अध्याय–03
विद्युत विभव (Electric Potential)

पिछलें अध्यायों में हमने बिन्दु आवेश के कारण अथवा आवेशों के समूह के कारण विद्युत क्षेत्र को एक सदिश जिसे क्षेत्र तीव्रता $\vec{E}$ कहते है, के रूप में व्यक्त किया। सतत् आवेश वितरण, आवेशों के मध्य बल, कूलॉम के नियम से विद्युत क्षेत्र, गाउस के नियम से विद्युत क्षेत्र का अध्ययन भी हम कर चुके हैं। इस अध्याय में हम यह देखेगें कि विद्युत क्षेत्र को राशि 'स्थिर विद्युत विभव' (electrostatic potentical) V के पदों में भी व्यक्त कर सकते है। यह विचार अत्यन्त महत्वपूर्ण है। ऐसा इस कारण है कि विद्युत क्षेत्र सदिश $\vec{E}$ तथा विभव V को परस्पर संबंधित किया जा सकता है चूंकि V एक अदिश राशि है तथा अदिशों के लिए योग सदिशों के योग की तुलना में अपेक्षाकृत सरल है अतः आवेश वितरण की कई समस्याओं में पहले V ज्ञात कर फिर इससे $\vec{E}$ की गणना करना, सीधे $\vec{E}$ ज्ञात करने की अपेक्षा अधिक सरल होता है। विद्युत विभव का विचार इस दृष्टि से भी महत्वपूर्ण है कि विभव स्थितिज ऊर्जा से संबंधित है। अतः स्थिर विद्युत आवेश वितरण से संबंधित परिस्थितियों में हम बल की जानकारी के विस्तार में जाए बिना भी ऊर्जा संरक्षण नियम का उपयोग कर महत्वपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं। यांत्रिकी से संबंधित समस्याओं में आप ऐसा पहले ही देख चुके हैं।

इस अध्याय में पहले हम विद्युत विभव को परिभाषित करेंगें। इसके उपरान्त बिन्दु आवेश के कारण विभव, आवेश निकायों के कारण विभव ज्ञात करेंगें। तत्पश्चात विद्युत क्षेत्र एवं विद्युत विभव में संबंध का अध्ययन करेंगें। कुछ विशेष प्रकरणों के लिए विद्युत विभव का परिकलन करने के उपरान्त उस निकाय की स्थितिज ऊर्जा का अध्ययन करेंगे। अध्याय के अंत में हम बाह्य विद्युत क्षेत्र में किसी द्विध्रुव को घुमाने के लिए किए गए कार्य तथा इसकी स्थितिज ऊर्जा का परिकलन करेंगे।

3.1 स्थिर विद्युत विभव तथा विभवान्तर (Electrostatic Potential and Potential Difference)

संरक्षी बलों के संदर्भ में किए गए अध्ययन से हम जानते हैं कि संरक्षी बल क्षेत्र से एक स्थितिज ऊर्जा संबद्ध होती है। प्रयोगों से ज्ञात है कि स्थिर विद्युतीय बल (क्षेत्र) भी एक संरक्षी बल (क्षेत्र) है अतः इसके साथ भी एक स्थितिज ऊर्जा U संबंद्ध होती है। जिसे विद्युत स्थितिज ऊर्जा कहते है। (इस अध्याय तथा आगे जहाँ तक स्पष्ट नहीं किया जाए विद्युत क्षेत्र से आशय स्थिर विद्युत क्षेत्र से है। विद्युत चुंबकत्व संबंधी अध्ययन में हम देखेंगे कि किस प्रकार एक परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र एक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है जो संरक्षी नही है तथा इस प्रकार के क्षेत्र के लिए स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा लागू नहीं होती है।)

मान लीजिए किसी विद्युत क्षेत्र में कोई धन परीक्षण आवेश q_0 किसी बिन्दु A से किसी बिन्दु B तक लाया जाता हैं, यहाँ हम यह मानते हैं कि इस प्रक्रिया में परीक्षण आवेश विद्युत क्षेत्र के स्त्रोत आवेश या आवेशों को विक्षुब्ध नही करता अर्थात् परिवेश में उपस्थित अन्य सभी आवेश यथा स्थान बने रहते हैं, यदि इस प्रकार के विस्थापन में स्थितिज ऊर्जा $U_B - U_A$ से परिवर्तित होती है तब हम बिन्दुओं A व B के मध्य विभवान्तर को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0} \qquad \ldots(3.1)$$

उपर्युक्त समीकरण विद्युत क्षेत्र के किन्ही दो बिन्दुओं के मध्य विद्युत विभवान्तर को परिभाषित करती है। किसी बिन्दु पर निरपेक्ष विद्युत विभव (absolute electric potential) (जिसे आगे हम केवल विद्युत विभव या विभव ही कहेंगें) को परिभाषित करने के लिए हम एक निर्देश बिन्दु (reference point) का चयन कर सकते है जहाँ हम स्थितिज ऊर्जा तथा विभव दोनों को शून्य मानते हैं। सामान्यतः निर्देश बिन्दु अनन्त पर माना जाता है। अतः यदि हम बिन्दु A को अनन्त पर मानें तो $V_A = V_\infty = 0$ तथा $U_A = U_\infty = 0$ लेने पर, समीकरण (3.1) से

$$V_B = U_B / q_0$$

चूंकि यहाँ बिन्दु B स्वैच्छिक है अतः उपर्युक्त समीकरण को व्यापक रूप से

$$V = U / q_0 \qquad \ldots(3.2)$$

लिखा जा सकता है। अतः हम विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा प्रति एकांक आवेश को विद्युत विभव कहते है। स्पष्ट है कि विद्युत विभव एक अदिश राशि है तथा परीक्षण आवेश पर अनाश्रित है। अतः यह केवल विद्युत क्षेत्र का ही अभिलाक्षणिक हैं।

