

$$= \frac{F/A}{v/dx} = \frac{F}{Av/dx}$$

$$= \frac{0.098}{0.1\times\frac{0.085}{0.30\times10^{-3}}}$$

$$= \frac{98\times3\times10^{-3}}{85}$$

$\eta = 3.45 \times 10^{-3}$ न्यूटन–से./मी.^{2}

श्यानता के अनुप्रयोग (Applications of Viscosity)

1. मानव शरीर में रक्त संचरण, रक्त की श्यानता पर निर्भर करता है।
2. मशीनों में डाले जाने वाले स्नेहक तेल के चुनते समय श्यानता का ध्यान रखा जाता है।
3. कुछ उपकरणों को श्यानता से अवमंदन किया जाता है।

4. श्यानता के ज्ञान से अणुभार ज्ञात किया जाता है।
5. श्यानता के उपयोग से उभय प्रतिरोधियों (Buffers) के कार्य में अन्तिम स्टेशन पर गति का तीव्रता से मन्दन करने तथा एक समान गति देने में होता है।

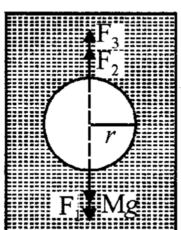
11.4 स्टोक्स का सूत्र (Stoke's Formula)

जब किसी गोलाकार सूक्ष्म पिण्ड को द्रव में गिराया जाता है तब पिण्ड द्रव की परतों को अपने साथ नीचे धकेलता है परन्तु पिण्ड से दूर स्थित द्रव की परतें विराम अवस्था में रहती है। इस प्रकार द्रव की परतों के मध्य आपेक्षिक गति उत्पन्न हो जाती है जिससे पिण्ड की गति अवमंदित होने का प्रयास होता है। एक स्थिति ऐसी भी प्राप्त होती है जब पिण्ड नियत वेग से गति करता है यह वेग अन्तिम वेग या **सीमान्त वेग** (terminal velocity) कहलाता है। इस स्थिति में पिण्ड पर लगने वाला श्यान बल, गुरुत्वीय बल से सन्तुलित हो जाता है।

स्टोक्स के अनुसार यदि एक r त्रिज्या का छोटा गोला अनन्त विस्तार के पूर्णतः समांग (homogeneous) तरल में सीमान्त वेग v से गति कर रहा हो तो गोले पर श्यान बल $F = 6\pi r\eta v$ होता है। यही स्टोक्स का नियम या सूत्र कहलाता है।

द्रव में गोले का गिरना (Fall of a Sphere in a Liquid)

माना कि r त्रिज्या व ρ घनत्व का एक गोला η श्यानता गुणांक व σ घनत्व वाले पूर्णतः समांग तरल माध्यम में गिरता है।



चित्र 11.9

गोले पर निम्न बल कार्य करते हैं–

(i) गुरुत्वीय बल F_1 = गोले का भार

$$= Mg = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)g \text{ (नीचे की ओर)}$$

(ii) उत्प्लावन बल F_2 = गोले द्वारा हटाये गये द्रव का भार

$$= mg = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\sigma\right)g \text{ (ऊपर की ओर)}$$

यहाँ *m* हटाये गये द्रव का द्रव्यमान है।

(iii) श्यान बल $F_3 = 6\pi r\eta v$ (ऊपर की ओर)

बलों के सन्तुलन की स्थिति में गोले का नियत वेग (अंतिम वेग) v_t हो तो–

$$Mg = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\sigma\right)g + 6\pi r\eta v_t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3\sigma g + 6\pi r\eta v_t$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi r\eta v_t = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\sigma g$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi r\eta v_t = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \sigma)$$

$$\Rightarrow \quad v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta} \quad ...(1)$$

अतः सीमान्त वेग v_t गोले के आकार के वर्ग पर निर्भर करता है तथा माध्यम की श्यानता के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(i) अंतिम वेग गोले की त्रिज्या पर निर्भर करता है, त्रिज्या n गुनी करने पर वेग n^2 गुना हो जाएगा।

(ii) पिण्ड का घनत्व अधिक होने पर अंतिम वेग भी अधिक होगा।

(iii) तरल की श्यानता व घनत्व अधिक होने पर अंतिम वेग कम होगा।

(iv) यदि $\rho > \sigma$ तो अंतिम वेग धनात्मक होगा अतः गोलाकार पिण्ड अंतिम वेग से नीचे की ओर गति करेगा।

(v) यदि $\rho < \sigma$ तो अंतिम वेग ऋणात्मक होगा तथा गोलाकार पिण्ड अंतिम वेग से ऊपर की ओर गति करेगा।

उदाहरण–जल में वायु का बुलबुला व हाइड्रोजन या हीलियम से भरे गुब्बारे इसी कारण हवा में ऊपर उठते है।

उदा.10. जल की एक बूँद जिसकी त्रिज्या 0.0015 मिमी. है, वायु में गिर रही है। यदि वायु का श्यानता-गुणांक 1.8×10^{-5} किग्रा./मी.से. हो तो बूंद का सीमान्त वेग क्या होगा? (जल का घनत्व = 1.0×10^3 किग्रा./मी.^{3} (g = 9.8 मी./से.^{2})। वायु का घनत्व नगण्य है।

हल–स्टोक्स के नियम से r त्रिज्या की जल की बूँद का सीमान्त वेग

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

जहाँ ρ जल का घनत्व है, σ वायु का घनत्व है तथा η वायु का श्यानता गुणांक है।

यहाँ σ नगण्य है।

$$r = 0.0015 \text{ मिमी.}$$
$$= 1.5 \times 10^{-3} \text{ मिमी.}$$
$$= 1.5 \times 10^{-6} \text{ मी.}$$

सूत्र में सभी मान रखने पर $v_t = \frac{2}{9} \times \frac{(1.5\times10^{-6})^2 \times (1.0\times10^3)\times 9.8}{1.8\times10^{-5}}$

$= 2.72 \times 10^{-4}$ मी./से.

उदा.11. धातु का एक गोला जिसकी त्रिज्या 1.0×10^{-3} मीटर तथा घनत्व 1.0×10^4 किग्रा./मी.^{3} है, पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में h दूरी तक मुक्त रूप से गिरने के पश्चात् पानी की टंकी में प्रवेश करता है। यदि पानी में प्रवेश के उपरान्त उसके वेग में कोई परिवर्तन नहीं होता तो h का मान ज्ञात कीजिये। दिया है–पानी का श्यानता गुणांक = 1.0×10^{-3} न्यूटन-से./मी.^{2}, (g = 10 मी./से.^{2}) जल का घनत्व = 1.0×10^3 किग्रा./मी.^{3} (g = 10 मी./से.^{2})

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.1)

हल–मुक्त रूप से h दूरी गिरने पर गोले द्वारा अर्जित वेग

$$v = \sqrt{2gh}$$

यह गोले का पानी में सीमान्त वेग है। अतः स्टोक्स के नियम से

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है, ρ गोले के पदार्थ का घनत्व है,

$\sigma = 1.0 \times 10^4$ किग्रा./मी.^{3}

पानी का घनत्व तथा η श्यानता गुणांक है।

$$\therefore \quad v = \frac{2\times(1.0\times10^{-3})^2\times(1.0\times10^4 - 1\times10^3)\times10}{9\times(1\times10^{-3})}$$

$= 20$ मी./से.

$$\therefore \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{20\times20}{2\times10} = 20 \text{ मीटर}$$

उदा.12. 2.0 mm त्रिज्या वाली एक तांबे की गेंद 20°C पर 6.5 cm s^{-1} सीमांत वेग से तेल के टैंक में गिर रही है। 20°C पर तेल की श्यानता का आंकलन कीजिए। तेल का घनत्व 1.5×10^3 kg m^{-3} तथा तांबे का घनत्व 8.9×10^3 kg m^{-3} है।

हल–दिया है–

अन्तिम वेग $v_t = 6.5$ सेमी/से.

$= 6.5 \times 10^{-2}$ मी./से.,

त्रिज्या r = 2 मिमी. $= 2 \times 10^{-3}$ मी.

तांबे का घनत्व $\rho = 8.9 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3},

तेल का घनत्व $\sigma = 1.5 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

अतः श्यानता गुणांक $\eta = \frac{2}{9} r^2 \frac{(\rho - \sigma)g}{v_t}$

$$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{4\times10^{-6}\times(8.9\times10^3 - 1.5\times10^3)\times9.8}{6.5\times10^{-2}}$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{290.08\times10^{-3}}{6.5\times10^{-2}}$$

$= 0.991$ न्यूटन–से./मी.^{2}

या $\eta = 9.91 \times 10^{-1}$ न्यूटन–से./मी.^{2}

उदा.13. समान त्रिज्या की दो बूँदें 20 m/s की नियत वेग से वायु में नीचे गिर रही हैं। यदि दोनो बूँदें संयुक्त होकर एक हो जाए, तो उसका अंतिम वेग क्या होगा ?

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.2)

हलः यदि छोटी बूँद की त्रिज्या r तथा बड़ी बूँद की त्रिज्या R है तब बड़ी बूँद का आयतन = दो छोटी बूँदों का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$R = 2^{1/3} r$$

छोटी बूँद का अंतिम वेग $v_1 = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

बड़ी बूँद का अंतिम वेग $v_2 = \frac{2}{9}\frac{R^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = (2^{1/3})^2 = (4)^{\frac{1}{3}}$$

$v_2 = 20\times(4)^{1/3}$ मीटर/सेकण्ड

11.4.1 स्टोक्स के सूत्र के अनुप्रयोग (Applications of Stoke's Formula)

(i) जब वायु में उपस्थित जल वाष्प धूल कणों पर संघनित होती है तब छोटी–छोटी बूंदें बनती है। ये बूंदें कम भार के कारण जल्दी ही सीमान्त वेग प्राप्त कर लेती है तथा कम वेग के कारण आकाश में तैरती हुई प्रतीत होती है। यही बादल कहलाते हैं।

(ii) जब जल वाष्प धूल कणों पर संघनित होती है तब इनका सीमान्त वेग त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती ($v \propto r^2$) होता है। जिससे छोटी बूंदे कम वेग से बड़ी बूंदे अधिक वेग से नीचे गिरती है।

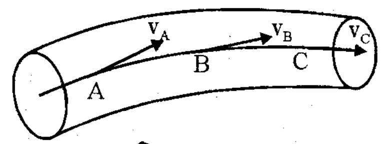
(iii) मिलिकन तेल बूंद विधि द्वारा इलेक्ट्रॉन का आवेश ज्ञात करने के लिए तेल की बूंदों का सीमान्त वेग ज्ञात करने में स्टोक्स सूत्र काम में लिया जाता है।

(iv) जब कोई सैनिक पैराशूट लेकर नीचे गिरता है तब प्रारंभ में उसका वेग तेजी से बढ़ता है परन्तु पैराशूट के खुल जाने पर वायु ऊपर की ओर अधिक श्यान बल लगाती है जिससे सैनिक अन्त में नियत सीमान्त वेग से नीचे गिरकर पृथ्वी पर सुरक्षित उतर जाता है।

11.5 धारा रेखीय प्रवाह (Stream Line Flow)

वे पदार्थ जिनमें बहने का गुण होता है, तरल (Fluid) पदार्थ कहलाते हैं। तरल पदार्थ द्रव तथा गैस दोनों ही हो सकते है।

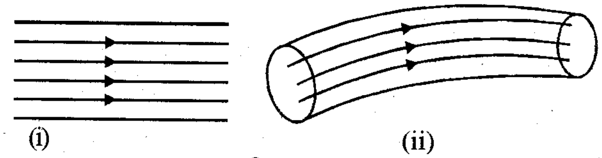
जब किसी तरल का प्रवाह इस प्रकार हो कि किसी बिन्दु से गुजरने वाले तरल के प्रत्येक कण का मार्ग वही हो जो उस बिन्दु से गुजरने वाले पहले कण का था, तब तरल का प्रवाह धारा रेखीय प्रवाह कहलाता है। (चित्र के अनुसार)



चित्र 11.10

किसी तरल के धारा रेखीय प्रवाह की निम्न विशेषताएँ होती है–

(1) धारा रेखीय प्रवाह सरल रेखा [चित्र (i)] या वक्र [चित्र (ii)] के रूप में हो सकता है।



चित्र 11.11

(2) धारा रेखीय प्रवाह में कण के पथ को धारा रेखा (Stream line) कहते हैं। धारा रेखा के किसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर द्रव के वेग की दिशा को व्यक्त करती है।

(3) दो धारा रेखाएँ एक दूसरे को नहीं काट सकती क्योंकि कटान बिन्दु पर द्रव के वेग की दो भिन्न–भिन्न दिशाएँ होगी जो कि असंभव है।

(4) धारा रेखा के विभिन्न बिन्दुओं पर द्रव का वेग भिन्न–भिन्न हो सकता है परन्तु धारा रेखा के किसी एक बिन्दु पर द्रव का वेग सदैव नियत रहता है।

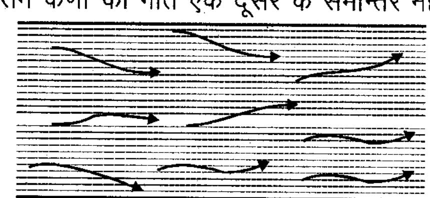
11.6 विक्षुब्ध प्रवाह या प्रक्षुब्ध प्रवाह (Turbulent Flow)

जब किसी तरल का प्रवाह अनियमित हो तब यह विक्षुब्ध प्रवाह कहलाता है। इस प्रवाह के अन्तर्गत कणों की गति अव्यवस्थित होती है जिससे तरल के भीतर भंवर धाराएँ उत्पन्न हो जाती है। विक्षुब्ध प्रवाह में किसी बिन्दु से गुजरने वाले तरल के कणों का वेग समय के साथ नियत नहीं रहता है। तेज बहती नदियों का जल का प्रवाह, आंधी–तूफान के समय वायु का प्रवाह आदि विक्षुब्ध प्रवाह के उदाहरण है।

विशेषताएँ –

(1) इसमें किसी बिन्दु से गुजरने वाले तरल कणों का वेग व वेग की दिशा समय के साथ परिवर्तित होती रहती है।

(2) इसमें कणों की गति एक दूसरे के समान्तर नहीं रहती है।



चित्र 11.12

11.7 रेनाल्ड्स संख्या (Reynold's Number)

किसी तरल का प्रवाह धारा रेखीय अथवा विक्षुब्ध होना एक विमाहीन अनुपात पर निर्भर करता है जिसे रेनाल्ड्स संख्या कहते हैं। रेनाल्ड्स संख्या द्रव की परतों के मध्य एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाले जड़त्व बल तथा श्यान बल के अनुपात के तुल्य होती है अर्थात्

$$\text{रेनाल्ड्स संख्या } R = \frac{\text{एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला जड़त्व बल}}{\text{एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला श्यान बल}}$$

$$R = \frac{\rho v_c D}{\eta}$$

रेनाल्ड्स संख्या R

(i) 0 व 2000 के मध्य हो तो द्रव का प्रवाह धारा रेखीय होगा।

(ii) 2000 व 3000 के मध्य हो तो द्रव का प्रवाह अस्थायी होगा अर्थात् धारा रेखीय से विक्षुब्ध प्रवाह में परिवर्तित होगा।

(iii) 3000 से अधिक हो तो द्रव का प्रवाह निश्चित रूप से विक्षुब्ध होगा।

रेनाल्ड्स संख्या तरल के वेग पर निर्भर करती है। जब रेनाल्ड्स संख्या का मान 2000 होता है तब तरल का वेग क्रान्तिक वेग कहलाता है।

क्रान्तिक वेग किसी तरल के प्रवाह का वह अधिकतम वेग है जिससे कम वेग पर तरल प्रवाह धारा रेखीय तथा जिससे अधिक वेग पर तरल प्रवाह विक्षुब्ध प्रवाह होता है।

रेनाल्ड्स ने प्रयोगों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला कि क्रान्तिक वेग (Critical Velocity) v_c का मान निम्न कारकों पर निर्भर करता है–नली के व्यास D, द्रव के घनत्व ρ तथा श्यानता गुणांक η पर

$$v_c \propto \eta^x \rho^y D^z$$

$$\Rightarrow \quad v_c = R\eta^x \rho^y D^z \quad ...(1)$$

R–रेनाल्ड्स संख्या है।

D की विमा $[L^1]$, घनत्व की विमा $[M^1L^{-3}]$, श्यानता गुणांक की विमा $[M^1L^{-1}T^{-1}]$

$$\therefore \quad [M^0L^1T^{-1}] = [M^1L^{-1}T^{-1}]^x [M^1L^{-3}]^y [L^1]^z$$

$$\Rightarrow \quad [M^0L^1T^{-1}] = [M^xL^{-x}T^{-x}M^yL^{-3y}L^z]$$

$$\Rightarrow \quad [M^0L^1T^{-1}] = [M^{x+y}L^{-x-3y+z}T^{-x}]$$

विमाओं की तुलना करने पर

$$\therefore \quad x + y = 0,$$

$$-x - 3y + z = 1,$$

$$-x = -1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -1$$

$$\text{तथा} \quad -1 - 3(-1) + z = 1$$

$$\Rightarrow \quad z = -1$$

$$\therefore \text{ समी (1) से} \quad v_c = R\eta^1\rho^{-1}D^{-1}$$

$$v_c = \frac{R\eta}{\rho D} \quad ...(2)$$

इस प्रकार क्रांतिक वेग का मान (i) श्यानता गुणांक (η) के समानुपाती (ii) तरल के घनत्व (ρ) के व्युत्क्रमानुपाती तथा (iii) नली के व्यास (D) के व्युत्क्रमानुपाती होता है। नियतांक R रेनाल्ड्स संख्या है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

(1) अधिक श्यानता के लिए रेनाल्ड्स संख्या कम प्राप्त होती है। अतः द्रव जितना अधिक श्यान होगा उसका धारा रेखीय प्रवाह उतना ही आसान होगा।

(2) ज्वालामुखी के फटने पर उससे निकलने वाला लावा बहुत अधिक गाढ़ा होते हुए भी अधिक तेजी से बहता है क्योंकि जब द्रव का वेग क्रांतिक वेग से अधिक हो जाता है तो प्रवाह पर घनत्व का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है। श्यानता का प्रभाव बहुत कम पड़ता है।

उदा.14. 2.5 सेमी व्यास की नली में पानी को किस अधिकतम वेग से प्रवाहित किया जाये कि प्रवाह धारा रेखीय रहे ? पानी का श्यानता गुणांक 0.001 किग्रा./मी. से. है।

हल–

$$\text{व्यास } D = 2.5 \text{ सेमी.} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ मीटर}$$

$$\eta = 0.001 = 10^{-3} \text{ किग्रा./मी. से.}$$

$$\text{पानी का घनत्व } \rho = 10^3 \text{ किग्रा./मी.}^3$$

$\because$ धारा रेखीय प्रवाह के लिए

$$R = 2000$$

$$\therefore \quad \text{क्रान्तिक वेग } v_c = \frac{R\eta}{D\rho}$$

$$v_c = \frac{2000 \times 10^{-3}}{2.5 \times 10^{-2} \times 10^3}$$

$$v_c = 0.08 \text{ मी./सेकण्ड}$$

उदा.15 1.25 cm व्यास की किसी जल टोंटी से प्रवाहित होने वाले जल की दर 0.48 L/min है। जल का श्यानता गुणांक 10^{-3} Pa-s है। कुछ समय पश्चात् प्रवाह की दर बढ़कर 3L/min. हो जाती है। दोनों प्रवाहों के लिए अभिलक्षण बताइये।

हल–दिया है–नली का व्यास D= 1.25 सेमी. = 1.25×10^{-2} मी.

$$\text{श्यानता गुणांक } \eta = 10^{-3} \text{ पास्कल–से.}$$

$$\text{प्रवाह दर } Q_1 = 0.48 \text{ लीटर/मिनट}$$

$$= \frac{0.48 \times 10^3}{60} \text{ सेमी.}^3/\text{से.}$$

$$= 8 \times 10^{-6} \text{ मी.}^3/\text{से.}$$

$$Q_2 = 3 \text{ लीटर/मिनट}$$

$$= \frac{3 \times 10^3}{60} \text{ सेमी.}^3/\text{से.} = 50 \times 10^{-6} \text{ मी.}^3/\text{से.}$$

$$\text{नली का अनुप्रस्थ काट } A = \pi r^2 = \frac{\pi \times (1.25 \times 10^{-2})^2}{4} \text{ मी.}^2$$

अतः $Q = Av$ से

प्रथम स्थिति में जल प्रवाह का वेग

$$v_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{8 \times 10^{-6} \times 4}{\pi \times 1.25 \times 1.25 \times 10^{-4}}$$

$$= 6.52 \times 10^{-2} \text{ मी./से.}$$

अतः रेनाल्ड्स संख्या $R = \frac{v_1 \rho D}{\eta}$

$$= \frac{6.52\times10^{-2}\times1\times10^{3}\times1.25\times10^{-2}}{10^{-3}}$$

$$= 8.15 \times 10^{2} = 815$$

$\Rightarrow R < 1000$ अतः इस स्थिति में प्रवाह धारा रेखीय होगा।

द्वितीय स्थिति में जल प्रवाह का वेग

$$v_2 = \frac{Q_2}{A}$$

$$= \frac{50\times10^{-6}\times4}{\pi\times1.25\times1.25\times10^{-4}}$$

$$= 40.76 \times 10^{-2} \text{ मी./से.}$$

अतः रेनाल्ड्स संख्या $R = \frac{v_2 \rho D}{\eta}$

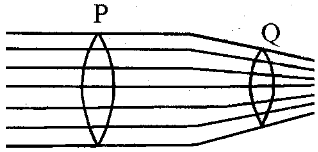
$$= \frac{40.76\times10^{-2}\times1\times10^{3}\times1.25\times10^{-2}}{10^{-3}}$$

$$= 50.95 \times 10^{2} = 5095$$

अतः इस स्थिति में प्रवाह विक्षुब्ध होगा।

11.8 सांतत्य समीकरण (Equation of Continuity) या अविरतता का सिद्धान्त (Principle of Continuity)