हम जानते है कि ऊर्जा एवं कार्य परस्पर संबंधित होते है अतः विद्युत विभव एवं विभवान्तर को हम कार्य के पदों में भी परिभाषित कर सकते हैं। यदि संरक्षी विद्युत क्षेत्र में प्रारंभिक अवस्था से अन्तिम अवस्था तक आने में विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य W_e है तब

$$\Delta U = -W_e$$

इस कारण बिन्दुओं A व B के मध्य विभवान्तर

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_e}{q_0} \qquad \ldots(3.3)$$

अतः विद्युत क्षेत्र में स्थित दो बिन्दुओं के मध्य विभवानतर किसी एकांक आवेश को प्रारंभिक बिन्दु (A) से अन्तिम बिन्दु (B) तक लाने में विद्युत क्षेत्र के द्वारा किए गए कार्य का ऋणात्मक है। W_{BA} तथा q_0 के चिन्हों एवं परिमाणों के अनुरूप विभवान्तर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता हैं। पूर्व की भांति यदि हम अनन्त पर विद्युत विभव को शून्य मान ले तब समीकरण (3.3) की सहायता से हम विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर विद्युत विभव को

$$V = -\frac{W_{e\infty}}{q_0} \qquad \ldots(3.4)$$

द्वारा परिभाषित कर सकते हैं जहाँ $W_{e\infty}$ आवेश q_0 पर विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य है जब आवेश अनन्त से अभीष्ट बिन्दु तक लाया जाता है। किसी बिन्दु पर विद्युत विभव किसी एकांक धन आवेश की अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में विद्युत क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक के बराबर होता है।

मान लीजिए कि हम परीक्षण आवेश q_0 को विद्युत क्षेत्र में किसी बाह्य संसाधन (बल) के द्वारा प्रारंभिक बिन्दु A से अन्तिम बिन्दु B तक गति कर लाते हैं यदि यह गति इस प्रकार की है कि इसमें कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन नही हो रहा है अर्थात $\Delta K = 0$ तब कार्य–ऊर्जा प्रमेय से

$$W_{ext} = -W_e \qquad \ldots(3.5)$$

जहाँ W_{ext} बाह्य बल द्वारा आवेश पर किया गया कार्य है तब समीकरणों (3.3) व (3.5) से विभवान्तर के लिए

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{W_{ext}}{q_0} \qquad \ldots(3.6)$$

तथा यदि पूर्व की भांति बिन्दु A को ∞ पर माने तब किसी बिन्दु B पर विभव

$$V_B = \frac{W_{\infty B}}{q} \qquad \ldots(3.7)$$

जहाँ $W_{\infty B}$ आवेश को अनन्त से इच्छित बिन्दु तक लाने में किया गया बाह्य कार्य है। तदानुसार किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का मान किसी एकांक धन आवेश को अनन्त से उस बिन्दु तक बिना गतिज ऊर्जा में परिवर्तन किए लाने में किसी बाह्य बल द्वारा किए गए कार्य के बराबर होता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि विद्युत विभव को हम कई प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं जो परस्पर तुल्य है। (आगामी उपअनुभाग में हम देखेंगे कि विद्युत विभव को हम विद्युत क्षेत्र के रेखीय समाकल के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है)। इन समस्त परिभाषाओं से हम देख सकते है कि विद्युत विभव एक अदिश राशि है।

विद्युत विभव का SI मात्रक वोल्ट है तथा

$$1 \text{ वोल्ट (V)} = \frac{1 \text{ जूल}(J)}{1 \text{ कूलॉम}(C)}$$

किसी बिन्दु पर विद्युत विभव 1 वोल्ट होगा यदि 1 कूलॉम आवेश का अनन्त से इस बिन्दु तक लाने में किया गया कार्य 1 जूल है।

विद्युत विभव की विमा

$$[V] = \left[\frac{ML^2T^{-2}}{TA}\right] = \left[ML^2T^{-3}A^{-1}\right]$$

यह स्वतः ही स्पष्ट है कि विभवान्तर के लिए भी मात्रक वोल्ट ही होगा। यहाँ यह उल्लेख करना भी महत्वपूर्ण है कि विभवान्तर के लिए उपर्युक्त परिभाषित मात्रक हमें विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E के लिए (जिसे अभी तक हम N/C में वर्णित कर रहे हैं) एक अन्य बहु प्रचलित मात्रक V / m देता है।

अर्थात् $1 N/C = 1 V/m$

इस तुल्यता को स्थापित करना आपके अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है। वोल्ट मात्रक की जानकारी के उपरान्त हम ऊर्जा के लिए एक मात्रक जिसे इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV) कहते हैं भी परिभाषित कर सकते हैं। यह मात्रक परमाण्वीय एवं नाभिकीय ऊर्जाओं के मापन में बहुप्रचलित है। एक इलेक्ट्रॉन वोल्ट(eV) वह ऊर्जा है जो किसी एकल मूल आवेश e (इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन) को यथार्थतः 1 V के विभवान्तर के द्वारा गति कराने के लिए आवश्यक कार्य के बराबर है। समीकरण $W = q(\Delta V)$ से

$$1 eV = e(1V) = \left(1.6\times10^{-19} C\right)(J/C)$$

$$= 1.6\times10^{-19} J$$

3.1.1 विद्युत क्षेत्र से विद्युत विभव (Electric Potential from Electric Field)

किसी स्वैच्छिक विद्युत क्षेत्र पर विचार करें जिसके लिए क्षेत्र रेखाएँ चित्र 3.1 में दर्शाए अनुसार है। माना एक धन परीक्षण आवेश q_0 इस क्षेत्र में दर्शाए वक्र पथ पर प्रारम्भिक स्थिति A से अंतिम स्थिति B तक जाता है तो किसी अल्पांश विस्थापन $d\vec{\ell}$ के लिए आवेश पर कार्यकारी विद्युत बल $\vec{F}_e = q_0\vec{E}$ होगा जहाँ $\vec{E}$ अल्पांश की स्थिति पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता है। अतः इस अल्पांश के लिए विद्युत बल द्वारा आवेश पर किया गया कार्य

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \ldots(3.8)$$

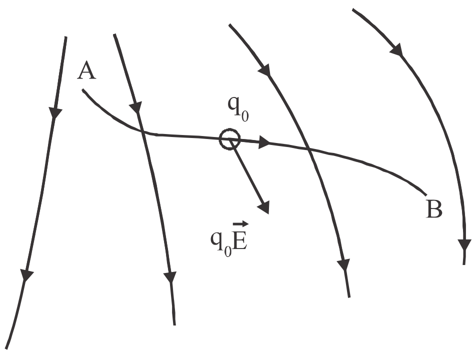
इस कारण बिन्दु A से B तक जाने में आवेश पर विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कुल कार्य

$$W_e = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \ldots(3.9)$$

तब समीकरण (3.3) व (3.9) से

$$V_B - V_A = -\frac{q_0}{q_0}\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \ldots(3.10)$$



चित्र 3.1 असमान विद्युत क्षेत्र में परीक्षण आवेश की बिन्दु A से B तक गति

समीकरण 3.10 के दक्षिण पक्ष में उपस्थित समाकल विद्युत क्षेत्र का रेखीय समाकल (line integral) कहलाता है। रेखीय समाकल से आशय है कि समाकल किसी पथ विशेष के लिए किया गया है चूंकि विद्युत बल (क्षेत्र) संरक्षी है अतः A व B के मध्य सभी पदों के लिए कार्य समान होंगे अतः सभी पथों के लिए रेखीय समाकलन समान होगा अर्थात् पथ पर आश्रित नही होगा। अतः समीकरण (3.10) के अनुसार विद्युत क्षेत्र में किन्ही दो बिन्दुओं A व B के मध्य विभवान्तर $V_B - V_A$, A से B तक $\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ के रेखीय समाकलन के ऋणात्मक के बराबर होता है।

यदि विद्युत क्षेत्र, $d\vec{\ell}$ के अनुदिश है तब समीकरण (3.10) का समाकल धनात्मक होगा तथा विभवान्तर ऋणात्मक, अर्थात् $V_B < V_A$। विद्युत क्षेत्र किसी धन आवेश को उच्च विभव से निम्न विभव की ओर गति करवाता है जबकि एक ऋणआवेश को निम्न विभव से उच्च विभव की ओर

समीकरण (3.10) में यदि हम बिन्दु A को अनन्त पर माने तो $V_A = 0$ माने तब

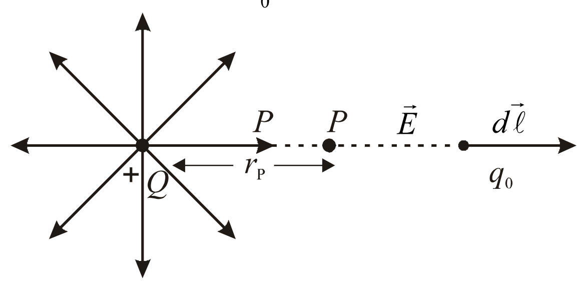
$$V = -\int_\infty^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad \ldots(3.11)$$

समीकरण 3.11 हमे स्वैच्दिक उपर्युक्त किसी बिन्दु B पर अनन्त पर शून्य विभव के सापेक्ष विभव देगी।

3.2 बिन्दु आवेश के कारण विभव (Potential due to Point Charge)

हम जानते हैं कि इसी बिन्दु आवेश Q दूरी r पर विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \ldots(3.12)$$



चित्र 3.2 बिन्दु आवेश के कारण विभव ज्ञात करना। यहाँ एक परीक्षण आवेश q_0 बिन्दु P से अनन्त की ओर ले जाया जा रहा है।

यदि Q धनात्मक है तो वि. क्षेत्र $\vec{E}$ आवेश से बाहर की ओर त्रिज्यीय दिशा में होता है। अब हम समीकरण 3.10 का उपयोग कर किसी बिन्दु P पर विद्युत विभव ज्ञात करेंगे। इसे ज्ञात करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि एक धनावेशित परीक्षण आवेश q_0 को बिन्दु P से अनन्त की ओर चित्र 3.2 में दर्शाए अनुसार किसी त्रिज्यीय रेखा पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के अनुदिश ले जाया जा रहा है। इस प्रकार के पथ पर परीक्षण आवेश के लिए अवकलीय विस्थापन $d\vec{\ell} = d\vec{r}$ लिखा जा सकता है तथा $\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = Ed\ell = Edr$ तब समीकरण 3.10 से सीमाओं r_P व ∞ के लिए समीकरण 3.10 से

$$V_\infty - V_P = -\int_{r_P}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_P}^{\infty} E dr$$

या $$-V_P = -\int_{r_P}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\in_0 r^2} dr \quad [\because V_\infty = 0]$$

या $$V_P = \frac{Q}{4\pi\in_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_P}^{\infty} \quad \left[\because \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\right]$$

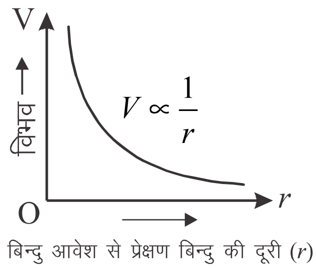
या $$V_P = \frac{Q}{4\pi\in_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_P}$$

या $$V_P = \frac{Q}{4\pi\in_0 r_P}$$

क्योंकि P कोई भी स्वैच्छिक बिन्दु हो सकता है अतः व्यापक रूप में

$$V = \frac{Q}{4\pi\in_0 r} \qquad \ldots(3.13)$$

अर्थात किसी बिन्दु आवेश के कारण विद्युत विभव, आवेश से प्रेक्षण दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होता है तथा यह बिन्दु आवेश के सापेक्ष प्रेक्षण बिन्दु की दिशा पर निर्भर नहीं करता है। विभव V की बिन्दु आवेश Q से दूरी पर निर्भरता चित्र 3.3 में प्रदर्शित है