यदि कोई असंपीड्य तथा अश्यान द्रव किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाली नली में धारा रेखीय प्रवाह में बह रहा है तो नली के प्रत्येक स्थान पर अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा द्रव के वेग का गुणनफल एक ही होता है इसे अविरतता का सिद्धान्त कहते हैं।



चित्र 11.13

माना कि नली के P व Q सिरों पर अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल क्रमशः A_1 व A_2 तथा द्रव के वेग v_1 व v_2 है। एक सेकण्ड में P पर A_1 क्षेत्रफल से गुजरने वाले द्रव का आयतन A_1v_1 होगा। यदि द्रव का घनत्व ρ हो तो एक सेकण्ड में P सिरे से गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान

$$= A_1 v_1 \rho$$

इसी प्रकार Q सिरे से प्रति सेकण्ड गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान

$$= A_2 v_2 \rho$$

चूंकि P से निकलने वाला द्रव Q में से भी बाहर निकल जाता है।

$$A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho$$

या $\quad A_1 v_1 = A_2 v_2 = m/\rho$

अथवा $\quad Av =$ नियतांक

इसे सांतत्य समीकरण कहते हैं।

इस प्रकार नली में प्रत्येक स्थान पर नली के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा इसके वेग का गुणनफल एक नियतांक होता है अर्थात् नली के प्रत्येक अनुप्रस्थ

काट क्षेत्रफल से द्रव की प्रवाह दर बराबर होती है। यह **असंपीड्य तरल प्रवाह संहति संरक्षण का कथन है।**

सांतत्य समीकरण से यह निष्कर्ष निकलता है कि जहाँ नली चौड़ी होती है, वहाँ द्रव के प्रवाह का वेग कम तथा जहाँ नली संकरी होती है वहाँ द्रव का प्रवाह का वेग अधिक होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. प्रवाह का वेग द्रव पर निर्भर नहीं करता (यदि द्रव को अश्यान मानें)।
2. अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल घटाने पर प्रवाह वेग बढ़ता है तथा इसका विलोम भी सत्य है अतः
   - **(a)** पहाड़ी क्षेत्रों में जहाँ नदी संकीर्ण व उथली होती है (कम अनुप्रस्थ काट) प्रवाह वेग अधिक होता है। जबकि मैदानी क्षेत्रों में जहाँ नदी चौड़ी व गहरी (अधिक अनुप्रस्थ काट) होती है, प्रवाह वेग कम होता है अतः गहरा पानी शांत प्रतीत होता है।
   - **(b)** जब नल से जल बहता है तो गुरुत्व के कारण गिरते द्रव का वेग बढ़ता है अतः सांतत्य सिद्धान्त से जल की धारा का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल कम हो जाता है।

11.8.1 आदर्श द्रव (Ideal Liquid)

वह द्रव जिसकी श्यानता शून्य हो, द्रव असंपीड्य (Incompressible) हो, अर्थात द्रव की आयतन विकृति शून्य हो, द्रव का प्रवाह अघूर्णी हो अर्थात् किसी बिंदु के परितः द्रव का कोणीय संवेग शून्य हो, प्रत्येक बिंदु पर द्रव का वेग समय के सापेक्ष नियत हो, आदर्श द्रव कहलाता है। व्यवहार में कोई भी द्रव आदर्श द्रव नहीं है। आदर्श द्रव केवल काल्पनिक द्रव है।

11.9 प्रवाहित द्रव की ऊर्जा (Energy of a Flowing Liquid)

जब कोई द्रव बहता है तो उसमें तीन प्रकार की ऊर्जाएँ होती है–

(i) गतिज ऊर्जा (ii) स्थितिज ऊर्जा (iii) दाब ऊर्जा

(i) गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)–किसी द्रव में उसकी गति या वेग के कारण निहित ऊर्जा द्रव की गतिज ऊर्जा कहलाती है। यदि m द्रव्यमान का द्रव वेग v से धारा रेखीय प्रवाह के रूप में बह रहा हो तो

$$\text{द्रव की गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{प्रति एकांक द्रव्यमान गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}v^2$$

$$\text{प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}\rho v^2$$

(ii) स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)–किसी द्रव में पृथ्वी सतह (किसी निर्देश स्तर) से ऊँचाई या स्थिति के कारण निहित ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा कहलाती है। यदि बहते हुए द्रव का द्रव्यमान m हो, पृथ्वी तल से उसकी ऊँचाई h हो तो उसकी स्थितिज ऊर्जा $= mgh$

प्रति एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा $= gh$

प्रति एकांक आयतन की स्थितिज ऊर्जा $= \rho gh$

(iii) दाब ऊर्जा (Pressure Energy)–किसी द्रव में दाब के कारण निहित ऊर्जा उसकी दाब ऊर्जा कहलाती है। इसकी माप द्रव को दाब के विरुद्ध (वेग परिवर्तन किये बिना) धकेलने में किये गये कार्य से होती है। यदि

प्रवाहशील द्रव के किसी क्षेत्रफल A पर दाब P हो और द्रव इस दाब के कारण x दूरी से विस्थापित हो तो,

द्रव की दाब ऊर्जा = किया गया कार्य

= बल × विस्थापन

= दाब × क्षेत्रफल × विस्थापन

$= PAx = PV$

$\because \quad Ax = V =$ द्रव का आयतन

$\therefore$ एकांक द्रव्यमान की दाब ऊर्जा $= \frac{P}{\rho}$

तथा द्रव के एकांक आयतन की दाब ऊर्जा $= \frac{PV}{V} = P.$

11.10 बरनूली का सिद्धान्त (प्रमेय) (Bernoulli's Principle)

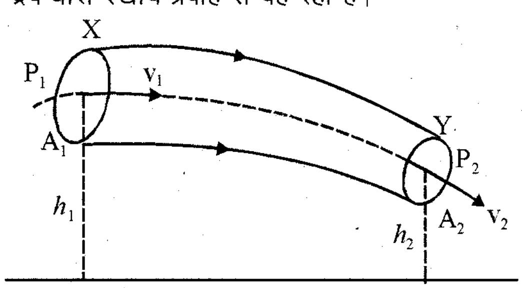
जब कोई अश्यान तथा असंपीड्य द्रव एक स्थान से दूसरे स्थान तक धारा रेखीय प्रवाह से बहता है तो उसके मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर एकांक आयतन की कुल ऊर्जा (अर्थात् दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग) एक नियतांक होता है अर्थात्

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{नियतांक}$$

यहाँ ρ द्रव का घनत्व है।

11.10.1 बरनूली प्रमेय का निगमन (Derivation of Bernoulli's Theorem)

माना कि किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाली नली में अश्यान, असंपीड्य द्रव धारा रेखीय प्रवाह से बह रहा है।



चित्र 11.14

माना कि नली के X सिरे का क्षेत्रफल A_1 तथा Y सिरे का क्षेत्रफल A_2 है। सिरे X पर द्रव का वेग v_1 तथा दाब P_1 तथा सिरे Y पर द्रव का वेग v_2 तथा दाब P_2 है।

एक सेकण्ड में नली के सिरे X में प्रवेश करने वाले द्रव पर किया गया कार्य

$W_1 =$ बल × दूरी

$$W_1 = P_1A_1 \times v_1 \quad \ldots(1)$$

एक सेकण्ड में नली के सिरे Y में से निकलने वाले द्रव द्वारा एक सेकण्ड में किया गया कार्य

$W_2 =$ बल × दूरी

$$W_2 = P_2A_2\, v_2 \quad \ldots(2)$$

अतः एक सेकण्ड में द्रव पर किया गया कुल कार्य

$$W = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \quad W = P_1 A_1 v_1 - P_2A_2v_2 \quad \ldots(3)$$

सांतत्य समीकरण से

$$A_1v_1 = A_2v_2 = \frac{m}{\rho} \quad \left(\because \text{आयतन} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{घनत्व}}\right)$$

$\therefore$ समी. (3) से $\quad W = (P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} \quad \ldots(4)$

नली में प्रति सेकण्ड प्रवेश करने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}mv_1^2$$

नली से प्रति सेकण्ड निकलने वाली द्रव की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv_2^2$

$\therefore$ द्रव की गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad \ldots(5)$$

X सिरे पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा $= mgh_1$

Y सिरे पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा $= mgh_2$

$\therefore$ एक सेकण्ड में प्रवाहित द्रव की स्थितिज ऊर्जा में कमी

$$= mg\,(h_1 - h_2) \quad \ldots(6)$$

$\therefore$ द्रव की ऊर्जा में परिणामी वृद्धि

$$= \frac{1}{2}m\,(v_2^2 - v_1^2) - mg(h_1 - h_2) \quad \ldots(7)$$

ऊर्जा में यह वृद्धि किए गए कुल कार्य के बराबर होनी चाहिए

$\therefore$ समी. (4) व (7) से

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}m\,(v_2^2 - v_1^2) - mg(h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g h_1 + \rho g h_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$\therefore \quad P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{नियतांक} \quad \ldots(8)$$

यही बरनूली की प्रमेय है।

दोनों पक्षों में ρg का भाग देने पर

समी. (8) से

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{\rho v^2}{\rho g} + \frac{\rho g h}{\rho g} = \text{नियतांक}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{नियतांक}$$

यहाँ $\frac{P}{\rho g}$ दाब शीर्ष, $\frac{v^2}{2g}$ वेग शीर्ष तथा h गुरुत्वीय शीर्ष कहलाता है अर्थात् एक अश्यान व असंपीड्य द्रव के धारा रेखीय प्रवाह में द्रव के किसी भी बिन्दु पर दाब शीर्ष, वेग शीर्ष तथा गुरूत्वीय शीर्ष का योग सदैव नियत रहता है।

जब तरल विरामावस्था में होता है अर्थात् प्रत्येक स्थान पर कणों का वेग शून्य होता है तब बरनूली समीकरण

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

$$\Rightarrow \quad (P_1 - P_2) = \rho g(h_2 - h_1)$$

बरनूली प्रमेय की सीमाएँ–

(i) यह प्रमेय आदर्श तरल (जिसमें श्यानता शून्य हो) के लिए सत्य है।

यहाँ तरल के श्यान बल के कारण गति का विरोध करने में व्यय ऊर्जा को नगण्य मान लिया गया है।

(ii) यहाँ नली जिसमें तरल प्रवाहित हो रहा है, को घर्षण रहित माना गया है जो वास्तव में संभव नहीं है। अतः घर्षण में व्यय ऊर्जा को नगण्य नहीं माना जा सकता है।

(iii) यहाँ धारारेखीय प्रवाह में नली की दीवार के सम्पर्क वाली तरल की परत का वेग शून्य तथा अक्षीय परत का वेग अधिकतम माना गया है। अतः सम्पूर्ण नली में तरल प्रवाह का वेग एक समान नहीं रहता है।

उदा.16.भिन्न-भिन्न व्यासों के दो क्षैतिज पाइप एक-दूसरे से जुड़े हैं, जिसमें जल बह रहा है। पहले पाइप में जल की चाल 4 मी./से. तथा दाब 2.0×10^4 न्यूटन/मी.^{2} है। दूसरे पाइप में जल की चाल तथा दाब की गणना कीजिये। पाइप के व्यास क्रमशः 3 तथा 6 सेमी. है।

हल–सांतत्य समीकरण के अनुसार, यदि किसी स्थान पर पाइप का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A है तथा उसमें जल के बहने की चाल v है, तब

$$Av = \text{नियतांक}$$

अथवा $A_1v_1 = A_2v_2$

अथवा $(\pi r_1^2)v_1 = (\pi r_2^2)v_2$

$$v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$$

यहाँ $r_1 = 1.5$ सेमी. $= 1.5 \times 10^{-2}$ मी.

$r_2 = 3$ सेमी. $= 3 \times 10^{-2}$ मी.

$v_1 = 4$ मी./से.

$$v_2 = \left(\frac{1.5\times10^{-2}}{3\times10^{-2}}\right)^2 \times 4 = 1 \text{मी./से.}$$

बरनूली सिद्धान्त से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

जल के लिए $\rho = 1 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

$v_1 = 4$ मी./से.

$v_2 = 1$ मी./से.

$P_1 = 2 \times 10^4$ न्यूटन/मी.^{2}

$$\therefore \quad P_2 = 2\times10^4 + \frac{1}{2}(1\times10^3)\times(4^2-1^2)$$

$$= 2\times10^4 + 0.75\times10^4$$

$$= 2.75\times10^4 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

उदा.17. 4×10^4 न्यूटन/मी.^{2} दाब का जल 2 मी./से. के वेग से 0.02 मी.^{2} अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल के पाइप से प्रवाहित होता है। यदि पाइप का अनुप्रस्थ काट घटकर 0.01 मी.^{2} हो जाता है तो अब पाइप में दाब का मान क्या होगा?

हल–प्रश्नानुसार, $P_1 = 4 \times 10^4$ न्यूटन/मी.^{2}

$v_1 = 2$ मी./से.

$A_1 = 0.02$ मी.^{2}

$A_2 = 0.01$ मी.^{2}

$P_2 = ?$

सांतत्य समीकरण से,

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

या

$$v_2 = \frac{A_1v_1}{A_2} = \frac{0.02\times2}{0.01}$$

$= 4$ मीटर/सेकण्ड

बरनूली सिद्धान्त से,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$4\times10^4 + \frac{1}{2}\times10^3\times4 = P_2 + \frac{1}{2}\times10^3\times(4)^2$$

या $$P_2 = 4\times10^4 + 2\times10^3 - 8\times10^3$$

$$= 10^3[40+2-8]$$

$$= 34\times10^3$$

$$= 3.4\times10^4 \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

उदा.18. एक परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाले क्षैतिज पाइप से पानी 30 लीटर/मिनट की दर से बाहर निकल रहा है। पाइप में उस बिन्दु पर जल का वेग ज्ञात करो, जहाँ पर त्रिज्या 2 cm है। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.10)**

हल : माना कि पाइप के पानी निकलने वाले सिरे पर पानी का वेग v_1 व अनुप्रस्थ काट A_1 है। तब निर्गत पानी का एकांक समय में आयतन

$$A_1v_1 = 30\frac{\text{लीटर}}{\text{मिनट}} = \frac{30\times10^{-3}}{60}\text{ मी.}^3/\text{से.} = 0.5\times10^{-3}\text{ मी.}^3/\text{से.}$$

माना कि पाइप के 2 cm वाले भाग पर अनुप्रस्थ काट A_2 व वेग v_2 है।

सांतत्य समीकरण से $A_1v_1 = A_2v_2$

$$\therefore v_2 = \frac{A_1v_1}{A_2} = \frac{.5\times10^{-3}}{12.56\times10^{-4}} = 0.4 \text{ मी/से}$$

11.10.2 बरनूली सिद्धान्त के अनुप्रयोग (Applications Based on Bernoulli's Principle)

(i) क्षैतिज नली में द्रव का प्रवाह (Motion of liquid in a horizontal tube)–यदि एक अश्यान व असंपीड्य द्रव किसी क्षैतिज नली से होकर प्रवाहित हो तो बरनूली सिद्धान्त से–

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

क्षैतिज नली के लिए $h_1 = h_2 = h$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{....(1)}$$

$\Rightarrow \qquad P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{नियतांक} \qquad ...(2)$

सांतत्य समीकरण से

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

यदि $A_1 > A_2$ तब $v_1 < v_2$

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}\rho v_1^2 < \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

जिससे समी. (1) से

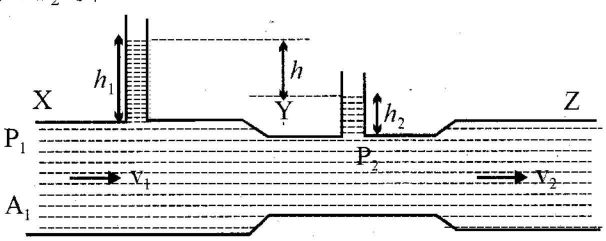
$$P_1 > P_2$$

अर्थात् जहाँ नली का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल कम होगा वहाँ द्रव का वेग अधिक तथा दाब कम होगा।

(ii) वेन्टुरी प्रवाहमापी (Venturi Flowmeter)–इस युक्ति की सहायता से किसी नली में बहने वाले द्रव की प्रवाह दर ज्ञात की जा सकती है।

इसमें एक क्षैतिज नली XYZ होती है जिसका मध्य भाग Y संकरा होता है। भाग X व Y पर जुड़ी दो ऊर्ध्वाधर नलियों द्वारा इन स्थानों पर द्रव के दाब को नापा जाता है जो मैनोमीटर की तरह कार्य करता है।

माना कि भाग X का अनुप्रस्थ काट A_1, द्रव का वेग v_1, द्रव का दाब P_1 है जबकि भाग Y का अनुप्रस्थ काट A_2, द्रव का वेग v_2 तथा द्रव का दाब P_2 है।



चित्र 11.15

बरनूली प्रमेय से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \qquad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \qquad ...(1)$$

जहाँ ρ नली में प्रवाहित द्रव का घनत्व

यदि दाब मापने वाली नलियों के द्रव स्तम्भों की ऊँचाईयों में अन्तर h है तब

$$h = h_1 - h_2$$

तब $\qquad P_1 - P_2 = h\rho g$

जहाँ ρ मेनोमीटर में द्रव का घनत्व

$\therefore$ समी. (1) से $\qquad h\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

$$\Rightarrow \qquad 2hg = v_2^2 - v_1^2 \qquad ....(2)$$

सांतत्य समी. से $\qquad A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$\therefore$ समी. (2) $\qquad 2gh = \left(\frac{A_1^2 v_1^2}{A_2^2} - v_1^2\right)$

$$= \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2$$

$$= \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) v_1^2$$

$$\Rightarrow \qquad v_1^2 = \frac{2hgA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}$$

$$\Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2hgA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad v_1 = A_2\sqrt{\frac{2hg}{A_1^2 - A_2^2}} \qquad ...(3)$$

नली में प्रति सेकण्ड प्रवाहित होने वाले द्रव का आयतन (द्रव प्रवाह की दर)

समी. (3) से $\qquad Q = A_1 v_1 = A_1 A_2\sqrt{\frac{2hg}{A_1^2 - A_2^2}}$

$$\Rightarrow \qquad Q \propto \sqrt{h}$$

यदि मैनोमीटर में ρ_m घनत्व का द्रव भरा हो तथा नली में प्रवाहित द्रव का घनत्व ρ हो तो चौड़ी गर्दन पर तरल का वेग

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2\rho_m hg}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

जहाँ $P_1 - P_2 = h\rho_m g$

तथा $\qquad Q = A_1 A_2\sqrt{\frac{2\rho_m hg}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$

फिल्टर पम्प या चूषित्र, बुनंसन बर्नर, कणित्र तथा स्प्रेयर इसी सिद्धान्त पर कार्य करते हैं।

अनुप्रयोग–मोटर वाहन अथवा स्वचालित वाहन में कार्बूरेटर में वेन्टुरीवाहिका (नोजल) होती है। जिसमें से तीव्र गति से वायु प्रवाहित होती है। सकरी गर्दन पर दाब कम होता है। इसलिए पैट्रोल (गैसोलीन) भीतर की ओर चैम्बर में चूस लिया जाता है। ताकि दहन के लिए वायु तथा ईंधन का सही मिश्रण प्राप्त हो सके।

उदा.19.एक क्षैतिज नली के दो बिन्दुओं A व B पर भिन्न-भिन्न अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल है। A का व्यास 4 सेमी. तथा B का व्यास 2 सेमी. है। A तथा B पर दो मैनोमीटर भुजायें लगी हैं। जब 0.8 ग्राम/सेमी.^{3} घनत्व का द्रव नली से होकर बहता है तो मेनोमीटर की भुजाओं के मध्य दाबान्तर 8 सेमी. है। नली में बहने वाले द्रव के प्रवाह दर की गणना कीजिये। (g = 980 सेमी/से.^{2})

हल–असमान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल वाली क्षैतिज नली में द्रव प्रवाह की दर

$$Q = A_1 A_2\sqrt{\frac{2hg}{(A_1^2 - A_2^2)}}$$

यहाँ $\qquad A_1 = \pi r_1^2 = \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4\pi$ सेमी.^{2}

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi\left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi \text{ सेमी.}^2$$

$g = 980$ सेमी./से.^{2}, $h = 8$ सेमी.

$$Q = 4\pi \times \pi\sqrt{\frac{2 \times 980 \times 8}{((4\pi)^2 - (\pi)^2)}}$$

$$= 4\pi\sqrt{\frac{2\times980\times8}{15}}$$

$$= 4\times3.14\times32.3$$

$$= 406 \text{ सेमी.}^3/\text{सेकण्ड}$$

उदा.20. रक्त वेग-किसी मूर्छित कुत्ते की बड़ी धमनी में रक्त का प्रवाह किसी वेंटुरीमापी से होकर परिवर्तित किया जाता है। इस युक्ति के चौड़े भाग की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल धमनी की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल $A = 8\ mm^2$ के बराबर है। युक्ति के संकरे भाग का क्षेत्रफल $a = 4\ mm^2$ है। धमनी में दाब ह्रास 24 Pa है। धमनी रक्त के प्रवाह की चाल क्या है?