चित्र 3.3 बिन्दु आवेश के कारण विभव की दूरी पर निर्भर

यदि स्रोत आवेश ऋणात्मक है तब

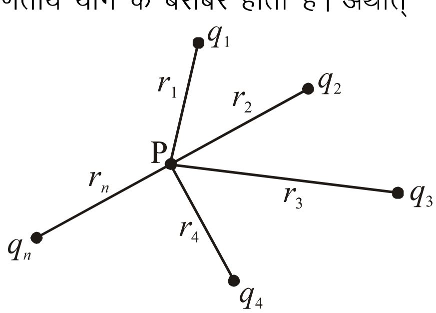
$$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{(-Q)}{r} \qquad ...(3.14)$$

किसी विलगित (isolated) धनावेश ($Q > O$) के कारण विद्युत विभव धनात्मक तथा किसी विलगित ऋणावेश ($Q < O$) के कारण विद्युत विभव ऋणात्मक होता हैं। किसी माध्यम में विभव, निर्वात की तुलना में कम होता है।

तथा $$V_m = \frac{V}{\in_r}$$

3.3 आवेशों के निकाय के कारण विद्युत विभव (Potential due to Group of Electric Charges)

विद्युत विभव एक अदिश राशि है, अतः दिये गये बिन्दु आवेश के कारण विद्युत विभव अलग–अलग आवेशों के कारण विभवों के अदिश योग से ज्ञात किया जा सकता है। चित्र 3.4 के अनुसार विभिन्न आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में किसी प्रेक्षण बिन्दु P पर विद्युत विभव ज्ञात करना है। माना बिन्दु P की बिन्दु आवेशों $q_1, q_2, q_3 ... q_n$ से दूरियाँ क्रमशः $r_1, r_2, r_3,$ हैं तो बिन्दु P पर कुल विभव अलग–अलग आवेशों के कारण विभवों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है। अर्थात्



चित्र 3.4 प्रेक्षण बिन्दु P पर आवेशों के निकाय के कारण विद्युत विभव

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$

या $$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q_2}{r_2} + ... + \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q_n}{r_n}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + ... + \frac{q_n}{r_n} \right]$$

या $$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \qquad ...(3.15)$$

उदाहरण 3.1 एक स्थान पर विद्युत विभव –15 वोल्ट है। तथा किसी दूसरे स्थान पर विद्युत विभव V वोल्ट है। यदि 6 कूलॉम आवेश को पहले स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में 150 जूल कार्य करना पड़े तो V का मान ज्ञात किजिये।

हलः यहाँ $V_A = -15$ वोल्ट, $W_{exe} = 150\,J$

$V_B = V$ वोल्ट, $q_0 = 6\,C$

$\because$ $$V_B - V_A = \frac{W_{ext}}{q_0}$$

या $$V - (-15) = \frac{150}{6} = 25\,\text{volt}$$

या $$V = 25 - 15 = 10\,\text{volt}$$

उदाहरण 3.2 20 C आवेश को बिन्दु A से B तक ले जाने मे 0.2 मीटर दूरी के लिये किया गया कार्य 2 जूल है तब इन बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर का मान क्या होगा?

हलः यहाँ $q_0 = 20\,C$

$W_{ext} = 2\,J$

तब विभवान्तर $$V_B - V_A = \frac{W_{ext}}{q_0} = \frac{2}{20} = 0.1\,V$$

उदाहरण 3.3 हवा में स्थित किसी धनात्मक बिन्दु आवेश $1.1 \times 10^{-9}\,C$ से $10\,cm$ दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिये।

हलः यहाँ $Q = 1.1 \times 10^{-9}\,C$

$r = 10\,cm = 0.1\,m$

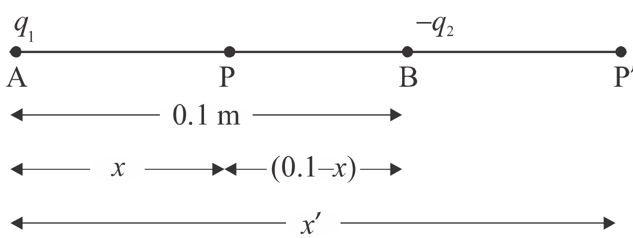
अतः विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{(Q)}{r}$$

या $$V = \frac{9 \times 10^9 \times 1.1 \times 10^{-9}}{0.1} = 99\,V$$

उदाहरण 3.4 दो आवेशों $4\times10^{-9}\,C$ तथा $-3\times10^{-9}\,C$ के मध्य दूरी 0.1 m है। दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होगा? अनन्त पर विभव का मान शून्य लीजिये।

हल: चित्र पर ध्यान दें यहाँ q_1 व q_2 विपरीत प्रकृति के हैं तथा q_1 परिमाण में q_2 से बड़ा है। अतः q_1 के बांई ओर कोई भी बिन्दु ऐसा नहीं होगा जहाँ q_1 व q_2 के विभव परस्पर निरस्त हो रहे हों। ऐसे बिन्दु q_1 व q_2 को मिलाने वाली रेखा पर q_1 व q_2 के बीच से कहीं तथा q_2 के दाहिनी ओर हो सकते हैं जिन्हें चित्र में P तथा P' से दर्शाया गया है।



यदि P की q_1 से दूरी x है तब $V_P = 0$

$$V_A + V_B = O$$

$$\frac{1}{4\pi\in_0}\cdot\frac{q_1}{x} = -\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_2}{(0.1-x)}$$

या $$\frac{4\times10^{-9}}{x} = -\frac{-(-3\times10^{-9})}{(0.1-x)}$$

या $$3x = 0.4 - 4x$$

या $$x = \frac{0.4}{7} = 0.057m$$

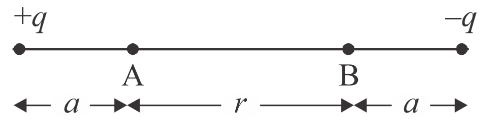
यदि P' की q_1 से दूरी x' है तो P' पर विभव शून्य होने के लिए

तथा $$\frac{4\times10^{-9}}{x'} = \frac{3\times10^{-9}}{(x'-0.1)}$$

$\Rightarrow$ $$3x' = 4x - 0.4$$

$\Rightarrow$ $$x' = 0.4m$$

उदाहरण 3.5 दो आवेश $+q$ तथा $-q$ चित्रानुसार व्यवस्थित हैं A तथा B बिन्दुओं पर विभव क्रमशः V_A तथा V_B हैं तब V_A - V_B ज्ञात कीजिये।



हल: $+q$ के कारण A पर विभव

$$= \frac{1}{4\pi\in_0}\times\frac{q}{a}$$

$-q$ के कारण A पर विभव $= \dfrac{1}{4\pi\in_0}\dfrac{(-q)}{(a+r)}$

अतः A पर कुल विभव

$$V_A = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{a+r}\right)$$

$+q$ के कारण B पर विभव $= \dfrac{1}{4\pi\in_0}\dfrac{q}{a+r}$

$-q$ के कारण B पर विभव $= \dfrac{1}{4\pi\in_0}\left(\dfrac{-q}{a}\right)$

अतः B पर कुल विभव

$$V_B = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q}{a+r} - \frac{q}{a}\right)$$

अतः $$V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\in_0}\left[\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{a+r}\right) - \left(\frac{q}{a+r} - \frac{q}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\in_0}2q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\in_0}2q\left(\frac{(a+r)-a}{a(a+r)}\right)$$

$$V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{2qr}{a(a+r)}$$

3.4 विद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to Electric Dipole)

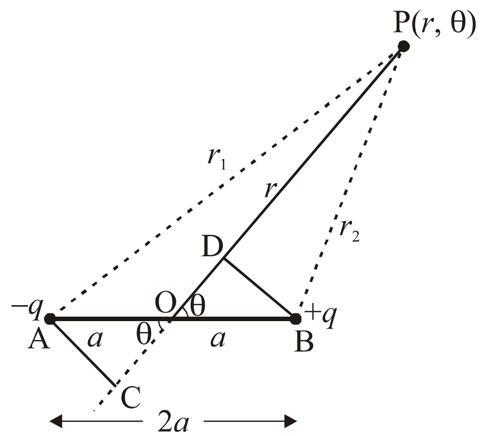
चित्र 3.5 में एक विद्युत द्विध्रुव AB प्रदर्शित किया गया है। बिन्दु A तथा B पर आवेश क्रमशः $-q$ तथा $+q$ है तथा इनके मध्य की दूरी $2a$ है। इसके केन्द्र O से r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत विभव ज्ञात करना है तथा रेखा OP द्विध्रुव की अक्ष से

θ कोण बनाती है। A पर स्थित आवेश $-q$ के कारण P पर विभव

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{(-q)}{r_1} \qquad \ldots(3.16)$$

इसी प्रकार B पर स्थित $+q$ आवेश के कारण बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\in_0}.\frac{q}{r_2} \qquad \ldots(3.17)$$



चित्र 3.5 विद्युत द्विध्रुव के कारण प्रेक्षण बिन्दु P (r, θ) पर विद्युत विभव

अतः विद्युत द्विध्रुव के कारण बिन्दुP पर कुल विद्युत विभव

$V = V_1 + V_2$

या $$V = \frac{q}{4\pi\in_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\in_0}\left[\frac{r_1-r_2}{r_1r_2}\right] \ldots(3.18)$$

अब $r_1 - r_2$ तथा r_1r_2 का मान ज्ञात करने के लिए हम बिन्दु A व B से रेखा OP पर क्रमशः लम्ब AC व BD खींचते है। यदि $r >> a$ है तो $AP \approx PC$ तथा $PB \approx PD$

चित्र 3.5 से

$$OP = OD + DP$$

या $r = a\cos\theta + r_2 \qquad \because DP \approx BP = r_2$

या $r_2 = r - a\cos\theta \qquad \left(\because \cos\theta = \frac{OD}{a}\right)$

$AP \approx CP = OP + OC \qquad (OD = a\cos\theta)$

या $r_1 = r + a\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{OC}{a}$ या $OC = a\cos\theta$

अतः $r_1 - r_2 = 2a\cos\theta$

तथा $r_1r_2 = r^2 - a^2\cos^2\theta = r^2$ क्योंकि $r^2 >> a^2$ है।

इन का मान समी. (3.18) में रखने पर

$$V = \frac{q}{4\pi\in_0}\frac{2a\cos\theta}{(r^2)}$$

$\because \quad 2aq = p$ द्विध्रुव आघूर्ण है

अतः $$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \ldots(3.19)$$

स्पष्ट है कि एकल आवेश की तुलना में द्विध्रुव के कारण विभव की दूरी पर निर्भरता r^{-1} न होकर r^{-2} है।

विशिष्ट स्थितियाँ (Special Cases)

(i) यदि बिन्दु P अक्ष पर है जहाँ $\theta = 0^\circ \ \cos\theta = 1$ तब

समी. (3.19) से $V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{p}{r^2}$

(ii) यदि बिन्दु निरक्ष पर है जहाँ $\theta = 90^\circ \ \cos\theta = 0$ तब

समी. (3.19) से $V = 0$

सदिश रूप में, द्विध्रुव के कारण बिन्दु (r, θ) पर विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\in_0}.\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

अतः यह स्पष्ट है कि

1. विद्युत द्विध्रुव के कारण उसके निरक्ष पर विद्युत विभव शून्य होता हैं यद्यपि विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होता।
2. समान परिस्थितियों में विद्युत द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न विभव एकल आवेश के विद्युत विभव से $\frac{2a}{r}\cos\theta$ गुना है।
3. छोटे विद्युत द्विध्रुव के लिये विद्युत विभव दूरी के वर्ग के व्युक्रमानुपाती होता है।
4. किसी विद्युत द्विध्रुव के कारण विभव केवल दूरी पर ही निर्भर नहीं करता बल्कि वह स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा द्विध्रव आपूर्ण के मध्य कोण पर भी निर्भर करता है।