हल–वेन्टुरी प्रवाह मापी के लिए

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho(v_2^2 - v_1^2) = 2(P_1 - P_2)$$

$$\because \quad A_1v_1 = A_2v_2 \text{ से } v_2 = \frac{A_1v_1}{A_2}$$

अतः
$$\rho\left(\frac{A^2v_1^2}{a^2} - v_1^2\right) = 2(P_1 - P_2)$$

$$\Rightarrow \quad \rho v_1^2\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) = 2(P_1 - P_2)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)}} \quad ...(1)$$

प्रश्नानुसार,दाब में कमी $P_1 - P_2 = 24$ पास्कल,

क्षेत्रफलों का अनुपात $\frac{A}{a} = 2$

तथा रक्त का घनत्व $\rho = 1.06\times10^3$ किग्रा./मी.^{3} होता है।

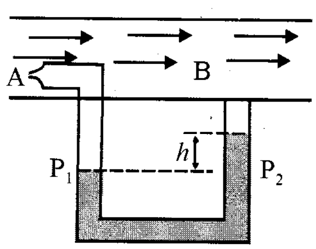
$$v_1 = \sqrt{\frac{2\times24}{1.06\times10^3(4-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{1060}} = 0.123 \text{ मी./से.}$$

(iii) पिटोट् नली (Pitot tube)

इसकी सहायता से किसी नली में प्रवाहित द्रव का वेग ज्ञात कर सकते हैं।

सिरे A का मुंह इतना संकीर्ण है कि इसमें से होकर द्रव नली में नहीं जाता है। यहाँ द्रव का वेग शून्य माना जा सकता है। इसे स्थिर बिन्दु (stagnation point) कहते हैं।



चित्र 11.16

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

A पर $v_1 = 0$; B पर $v_2 = v$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho(0)^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$$

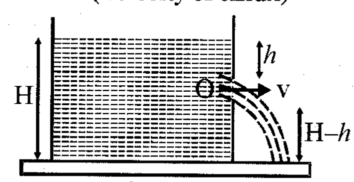
$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \quad ...(1)$$

$$P_1 - P_2 = h\rho g$$

$$v = \sqrt{\frac{2hg\rho}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2hg} \quad ...(2)$$

(iv) बहिःस्राव वेग (Velocity of efflux)–



चित्र 11.17

माना किसी बर्तन से H ऊंचाई तक ρ घनत्व का द्रव जैसे जल भरा हुआ है तथा द्रव के मुक्त तल से h गहराई पर एक छिद्र O है। बर्तन में द्रव के मुक्त तल तथा छिद्र O दोनों पर दाब वायुमण्डलीय है अतः द्रव के प्रवाह पर वायुमण्डलीय दाब का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा। द्रव के मुक्त तल पर गतिज ऊर्जा शून्य है जबकि छिद्र से निकलने वाले द्रव में स्थितिज व गतिज दोनों ऊर्जा है। द्रव की मुक्त सतह और बिंदु O के मध्य बरनूली प्रमेय से–

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gH = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(H - h)$$

$$P + 0 + \rho gH = P + \frac{1}{2}\rho v + \rho g(H - h)$$

जहाँ $P_1 = P_2 = P$ वायुमण्डलीय दाब है,

मुक्त पृष्ठ पर $v_1 = 0$ तथा छिद्र से निकलने वाले द्रव का बहिःस्राव वेग $v_2 = v$ है। अतः

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2hg$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad ...(1)$$

अर्थात् किसी बर्तन में भरे द्रव का बर्तन की दीवार से बने छिद्र से बहिःस्राव का वेग उस वेग के बराबर होता है जो कि द्रव, मुक्त पृष्ठ से छिद्र तक स्वतंत्रतापूर्वक गिरने से प्राप्त कर लेता है। यह **टॉरिसॉली प्रमेय** कहलाती है। छिद्र से निकलने के पश्चात् द्रव परवलयिक मार्ग पर चलता है।

उदा. 21.एक टंकी की दीवार में जल के स्वतंत्र तल से 10 मी. नीचे एक छिद्र है। छिद्र से जल के बहिःस्राव वेग की गणना कीजिये। यदि छिद्र की त्रिज्या 1 मिमी. हो तो जल की प्रवाह दर ज्ञात कीजिए।

हल– बहिः स्राव वेग $v = \sqrt{2gh}$

यहाँ $h = 10$ मी.

$g = 9.8$ मी./से.^{2}

11.16

$\therefore$ $v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10}$

$= 14$ मी./से.

प्रवाह दर $Q = Av$

$= \pi r^2 v$

यहाँ $r = 1$ मिमी. $= 10^{-3}$ मी.

$\therefore$ $Q = 3.14 \times (10^{-3})^2 \times 14$

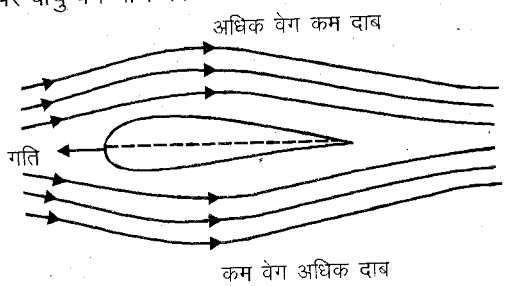
$= 4.396 \times 10^{-5}$ मी.^{3}/से.

उदा. 22. एक टंकी की दीवार में जल के मुक्त तल से 20 cm नीचे एक छिद्र है। छिद्र से बहिःस्राव वेग की गणना कीजिए। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.7)**

हल : बहिःस्राव वेग $= \sqrt{2gh}$

$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times .2} = 1.98$ m/s

(v) एयरोफाईल आकृति (Aerofoil Shape)-बरनूली प्रमेय का उपयोग वायुयान के पंखों की विशेष आकृति को बनाने में किया जाता है। पंखों के ऊपरी सतह की वक्रता निचली सतह से अधिक रखी जाती है। पंख के ऊपर तथा नीचे की वायु का प्रवाह धारा रेखीय होता है। पंखों की इस प्रकार की बनावट के कारण पंखों के ऊपर वायु वेग नीचे की अपेक्षा अधिक होता है।

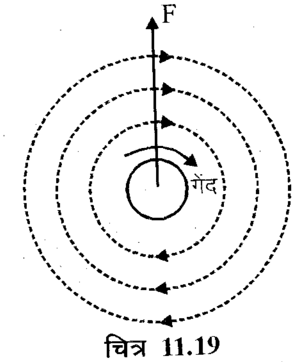


चित्र 11.18

इस कारण बरनूली प्रमेय के अनुसार पंख के ऊपरी सतह का वायुदाब नीचे की तुलना में कम होता है। इस दाबान्तर के कारण वायुयान पर ऊपर की ओर एक गतिक उत्थापक बल (lift force) कार्य करता है जिससे वायुयान ऊपर की ओर उठ जाता है तथा यह वायुयान के भार को सन्तुलित करता है।

(vi) मैगनस प्रभाव (Magnus effect)—जब क्रिकेट की गेंद स्पिन करती हुई हवा में फैंकी जाती है तब गेंद वायु में वक्रीय पथ पर घूर्णन करती है इसे गेंद का स्विंग करना (Swinging) कहते हैं। जब गेंद आगे की ओर चलती है तथा इसके सापेक्ष वायु पीछे की ओर चलती है तो इस स्थिति में गेंद के एक ओर वायु का परिणामी वेग बढ़ जाता है जबकि दूसरी ओर कम हो जाता है। जिससे बरनूली प्रमेय के अनुसार एक ओर वायुदाब कम तथा दूसरी ओर वायुदाब अधिक हो जाता है।

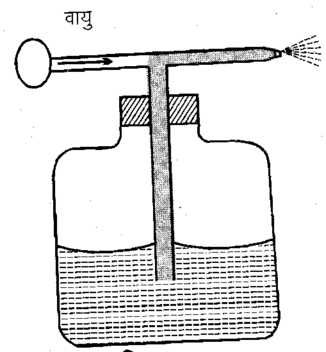
वायु के इस दाबान्तर के कारण गेंद झुके वक्रीय पथ पर चलती है। यह मैगनस प्रभाव कहलाता है।



चित्र 11.19

(vii) रेलगाड़ी आने पर प्लेटफॉर्म पर पटरियों के नजदीक खड़े व्यक्ति पटरी से दूर हट जाते हैं–इसका कारण यह है कि रेलगाड़ी के आने पर पटरी के समीप वायु का वेग अधिक हो जाता है जिससे बरनूली प्रमेय के अनुसार दाब कम हो जाता है। जबकि व्यक्ति के पीछे की वायु का दाब अधिक होने से व्यक्ति पर पटरी की ओर धक्का लगता है।

(viii) कणित्र या स्प्रेयर (Atomiser or Sprayer)–इस यंत्र की सहायता से किसी द्रव को छोटी–छोटी बूंदों के रूप में फुहारा (Spray) जाता है।



चित्र 11.20

चित्रानुसार जब किसी द्रव से भरे पात्र की नली के मुंह पर किसी पम्प से तेज गति से हवा प्रवाहित की जाती है तब नली के मुंह पर दाब कम हो जाता है। जिससे द्रव नली में ऊपर चढ़ जाता है तथा वायु के साथ मिलकर तेज फुहार के रूप में बाहर निकलने लगता है। कणित्र का उपयोग फिलट तथा इत्र छिड़कने में, नाइयों द्वारा सिर पर जल छिड़कने में, वाहनों, फर्नीचर आदि को रंगने में किया जाता है।

(ix) आँधी में टिन का उड़ना–जब तेज आंधी चलती है तब टिन की छत के ऊपर वायु का वेग बहुत अधिक हो जाता है जबकि छत के नीचे का वायु का वेग बहुत कम रहता है। अतः बरनूली प्रमेय के अनुसार छत के ऊपर का वायुदाब नीचे की तुलना में बहुत कम होने से दाबान्तर के कारण टिन की छत पर नीचे से ऊपर की ओर एक बल कार्य करता है जिससे हल्की टिन की छत ऊपर उड़ जाती है।

इसी प्रकार फव्वारे पर नाचती हल्की गेंद, फूंक मारने पर वायुदाब का कम होना, बुन्सन बर्नर, फिल्टर पम्प आदि बरनूली प्रमेय पर आधारित घटनाएँ हैं।

(x) गहरे जल का शांत होना (Still water runs deep)

गहरे जल में द्रव का स्थैतिक दाब अधिक होता है अतः बरनूली के सिद्धान्त से दाब अधिक होने से वहां जल की चाल कम होगी अर्थात् जल शांत होगा।

(xi) रक्त प्रवाह तथा हार्ट अटैक (दिल का दौरा)–जब शरीर में किसी धमनी के भीतर की दीवारों पर चिकनाई या कोलेस्ट्रॉल तथा कैल्शियम लवण आदि की पपड़ी जम जाती है। तब धमनी का आन्तरिक व्यास कम हो जाता है अर्थात् धमनी संकीर्ण हो जाती है। रक्त प्रवाह की दर को इस संकीर्ण भाग में नियत रखने के लिए रक्त पर लगने वाला दाब बढ़ना चाहिए। इस दाब को बढ़ाने के लिए हृदय की माँसपेशियाँ अपेक्षाकृत सामान्य से अधिक दाब लगाकर रक्त को हृदय से बाहर धकेलती है। जिससे धमनी के इस संकीर्ण भाग में रक्त के प्रवाह की गति बढ़ जाती है तथा बरनूली प्रमेय के अनुसार इस धमनी के भीतर दाब घट जाता है। अतः इस स्थिति

में धमनी की दीवार पर भीतर की ओर से लगने वाला दाब, इस पर बाहर की ओर से लगने वाले दाब से कम हो जाता है। जिससे धमनी संकुचित होकर बंद हो जाती है। इस स्थिति में बरनूली का सिद्धान्त लागू नहीं होता है। हृदय द्वारा रक्त पर लगाए गए दाब के कारण धमनी पुनः खुल जाती है। जब रक्त इस संकुचित भाग में बहता है तब वेग अधिक हो जाने के कारण दाब और कम हो जाता है तथा धमनी पुनः बन्द हो जाती है। अब यदि पपड़ी अपने स्थान से हट जाती है तथा हृदय में रक्त ले जाने वाली किसी छोटी नली में जाकर उसे बन्द (block) कर देती है तब हृदयघात रोग (heart attack) हो सकता है।

उदा.23. किसी पूर्णतः भारित बोइंग विमान की संहति 3.3×10^5 kg है। इसका कुल पंख क्षेत्रफल 500 m^2 है। यह एक निश्चित ऊँचाई पर 960 km/h की चाल से उड़ रहा है। (a) पंख के ऊपरी तथा निचले पृष्ठों के बीच दाबांतर आंकलित कीजिए। (b) निचले पृष्ठ की तुलना में ऊपरी पृष्ठ पर वायु की चाल में आंशिक वृद्धि आंकलित कीजिए। (वायु का घनत्व $\rho = 1.2$ kg m^{-3})

हल–दिया है–

विमान का द्रव्यमान $m = 3.3 \times 10^5$ किग्रा.,

पंख का क्षेत्रफल $A = 500$ मी.^{2}

विमान की चाल $v = 960$ किमी./घंटा

$$= \frac{960 \times 1000}{3600} = 266.66$$

$$\simeq 267 \text{ मी./से.}$$

(a) पंख के पृष्ठों पर दाबांतर के बल से विमान का भार संतुलित होना चाहिए

अतः $(P_1 - P_2)A = mg$ जहाँ $\begin{cases} P_1 - \text{पंख के निचले पृष्ठ पर दाब} \\ P_2 - \text{पंख के ऊपरी पृष्ठ पर दाब} \end{cases}$

$\Rightarrow$ दाबांतर $P_1 - P_2 = \frac{mg}{A} = \frac{3.3 \times 10^5 \times 9.8}{500}$

$$= 6.468 \times 10^3 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

$$\simeq 6.5 \times 10^3 \text{ न्यूटन/मी.}^2$$

(b) बरनूली प्रमेय से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

जहाँ v_1 = पंख के निचले पृष्ठ पर वेग,

v_2 = पंख के ऊपरी पृष्ठ पर वेग,

h_1 = पंख के निचले पृष्ठ की पृथ्वी तल से ऊँचाई,

h_2 = पंख के ऊपरी पृष्ठ की पृथ्वी तल से ऊँचाई

$\because h_1 \simeq h_2$ अतः

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2$$

या $$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$$

या $$v_2 - v_1 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(v_2 + v_1)}$$

अतः $P_1 - P_2 = 6.5 \times 10^3$ न्यूटन/मी.^{2},

घनत्व $\rho = 1.2$ किग्रा./मी.^{3},

औसत चाल $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 267$ मी./से.

$$v_2 - v_1 = \frac{6.5 \times 10^3}{1.2 \times 267} = 20.287 \text{ मी./से.}$$

तथा ऊपरी पृष्ठ पर वायु के वेग में निचले पृष्ठ से आंशिक वृद्धि

$$\frac{v_2 - v_1}{v_{av}} = \frac{20.287}{267}$$

$$= 0.0759 \approx 0.08$$

तथा प्रतिशत वृद्धि $= \frac{v_2 - v_1}{v_{av}} \times 100 = 8\%$.

11.11 पृष्ठ तनाव की अवधारणा (Concept of Surface Tension)

द्रवों का व्यवहार गुरुत्वाकर्षण बल के साथ–साथ अन्य बल से भी नियंत्रित होता है। यह बल सम्पर्क में आने वाली सतहों की प्रकृति पर निर्भर करता है। यदि द्रव का भार नगण्य माना जाये तब द्रव की आकृति पूर्ण गोलाकार होती है। उदाहरण के लिए पानी की छोटी बूंदें तथा पारे की छोटी बूंदें गोलाकार होती है। इसी प्रकार ड्रॉपर में से द्रव बूंदों के रूप में निकलता है। अतः यह स्पष्ट होता है कि दिये गये आयतन के लिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होता है। इस कारण द्रव पर गुरुत्वाकर्षण बल के अतिरिक्त एक ऐसा बल कार्य करता है जो उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल को न्यूनतम करने का प्रयास करता है। इस बल को द्रव का पृष्ठ तनाव कहते हैं।

महत्वपूर्ण–

(1) तनी हुई झिल्ली का तनाव तनन के साथ–साथ बढ़ता है जबकि द्रव का पृष्ठ तनाव नियत रहता है।

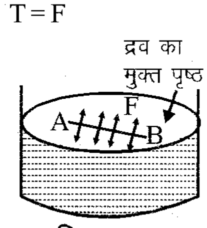
(2) पृष्ठ तनाव विस्तार या क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है। पृष्ठ तनाव की घटना केवल द्रवों में ही हो सकती है क्योंकि इनका एक स्वतंत्र पृष्ठ होता है।

11.11.1 पृष्ठ तनाव की परिभाषा (Definition of Surface Tension)

1. द्रव का वह गुण जिसके कारण वह अपने मुक्त पृष्ठ पर कम से कम अणु रखने का प्रयत्न करता है पृष्ठ तनाव कहलाता है।
2. द्रव का वह गुण जिसके कारण वह अपने स्वतंत्र पृष्ठ के क्षेत्रफल को न्यूनतम करने की कोशिश करता है। पृष्ठ तनाव कहलाता है।
3. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव वह बल है जो द्रव के मुक्त पृष्ठ पर खीचीं गयी काल्पनिक रेखा की एकांक लम्बाई के लम्बवत् तथा पृष्ठ के तल में कार्य करता है

अर्थात् पृष्ठ तनाव $T = \frac{F}{L}$ ...(1)

यदि $L = 1$ हो तो $T = F$



चित्र 11.21

अर्थात् द्रव के मुक्त पृष्ठ पर एकांक लम्बाई की काल्पनिक रेखा के लम्बवत् तथा पृष्ठ के तल में कार्य करने वाले बल को पृष्ठ तनाव कहते हैं।

(i) पृष्ठ तनाव का मात्रक न्यूटन/मी. तथा विमा $[M^1L^0T^{-2}]$ है।

(ii) यह द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है। पृष्ठ के क्षेत्रफल तथा काल्पनिक रेखा की लम्बाई पर निर्भर नहीं करता है।

(iii) यह एक अदिश राशि है क्योंकि इसकी दिशा अद्वितीय है, जिसे व्यक्त नहीं किया जाता है।

(iv) यह एक आणविक घटना है तथा इसका मूल कारण विद्युत–चुम्बकीय बल है।

(v) किसी द्रव के पृष्ठ तनाव का मान द्रव के ताप पर निर्भर करता है। ताप बढ़ाने पर पृष्ठ तनाव घटता है। क्रांतिक ताप पर घटते–घटते शून्य हो जाता है।

(vi) पृष्ठ तनाव उस माध्यम पर भी निर्भर करता है जो द्रव के पृष्ठ के दूसरी ओर होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. यदि l लम्बाई का कोई तार किसी द्रव के मुक्त पृष्ठ के सम्पर्क में है तो तार की द्रव के सम्पर्क में प्रभावी लम्बाई $L = 2l$ होगी, क्योंकि तार की मोटाई के कारण लम्बाई के दोनों ओर द्रव की ऊर्ध्व फिल्म बन जाती है जिन दोनों पर ही पृष्ठ तनाव के बल कार्य करते हैं।

अत: पृष्ठ तनाव $T = \frac{F}{L} = \frac{F}{2l}$

अत: पृष्ठ तनाव का बल $F = T \times 2l$

2. यदि r त्रिज्या की वृत्ताकार रिंग किसी द्रव के मुक्त पृष्ठ के क्षैतिज सम्पर्क में है तो तार की मोटाई के कारण इसमें दो ऊर्ध्व पृष्ठ होंगे। अत: रिंग तथा द्रव के पृष्ठ के बीच द्रव की ऊर्ध्व फिल्म की प्रभावी लम्बाई

$L = 2 \times 2\pi r$

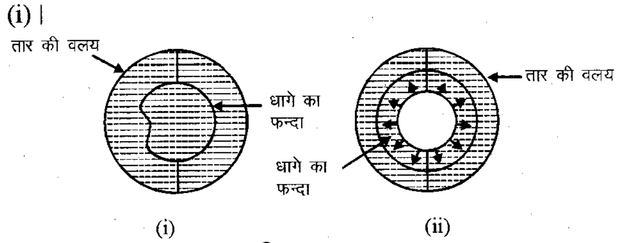
अत: पृष्ठ तनाव बल $F = TL$

$F = T \times 2\,(2\pi r)$

$F = 4\pi r T$

पृष्ठ तनाव की घटना को निम्न उदाहरणों द्वारा भी समझा जा सकता है–

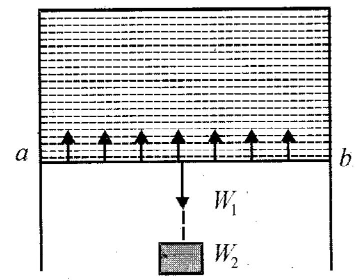
1. एक पतले तार की वलय लेकर उसके दो बिन्दुओं के बीच एक धागे का ढीला फन्दा बांध देते हैं। वलय को साबुन के घोल में डुबाकर बाहर निकाल लेते हैं। वलय पर साबुन के घोल की एक पतली फिल्म बन जाती है तथा फन्दा इस फिल्म पर किसी भी अनियमित आकृति में रखा रहता है। चित्र (i)।



चित्र 11.22

यदि फन्दे के भीतर की फिल्म में पिन से छेद कर दिया जाये तो फन्दे का धागा प्रत्येक स्थान पर बाहर की ओर खिंचकर वृत्त का रूप धारण कर लेता है। चित्र (ii)। इसका कारण यह है कि प्रथम स्थिति में फन्दे के दोनों ओर फिल्म होने के कारण धागें के प्रत्येक बिन्दु पर समान व विपरीत बल कार्य करते हैं। परन्तु द्वितीय स्थिति में धागे के फन्दे के भीतर की फिल्म टूटने के कारण फन्दे के भीतर की ओर कार्य करने वाले बल समाप्त हो जाते हैं तथा ऐसा प्रतीत होता है कि फन्दे पर एक बल त्रिज्यीय दिशा से बाहर की ओर कार्य कर रहा हो, अर्थात् शेष फिल्म एक तनी हुई झिल्ली की तरह कार्य करती है। किसी दिये गये परिमाप के लिए वृत्त का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। अत: फन्दे के बाहर की ओर खिंचकर वृत्ताकार होने से शेष फिल्म का क्षेत्रफल न्यूनतम हो जाता है।

2. किसी तार को U आकार में मोड़ लेते हैं तथा दूसरे तार के टुकड़े *ab* को इस पर सरकाने के लिए प्रयुक्त करते हैं। इस फ्रेम को साबुन के घोल में डुबाकर बाहर निकाल लेते हैं। यदि तार *ab* का भार W_1 बहुत अधिक नहीं हो तो यह फ्रेम के ऊपरी सिरे तक पहुंच जाता है। इसे साम्यावस्था में लाने के लिए इस पर एक अतिरिक्त भार W_2 लगाना पड़ता है।



चित्र 11.23

11.11.2 पृष्ठ ऊर्जा (Surface Energy)