उदाहरण 3.6 दो बिन्दु आवेश क्रमशः $8\times10^{-19}\,C$ तथा $-8\times10^{-19}\,C$ परस्पर $2\times10^{-10}\,m$ दूरी पर स्थित हैं। इस द्विध्रुव से $4\times10^{-6}\,m$ दूरी पर स्थित बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिये जब बिन्दु (अ) द्विध्रुव अक्ष पर हो, (ब) द्विध्रुव निरक्ष पर हो तथा (स) द्विध्रुव आघूर्ण से 60° पर स्थित हो।

हलः यहाँ $q = 8\times10^{-19} C$

$2a = 2\times10^{-10}\ m$

$r = 4\times10^{-6}\ m$

अतः द्विध्रुव आघूर्ण $p = q.2a = 8\times10^{-19}\times2\times10^{-10}$

$p = 16\times10^{-29}\ C\cdot m$

(अ) अक्षीय स्थिति में विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{p}{r^2} = \frac{9\times10^9\times16\times10^{-29}}{(4\times10^{-6})^2}$$

या $V = 9\times10^{-8}$ वोल्ट

(ब) निरक्षीय स्थिति में विद्युत विभव $V = 0$

(स) जब $\theta = 60^\circ$

$$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

या $$V = \frac{9\times10^9\times16\times10^{-29}\cos60^\circ}{(4\times10^{-6})^2}$$

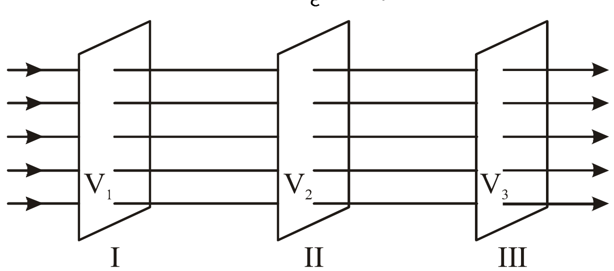
या $V = 4.5\times10^{-8}$ वोल्ट

3.5 समविभव पृष्ठ (Equipotential Surface)

किसी विद्युत क्षेत्र में वह पृष्ठ जिस पर स्थित समस्त बिन्दुओं पर विभव का मान समान हो, समविभव पृष्ठ कहलाता है। समविभव पृष्ठ पर किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य होता है। अतः समविभव पृष्ठ के किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक किसी आवेश को ले जाने में किया गया कार्य शून्य के बराबर होता है। चूंकि किया गया कार्य तब ही शून्य हाता है जब बल (विद्युत क्षेत्र) तथा विस्थापन की दिशा लम्बवत होती है अतः समविभव पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की दिशा तल के लम्बवत होती है।

समविभव पृष्ठ के संबंध में निम्न उदाहरणों पर विचार किया जा सकता है।

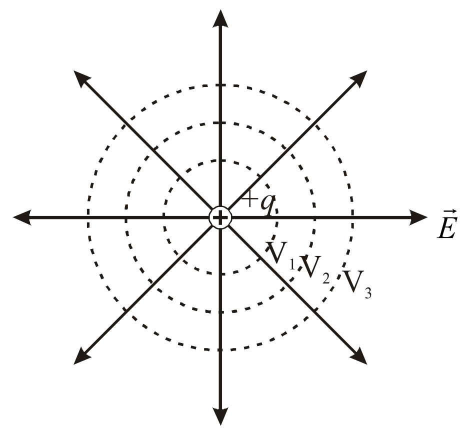
1. किसी एकसमान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के लिये किसी समरूप विद्युत क्षेत्र के लिये समविभव पृष्ठ इसकी क्षेत्र रेखाओं के लम्बवत् स्थित होता है। चित्र 3.6 के अनुसार I, II तथा III समविभव पृष्ठ हैं।



चित्र 3.6 एक समान विद्युत क्षेत्र में समविभव पृष्ठ

2. किसी विलगित बिन्दु आवेश के लियेःकिसी विलगित बिन्दु आवेश $+q$ के कारण r दूरी पर विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r}$$



चित्र 3.7 बिन्दु आवेश के कारण समविभव पृष्ठ

यदि हम $+q$ आवेश के चारों ओर r त्रिज्या का गोला बनायें तब इस गोले पर स्थित सभी बिन्दुओं पर विभव समान होंगे। अर्थात् समविभव पृष्ठ गोलाकर होते हैं जिनका केन्द्र आवेश पर होता है। धन बिन्दु आवेश के लिए जैसे–जैसे गोलीय पृष्ठ की त्रिज्या बढ़ती है वैसे–वैसे गोलीय पृष्ठ का विभव कम होता जाता है।

3.5.1 समविभव पृष्ठ के गुणधर्म (Properties of Equipoteutial Surface)

1. चूंकि समविभव पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विभव समान होता है। अतः किसी समविभव पृष्ठ पर किसी बिन्दु आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य शून्य होता है।
2. विद्युत क्षेत्र की दिशा सदैव समविभव पृष्ठ के तल के लम्बवत होती है।
3. दो समविभव पृष्ठ या तल परस्पर नहीं काटते क्योंकि यदि काटेगें तब कटान बिन्दु पर विद्युत विभव के दो मान होगें जोकि सम्भव नहीं हैं।
4. किसी चालक की सतह सदैव समविभव पृष्ठ होती है। वस्तुतः किसी चालक का सम्पूर्ण आयतन एक समान विभव पर होता है।

3.6 विद्युत क्षेत्र एवं विद्युत विभव में सम्बन्ध (Relation Between Electric Field and Electric Potential)

विद्युत क्षेत्र एवं विद्युत विभव में एक संबंध हम समीकरण (3.10) के रूप में पहले ही देख चुके हैं। इस समीकरण की सहायता से हम किसी ज्ञात विद्युत क्षेत्र में किन्ही दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर परिकलित कर सकते हैं। इस अनुभाग में हमारा उद्देश्य किसी ज्ञात विभव फलन V के लिए विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है।

किसी स्वैच्छिक विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में किसी अल्प अवकलन विस्थापन $d\vec{\ell}$ के लिए समीकरण (3.10) को अवकलन रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E d\ell \cos\theta \qquad \ldots(3.20)$$

जहाँ θ, $\vec{E}$ व $d\vec{\ell}$ के मध्य कोण है

$$-\frac{dV}{d\ell} = E\cos\theta \qquad \ldots(3.21)$$

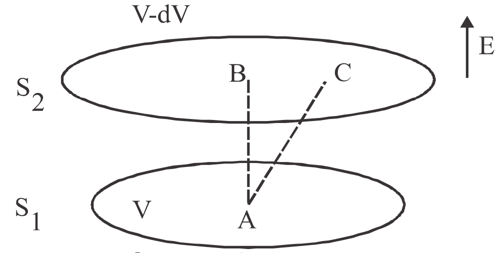
राशि $-\frac{dV}{d\ell}$ विभव में दूरी के साथ कमी को दर्शाती है। उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि यदि $d\vec{\ell}$ व $\vec{E}$ के मध्य कोण $\theta = 0^\circ$ है तब विभव में दूरी के साथ हानि अधिकतम होगी। यद्यपि सामान्य रूप में राशि $\frac{dV}{d\ell}$ एक अदिश राशि है किन्तु इसका अधिकतम मान $\left(\frac{dV}{d\ell}\right)_{\max}$ एक विशिष्ट दिशा $(\theta = 0_i)$ अर्थात् $\vec{E}$ की दिशा में हैं अतः विभव में हानि की अधिकतम दर को एक सदिश माना जा सकता है जो $\vec{E}$ की दिशा में है। गणित की भाषा में इसे विभव प्रवणता कहते है। तथा Grad V से व्यक्त करते है।

$$\left(\frac{dV}{d\ell}\right)_{\max} = Grad\, V \qquad \ldots(3.22)$$

तदानुसार $\vec{E} = -Grad\, V \qquad \ldots(3.23)$

लिखा जाता हैं किसी समविभव पृष्ठ के लिए Grad V की दिशा पृष्ठ के अभिलंबवत होती है। इसे चित्र (3.8) की सहायता से समझा जा सकता है। समविभव पृष्ठ S_1 व S_2 दर्शाए गए हैं जिन पर विभव क्रमशः V तथा V – dV है। पृष्ठ S_1 के बिन्दु A से पृष्ठ S_2 के बिन्दुओं B व C तक जाने में दोनो ही पथों के लिए विभव में हानि समान dV है किन्तु विभव में दूरी के साथ परिवर्तन की दर क्रमशः $\frac{dV}{AB}$ व $\frac{dV}{AC}$ भिन्न है चूंकि $AB < AC$ है अतः $\frac{dV}{AB} > \frac{dV}{AC}$

अब AB पृष्ठ के अभिलंबवत है अतः विभव में हानि की दर पृष्ठ के अभिलंब दिशा में ही अधिकतम होती है।



चित्र 3.8 विभव प्रवणता

समीकरण (3.21) को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$$-\frac{\delta V}{\delta \ell} = E\cos\theta = E_\ell$$

यहाँ $E_\ell = E\cos\theta$, $d\vec{\ell}$ की दिशा में $\vec{E}$ का घटक है। ध्यान दें यहाँ हमने आंशिक अवकलज प्रतीको का उपयोग किया है जो यह बताता है कि उपर्युक्त समीकरण किसी निर्दिष्ट अक्ष (यहाँ ℓ अक्ष के लिए) विभव में परिवर्तन तथा उसी अक्ष के अनुदिश E के घटक को समावेशित कर रही है। यदि ℓ अक्ष को हम बारी–बारी से क्रमशः X, Y व Z अक्षों की तरह माने तो किसी बिन्दु पर $\vec{E}$ के x, y व z घटक होंगे।

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \ldots(3.24)$$

कार्तीय निर्देशांको में $\vec{E}$

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

या
$$\vec{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

या
$$\vec{E} = -\nabla V \qquad \ldots(3.25)$$

जहाँ
$$\nabla = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \ldots(3.26)$$

इस संकारक को डेल संकारक (Del operator) कहा जाता है। समीकरण (3.25) की सहायता से विभव फलन V(x, y, z) ज्ञात होने पर $\vec{E}$ ज्ञात किया जा सकता है।

यदि विभव फलन गोलीय सममित अर्थात् त्रिज्या r का फलन है तब त्रिज्य विद्युत क्षेत्र

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad \ldots(3.27)$$

से दिया जाता है।

उदाहरण 3.7 किसी विद्युत क्षेत्र में विद्युत विभव निम्न सूत्र से दिया जाता है $V = \frac{343}{r}\ volt$ स्थिति सदिश $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ m पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिये।

हल: क्योंकि $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{343}{r}\right] = -\frac{343}{r^2}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{49} = 7\text{ m}$$

तब $\vec{E} = -\left(\frac{-343}{r^2}\right)\hat{r}$

परन्तु $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\therefore$ $\vec{E} = \frac{343}{r^3}\vec{r}$

या $\vec{E} = \frac{343}{(7)^3}\left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}\right)$

या $\vec{E} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}\right)$ V/m

उदाहरण 3.8 विद्युत क्षेत्र में विद्युत विभव को

$$V(x, y, z) = 6x - 8xy - 8y + 6yz$$

से निरूपित किया जाता है, जहाँ V वोल्ट में तथा x, y, z, m में है। बिन्दु (1, 1, 1) m पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण ज्ञात कीजिये।

हल: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \hat{i}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \hat{j}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

या $\vec{E} = -\left[\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial Z}\right]$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 8xy - 8y + 6yz) = (6 - 8y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 8xy - 8y + 6yz) = (-8x - 8 + 6z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(6x - 8xy - 8y + 6yz) = 6y$$

उपर्युक्त मान का प्रयोग करने पर

$$\vec{E} = -\left[(6 - 8y)\hat{i} + (-8x - 8 + 6z)\hat{j} + 6y\hat{k}\right]$$

(1,1,1) बिन्दु पर

$$\vec{E} = -\left[(6 - 8)\hat{i} + (-8 - 8 + 6)\hat{j} + 6\hat{k}\right]$$

या $\vec{E} = \left(2\hat{i} + 10\hat{j} - 6\hat{k}\right)$ V/m

$$|\vec{E}| = \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-6)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}\text{ V/m}$$