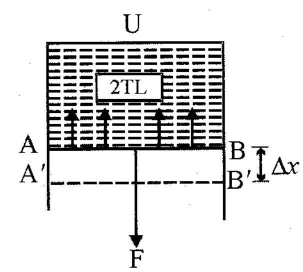
जब किसी द्रव के पृष्ठीय क्षेत्रफल को बढ़ाया जाता है तब कुछ अणु द्रव की भीतर से पृष्ठ पर आ जाते हैं। जिससे इन अणुओं को द्रव के पृष्ठ के ठीक नीचे के अणुओं के आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है जो इन अणुओं की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। इस प्रकार द्रव के पृष्ठ पर स्थित अणुओं की स्थितिज ऊर्जा अन्य अणुओं की अपेक्षा कुछ अधिक होती है। पृष्ठ की इस अतिरिक्त ऊर्जा को पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं।

11.11.3 पृष्ठ तनाव तथा पृष्ठ ऊर्जा में सम्बन्ध (Relation between Surface Tension and Surface Energy)

किसी द्रव के पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि के लिये जो कार्य किया जाता है वह उस पृष्ठ की ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है। इस ऊर्जा को पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं।

माना कि किसी U आकार के तार के फ्रेम पर एक तार AB लगा हुआ है। इस फ्रेम को किसी द्रव में डुबोने पर इसमें पतली द्रव फिल्म बन जाती है। तार AB की मोटाई के कारण इस फिल्म के दो पृष्ठ है। पृष्ठ तनाव के कारण क्षेत्रफल न्यूनतम होने का प्रयास किया जाता है। जिसको पुन: साम्यावस्था में लाने के लिए तार AB पर बाह्य बल F लगाना पड़ेगा

यदि AB की लम्बाई l है तो द्रव फिल्म के सम्पर्क में तार की प्रभावी लम्बाई $L = 2l$



चित्र 11.24

फिल्म में दो मुक्त सतह होती है अत: तार की लम्बाई दोगुनी की

गयी है।

पृष्ठ तनाव के कारण बल $F = T \times L = T(2l)$ ...(1)

माना कि तार को नीचे खिसकाकर स्थिति A'B' पर जे जाने में बल द्वारा किया गया कार्य W है तो

$$W = F(\Delta x) = T(2l)(\Delta x)$$

$\because$ $\Delta A = 2l\Delta x$ = क्षेत्रफल में वृद्धि (दोनों पृष्ठ)

$$\therefore \quad W = T\Delta A \quad ...(2)$$

$$\text{समी. (2) से } T = \frac{W}{\Delta A} \quad ...(3)$$

इस प्रकार किसी द्रव के क्षेत्रफल में नियत ताप पर एकांक वृद्धि करने में किया गया कार्य अर्थात् पृष्ठ उर्जा, पृष्ठ तनाव कहलाता है।

समी. (3) से पृष्ठ तनाव का मात्रक जूल/मी.^{2} प्राप्त होता है।

द्रव की बूंद या साबुन के बुलबुले की त्रिज्या वृद्धि में किया गया कार्य

(1) यदि द्रव की बूंद की प्रारंभिक त्रिज्या r_1 तथा अन्तिम त्रिज्या r_2 हो तब W = T × पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि

$$W = T \times 4\pi(r_2^2 - r_1^2)$$

[∵ बूंद की मात्र एक मुक्त सतह होती है।]

(2) साबुन के बुलबुले के लिए

$$W = T \times 8\pi(r_2^2 - r_1^2)$$

[∵ बुलबुले की दो मुक्त सतह होती है।]

उदा.24. पानी पर तैरती हुई एक सूई की लम्बाई 2.5 सेमी. है। सूई को पानी के तल से ऊपर उठाने के लिए सूई के भार के अतिरिक्त कम से कम कितना बल लगाना होगा? (T = 7.2न्यूटन/सेमी.)

हल– दिया हुआ है–

सुई की लम्बाई $l = 2.5$ सेमी

सुई के दोनों ओर पानी का पृष्ठ है। अतः पानी के पृष्ठ के सुई के साथ सम्पर्क की प्रभावी लम्बाई $L = 2l$

तथा $T = 7.2$ न्यूटन/सेमी

चूँकि $T = \frac{F}{L} = \frac{F}{2l}$

अतः सुई को पानी के तल से ऊपर उठाने के लिए सुई के भार के अतिरिक्त कम से कम आवश्यक बल

$$F = TL = T(2l)$$
$$= 7.2 \times 2 \times 2.5$$
$$= 36 \text{ न्यूटन}$$

उदा.25.पानी पर एक चकती जिसकी त्रिज्या 2 सेमी. है, तैर रही है। चकती को पानी के तल से ऊपर उठाने के लिए चकती के भार के अतिरिक्त कितना न्यूनतम बल लगाना पड़ेगा? पानी का पृष्ठ तनाव 70×10^{-3} न्यूटन/मी. है।

हल–चकती पर पृष्ठ तनाव के कारण बल

$$F = T \times 2\pi R$$

यहाँ R चकती की त्रिज्या है।

दिया है : $R = 2$ सेमी. $= 2 \times 10^{-2}$ मी.

$T = 70 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी.

$F = 70 \times 10^{-3} \times 2 \times 3.14 \times 2 \times 10^{-2}$ न्यूटन

$F = 8.7 \times 10^{-3}$ न्यूटन

अतः चकती के भार के अतिरिक्त लगाया गया बल 8.7×10^{-3} न्यूटन होगा।

उदा.26.किसी द्रव की एक आयताकार फिल्म 5 सेमी. लम्बी तथा 3 सेमी. चौड़ी है। यदि उसका आकार 6 सेमी. × 5 सेमी. करने के लिए 3×10^{-4} जूल कार्य करना पड़ता है तो द्रव का पृष्ठ तनाव ज्ञात कीजिए।

हल–फिल्म का क्षेत्रफल बढ़ाने में किया गया कार्य

$$W = T \times \Delta A$$

प्रश्नानुसार $W = 3 \times 10^{-4}$ जूल

फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं।

अतः $\Delta A = 2 \times (0.06 \times 0.05 - 0.05 \times 0.03)$ मी.^{2}

$= 2(30 - 15) \times 10^{-4}$ मी.^{2}

$$\therefore \quad T = \frac{W}{\Delta A} = \frac{3 \times 10^{-4}}{2 \times 15 \times 10^{-4}} = \frac{3}{30} \frac{\text{जूल}}{\text{मी.}^2}$$

$= 0.1$ जूल/मी.^{2}

उदा. 27. एक तार के आयताकार छल्ले पर 4 × 4 सेमी. की साबुन की फिल्म बनी है। यदि फिल्म का आकार 4 × 5 सेमी. कर दिया जाये तो इस क्रिया में किये गये कार्य की गणना कीजिए। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 3×10^{-2} न्यूटन/मीटर है।

हल- फिल्म का प्रारम्भिक पृष्ठ क्षेत्रफल = 16 सेमी.^{2}

$= 16 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

फिल्म का अन्तिम पृष्ठ क्षेत्रफल 20 सेमी.^{2}

$= 20 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

∴पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि $= 20 \times 10^{-4} - 16 \times 10^{-4}$

$= 4 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अतः फिल्म के पृष्ठ क्षेत्रफल में कुल वृद्धि

$\Delta A = 2 \times 4 \times 10^{-4}$

$= 8 \times 10^{-4}$ मी.^{2}

∴किया गया कार्य (W)= पृष्ठ तनाव × क्षेत्रफल में वृद्धि = $T\Delta A$

$= 3 \times 10^{-2} \times 8 \times 10^{-4}$

$= 24 \times 10^{-6}$ जूल

उदा. 28. एक D व्यास वाली बूँद 27 छोटी बूँदों में टूट जाती है। ऊर्जा में परिणामी परिवर्तन क्या होगा ? दिया है : द्रव का पृष्ठ तनाव T है। **(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.5)**

हल : माना कि छोटी बूँद की त्रिज्या r है।

तब 27 छोटी बूँदों का आयतन = बड़ी बूँद का आयतन

$$27 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$$

$$\therefore \quad r = \frac{D}{6}$$

प्रारम्भिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi D^2$

अन्तिम पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 27 \times 4\pi r^2$

$= 27 \times 4\pi\left(\frac{D}{6}\right)^2 = 3\pi D^2$

अतः क्षेत्रफल में वृद्धि $\Delta A = 3\pi D^2 - \pi D^2 = 2\pi D^2$

अतः परिणामी ऊर्जा में वृद्धि $= 2\pi D^2 T$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

जब पानी की बड़ी बूंद को छोटी बूंदों में फुहारकर विभक्त किया जाता है तब पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि होती है जिससे पृष्ठ ऊर्जा में भी वृद्धि होती है। इस प्रक्रिया में आन्तरिक ऊर्जा में कमी होती है क्योंकि कुल ऊर्जा नियत रहती है। इस कारण ताप में कमी होने से ठंडक उत्पन्न होती है।

उदाहरण–पानी के फव्वारे के नीचे नहाने में अधिक ठंडक महसूस होती है।

उदा. 29. यदि छोटी जल बूंदों की संख्या n हो तथा प्रत्येक बूंद की त्रिज्या r है। ये सभी बूंदे मिलकर एक R त्रिज्या वाली बूंद बनाती है। दिखाइए कि ताप वृद्धि $\frac{3T}{J}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$ होगी। जहाँ T द्रव का पृष्ठ तनाव व J ऊष्मा का यांत्रिक तुल्याँक हैं।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.9)

हल– माना कि R त्रिज्या की किसी बड़ी बूंद को r त्रिज्या की n छोटी बूंदों में विभक्त किया जाता है। इस प्रक्रिया में आयतन नियत रहता है अर्थात् बड़ी बूंद का आयतन $= n$ छोटी बूंदों का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\Rightarrow$ $$R^3 = nr^3$$

या $$R = n^{1/3} r \quad ...(1)$$

या $$R^2 = n^{2/3} r^2 \quad ...(2)$$

बड़ी बूंद को छोटी बूंदों में विभक्त करने में पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = n \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$

$$= 4\pi R^2\left(\frac{nr^2}{R^2} - 1\right)$$

समी. (2) से $$\Delta A = 4\pi R^2\left(\frac{nr^2}{n^{2/3} r^2} - 1\right)$$

$$\Delta A = 4\pi R^2 (n^{1/3} - 1)$$

$$\Delta A = 4\pi R^3\left(\frac{n^{1/3}}{R} - \frac{1}{R}\right)$$

समी. (1) से $$\Delta A = 4\pi R^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

पृष्ठ तनाव के विरुद्ध किया गया कार्य

$$W = T\Delta A$$
$$= T4\pi R^2 (n^{1/3} - 1)$$
$$= T.\ 4\pi R^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \text{ जूल} \quad ...(3)$$

यह कार्य छोटी बूंदों में पृष्ठ ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है। इस कार्य के कारण आन्तरिक ऊर्जा में कमी

$$Q = \frac{W}{J}$$

$$= \frac{T4\pi R^3}{J}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \text{ कैलोरी}$$

यदि द्रव के ताप में कमी $\Delta\theta$, द्रव का घनत्व ρ तथा विशिष्ट ऊष्मा s हो तो

$$Q = ms\Delta\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho s \Delta\theta$$

$$= \frac{T4\pi R^3}{J}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Delta\theta = \frac{3T}{J\rho s}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \quad ...(4)$$

$\because$ $s = 1$ तथा $\rho = 1$ (CGS मात्रकों में)

$\therefore$ ताप वृद्धि $\Delta\theta = \frac{3T}{J}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$

महत्त्वपूर्ण-बड़ी बूंद का बनना–यदि r त्रिज्या वाली n बूंद मिलकर R त्रिज्या की एक बड़ी बूंद का निर्माण करे तो द्रव का पृष्ठीय क्षेत्रफल घटता है।

मुक्त पृष्ठ ऊर्जा= प्रारंभिक पृष्ठ ऊर्जा–अंतिम पृष्ठ ऊर्जा

$$E = n4\pi r^2 T - 4\pi R^2 T$$

(i) यदि यह बड़ी बूंद द्वारा अवशोषित हो जाए तो, उसके ताप में वृद्धि

$$\Delta\theta = \frac{3T}{Jds}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

(ii) यदि मुक्त ऊर्जा बिना ह्रास के बड़ी बूंद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाए तो ऊर्जा संरक्षण के नियम से

$$\frac{1}{2}mv^2 = 4\pi R^3 T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 d\right]v^2 = 4\pi R^3 T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{6T}{d}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{6T}{d}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

उदा.30. 1 सेमी. त्रिज्या की पारे की एक बूंद को समान आकार की 10^6

छोटी बूंदों में फुआर दिया गया है। व्ययित ऊर्जा की गणना कीजिये। पारे का पृष्ठ तनाव 35×10^{-3} न्यूटन/मीटर है।

हल–माना बड़ी बूंद की त्रिज्या R तथा छोटी बूंद की त्रिज्या r है। बड़ी बूंद का आयतन = 10^6 छोटी बूंदों का आयतन

या $$\frac{4}{3}\pi R^3 = 10^6 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$R = 100r$$

$$r = \frac{R}{100} = \frac{1}{100} \text{ सेमी.}$$

$$= \frac{10^{-2}}{100} \text{ मीटर}$$

$$r = 10^{-4} \text{ मीटर}$$

बूंद के पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = 10^6 \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$
$$= 4\pi[10^6(10^{-4})^2 - (10^{-2})^2]$$
$$= 4\pi[10^{-2} - 10^{-4}]$$
$$= 4\pi \times 99 \times 10^{-4} \text{ मी.}^2$$

कार्य अथवा व्ययित ऊर्जा $W = T \times \Delta A$

$$= (35 \times 10^{-4})^2 \times (4\pi \times 99 \times 10^{-4})$$
$$= 9.36 \times 10^{-3} \text{ जूल}$$

उदा.31. 0.1 सेमी. त्रिज्या की पानी की एक बूंद को 27000 एकसमान बूंदों में फुहाराने में पृष्ठ तनाव के विरुद्ध कितना कार्य करना पड़ेगा तथा इस प्रक्रिया में ताप में कितनी कमी होगी? (पानी का पृष्ठ तनाव 70×10^{-3} न्यूटन/मी. विशिष्ट ऊष्मा 10^3 कैलोरी/किग्रा. सेन्टीग्रेट तथा घनत्व 10^3 किग्रा./मी.^{3})

हल– किसी बड़ी बूंद को छोटी बूंदों में विभक्त करने में पृष्ठ तनाव के विरुद्ध किया गया कार्य

$$W = T\,4\pi R^2(n^{1/3} - 1)$$

∴ $$T = 70 \times 10^{-3} \text{ न्यूटन/मी.}$$
$$n = 27000$$
$$R = 0.1 \times 10^{-2} \text{ मी.}$$

$$W = 70 \times 10^{-3} \times 4 \times 3.14 \times (0.1 \times 10^{-2})^2[(27000)^{1/3} - 1]$$
$$= 2.55 \times 10^{-5} \text{ जूल}$$

ताप में कमी $$\Delta\theta = \frac{3T}{Jds}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

∴ $$r = \frac{R}{n^{1/3}}$$

∴ $$\Delta\theta = \frac{3T}{Jds}\left(\frac{n^{1/3}}{R} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Delta\theta = \frac{3T}{JdsR}(n^{1/3} - 1)$$

$$\Delta\theta = \frac{3 \times 70 \times 10^{-3}[(27000)^{1/3} - 1]}{4.2 \times 10^3 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-2}}$$

$$\Delta\theta = \frac{29}{2} \times 10^{-4}$$
$$= 1.45 \times 10^{-3}\,°C$$

उदा.32. एक साबुन के बुलबुले को फूँक मारकर इस प्रकार फुलाया जाता है कि इसकी त्रिज्या 0.02 m से 0.03 m तक हो जाती है। कार्य की गणना कीजिए। साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव 0.03 N/m है।

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.6)

हल : दिया गया है– बुलबुले की प्रारम्भिक त्रिज्या, $r_1 = 0.02$ m

अन्तिम त्रिज्या, $r_2 = 0.03$ m

क्षेत्रफल में वृद्धि $\Delta A = 2 \times 4\pi(r_2^2 - r_1^2)$

$$= 8\pi[9 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4}]\text{m}^2$$
$$= 40\pi \times 10^{-4}\,\text{m}^2$$

किया गया कार्य $W = T \times \Delta A$

$$W = 0.03 \times 40 \times \pi \times 10^{-4} = 3.77 \times 10^{-4}\text{ J}$$

11.11.4 ससंजक तथा आसंजक बल (Cohesive and Adhesive Forces)

प्रत्येक पदार्थ अणुओं से मिलकर बना होता है। अणु एक दूसरे पर बल लगाते हैं जिसे अन्तर आणविक बल कहते हैं। अन्तर आणविक बलों की प्रकृति आकर्षण की होती है।

1. ससंजक बल (Cohesive Force)–एक ही पदार्थ के अणुओं के मध्य कार्य करने वाले आकर्षण बल को ससंजक बल कहते हैं। जैसे–जल के अणुओं के मध्य लगने वाला बल।

2. आसंजक बल (Adhesive Force)–भिन्न–भिन्न पदार्थों के अणुओं के मध्य कार्य करने वाले आकर्षण बल को आसंजक बल कहते हैं। जैसे–जल तथा कांच के अणुओं के मध्य लगने वाला बल।

आणविक परास–वह अधिकतम दूरी जहाँ पर दो अणु एक दूसरे को आकर्षित करते हैं। आणविक परास कहलाती है। आणविक परास 10^{-9} मीटर की कोटि की होती है तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है।

आणविक प्रभाव गोला–किसी अणु को केन्द्र मानकर काल्पनिक आणविक परास त्रिज्या (10^{-9} मी.) का खींचा गया काल्पनिक गोला आणविक प्रभाव गोला या आणविक सक्रियता का गोला कहलाता है।

ससंजक तथा आसंजक बलों के अन्य उदाहरण–

1.जल काँच को भिगो देता है परन्तु पारा नहीं भिगोता–एक ही द्रव के अणुओं के बीच ससंजक बल तथा द्रव–ठोस के अणुओं के बीच आसंजक बल कार्य करते हैं। जल–काँच के अणुओं के बीच आसंजक बल जल के अणुओं के बीच कार्य करने वाले ससंजक बल से अधिक होता है। अतः जल के अणु काँच के अणुओं से चिपक जाते हैं और काँच का पृष्ठ भीग जाता है। पारे–काँच के अणुओं के बीच आसंजक बल, पारे के अणुओं के कार्य करने वाले ससंजक बल की अपेक्षा कम होता है, अतः पारे के एक–दूसरे को छोड़कर काँच के अणुओं से नहीं चिपकते है। यही कारण है कि पारा काँच को नहीं भिगोता है।

2. स्याही (Ink) व कागज के अणुओं के बीच कार्य करने वाले आसंजक बलों के कारण ही स्याही कागज पर चिपक जाती है। ब्लैक बोर्ड

पर चॉक से लिखने पर अक्षर भी चॉक ब्लैक बोर्ड के अणुओं के बीच आसंजक बलों के कारण ही उभरते हैं।

3. तेल के पृष्ठ पर जल की बूंद सिकुड़कर गोल हो जाती है जबकि जल के पृष्ठ पर तेल की बूंद फैलकर पतली फिल्म बना लेती है।

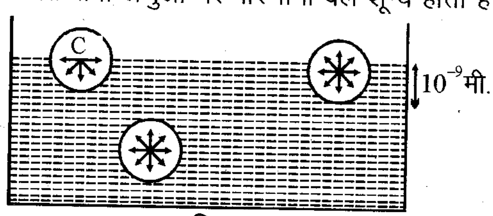
जल–तेल के अणुओं के बीच आसंजक बल, जल के अणुओं के बीच लगने वालो ससंजक बल से कम होते हैं। अतः जल की बूंद के अणु एक–दूसरे से अलग न होकर गोल बूंद के रूप में रह जाते हैं। इसके विपरीत, तेल–जल के अणुओं के बीच लगने वाले आसंजक बल, तेल के अणुओं के बीच लगने वाले ससंजक बलों से अधिक होते हैं, अतः तेल के अणु जल के अणुओं से चिपक कर फिल्म का रूप धारण कर लेते हैं।

ससंजक तथा आसंजक बल अणुओं के मध्य दूरी के अष्टम् घात के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं।

आणविक बलों के आधार पर पृष्ठ तनाव की व्याख्या (Explanation of Surface tension on the basis of inter-molecular forces)

पृष्ठ तनाव की व्याख्या के लिए किसी पात्र में भरे द्रव के भिन्न–भिन्न अणुओं A,B तथा C पर विचार करते हैं।

माना द्रव के भीतर कोई अणु A है जिसकी गहराई 10^{-9} मीटर से अधिक है। A को केन्द्र मानकर आणविक सक्रियता का गोला खींचा गया है। यह गोला द्रव के पूर्णतः भीतर है, अतः A के चारों ओर सभी अणु सममित (symmetrical) है, अतः इस पर अणुओं द्वारा सभी दिशाओं में समान बल कार्य करते हैं। इस प्रकार इस अणु पर परिणामी अन्तर–आणविक बल शून्य होता है। इस प्रकार द्रव के भीतर पृष्ठ से 10^{-9} मीटर अथवा उससे अधिक गहराई पर स्थित सभी अणुओं पर परिणामी बल शून्य होता है।



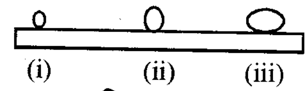
चित्र 11.25

अब माना एक अणु B है जो द्रव की सतह से 10^{-9} मीटर से कम गहराई पर है। B को केन्द्र मानकर आणविक सक्रियता का गोला खींचा गया है। इस गोले का कुछ भाग द्रव के पृष्ठ से बाहर है। इस स्थिति में इस अणु के नीचे स्थित अणुओं की संख्या, ऊपर स्थित अणुओं की संख्या से अधिक है, जिससे इस अणु पर नीचे की ओर अधिक आकर्षण बल कार्य करता है। इस प्रकार अणु B पर द्रव के भीतर की ओर एक बल कार्य करता है।

अब माना द्रव के पृष्ठ पर एक अणु C है। इसको केन्द्र मानकर आणविक सक्रियता का गोला खींचा गया है। गोले का ऊपरी आधा भाग द्रव के बाहर तथा नीचे का आधा भाग द्रव के भीतर है अर्थात् C के ऊपर कोई अणु नहीं है जबकि C के नीचे काफी अणु हैं, अतः C पर अधिकतम परिणामी बल नीचे की ओर कार्य करता है। इस प्रकार द्रव के पृष्ठ पर स्थित प्रत्येक अणु पर नीचे की ओर अधिकतम आकर्षण बल कार्य करता है। द्रव के पृष्ठ से नीचे जाने पर इसका मान घटता जाता है तथा 10^{-9} मीटर गहराई पर जाकर यह शून्य हो जाता है। इससे स्पष्ट है कि द्रव के स्वतंत्र पृष्ठ से आणविक परास ($=10^{-9}$मीटर) की गहराई तक स्थित सभी अणुओं पर एक बल नीचे की ओर कार्य करता है जिससे अणु तल की ओर जाने का प्रयास करते हैं। इस कारण द्रव पृष्ठ अपना क्षेत्रफल न्यूनतम करने का प्रयास करता है। द्रव की इसी प्रवृति को पृष्ठ तनाव कहते हैं।

11.11.5 पृष्ठ तनाव पर आधारित अनुप्रयोग (Applications based on Surface tension)

1. पारे की छोटी बूंद गोलीय तथा बड़ी बूंद चपटी होती है–पारे की छोटी बूंद पृष्ठ तनाव बल के कारण गोलाकार होने का प्रयास करती है। जब बूंद का आकार बढ़ता है तब पृष्ठ तनाव बल उसी अनुपात में नहीं बढ़ता है तथा गुरुत्वीय बल प्रभावी होने से बूंद का चपटी होने लगती है ताकि बूंद का गुरुत्व केन्द्र नीचे से नीचे होने की प्रवृति रखता है।



चित्र 11.26

2. काँच की नली के सिरों को गर्म करने पर गोल हो जाना–कांच की नली के सिरे को गर्म करने पर वह पिघल कर द्रव बन जाता है। पृष्ठ तनाव के गुण के कारण द्रव न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल घेरने का प्रयास करता है। किसी दिये गये आयतन के लिए गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम होता है, अतः सिरे पर पिघला कांच गोलीय आकृति धारण कर लेता है। यही कारण है कि कांच की नली के सिरों को गर्म करने पर वह गोल हो जाते हैं।

3.सीसे के छर्रे बनाना–सीसे के गोल छर्रे बनाने के लिए पिघलते हुए सीसे को धीरे–धीरे ऊँचाई से जल में गिराते हैं। गिरते समय पृष्ठ तनाव के कारण पिघला सीसा न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल घेरने की प्रवृति रखता है, इसलिये वह गोलीय आकृति धारण कर लेते हैं।

4.जल के पृष्ठ पर कपूर के टुकड़ों का नाचना–कपूर के टुकड़े जल में डालने पर टुकड़े नाचने लगते हैं। इसका कारण यह है कि कपूर के टुकड़ों की आकृति अनियमित होती है तथा वे जल में घुलनशील हैं तथा घुलने पर जल के पृष्ठ तनाव को कम कर देते हैं। टुकड़ों को जल में डालने पर उनका एक भाग दूसरे की अपेक्षा अधिक घुलता है अतः एक ओर का पृष्ठ तनाव दूसरे ओर की अपेक्षा कम हो जाता है। इससे कपूर का टुकड़ा अधिक पृष्ठ तनाव वाले भाग की ओर खिंच जाता है। इस प्रकार कपूर का टुकड़ा जल में नाचता रहता है।

5. साधारण जल की अपेक्षा साबुन के घोल के अधिक बड़े बुलबुले बनाये जा सकते हैं–जल में साबुन मिलने पर जल का पृष्ठ तनाव कम हो जाता है। अतः साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव जल की अपेक्षा कम होता है। द्रव के कम पृष्ठ तनाव का तात्पर्य है, उसके द्वारा अधिक पृष्ठ क्षेत्रफल घेरना। बड़े बुलबुलें का पृष्ठ क्षेत्रफल अधिक होता है। अतः जल की अपेक्षा कम पृष्ठ तनाव वाले साबुन के घोल के अधिक बड़े बुलबुले बनाये जा सकते हैं। जल के बड़े बुलबुले अधिक पृष्ठ तनाव के कारण तुरन्त टूट जाते हैं।

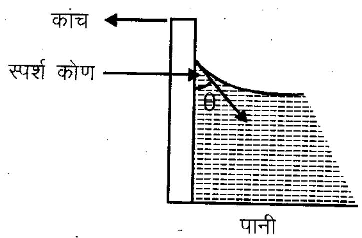
6.फुहारने से ठंडक उत्पन्न होती है–जब किसी द्रव को फुहारा जाता है, तो उसकी अनेकों छोटी–छोटी बूंदें बन जाती हैं, जिससे द्रव का पृष्ठ क्षेत्रफल बहुत अधिक बढ़ जाता है। इस प्रक्रिया में द्रव के भीतर के अणु द्रव के पृष्ठ पर पहुंचते हैं, जिसके लिए उन्हें संसजक बलों के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है, इससे द्रव की आन्तरिक ऊर्जा कम हो जाती है। जिससे द्रव का ताप कम हो जाता है।

7. गर्म सूप (Soup) ठण्डे सूप की तुलना में स्वादिष्ट लगता है–ताप बढ़ने से पृष्ठ तनाव घटता है। इसलिए गर्म सूप का पृष्ठ तनाव ठण्डे

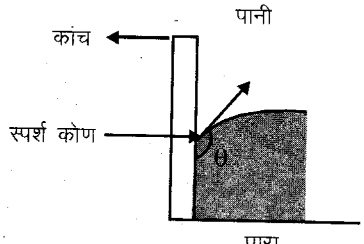
सूप की अपेक्षा कम होता है। द्रव के कम पृष्ठ तनाव का तात्पर्य है, अधिक पृष्ठ क्षेत्रफल घेरना। इसीलिए गर्म सूप जीभ के अधिक क्षेत्रफल पर फैल जाता है। अतः गर्म सूप, ठण्डे सूप की अपेक्षां स्वादिष्ट लगता है।

11.12 स्पर्श कोण या सम्पर्क कोण (Angle of Contact)

द्रव तथा ठोस के किसी स्पर्श बिन्दु से द्रव के पृष्ठ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा ठोस के पृष्ठ पर द्रव के अन्दर की ओर खींची गई स्पर्श रेखा के बीच बने कोण को उस द्रव तथा ठोस का स्पर्श कोण कहते हैं। इसका मान द्रव व ठोस की प्रकृति पर निर्भर करता है। सम्पर्क कोण का मान यह दर्शाता है कि कोई द्रव किसी ठोस के पृष्ठ पर फैलेगा अथवा इस पर बूँद बनाएगा। जैसे काँच की प्लेट पर पानी फैल जाता है जबकि पारे की बूँदे गोल बनती है।

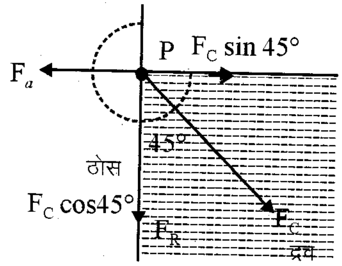


(a).



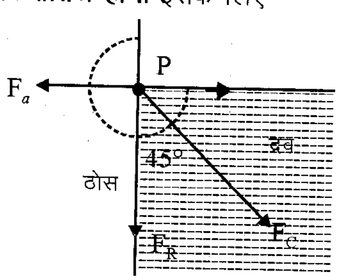
(b).

द्रव के पृष्ठ की आकृति– निम्न चित्र में दिखाई गई ज्यामिती के लिये आसंजक बल F_a की दिशा ठोस के पृष्ठ के लम्बवत् होती है तथा संसजक बल F_c की दिशा 45° के कोण पर होती है।



(c)

माना कि किसी द्रव तथा ठोस के लिए F_a तथा F_c इस प्रकार है कि इनका परिणामी बल F_R ठोस पृष्ठ के अनुदिश है। इस स्थिति में द्रव पृष्ठ चित्र (d) के अनुसार **क्षैतिज होगा** इसके लिए



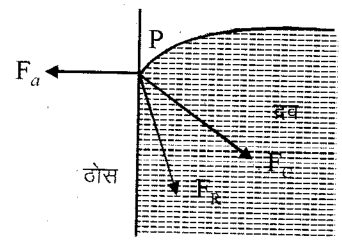
(d)

$F_a = F_c \sin 45°$

उदाहरण–चांदी (ठोस) तथा पानी (द्रव)

माना कि किसी द्रव तथा ठोस के लिए आसंजक बल, ससंजक बलों की तुलना में दुर्बल है

$F_a < F_c \sin 45°$

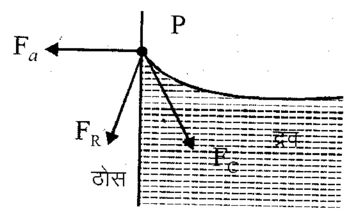


(e)

तब परिणामी बल F_R द्रव के अन्दर तथा द्रव पृष्ठ उत्तल होता है। चित्र (e) के अनुसार

उदाहरण–कांच (ठोस) तथा पारा (द्रव)

माना कि किसी द्रव तथा ठोस के लिए आसंजक बल, संसजक बलों की तुलना में प्रबल है।



चित्र 11.27 (f)

$F_a > F_c \sin 45°$

तब परिणामी बल F_R ठोस के अन्दर ओर होगा तथा द्रव पृष्ठ अवतल होता है। चित्र (f) के अनुसार

उदाहरण–कांच (ठोस) तथा पानी (द्रव)

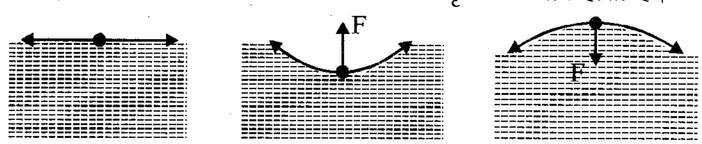
महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. ऐसे द्रव जो ठोस को गीला करते हैं–उनके लिए स्पर्श कोण न्यून होता है
   तथा आसंजक बल > ससंजक बल
   उदाहरण–कांच व पानी
2. ऐसे द्रव जो ठोस को गीला नहीं करते है–उनके लिए स्पर्श कोण अधिक कोण होता है।
   तथा आसंजक बल > ससंजक बल
   उदाहरण–कांच व पारा
3. स्पर्श कोण का मान 0° तथा 180° के मध्य होता है।
   शुद्ध जल व कांच के लिए, $\theta = 0°$
   साधारण जल व कांच के लिए $\theta = 8°$
   शुद्ध जल व चांदी के लिए, $\theta = 90°$
   पारे व कांच के लिए, $\theta = 138°$
   जल व क्रोमियम के लिए, $\theta = 160°$
4. किसी दिये गये द्रव व ठोस के युग्म के लिए स्पर्श कोण का मान विशिष्ट होता है।
5. यह द्रव या ठोस के झुकाव पर निर्भर नहीं करता।

6. ताप बढ़ाने पर, स्पर्श कोण घटता है।
7. घुलनशील अशुद्धियाँ स्पर्श कोण को बढ़ा देती है।
8. आंशिक रूप से घुलनशील अशुद्धियाँ स्पर्श कोण घटा देती है।

11.13 वक्र पृष्ठ में दाब आधिक्य (Pressure Excess Inside a Curved Surface)

जब किसी द्रव का मुक्त पृष्ठ समतल हो (चित्र (i)) तब इसके पृष्ठ पर स्थित प्रत्येक अणु सभी दिशाओं में समान बल से आकर्षित होता है जिससे पृष्ठ के सभी अणुओं पर परिणामी बल शून्य होता है। यदि द्रव का मुक्त पृष्ठ अवतल है (चित्र (ii)) तब इसके पृष्ठ पर स्थित प्रत्येक अणु पर कार्य करने वाले आकर्षण बलों का परिणामी बल अवतल पृष्ठ की ओर होता है।



(i) (ii) (iii)

चित्र 11.28

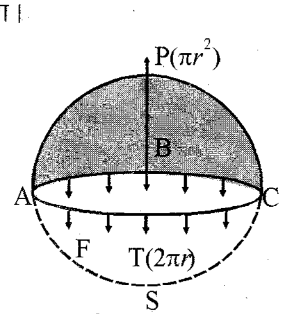
यदि द्रव का मुक्त पृष्ठ उत्तल है (चित्र (iii)) तब इसके पृष्ठ पर स्थित प्रत्येक अणु पर कार्य करने वाले आकर्षण बलों का परिणामी बल द्रव पृष्ठ के लम्बवत् द्रव के भीतर की ओर लगता है।

इस प्रकार किसी द्रव के पृष्ठ के अवतल पृष्ठ पर दाब उत्तल पृष्ठ की अपेक्षा अधिक होता है। बूंद में यह दाबान्तर 2T/R के बराबर होता है। जहाँ R = पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या है। इसी दाबान्तर को दाब आधिक्य कहते हैं।

बूंद में दाब आधिक्य द्रव के द्रव स्थैतिक दाब द्वारा जबकि बुलबुले में, आन्तरिक वायु के गेज दाब (Gauge Pressure) द्वारा प्रदान किया जाता है।

11.13.1 गोल बूंद के भीतर दाब आधिक्य (Pressure excess inside a spherical drop)

माना कि ABC किसी द्रव की आधी बूंद है। जिसकी त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव T है। S भाग की ओर स्थित द्रव के अणुओं पर ससंजक बल F_1 नीचे की ओर होगा।



चित्र 11.29

$$F_1 = (2\pi r)T \qquad ...(1)$$

माना दाब आधिक्य P है जो ऊपर की ओर कार्य करता है।

∴ ऊपर की ओर बल $F_2 = PA = P\pi r^2$

∴ द्रव बूंद के सन्तुलन के लिए $F_1 = F_2$

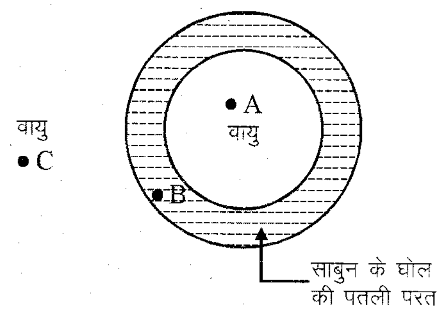
$$2\pi r T = P\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2T}{r}$$

अतः बूंद के भीतर का दाब बूंद के बाहर के दाब से $\frac{2T}{r}$ अधिक होता है।

11.13.2 साबुन के बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य (Pressure excess inside a soap bubble)

एक साबुन के बुलबुले में दो पृष्ठ होते हैं। माना कि r_1 व r_2 बुलबुले के आन्तरिक पृष्ठ तथा बाह्य पृष्ठ की त्रिज्याएँ हैं।



चित्र 11.30

$$\Rightarrow \quad P_A - P_B = \frac{2T}{r_1} \qquad ...(1)$$

$$P_B - P_C = \frac{2T}{r_2} \qquad ...(2)$$

समी. (1) व समी. (2) जोड़ने पर

$$P_A - P_B + P_B - P_C = \frac{2T}{r_1} + \frac{2T}{r_2}$$

$$\Rightarrow \quad P_A - P_C = \frac{2T}{r_1} + \frac{2T}{r_2}$$

∵ $r_1 \approx r_2 = r$ माना जा सकता है।

∴ दाब आधिक्य $\quad P = \frac{2T}{r} + \frac{2T}{r}$

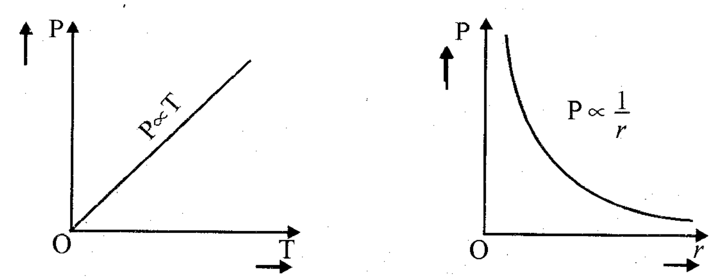
$$\Rightarrow \quad P = \frac{4T}{r}$$

11.13.3 हवा के बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य (Pressure excess inside air bubble)

यदि किसी द्रव में डूबा हुआ हवा का बुलबुला हो तो बुलबुले पर दाब आधिक्य बूंद के लिये दाब आधिक्य के समान होगा अर्थात्

$$P = \frac{2T}{r}$$

उपरोक्त सभी स्थितियों में दाब आधिक्य (P) का मान पृष्ठ तनाव (T) के समानुपाती तथा त्रिज्या (r) के व्युत्क्रमानुपाती होता है। P की T तथा r पर निर्भरता निम्न प्रकार ग्राफ द्वारा दर्शायी जा सकती है–



चित्र 11.31

उदा.33. 2 × 10⁻³ मीटर त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के दाब आधिक्य का परिकलन करो। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 0.03 न्यूटन/मी. है।

हल–यहाँ $r = 2 \times 10^{-3}$ मी.

अब $P = \frac{4T}{r} = \frac{4 \times 0.03}{2 \times 10^{-3}}$

$= 60$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.34. एक मिमी. त्रिज्या की पानी की एक गोलीय बूंद के भीतर एवं बाहर दाबान्तर कितना होगा? पानी का पृष्ठ तनाव 73 डाइन/सेमी.

हल–यहाँ $r = 1$ मिमी. $= 10^{-3}$ मी.

T = 73 डाइन/सेमी.

$= 73 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी.

$$P = \frac{2T}{r}$$

$$= \frac{2 \times 73 \times 10^{-3}}{10^{-3}}$$

$= 146$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.35. 2.00 mm व्यास की किसी केशनली का निचला सिरा बीकर में भरे जल के पृष्ठ से 8.00 cm नीचे तक डुबोया जाता है। नली के जल में डूबे सिरे पर अर्धगोलीय बुलबुला फुलाने के लिए नली के भीतर आवश्यक दाब ज्ञात कीजिए। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.30×10^{-2} Nm^{-1} है। जल का घनत्व = 1000 kg/m^3, वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 Pa तथा $g = 9.80$ m s^{-2}। दाब आधिक्य भी परिकलित कीजिए।

हल–दिया है–

नली की त्रिज्या (बुलबुले की त्रिज्या) $r = \frac{2.00}{2} = 1.00$ मिमी.

$= 1 \times 10^{-3}$ मी.,

$h = 8.00$ सेमी. $= 8 \times 10^{-2}$ मी.

पृष्ठ तनाव $T = 7.30 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मी.,

जल का घनत्व $\rho = 1000$ किग्रा./मी.^{3}

वायुमण्डलीय दाब $P_a = 1.01 \times 10^5$ पास्कल,

$g = 9.8$ मी./से.^{2}

बुलबुले के बाहर दाब P_{out} = वायुमण्डलीय दाब + 8cm जल स्तम्भ का दाब

बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य $= \frac{2T}{r}$

(∵ बुलबुला द्रव के अन्दर है)

दाब आधिक्य $= \frac{2 \times 7.30 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-3}}$

$= 146$ न्यूटन/मी.^{2}

∵ दाब आधिक्य= बुलबुले के अन्दर दाब–बुलबुले के बाहर दाब

$= P_{in} - P_{out}$

$\Rightarrow \quad P_{in} = P_{out}$ + दाब आधिक्य $= (P_a + h\rho g) + 146$

$\Rightarrow \quad P_{in} = (1.01 \times 10^5 + 8 \times 10^{-2} \times 1000 \times 9.8) + 146$

$= 1.01 \times 10^5 + 784 + 146$

$\Rightarrow \quad P_{in} = 1.01 \times 10^5 + 930$

$= 1.01 \times 10^5 + 0.00930 \times 10^5$

$= 1.0193 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

⇒अतः बुलबुले के भीतर का दाब$P_{in} \simeq 1.02 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

चूंकि बुलबुला अर्धगोलीय है। अतः यहाँ केशनली की त्रिज्या को ही बुलबुले की त्रिज्या माना गया है।

उदा.36. साबुन के दो बुलबुले जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 5 सेमी तथा 6 सेमी है। इन्हें एक दूसरे के समीप लाने पर सम्पर्क सतह पर बनी उभयनिष्ठ सतह की वक्रता त्रिज्या कितनी होगी?

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.3)

हल–उभयनिष्ठ सतह पर दाब आधिक्य का मान दोनों बुलबुलों के दाब आधिक्यों के अन्तर के बराबर होगा अर्थात्

$$\frac{4T}{r} = \frac{4T}{r_1} - \frac{4T}{r_2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

जहाँ $r_1 = 5$ सेमी.

$r_2 = 6$ सेमी.

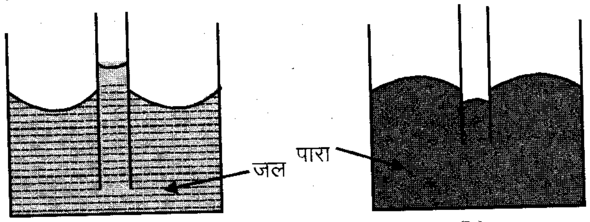
$r = \frac{5 \times 6}{5 - 4} = 30$ सेमी.

11.14 केशिकात्व (Capillarity)

जब किसी नली में बहुत बारीक (केश या बाल के समान) छिद्र हो तो वह केशनली (capillary tube) कहलाती है। यदि किसी कांच की केशनली जिसके दोनों सिरे खुले हो, को सीधा द्रव में डुबाया जाये तब पृष्ठ तनाव के कारण द्रव या तो केशनली में ऊपर चढ़ जाता है या नीचे उतर जाता है। इस घटना को केशिकात्व कहते हैं।

11.14.1 केशिकात्व का कारण (Cause of Capillarity)

केशिकात्व का मूल कारण पृष्ठ तनाव है। उदाहरण के लिए कांच की केशनली को पानी में सीधा डुबाया जाये तब पानी केशनली में ऊपर चढ़ जाता है। (चित्र (a)) जबकि कांच की केशनली को पारे में सीधा डुबाने पर पारे का तल केशनली में नीचे उतर जाता है।(चित्र (b))।

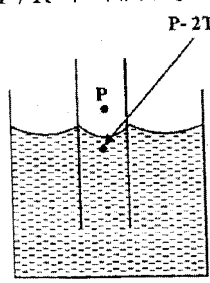


(a) (b)

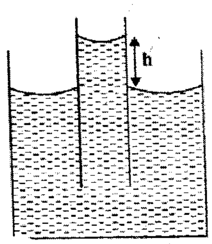
चित्र 11.32

जब जल में केशनली खड़ी करते है तो पृष्ठ अवतल होता है।

इस स्थिति में पृष्ठ के नीचे बिन्दु पर दाब $\left(P-\frac{2T}{R}\right)$ ऊपर वाले बिन्दु पर दाब P से $2T/R$ कम होता है। यहाँ P वायुमंडलीय दाब है। R अवतल पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या है व T द्रव का पृष्ठ तनाव है। यह स्थिति चित्र (a) में दर्शायी गयी है। इस स्थिति में बाहर से जल केशनली में दाब की कमी $2T/R$ को पूरा करने के लिये चढ़ने लगता है। ऐसा तब तक होता है जब तक कि दाब में कमी समाप्त न हो जाये तथा एक निश्चित ऊँचाई h पर चढ़ना रूक जाता है। स्थिति h ऊँचाई में जल स्तम्भ का दाब $h\rho g$, $2T/R$ के बराबर हो जाता है। चित्र (b) में इसे दर्शाया है।



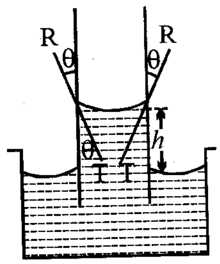
चित्र 11.33 (a) पानी के पृष्ठ के अन्दर और बाहर दाब की स्थिति



चित्र 11.33 (b) पानी का कांच की नली में चढ़ना

11.14.2 केशनली में द्रव के उन्नयन के लिए सूत्र की स्थापना

माना कि r त्रिज्या की एक केशनली में h ऊँचाई तक जल चढ़ जाता है। दीवार पर प्रति इकाई लम्बाई बल (T) अन्दर की ओर है तथा प्रतिक्रिया बल (R) बाहर की ओर है



चित्र 11.34

$\because \quad F = T(2\pi r)$

$\therefore \quad R = T(2\pi r)$

R का ऊर्ध्वाधर घटक ऊपर की ओर होगा।

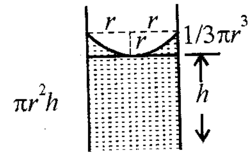
R का ऊर्ध्वाधर घटक $R\cos\theta$ या $T(2\pi r)\cos\theta$ ...(1)

संतुलन की स्थिति में

$T(2\pi r)\cos\theta =$ केशनली में द्रव स्तम्भ का भार (Mg)

$\because$ द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

$$M = \rho \times V$$



चित्र 10.34(a)

$$= \rho\left[\pi r^2 h + \pi r^2 r - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\right]$$

$$M = \rho\left[\pi r^2 h + \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3\right]$$

$$= \rho\left[\pi r^2 h + \frac{\pi r^3}{3}\right]$$

$$M = \rho\pi r^2\left[h + \frac{r}{3}\right]$$

$\therefore$ समी. (2) से

$$T(2\pi r)\cos\theta = \rho\pi r^2 g\left(h + \frac{r}{3}\right)$$

$$T = \frac{\rho\pi r^2 g\left(h + \frac{r}{3}\right)}{2\pi r\cos\theta}$$

$$= \frac{r\rho g\left(h + \frac{r}{3}\right)}{2\cos\theta}$$

$\because r << h$ शुद्ध जल व स्वच्छ कांच के लिए $\theta = 0°$

$\therefore \quad \cos 0° = 1$

$$T = \frac{r\rho g h}{2}$$

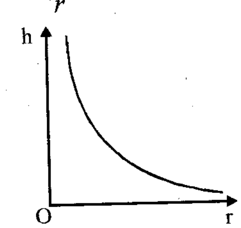
$$\Rightarrow \quad h = \frac{2T}{r\rho g}$$

यदि जल के स्थान पर कोई अन्य द्रव लिया जाये तब

$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$

समी. (3) से $\quad h = \frac{\text{नियतांक}}{r}$

$$\Rightarrow \quad h \propto \frac{1}{r}$$



चित्र 11.35

केशनली की त्रिज्या कम होने पर केशनली में द्रव अधिक ऊपर जाएगा व त्रिज्या अधिक होने पर द्रव कम ऊँचाई तक जाएगा। इसे **जूरिन नियम** कहते हैं।

महत्वपूर्ण—यदि एक ही द्रव में कांच की दो भिन्न–भिन्न त्रिज्याओं

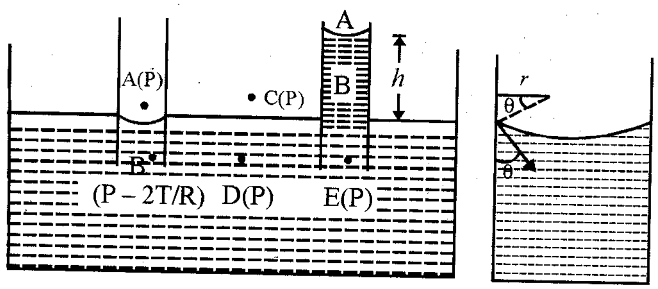
r_1 व r_2 की केशनलियाँ डुबायी जायें तब उनमें चढ़े द्रव स्तम्भों की ऊँचाई क्रमशः h_1, h_2 इस प्रकार होगी कि

$$h_1 r_1 = h_2 r_2$$

इसके अतिरिक्त जिस द्रव के लिए $\theta < 90°$ होगा तब $\cos\theta$ का मान धनात्मक होगा अर्थात् द्रव ऊपर चढ़ेगा।

परन्तु जिस द्रव के लिए $\theta > 90°$ होगा तब $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक होगा अर्थात् द्रव नीचे उतरेगा।

वैकल्पिक विधि–जब r त्रिज्या की केशनली का एक सिरा ρ घनत्व वाले द्रव में डाला जाए तथा द्रव केशनली को भिगोता हो (जल व कांच की केशनली) तो नली में चढ़े द्रव का तल अवतल हो जाएगा।



चित्र 11.36

चित्रानुसार R = द्रव के चन्द्रतल (Meniscus) की त्रिज्या

T = द्रव का पृष्ठ तनाव

P = वायुमण्डलीय दाब

बिन्दु A पर दाब = P

$$\text{बिन्दु B पर दाब} = P - \frac{2T}{R}$$

बिन्दु C द्रव की समतल सतह से ठीक ऊपर व बिन्दु D द्रव की समतल सतह के ठीक नीचे भी दाब P (वायुमण्डलीय दाब) होगा। बिन्दु B व D समान क्षैतिज तल पर है परन्तु इन बिन्दुओं पर दाब समान नहीं है। साम्यावस्था प्राप्त करने के लिए द्रव नली में h ऊँचाई तक चढ़ जाएगा। (केशिकीय उन्नयन)

द्रव स्तम्भ के कारण दाब = पृष्ठ तनाव के कारण दाबान्तर

$$\Rightarrow \qquad h\rho g = \frac{2T}{R}$$

चित्र की ज्यामिती से $\qquad r = R\cos\theta$

$$\Rightarrow \qquad R = \frac{r}{\cos\theta}$$

$$\therefore \qquad h\rho g = \frac{2T\cos\theta}{r}$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} \qquad ...(5)$$

$$T = \frac{hr\rho g}{2\cos\theta}$$

यदि द्रव नवचन्द्रक उत्तल है जैसे पारे में अर्थात् $\cos\theta$ ऋणात्मक हो तो केशनली में द्रव का तल नीचे गिर जाता है अर्थात् केशिकीय अपनयन होता है।

11.14.3 केशिकात्व के व्यावहारिक उदाहरण (Practical examples of capillarity)

1. लालटेन में मिट्टी का तेल बत्ती के धागें के बीच बनी केशनलियों द्वारा ऊपर चढ़ता है।
2. मोमबत्ती में पिघली मोम धागों से बनी केशनलियों द्वारा ऊपर चढ़ती है।
3. कॉफी पाउडर पानी में शीघ्रता से घुल जाता है क्योंकि पानी कॉफी के कणों को केशिकात्व की क्रिया से शीघ्रता से भिगो देता है।
4. पानी से भरी बाल्टी में तौलिये का सिरा डुबाने पर पानी तौलिये के धागों के बीच बनी केशनलियों से होकर धीरे–धीरे पूरे तौलिये को भिगो देता है।
5. पेड़–पौधों को दिया गया पानी तनों में बनी केशनलियों द्वारा ऊपर चढ़कर टहनियों तथा पत्तियों तक पहुंचता है।
6. पेन की निब बीच में से चिरी होती है जिससे उसमें बारीक केशनली बन जाती है जिससे होकर निब को स्याही में डुबाने पर स्याही केशनली में चढ़ जाती है।
7. वर्षा के दिनों में किसान हल द्वारा खेत की जुताई करते हैं जिससे मिट्टी में बनी केशनलियाँ टूट जाती है तथा सतह के नीचे का जल पौधों के काम आ जाता है अन्यथा वह वाष्प बनकर उड़ जायेगा।

11.14.4 अपर्याप्त लम्बाई की केशनली में द्रव का चढ़ना (Rise of liquid in capillary tube of insufficient length)

माना कोई द्रव जिसका घनत्व ρ तथा पृष्ठ तनाव T है। किसी केशनली में h ऊंचाई तक चढ़ता है। तब

$$h\rho g = \frac{2T}{R}$$

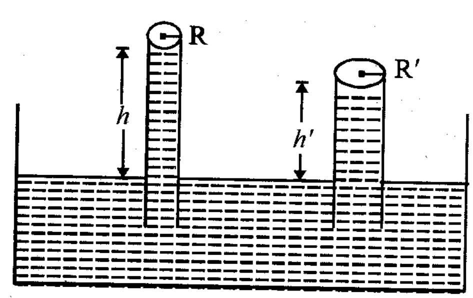
जहाँ R नली में द्रव के वक्र पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या है।

$$\text{अतः } hR = \frac{2T}{\rho g} = \text{एक नियतांक (दिये गये द्रव के लिए)}$$

जब नली की लम्बाई h से अधिक हो तो द्रव नली में इतनी ऊँचाई तक चढ़ जाता है जिससे कि उपरोक्त सम्बन्ध संतुष्ट हो जाता है। परन्तु यदि नली की लम्बाई h से कम हो जैसे h', तो द्रव नली की चोटी तक चढ़कर ऐसे फैल जाता है जिससे वक्र पृष्ठ की वक्रता R से बढ़कर R' हो जाती है। जबकि

$$h'R' = hR = \frac{2T}{\rho g}$$

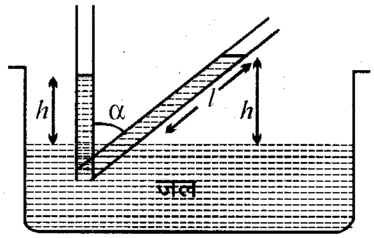
स्पष्ट है कि द्रव छोटी केशनली के ऊपरी सिरे से बाहर फुहार के रूप में नहीं निकल सकता अर्थात् द्रव केशनली के ऊपरी सिरे तक चढ़कर फैल जाता है।



चित्र 11.37

महत्त्वपूर्ण तथ्य

यदि एक केशनली द्रव में डुबोकर कुछ तिरछी (α कोण पर) की जाए तो केशनली में द्रव स्तम्भ की लम्बाई (l) तो बढ़ जाएगी परन्तु द्रव स्तम्भ की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई h अपरिवर्तित रहेगी।



$$h = l\cos\alpha$$

या $$l = \frac{h}{\cos\alpha}$$

उदा.37.एक केशनली का व्यास 2.5×10^{-4} मीटर है। इसे एक द्रव में, जिसका घनत्व 0.8×10^3 किग्रा./मी.^{3}, पृष्ठ तनाव 6×10^{-2} न्यूटन/मी. तथा स्पर्श कोण का मान शून्य है; ऊर्ध्वाधर खड़ा किया जाता है। ज्ञात कीजिए नली में द्रव कितनी ऊँचाई तक चढ़ेगा?
[g = 10 मी./से.^{2}]

हल–पृष्ठ तनाव का सूत्र है–

$$T = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta} \text{ या } h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$

प्रश्नानुसार $T = 6 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मी.

$\cos\theta = 1, r = \frac{1}{2} \times 2.5 \times 10^{-4}$ मी.

$\rho = 0.8\times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

$$\therefore \quad h = \frac{2\times(6\times10^{-2})\times1}{(1/2\times2.5\times10^{-4})\times(0.8\times10^3)\times1.0}$$

h = 0.12 मीटर

उदा.38. किसी पात्र के तल में 0.2 मिमी. व्यास का एक छोटा छिद्र है। पात्र में कितना अधिकतम ऊँचाई तक पानी भर सकते हैं कि पानी छिद्र से बाहर नहीं आये। (पानी का पृष्ठ तनाव $T = 75 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी. जल का घनत्व 1×10^3 किग्रा./मी.^{3} तथा g = 9.8 मी./से.^{2})

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.8)

हल–पानी के स्तम्भ का दाब ($P = h\rho g$) छिद्र पर दाब आधिक्य $\left(P = \frac{2T}{r}\right)$ के बराबर नहीं होने तक पानी बाहर नहीं आयेगा

अर्थात् $$h\rho g \le \frac{2T}{r}$$

$$h \le \frac{2T}{r\rho g}$$

$\because$ व्यास $2r = 0.2$ mm $= 0.2 \times 10^{-3}$ मी.

$$r = \frac{0.2}{2}\times10^{-3} \text{ मी.} = 0.1\times 10^{-3} \text{मी.}$$

$$h \le \frac{2\times75\times10^{-3}}{0.1\times10^{-3}\times10^3\times9.8}$$

$h \le 0.15$ मी.

अतः पात्र में अधिकतम 0.15 मी. ऊँचाई तक पानी भरा जा सकता है।

उदा.39.दो केशनलियाँ, जिनके व्यास क्रमशः 5.0 व 4.0 मिमी. हैं, एक-एक करके जल में खड़ी की जाती हैं। प्रत्येक नली में जल कितनी ऊँचाई तक चढ़ेगा? g = 9.8 मी/से.^{2} तथा जल का पृष्ठ तनाव = 7.0×10^{-2} न्यूटन/मी.।

हल–r त्रिज्या की केशनली में जल स्तम्भ की ऊँचाई

$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} \quad ...(1)$$

जल के लिये $\theta = 0°, \cos 0° = 1, \rho = 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

पहली नली के लिये,

$$h_1 = \frac{2\times7.0\times10^{-2}\times1.0}{2.5\times10^{-3}\times1\times10^3\times9.8}$$

$= 0.57 \times 10^{-2}$ मीटर = 5.7 मिमी.

अब समीकरण (1) से एक ही द्रव के लिये

$$hr = \frac{2T\cos\theta}{\rho g} = \text{नियतांक}$$

अतः यदि कोई द्रव r_1 त्रिज्या की केशनली में h_1 ऊँचाई तक चढ़े तथा r_2 त्रिज्या की केशनली में h_2 ऊँचाई तक चढ़े तब

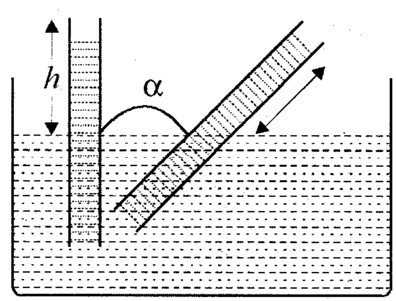
$$h_1r_1 = h_2r_2 = \text{नियतांक}$$

$$\therefore \quad h_2 = \frac{h_1r_1}{r_2} = \frac{5.7\times2.5}{2.0} \text{ मिमी.}$$

= 7.1 मिमी.

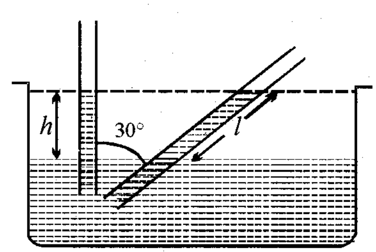
उदा.40. एक केशनली को जल में डालने पर उसमें 4 cm तक जल चढ़ता है। यदि केशनली को ऊर्ध्वाधर से 30° के कोण पर झुकायें तो केशनली में जल स्तम्भ की लम्बाई क्या होगी?

(पाठ्यपुस्तक उदाहरण 11.4)



चित्र 11.38

हल–



चित्र 11.38(a)

केशनली को ऊर्ध्वाधर से 30° झुकाने पर माना पानी नली में l लम्बाई को घेरता है, तब

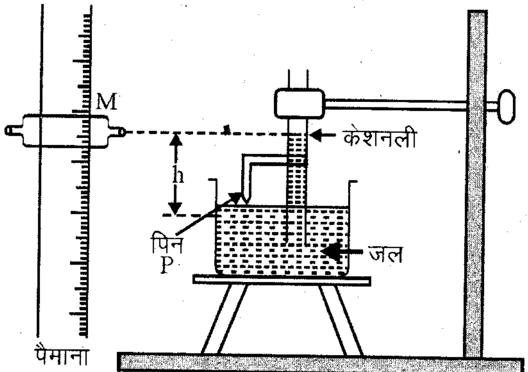
$$h = l\cos 30°$$

$$l = \frac{h}{\cos 30°}$$

$$= \frac{4}{\cos 30°} = \frac{4}{\sqrt{3}/2}$$

= 4.62 सेमी.

11.14.5 केशिकीय उन्नयन विधि द्वारा पानी का पृष्ठ तनाव ज्ञात करने की प्रायोगिक विधि (Experimental Method to Determination of Surface Tension of Liquid by Capillary Rise Method)



चित्र 11.39

इस विधि में एक समान त्रिज्या की एक स्वच्छ केशनली ली जाती है। इसे चित्रानुसार स्वच्छ जल के पात्र में डुबा देते है। केशनली से एक पिन P रबर बैण्ड द्वारा बांध देते है। पिन P को इस प्रकार समायोजित किया जाता है कि इसका निचला सिरा जल के क्षैतिज तल को स्पर्श करने लगे।

सूक्ष्मदर्शी M को केशनली में चढ़े द्रव के नीचे के तल पर फोकस करके पाठ्यांक लेते हैं। पिन P की नोक का भी पाठ्यांक लेते हैं। इन दोनों पाठ्यांकों का अन्तर द्रव स्तम्भ की ऊँचाई h के बराबर होता है।

इस प्रक्रिया के पश्चात् केशनली को उस स्थान से तोड़ते है जहाँ जल का क्षैतिज तल था। सूक्ष्मदर्शी को इस भाग पर फोकसित करते हैं। साथ ही केशनली की भीतर की दीवार के दोनों किनारों पर सूक्ष्मदर्शी को स्पर्श रेखीय स्थिति में रखकर पाठ्यांक नोट कर लेते है। इन पाठ्यांकों का अन्तर केशनली का व्यास होता है। केशनली को इस स्थिति में लम्बवत् रखकर यही प्रक्रिया दोहराते है तथा व्यास नोट करते हैं। इन दोनों प्रक्रियाओं द्वारा प्राप्त व्यासों का औसत सही व्यास होता है जिसका आधा करने पर केशनली की त्रिज्या r प्राप्त होती है।

सूत्र $T = \frac{hrdg}{2}$ की सहायता से पृष्ठ तनाव का मान ज्ञात करते हैं।

11.15 पृष्ठ तनाव को प्रभावित करने वाले कारक (Factors Affecting Surface Tension)

1. ताप का प्रभाव–सामान्यतः ताप बढ़ाने पर द्रव का पृष्ठ तनाव घट जाता है तथा क्रांतिक ताप पर पृष्ठ तनाव शून्य हो जाता है।

उदाहरण–जल का पृष्ठ तनाव जल के क्रांतिक ताप 374° C पर शून्य हो जाता है।

क्रान्तिक ताप पर, गैस व द्रव के लिए अन्तराण्विक बलों का मान समान होता है व द्रव बिना किसी अवरोध के बहते हैं। कम तापान्तर के लिए, पृष्ठ तनाव में रेखीय परिवर्तन होता है जो निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है–

$$T_t = T_0(1 - \alpha t)$$

जहाँ T_t, T_0 क्रमशः t°C व 0°C पर पृष्ठ तनाव है तथा α पृष्ठ तनाव का ताप गुणांक है।

उदाहरण: (i) गर्म सूप, ठण्डे सूप की अपेक्षा स्वादिष्ट लगता है।
(ii) सर्दियों में मशीन के पुर्जे जाम (jam) हो जाते हैं।

2. विलेय का प्रभाव–यदि विलेय घुलनशील है (जैसे जल में नमक या चीनी) तो द्रव का पृष्ठ तनाव बढ़ जाता है। यदि विलेय कम घुलनशील है (जैसे जल में मिट्टी का तेल) तो द्रव का पृष्ठ तनाव घट जाता है।

3. संदूषण (Contamination) का प्रभाव–जल की सतह पर मिट्टी के कण, चिकनाई युक्त पदार्थ उपस्थित होने पर उसका पृष्ठ तनाव घट जाता है।

इस प्रकार अपमार्जक एक पृथक्ककारी पृष्ठ की भांति व्यवहार करता है तथा पृष्ठ तनाव व स्पर्श कोण को कम कर देता है। अपमार्जक की परत ग्रीज को कपड़े से पृथक् कर देती है जिसे आसानी से पानी से धोया जा सकता है।

अपमार्जक का प्रभाव (Effect of Detergents)

कपड़ों पर तेल तथा ग्रीस के धब्बे शुद्ध पानी से नहीं हटाए जा सकते हैं। जब जल में अपमार्जक (साबुन या सोडा) घोला जाता हैं तब घोल का पृष्ठ तनाव शुद्ध जल की अपेक्षा काफी कम हो जाता है। अतः इस घोल की एक बूँद शुद्ध जल की एक बूँद की तुलना में कपड़े की सतह के अधिक क्षेत्रफल को भिगोती है। अतः साबुन का घोल कपड़े के उन छोटे–छोटे छिद्रों में भी पहुँच जाता है जहाँ शुद्ध जल नहीं पहुँच पाता है तथा अपने साथ मैल को चिपका लेता है और मैल कपड़े से अलग हो जाता है। इसका कारण है कि घोल व मैल के बीच आसंजक बल, कपड़े तथा मैल के बीच आसंजक बल से अधिक होता है। इस प्रकार अपमार्जक का घोल शुद्ध जल की अपेक्षा कपड़े की अधिक सफाई करता है।

विविध उदाहरण

उदा.41. 100 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल की धातु की एक प्लेट 15.5 प्वाइज श्यानता को 2 मिमी. मोटी केस्टर तेल (castor oil) की एक परत पर रखी गई है। प्लेट को 3 सेमी./से. चलाने के लिए आवश्यक क्षैतिज बल की गणना करो।

हल–
$$\text{क्षैतिज बल } F = -\eta A\frac{dv}{dx} = -\eta A\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

यहाँ $A = 100$ वर्ग सेमी. $= 100 \times 10^{-4}$ वर्ग मी.

$\eta = 15.5$ प्वाइज

$= 1.55$ न्यूटन–से./मी.^{2}

$\Delta v = -3 \times 10^{-2}$ मी./से.

$\Delta x = 2$ मिमी. $= 2 \times 10^{-3}$ मी.

$$\therefore \quad F = \frac{1.55 \times 100 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}}$$

$F = 0.23$ न्यूटन

उदा.42. 2 मिमी. त्रिज्या की स्टील की एक गोली ग्लिसरीन में गिर रही है, इस गोली का अन्तिम वेग क्या होगा? स्टील का घनत्व 8×10^3 किग्रा./मी.^{3}, ग्लिसरीन का घनत्व 1.2×10^3 किग्रा./मी.^{3} तथा ग्लिसरीन का श्यानता गुणांक 0.85 किग्रा./मी. से. है।

हल– $r = 2$ मिमी. $= 2 \times 10^{-3}$ मी.,

स्टील का घनत्व $\rho = 8 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

$$\text{अन्तिम वेग } v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

$$v = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2(8\times10^3 - 1.2\times10^3)\times9.8}{0.85}$$

$$v = \frac{2\times4\times10^{-3}\times6.8\times9.8}{9\times0.85}$$

$v = 69.68 \times 10^{-3}$ मी./सेकण्ड

$v = 0.069$ सेमी./से.

उदा.43. 2 सेमी. तथा 4 सेमी. व्यास के दो क्षैतिज पाइप एक-दूसरे से जुड़े हैं और इनमें से पानी बह रहा है। पहले पाइप में पानी का वेग 8 मी./से. तथा दाब 10^5 न्यूटन/मी.^{2} है। दूसरे पाइप में पानी का वेग तथा दाब की गणना कीजिये।

हल–प्रश्नानुसार,

$r_1 = 1$ सेमी. $= 1 \times 10^{-2}$ मीटर $r_2 = 2$ सेमी. $= 2\times10^{-2}$ मी.

$v_1 = 8$ मी./से. $P_1 = 1 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$v_2 = ?$ $P_2 = ?$

अविरतता के सिद्धान्त से

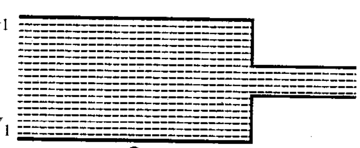
$$A_1v_1 = A_2v_2$$

या $$\pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$$

या $$v_2 = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2}$$

$$= \frac{(1\times10^{-2})^2\times8}{(2\times10^{-2})^2}$$

$v_2 = 2$ मीटर/सेकण्ड



चित्र 11.40

बरनूली प्रमेय से,

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= 10^5 - \frac{1}{2}\times10^3[4-64]$$

$$= 10^5 + 0.30\times10^5$$

$P_2 = 1.30 \times 10^5$ न्यूटन/मीटर^2.

उदा.44. एक क्षैतिज पाइप में जल बहता है जिसका एक सिरा वाल्व द्वारा बंद है और पाइप में लगे दाबमापी का पाठ्यांक 3×10^5 न्यूटन/मी.^{2} है और पाइप में लगे वाल्व को खोल देने पर दाबमापी का पाठ्यांक 1×10^5 न्यूटन/मी.^{2} रह जाता है। पाइप में प्रवाहित जल के वेग की गणना कीजिये।

हल–बरनूली प्रमेय से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2$$

यहाँ $v_1 = 0$ (प्रारम्भ में वाल्व बन्द है अतः जल का वेग शून्य होगा)

$$v_2^2 = \frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)$$

जल के लिए $\rho = 1 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

$P_1 = 3 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$P_2 = 1 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$$v_2^2 = \frac{2}{1\times10^3}(3\times10^5 - 1\times10^5)$$

$= 2 \times 2 \times 10^2$

$= 400$

$v_2 = 20$ मी./से.

उदा.45. एक क्षैतिज पाइप में पानी बह रहा है, उसके दो स्थानों पर पानी के दाबों का अन्तर 1.4 सेमी. पारे के स्तम्भ के बराबर है। यदि असमान परिच्छेद के कारण अधिक परिच्छेद के स्थान पर चाल 60 सेमी./सेकण्ड है तो दूसरे स्थान पर पानी की चाल की गणना कीजिए।

हल–बरनूली प्रमेय से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

अथवा $$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$$

यहाँ $P_1 - P_2 = 1.4$ सेमी. पारे का स्तम्भ

$= 1.4 \times 10^{-2} \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8$

$= 1.866 \times 10^3$ न्यूटन/मी.^{2}

$\rho = 1 \times 10^3$ किग्रा./मी.^{3}

$v_1 = 60$ सेमी./से. $= 0.6$ मी./से.

$$\therefore \quad v_2^2 = \left[\frac{2}{(1\times10^3)}\times1.866\times10^3\right] + (0.6)^2$$

$= 4.092$

$\therefore \quad v_2 \cong 2$ मी./से. (लगभग)

उदा.46. साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 2×10^{-2} न्यूटन/मीटर है। 2.0 सेमी. व्यास के बुलबुले को फूंक मारकर बनाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

हल–पृष्ठ तनाव $T = 2 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मीटर

त्रिज्या $r = \frac{2}{2} = 1$ सेमी.

$= 10^{-2}$ मीटर

किया गया कार्य $W = T\Delta A$

$= T[2 \times 4\pi r^2]$

$\because$ साबुन के बुलबुले के दो पृष्ठ होते हैं।

$W = 2 \times 10^{-2} \times 2 \times 4 \times 3.14 \times (10^{-2})^2$.

$W = 50.24 \times 10^{-6}$ जूल

उदा.47. साबुन के घोल की आयताकार फिल्म का आकार 4 सेमी. × 2 सेमी. से 4 सेमी. ×3 सेमी. करने में पृष्ठ तनाव के विरुद्ध कितना कार्य करना ड़ेगा? (पृष्ठ तनाव 40×10^{-3} न्यूटन/मी.)

हल–

$T = 40 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी.

प्रारंभिक क्षेत्रफल $= 0.04 \times 0.02$ मी.^{2}

अन्तिम क्षेत्रफल $= 0.04 \times 0.03$ मी.^{2}

$\because$ फिल्म में दो पृष्ठ होते हैं।

$\therefore \quad \Delta A = (0.04 \times 0.03 - 0.04 \times 0.02)$

कार्य $W = T\Delta A$

$= 2 \times 40 \times 10^{-3}[0.04 \times 0.03 - 0.04 \times 0.02]$

(साबुन की फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अतः क्षेत्रफल को दुगुना किया गया है)

$W = 3.2 \times 10^{-5}$ जूल

उदा.48. 1000 पानी की बूंदें जिनकी प्रत्येक की त्रिज्या 10^{-8} मीटर है, मिलकर एक बड़ी बूंद बनाती हैं तो बड़ी बूंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– 1000 पानी की बूँदों का आयतन

$$= 1000 \times \frac{4}{3}\pi(10^{-8})^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 1000 \times 10^{-24}$$

माना बड़ी बूँद की त्रिज्या R है तब

बड़ी बूंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

प्रश्नानुसार,

1000 छोटी बूँद का आयतन = 1 बड़ी बूँद का आयतन

$\therefore \quad \frac{4\pi}{3} \times 1000 \times 10^{-24} = \frac{4}{3}\pi R^3$

या $\quad R^3 = 10^{-21} = (10^{-7})^3$

या $\quad R = 10^{-7}$ मीटर

$\therefore$ बड़ी बूँद की त्रिज्या $= 10^{-7}$ मीटर

उदा.49. 20°C पर पानी की सतह के ठीक नीचे हवा के एक बुलबुले के भीतर दाब की गणना करो। यदि पानी की सतह पर दाब एक वायुमण्डलीय (1.013×10^5 न्यूटन/मी.^{2}) हो। बुलबुले का व्यास 0.05 मिमी. तथा पानी का पृष्ठ तनाव 20°C पर 0.07 न्यूटन/मी. हो।

हल–

T = 0.07 न्यूटन/मी.

व्यास = 0.05 मिमी. $= 0.05 \times 10^{-3}$ मी.

त्रिज्या $r = 0.025 \times 10^{-3}$ मी.

दाब आधिक्य $= \frac{2T}{r}$

$$= \frac{2 \times 0.07}{0.025 \times 10^{-3}}$$

$= 0.056 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

$\therefore$ बुलबुले के भीतर कुल दाब

$$P_T = P_a + \frac{2T}{r}$$

$$= (1.013 + 0.056) \times 10^5$$

$= 0.07 \times 10^5$ न्यूटन/मी.^{2}

उदा.50. एक छोटे खोखले गोले की सतह पर बारीक छिद्र है। 40 सेमी. गहराई तक डुबोये जाने तक उसमें पानी प्रवेश नहीं कर सकता है। यदि पानी का पृष्ठ तनाव 73×10^{-3} न्यूटन/मी. हो तो छिद्र की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल– साम्यावस्था में $h\rho g = \frac{2T}{r}$

यहाँ h = 0.4 मी., $\rho = 10^3$ किग्रा./मी.^{3}, g = 9.8 मी./से.^{2},

$T = 73 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी.

$$\therefore \quad 0.4 \times 10^3 \times 9.8 = \frac{2 \times 73 \times 10^{-3}}{r}$$

$$r = \frac{2 \times 73 \times 10}{0.4 \times 10^5 \times 9.8}$$

$= 0.0037 \times 10^{-2}$ मी.

उदा.51. साबुन के बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य जल के 0.8 सेमी. स्तम्भ के बराबर है। बुलबुले की त्रिज्या 0.35 सेमी. है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव ज्ञात कीजिये।

हल–प्रश्नानुसार,

$h = 0.8$ सेमी. $= 0.8 \times 10^{-2}$ मीटर

$r = 0.35$ सेमी. $= 0.35 \times 10^{-2}$ मीटर

$\rho = 1 \times 10^3$ किग्रा/मी.^{3}

$P = h\rho g$

$= 0.8 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^3 \times 9.8$

$P = 78.4 \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^2}$

$\therefore$ बुलबुले में दाब आधिक्य,

$$P = \frac{4T}{r}$$

या $\quad T = \frac{Pr}{4}$

$$= \frac{0.8 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^3 \times 9.8 \times 0.35 \times 10^{-2}}{4}$$

$= 68.6 \times 10^{-3}$ न्यूटन/मी.

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. बादल आसमान में तैरते क्यों हैं ?

उत्तर– जल वाष्प कणों का अंतिम वेग शून्य हो जाने से बादल तैरते हैं।

प्र.2. क्रान्तिक वेग किसे कहते है ?

उत्तर– तरल का वह वेग जिसके ऊपर उसका प्रवाह धारारेंखीय से विक्षुब्ध हो जाता है, क्रान्तिक वेग कहलाता है।

प्र.3. रेनोल्ड्स संख्या से क्या तात्पर्य है?

उत्तर– रेनोल्ड्स संख्या किसी पाइप में तरल के प्रवाह की प्रकृति को बताने वाली शुद्ध संख्या है।

प्र.4. क्या धारा रेखीय प्रवाह में दो धारा रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं ?

उत्तर– नहीं, धारा रेखीय प्रवाह में दो धारा रेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटती है।

प्र.5. द्रव की श्यानता पर ताप का क्या प्रभाव पड़ता है ?

उत्तर– ताप बढ़ाने पर द्रव की श्यानता घटती है।

प्र.6. किस ताप पर द्रव का पृष्ठ तनाव शून्य हो जाता है ?

उत्तर– क्रान्तिक ताप पर द्रव का पृष्ठ तनाव शून्य हो जाता है।

प्र.7. वह ताप बताइए जिस पर जल का पृष्ठ तनाव अधिकतम होगा।

उत्तर– 4°C ताप पर जल का पृष्ठ तनाव अधिकतम होगा।

प्र.8. पानी में साबुन घोलने पर सम्पर्क कोण पर क्या प्रभाव पड़ता है?

उत्तर– पानी में साबुन घोलने पर सम्पर्क कोण का मान घट जाता है।

प्र.9. खेतों को जोतने से क्या लाभ होता है?

उत्तर– खेतों को जोतने से जमीन में बनी केशनलिकायें टूट जाती है, जिससे पानी वाष्पित नहीं होता है, जिससे जमीन में नमी बनी रहती है।

प्र.10. आदर्श तरल किसे कहते हैं?

उत्तर– असंपीड्य व अश्यान तरल (द्रव) आदर्श तरल होता है।

प्र.11. शुद्ध पानी व काँच के लिये सम्पर्क कोण कितना होता है?

उत्तर- शुद्ध पानी व काँच के लिये सम्पर्क कोण शून्य होता है।

प्र.12. पृष्ठ तनाव के लिये उत्तरदायी बल का नाम लिखो?

उत्तर- पृष्ठ तनाव के लिये ससंजक बल उत्तरदायी होता है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. किसी बहते हुये द्रव में कितनी प्रकार की ऊर्जा होती हैं?

उत्तर- किसी बहते हुए द्रव में तीन प्रकार की ऊर्जा होती है–

(i) गतिज ऊर्जा (ii) स्थितिज ऊर्जा (iii) दाब ऊर्जा

प्र.2. विक्षुब्ध प्रवाह की परिभाषा लिखिए।

उत्तर- जब किसी तरल का प्रवाह वेग उसके क्रान्तिक वेग से अधिक हो जाता है तो उसके कणों की गति अव्यवस्थित अर्थात् अनियमित टेड़ी मेड़ी हो जाती है। साथ ही तरल के भीतर भँवर धारायें बनने लगती हैं। तरल का इस प्रकार का प्रवाह **विक्षुब्ध प्रवाह** कहलाता है।

प्र.3. समुद्र की पेंदी पर उच्च दाब होता है, फिर भी जन्तु कैसे जीवित रहते हैं?

उत्तर- समुद्र की पेंदी पर रहने वाले जीव जन्तुओं के शरीर पर एक बाह्य कवच (आवरण) होता है जो पेंदी पर जल के अतिरिक्त दाब को सहन करने की सामर्थ्य रखता है तथा ये जीव जन्तु जल के अन्दर पेंदी के वातावरण से अनुकूलन बनाये रखते हैं तथा शरीर के भीतर के आन्तरिक दाब का बाह्य दाब से संतुलन बनाने की क्षमता रखते हैं। इसी कारण वे जीवित रह पाते हैं।

प्र.4. धारा रेखीय प्रवाह की परिभाषा लिखिए।

उत्तर- किसी तरल (द्रव य गैस) के प्रवाह के दौरान किसी बिन्दु से गुजरने वाले उसके प्रत्येक कण का प्रवाह–पथ वही होता है जो उस बिन्दु से गुजरने वाले उससे पहले के कणों का था, तो तरल का इस प्रकार का प्रवाह **धारा रेखीय प्रवाह** कहलाता है।

प्र.5. गैसों की श्यानता पर ताप का क्या प्रभाव पड़ता हैं ? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- ताप बढ़ने से गैसों की श्यानता बढ़ जाती है। ज्यो ज्यों गैस का ताप बढता है, गैस के अणुओं की गति एवं गतिज ऊर्जा बढ़ने से उनकी पारस्परिक टक्करों में वृद्धि होती है, जो उनकी गति में बाधा डालती है। परिणामस्वरूप अणुओं का आन्तरिक घर्षण अर्थात् गैस की श्यानता बढ़ जाती है।

प्र.6. पानी की छोटी बूंद गोल लेकिन बड़ी बूंद चपटी होती हैं, क्यों ?

उत्तर- पानी की छोटी बूँद का पृष्ठ, पृष्ठ तनाव के कारण न्यूनतम क्षेत्रफल में आने का प्रयास करता है। क्योंकि एक निश्चित आयतन के द्रव के लिये, गोलीय आकृति में ही पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम होता है, अतः पानी की छोटी बूँद गोल होती है। बल रहित क्षेत्र में पानी की बड़ी बूँद भी गोल होती, किन्तु बड़ी बूँद पर पृथ्वी का गुरूत्वाकर्षण बल अधिक प्रभावी होने से, वह आकृति में चपटी हो जाती हैं।

प्र.7. केशनली में किसी द्रव पृष्ठ की आकृति किन बलों के द्वारा निर्धारित की जाती हैं ?

उत्तर- किसी केशनली में किसी द्रव पृष्ठ की आकृति ससंजक बल तथा आसंजक बल के तुलनात्मक मानों द्वारा निर्धारित की जाती है।

प्र.8. समुद्र की लहरों को शांत करने के लिए तेल क्यों छिड़कते हैं?

उत्तर- समुद्र की लहरों का वेग समुद्र के पानी के पृष्ठ तनाव T एवं गुरूत्वीय त्वरण g द्वारा निर्धारित होता है। पृष्ठ तनाव बढ़ने से गुरूत्वीय त्वरण g बढ़ता है और इसके फलस्वरूप लहरों का वेग भी बढ़ता है। अतः लहरों को शान्त करने के लिये तेल छिड़का जाता है, जिससे पृष्ठ तनाव घट जाता है, जिससे लहरों का वेग घटकर उनको शान्त कर देता है।

प्र.9. पारा तापमापी की काँच की नली में पारे का भरना कठिन कार्य क्यों हैं ?

उत्तर- पारा तापमापी की काँच की नली में पारे का भरना कठिन कार्य है क्योंकि पारे और काँच के लिये सम्पर्क कोण लगभग 135° होता है, क्योंकि पारे का ससंजक बल काँच व पारे के मध्य के आसंजक बल की तुलना में अधिक होता है, अतः नली में पारा नीचे उतरने की प्रवृत्ति रखता है, अतः नली में पारा ऊपर तक भरने के लिये इस प्रवत्ति के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है।

प्र.10. कपूर के छोटे टुकड़े पानी में डालने पर इधर–उधर दौड़ने लगते हैं क्यों?

उत्तर- जब कपूर के छोटे टुकड़े पानी में डाले जाते हैं तो जल में उनके घुलने से जल का पृष्ठ तनाव कम होता जाता है। इन टुकड़ों की आकृति अनियमित होने के कारण इनका एक ओर का भाग दूसरी ओर के भाग से अधिक घुल जाता है। अतः दोंनों ओर के पृष्ठ तनाव में अन्तर उत्पन्न हो जाता है। अतः कपूर के ये टुकड़े अधिक पृष्ठतनाव की ओर वाले भाग की ओर खिंचाव अनुभव करते हैं और इसी क्रिया के लगातार चलते रहने से ये टुकड़े पानी के पृष्ठ पर इधर–उधर दौड़ने लगते हैं, अर्थात् नाचते प्रतीत होते हैं।

निबधात्मक प्रश्न

प्र.1. बरनौली प्रमेय का कथन लिखते हुये, इसे सिद्ध कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.10 व 11.10.1 पर देखें।

प्र.2. किसी टंकी में पानी के धरातल से h मीटर नीचे छिद्र से बहिःस्राव वेग का सूत्र व्युत्पन्न कीजिए। टौरिसैली सिद्धान्त की तुल्यता को भी समझाइए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.10.2 के भाग (iv) पर देखें।

प्र.3. वेन्चयूरी मापी द्वारा नली में प्रति सेकंड बहने वाले द्रव की मात्रा के लिये सूत्र स्थापित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.10.2 के भाग (ii) पर देखें।

प्र.4. एक अनंत विस्तार के श्यान द्रव (विस्कासी द्रव) में गिर रहे गोले के लिये अन्तिम वेग का सूत्र प्रतिपादित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.4 पर देखें।

प्र.5. आणविक बलों के आधार पर पृष्ठ तनाव की व्याख्या कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.11.4 पर देखें।

प्र.6. पृष्ठ तनाव पर आधारित दैनिक जीवन में विभिन्न घटनाओं का वर्णन कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.11.5 पर देखें।

प्र.7. पृष्ठ तनाव व पृष्ठ ऊर्जा में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.11.3 पर देखें।

प्र.8. केशिकात्त्व पर आधारित दैनिक जीवन से जुड़े उदाहरण स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.14.3 पर देखें।

प्र.9. केशनली में विभिन्न द्रवों के लिये नवचन्द्रकों (Meniscus) की आकृति का कारण स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.14.1 पर देखें।

प्र.10. केशिकात्त्व क्या है? केशनली में चढ़े जलस्तम्भ की ऊँचाई के लिये सूत्र प्रतिपादित कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.14 व 11.14.2 पर देखें।

प्र.11. द्रव बूंद के लिये दाब आधिक्यं सूत्र की स्थापना कीजिए।

उत्तर- अनुच्छेद 11.13.1 पर देखें।

प्र.12. पृष्ठ तनाव पर ताप एवम् संदूषण का क्या प्रभाव पड़ता है? समझाइये।

उत्तर- अनुच्छेद 11.15 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. एक कार उत्थापक में छोटे पिस्टन की त्रिज्या 5 cm है व बड़े पिस्टन की त्रिज्या 15 cm है। यदि छोटे पिस्टन पर सम्पीड़न वायु द्वारा बल F_1 लगाकर 1500 किग्रा भार की कार को उठाता है, तो F_1 की गणना कीजिए। इस कार्य को करने के लिये संगत दाब बताइये।

हल- छोटे पिस्टन की त्रिज्या $r_1 = 5cm = 5 \times 10^{-2}m$

बड़े पिस्टन की त्रिज्या $r_2 = 15cm = 15 \times 10^{-2}m$

बल F_2 = उठाई गई कार का भार = 1500 Kg Wt = 1500 × 9.8 N

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi(5\times10^{-2})^2 = 25\pi\times10^{-4}m^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi(15\times10^{-2})^2 = 225\pi\times10^{-4}m^2$$

पास्कल के नियमानुसार,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{A_1}{A_2}\times F_2$$

$$= \frac{25\pi\times10^{-4}}{225\pi\times10^{-4}}\times1500\times9.8N$$

$$= \frac{4900}{3}N = 1633.3N$$

इस कार्य को करने के लिये संगत दाब

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{\frac{4900}{3}}{25\pi\times10^{-4}}$$

या $$P_1 = \frac{4900\times7}{3\times25\times22}\times10^4 = \frac{34300}{1650}\times10^4$$

$$P_1 = 2.078\times10^5 \simeq 2.08\times10^5 Pa$$

प्र.2. एक गैस का बुलबुला जिसका व्यास 2 cm है। एक द्रव में 0.90 cm/s की अचर चाल से गति कर रहा है। द्रव के लिये η का मान ज्ञात करो। गैस का घनत्व नगण्य है तथा द्रव का घनत्व 1.5 g/cm³ है।

हल- गैस के बुलबुला का व्यास = 2cm

$\because$ गैस के बुलबुला की त्रिज्या $r = \frac{2}{2} = 1cm.$

द्रव का घनत्व $\rho = 1.5\ g/cm^3$

बुलबले की अचर चाल $V_t = 0.90cm/s$

अचर चाल से ऊपर उठते हुए बुलबुले के लिए

उत्प्लावन बल = श्यान बल

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g = 6\pi\eta r v_t$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{4}{9}\times\frac{r^2\rho g}{v_t} = \frac{2\times1\times1\times1.5\times980}{9\times0.90}$$

$\eta = 363$ प्वाइज

प्र.3. वर्षा की 1 मिमी त्रिज्या वाली बूंद का अन्तिम वेग ज्ञात कीजिए। वायु का श्यानता गुणॉक $1.8\times10^{-5}\ Ns/m^2$ है तथा घनत्व 1.2 kg/m³ एवम् पानी का घनत्व 10³ kg/m³ दिया है। $g = 10\ m/s^2$

हल- वर्षा की बूँद की त्रिज्या $r = 0.1\ mm = 10^{-4}m$

वायु का श्यानता गुणांक $\eta = 1.8\times10^{-5}\ Ns/m^2$

वायु का घनत्व $\sigma = 1.2\ Kg/m^3$

पानी का घनत्व $\rho = 10^3\ Kg/m^3$

$g = 10\ m/s^2$

बूँद का अंतिम वेग $v_t = ?$

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)}{\eta}g$$

$$v_t = \frac{2}{9}\times\frac{10^{-4}\times10^{-4}\times(10^3-1.2)\times10}{1.8\times10^{-5}}$$

$$v_t = \frac{2\times 998.8}{9\times 1.8}\times 10^{-7+5} = 123\times 10^{-2}\, m/s$$

$$\therefore v_t = 1.23 m/s$$

प्र.4. एक केशनली में 4 cm ऊँचाई तक पानी चढ़ता है यदि नली को ऊर्ध्व से 30^0 कोण पर झुकाये तो उसमें जल स्तम्भ की लम्बाई की गणना कीजिए।

हल- केशनली में पानी चढ़ने की ऊँचाई $h = 4$ cm.

नली का ऊर्ध्व से झुकाव कोण $\theta = 30°$

नली के झुकाव के बाद जल स्तम्भ की लम्बाई $l = ?$

$$\because \quad \frac{h}{l} = \cos\theta$$

$$\therefore \quad l = \frac{h}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{0.866}$$

$$l = 4.618 \text{ cm} \simeq 4.62 \text{cm}$$

प्र.5. यदि R_1 व R_2 त्रिज्या वाले दो साबुन के बुलबुले समतापीय परिस्थितिं में मिलकर एक बड़े बुलबुले का निर्माण करते हैं। बुलबुले की परिणामी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल- साबुन के बुलबुलों की त्रिज्याएँ R_1 व R_2

यदि पृष्ठ तनाव T हो तो दोनों बुलबुलों में संचित पृष्ठीय ऊर्जा

$$= 4\pi R_1^2 T + 4\pi R_2^2 T$$

$$= 4\pi T\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

प्रश्नानुसार दोनों बुलबुले समतापीय परिस्थति में मिलकर बड़े बुलबुले का निर्माण करते हैं। माना कि इस बुलबुले की परिणामी त्रिज्या R है, तब बड़े बुलबुले के निर्माण में किया गया कार्य,

$$W = 4\pi R^2 . T$$

इस कार्य W के लिये ऊर्जा बुलबुलों की संचित पृष्ठीय ऊर्जा से प्राप्त होगी।

$$\therefore \quad 4\pi R^2 T = 4\pi T\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

$$\therefore \quad R^2 = R_1^2 + R_2^2$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

प्र.6. एक पानी का तालाब *H* ऊँचाई तक पानी से भरा है तालाब की एक दीवार में, पानी की सतह से *D* गहराई पर एक छिद्र किया गया है। दीवार के नीचे वाले सिरे से क्षैतिज दूरी (परास) की गणना करो जहाँ पानी की धारा छिद्र से जमीन पर टकराती है।

उत्तर- तालाब की दीवार में पानी की सतह से छिद्र की गहराई = D

तालाब में भरे पानी की की ऊँचाई = H

टोरिसेली के सिद्धान्त से छेद से निकलने वाले पानी का वेग

$$V = \sqrt{2gD}$$

धरातल पर गिरते समय पानी (H–D) दूरी ऊर्ध्व दिशा में नीचे की ओर तय करेगा। यदि इस क्रिया में लगा समय t हो तो,

$$(H - D) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{या} \quad t = \sqrt{\frac{2(H-D)}{g}}$$

इस समय t में क्षैतिज वेग v से तय की गई क्षैतिज दूरी

$$x = v\times t = \sqrt{2gD}\times\sqrt{\frac{2(H-D)}{g}}$$

$$\therefore \quad x = 2\sqrt{D(H-D)}$$

प्र.7. दो साबुन के बुलबुलों के व्यास का अनुपात क्रमशः 2:3 है। इन बुलबुलों के अन्दर दाब आधिक्य की तुलना कीजिए।

हल- दो साबुन के बुलबुलों के व्यास का अनुपात 2 : 3

अत: उन बुलबुलों की त्रिज्याओं का अनुपात $r_1 : r_2 = 2 : 3$

यदि T साबुन के बुलबुलों के लिये पृष्ठ तनाव हो तो,

∵ इन बुलबुलों के अन्दर दाब आधिक्यों का अनुपात

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{\frac{4T}{r_1}}{\frac{4T}{r_2}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 3:2$$

प्र.8. एक केशनली में जल 10 cm तक चढ़ता है यदि जल का पृष्ठ तनाव 73×10^{-3} N/m तथा घनत्व 1×10^3 kg/m^3 एवम् $g = 9.8$ m/s^2 तो केशनली की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल- केशनली में जल की ऊँचाई $h = 10cm = 10^{-1}m$

जल का पृष्ठ तनाव $T = 73\times10^{-3} N/m$

जल का घनत्व $d = 1\times10^3$ Kg/m^3

$g = 9.8$ m/s^2

केशनली की त्रिज्या $r = ?$

$$\because \text{ जल के लिये } T = \frac{hrdg}{2}$$

$$\therefore \quad r = \frac{2T}{h.d.g}$$

$$\text{या } r = \frac{2\times 73\times10^{-3}}{10^{-1}\times10^3\times 9.8} = \frac{146}{9.8}\times10^{-5}$$

$$\text{या } r = 14.89\times10^{-5} m$$

$$\text{या } r = 14.89\times10^{-3} cm$$

या $r = 0.01489$ cm

$\therefore \quad r = 0.015$ cm

प्र.9. एक असमान परिच्छेद के पाइप में पानी बह रहा है। जिस स्थान पर पाइप की त्रिज्या 2 cm है। पानी का वेग 20 cm/s है। किसी अन्य स्थान पर पाइप की त्रिज्या 6 cm हो तो पानी का वेग ज्ञात करो।

हल- असमान परिच्छेद के पाइप के एक स्थान पर,

त्रिज्या $r_1 = 2cm$

पानी का वेग $v_1 = 20$ cm/s

उसी पाइप के अन्य स्थान पर,

त्रिज्या $r_2 = 6cm$

पानी का वेग $v_2 = ?$

सांतत्यता समीकरण से

$$A_1.v_1 = A_2.v_2$$

या $\pi r_1^2.v_1 = \pi r_2^2.v_2$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}.v_1 = \frac{2\times 2}{6\times 6}\times 20$$

या $v_2 = \frac{20}{9} = 2.22$

$\therefore \quad v_2 = 2.22$ cm/s

प्र.10. एक जल की बूंद जिसकी त्रिज्या 2 mm है इसके अन्दर दाब आधिक्य की गणना कीजिए। जल का पृष्ठ तनाव 0.075 Nm^{-1} है।

हल- जल की बूँद की त्रिज्या $r = 2mm = 2\times 10^{-3}m$

जल का पृष्ठ तनाव $T = 0.075\ Nm^{-1}$

$\therefore$ बूँद के अंदर दाब अधिक्य

$$\Delta P_{excess} = \frac{2T}{r} = \frac{2\times 0.075}{2\times 10^{-3}}$$

$$= 75\ N/m^2$$

प्र.11. सिद्ध कीजिए कि *R* त्रिज्या बड़ी बूंद को *r* त्रिज्या वाली *n* छोटी बूंदों में स्प्रे करने में किया गया कार्य $\left(n^{1/3}-1\right)R^2T$ होगा। जहाँ *T* द्रव का पृष्ठ तनाव है।

हल- प्रश्नानुसार R त्रिज्या की बड़ी बूँद को r त्रिज्या की n छोटी बूँदों में स्प्रे किया जाता है। इस क्रिया में आयतन नियत रहता है।

$\therefore$ बड़ी बूँद का आयतन = n × छोटी बूँद का आयतन

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = n\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \quad R = n^{1/3}.r \qquad .....(1)$$

बड़ी बूँद को तोड़ने में पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = n\times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$

$$\Delta A = 4\pi R^2\left(\frac{nr^2}{R^2}-1\right) \qquad .....(2)$$

समी.(1) से $\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{n^{2/3}} = n^{-2/3}$ ये मान समी. (2)में रखने पर

$$\Delta A = 4\pi R^2\left(n\times n^{-2/3}-1\right)$$

$$\Delta A = 4\pi R^2\left(n^{1/3}-1\right)$$

अत: पृष्ठ तनाव T के विरूद्ध स्प्रे करने में किया गया कार्य

$$W = T.\Delta A$$

या $W = T.4\pi R^2\left(n^{1/3}-1\right)$

$\therefore \quad W = 4\pi\left(n^{1/3}-1\right)R^2T$

प्र.12. एक हवाई जहाज वायु सुरंग से गुजरता है। इसके पंख के ऊपर व नीचे वाले पृष्ठ पर वायु वेग क्रमश:70m/s व 63 m/s है तो पंख पर उत्थापक बल (Lift Force) की गणना कीजिए। दिया है पंख का क्षेत्रफल 2.5 m^2 व वायु घनत्व 1.3 kg/m^3 है।

हल- पंख के ऊपर वाले पृष्ठ पर वायु वेग $v_1 = 70$ m/s

पंख के नीचे वाले पृष्ठ पर वायु वेग $v_2 = 63$ m/s

पंख का क्षेत्रफल $A = 2.5m^2$

वायु घनत्व $d = 1.3\ Kg/m^3$

दाबान्तर $(P_2 - P_1) = \frac{1}{2}d\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

या $(P_2 - P_1) = \frac{1}{2}\times 1.3\left(70^2 - 63^2\right)$

या $(P_2 - P_1) = \frac{1.3}{2}\times(70-63)(70+63)$

$$= \frac{1.3}{2}\times 7\times 133 = 605.15Nm^{-2}$$

$\therefore$ पंख पर उत्थापक बल $F = (P_2 - P_1)A$

या $F = 605.15 \times 2.5$

या $F = 1512.875N$

या $F = 1.5128 \times 10^3$ N

$\therefore \quad F \simeq 1.5\times 10^3$ N

प्र.13. एक असमान परिच्छेद वाली नली में पानी बह रहा हैं पाईप में जिस स्थान पर जल का प्रवाह वेग 0.4 m/s है। वहाँ दाब 0.1 मीटर पारे के स्तम्भ के बराबर है। किसी अन्य स्थान पर, जल का वेग 0.5 m/s है तो वहाँ दाब के मान की गणना करो।

हल- असमान परिच्छेद वाली नली में

एक स्थान पर, जल का प्रवाह वेग $v_1 = 4 m/s$

दाब P= 0.1 m पारे के स्तम्भ पर $(P = h.\rho.g)$

$P_1 = 0.1 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8\ N/m^2$

($\because$ पारे का घनत्व = $13.6\times10^3 Kg/m^3$)

अन्य स्थान पर

जल का प्रवाह वेग $v_2 = 0.5\ m/s$

दाब $P_2 = ?$

जल का घनत्व $d = 1 \times 10^3\ kg/m^3$

$\because \quad P_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\times d.v_2^2$

$\therefore \quad P_2 = P_1 + \frac{1}{2}d\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

$P_2 = 0.1\times3.6\times10^3\times9.8 + \frac{1}{2}\times10^3\left(0.4^2 - 0.5^2\right)$

या $\quad P_2 = 10^3\left[0.1\times13.6\times9.8 - \frac{1}{2}\times0.09\right]$

या $\quad P_2 = 10^3[13.328 - 0.045]$

या $\quad P_2 = 13.283\times10^3 N/m^2$

या $\quad P_2 = \frac{13.283\times10^3}{13.6\times10^3\times9.8}$ पारे के स्तम्भ पर

या $\quad P_2 = \frac{13.283}{133.28} = 0.0996m$ (पारे का स्तम्भ)

प्र.14. जल की 1000 छोटी बूंदे, जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या 10^{-7} m है, आपस में मिलकर एक बड़ी बूंद का निर्माण करती है तो मुक्त ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए। जल का पृष्ठ तनाव $7\times10^{-2} N/m$ है।

हल- जल का पृष्ठ तनाव $T = 7\times10^{-2} N/m$

जल की छोटी बूँदों की संख्या n = 1000

प्रत्येक छोटी बूँद की त्रिज्या $r = 10^{-7}m$

यदि छोटी बूँदों से मिलकर बनी बड़ी बूँद की त्रिज्या R हो तो,

बड़ी बूँद का आयतन = n × छोटी बूँद का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1000\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

या $R^3 = 1000\ r^3$

$\therefore \quad R = 10r = 10 \times 10^{-7} = 10^{-6}m$

बड़ी बूँद के निर्माण में पृष्ठ क्षेत्रफल में कमी

$\Delta A = n \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$

$= 4\pi[nr^2 - R^2]$

$= 4\times3.14[1000\times(10^{-7})^2 - (10^{-6})^2]$

$= 12.56[10^{-11} - 10^{-12}]$

$= 12.56 \times 10^{-11}[1 - 10^{-1}]$

$= 12.56 \times 10^{-11} \times \frac{9}{10}$

$= 1.1304 \times 10^{-10} m^2$

$\because$ मुक्त ऊर्जा $W = T \times \Delta A$

$= 7 \times 10^{-2} \times 1.1304 \times 10^{-10}$

$= 7.91 \times 10^{-12} J$

प्र.15. एक सीसे की गोली का द्रव्यमान *M* है। यह श्यान द्रव में सीमान्त वेग v से नीचे गिरती है। 8 *M* द्रव्यमान की अन्य शीशे की गोली का उसी द्रव में सीमान्त वेग ज्ञात कीजिए।

हल- द्रव्यमान M व त्रिज्या r_1 की सीसे की गोली के लिये,

$$M = \frac{4}{3}\pi r_1^3\rho$$

तथा द्रव्यमान 8 M व त्रिज्या r_2 की सीसे की गोली के लिये,

$$8M = \frac{4}{3}\pi r_2^3\rho$$

$\therefore \quad 8 = \frac{r_2^3}{r_1^3} \Rightarrow 2^3 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$

$\therefore \quad 2 = \frac{r_2}{r_1}$

$\therefore \quad r_2 = 2r_1$ ......(1)

द्रव्यमान M की गोली का श्यान द्रव में सीमान्त वेग

$$v = \frac{2}{9}\frac{r_1^2(\rho-\sigma)g}{\eta} \qquad ....(2)$$

अत: द्रव्यमान 8 M की गोली के लिये उसी श्यान द्रव में सीमान्त वेग

$$v' = \frac{2}{9}\frac{r_2^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

समी.(1) से r_2 का मान रखने पर

$$v' = \frac{2}{9}\times\frac{(2r_1)^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

या $v' = 4\times\frac{2}{9}\frac{r_1^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

समी. (2) से मान प्रतिस्थापित करने पर

$v' = 4v$

$\therefore$ 8 M द्रव्यमान की अन्य सीसे की गोली का उसी द्रव में सीमान्त वेग 4v होगा।

प्र.16. साबुन की एक फिल्म के आकार को 10 cm × 6 cm से बढ़ाकर 10 cm × 11 cm करने में 3.0×10^{-4} जूल कार्य करना पड़ता है। फिल्म का पृष्ठ तनाव निकालिये।

उत्तर- साबुन की एक फिल्म का प्रारंभिक आकार $A_i = 10cm \times 6cm$

$$A_i = 60cm^2 = 60 \times 10^{-4}m^2$$

साबुन की फिल्म का बढ़ा हुआ आकार

$$A_f = 11cm \times 10\ cm$$

$$A_f = 110\ cm^2 = 110 \times 10^{-4}\ m^2$$

आकार वृद्धि के लिये किया गया कार्य $W = 3.0 \times 10^{-4}J$

फिल्म के दोनों ओर के पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = 2 \times (A_f - A_i)$$

$$= 2 \times (110 \times 10^{-4} - 60 \times 10^{-4})$$

$$= 2 \times 50 \times 10^{-4} = 10^{-2}\ m^2$$

$\therefore \quad W = T \times \Delta A$

$\therefore$ पृष्ठ तनाव $T = \dfrac{W}{\Delta A}$

या $T = \dfrac{3.0 \times 10^{-4}}{10^{-2}}$

$\because T = 3.0 \times 10^{-2} N/m$

प्र.17. एक पीटो नली (Pitot Tube) नदी में डुबायी जाती हैं और यहाँ दाब जल स्तम्भ का 0.05 m प्राप्त होता है। यहाँ पर जल प्रवाह की दर ज्ञात कीजिए।

हल- नदी में पीटो नली से ज्ञात जल का दाब $P = 0.05m$ (जल स्तम्भ पर)

$\therefore$ जल स्तम्भ की ऊँचाई $= h = 0.05m$

$\therefore$ जल प्रवाह की दर $v = \sqrt{2hg}$

$$v = \sqrt{2 \times 0.05 \times 9.8}$$

$$v = \sqrt{0.98}$$

$$v = 0.99\ m/s$$

प्र.18. एक पानी की टंकी में मुक्त सतह से 3.5 m गहराई पर एक छिद्र है। इस छिद्र पर पानी का बहिःस्राव वेग (Velocity of Efflux) ज्ञात कीजिए।

हल- पानी की टंकी में मुक्त सतह से छिद्र की गहराई $h = 3.5m$

टंकी के छिद्र पर पानी का बहि: स्राव वेग,

$$v = \sqrt{2gh}$$

या $v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 3.5}$

या $v = \sqrt{68.6}$

या $v = 8.28\ m/s$

$\therefore \quad v = 8.3\ m/s$

प्र.19. यदि फूंक मारकर *V* आयतन का साबुन का बुलबुला बनाने में *W* कार्य होता है तो 2*V* आयतन का बुलबुला बनाने में कितना कार्य होगा ?

हल- माना V आयतन के साबुन के बुलबुले की त्रिज्या R_1 तथा 2V आयतन के साबुन के बुलबुले की त्रिज्या R_2 हो तो,

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \text{ तथा } 2V = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$\therefore \quad 2R_1^3 = R_2^3$

$\therefore \quad R_2 = 2^{1/3} R_1$

V आयतन का बुलबुला बनाने में सम्पन्न कार्य

$$W = 4\pi R_1^2 \times T$$

2V आयतन का बुलबुला बनाने में सम्पन्न कार्य

$$W' = 4\pi R_2^2 \times T = 4\pi\left(2^{1/3}R_1\right)^2 T$$

या $W' = 2^{2/3}.4\pi R_1^2 T$

या $W' = \left(2^2\right)^{1/3} W$

$\therefore \quad W' = (4)^{1/3} W$

प्र.20. खून को दिल से मस्तिष्क शीर्ष तक ले जाने में आवश्यक न्यूनतम दाब की गणना कीजिए। यदि दिल से मस्तिष्क की ऊर्ध्व ऊँचाई 0.5 m हो तथा खून का घनत्व 1040 kg/m³ व *g* = 9.8 m/s² (श्यानता नगण्य लेने पर)।

हल- दिल से मस्तिष्क की ऊर्ध्व ऊँचाई $h = 0.5\ m$

खून का घनत्व $d = 1040\ kg/m^3$

$$g = 9.8\ m/s^2$$

(श्यानता नगण्य ली गई है)

$\because$ खून को दिल से मस्तिष्क शीर्ष तक ले जाने में आवश्यक न्यूनतम दाब $P = h.d.g$

या $P = 0.5 \times 1040 \times 9.8$

या $P = 5096\ Nm^{-2}$

$\therefore P = 5.096 \times 10^3 N/m^2$