3.7 विद्युत विभव का परिकलन (Calculation of Electric Potential)

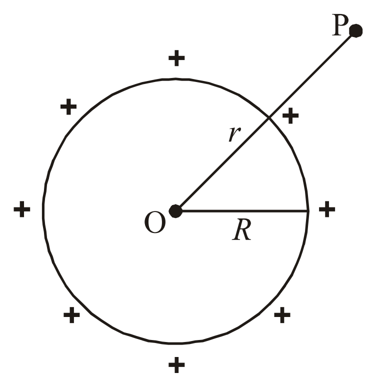
3.7.1 एक समान आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत विभव (Eletric Potential due to uniformy Charged Spherical Shell)

माना कि R त्रिज्या के गोलीय कोश को q आवेश से आवेशित किया गया है। इससे कोश के अन्दर, पृष्ठ पर तथा बाहर स्थित बिन्दुओं पर उत्पन्न विद्युत विभव की गणना करनी है। प्रेक्षण बिन्दु की गोलीय कोश के केन्द्र से दूरी r है।

(अ) गोलीय कोश के बाहर (r>R) स्थित बिन्दु पर

विद्युत विभव की परिभाषा से

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$



चित्र 3.9 गोले के द्वारा विभव $(r > R)$

परन्तु बाहर स्थित बिन्दु के लिये $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$

अतः $\therefore V = -\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$

$\hat{r}.d\vec{r} = dr$ क्योंकि $\hat{r}$ व $d\vec{r}$ समान दिशा में है।

$$\therefore \qquad V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

या $$V = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right]$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \ldots (3.28)$$

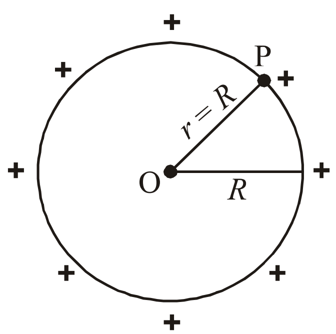
स्पष्ट है कि गोलीय कोश के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये विद्युत विभव उसके केन्द्र से दूरी r के व्युत्क्रमानुपाती होता है। और अनन्त पर शून्य हो जाता है।

(ब) गोलीय कोश के पृष्ठ ($r = R$) पर स्थित बिन्दु पर

विद्युत विभव की परिभाषा से $V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

अतः $r = R$ समी. (3.28) में रखने पर

$$V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \qquad \ldots (3.29)$$

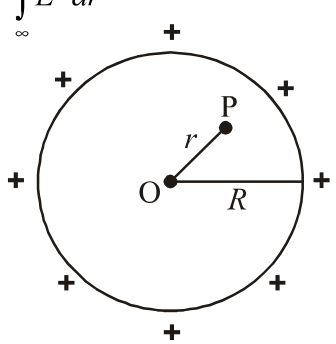


चित्र 3.10 गोले की सतह पर विभव $(r = R)$

(स) गोलीय कोश के अन्दर ($r < R$) पर स्थित बिन्दु पर

गोलीय कोश के अन्दर बिन्दु के लिये विद्युत विभव की गणना में अनन्त से दूरी r तक विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दूरी पर निर्भरता एक जैसी नहीं है अतः

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$



चित्र 3.11 गोले के आंतरिक बिन्दु पर विभव $(r < R)$

दो भागों में विभक्त कर हल करते हैं।

(1) अनन्त से दूरी R तक तथा

(2) दूरी R से अभीष्ठ बिन्दु की दूरी r तक अर्थात

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{R}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

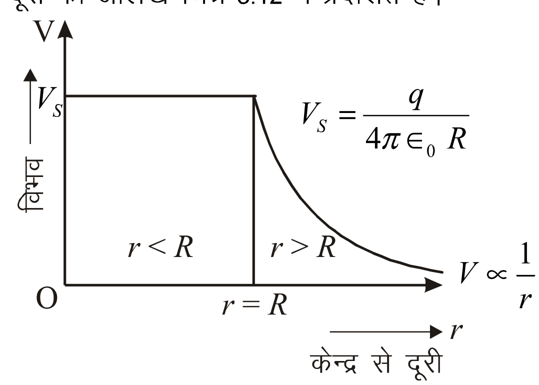
प्रथम समाकलन का मान समी. (3.29) से प्राप्त किया जा सकता है तथा द्वितीय समाकलन का मान शून्य होता है। क्योंकि R से r तक E शून्य होता है। अतः

$$V_{In} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} + \int_{R}^{r} -\vec{0}\cdot d\vec{r}$$

या $$V_{In} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \qquad \ldots (3.30)$$

समी. (3.30) से स्पष्ट है कि गोलीय कोश के आन्तरिक बिन्दु पर विद्युत विभव का मान पृष्ठ पर स्थित बिन्दु के विद्युत विभव के मान बराबर होता है। यह मान गोलीय कोश से उत्पन्न विभव का अधिकतम मान है।

आवेशित गोलीय कोश द्वारा उत्पन्न विद्युत विभव का केन्द्र से दूरी का आलेख चित्र 3.12 में प्रदर्शित है।



चित्र 3.12 आवेशित गोलीय कोश में विभव का दूरी के साथ परिवर्तन

3.7.2 आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to Charged Conductiing Sphere)

गोलीय चालक को आवेश देने पर आवेश इसके पृष्ठ पर ही रहता है अतः आवेशित गोलीय चालक के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, गोलीय कोश के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की भाँति होने के कारण विद्युत विभव भी गोलीय कोश के समान होगा। इसके लिये गोलीय कोश (3.7.1) में वर्णित परिकलन का उपयोग किया जाता है।

3.7.3 आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to Charged Non-conducting Sphere)

माना R त्रिज्या के ठोस अचालक गोले को q आवेश से आवेशित किया गया है। इसके कारण गोले के बाहर, पृष्ठ पर तथा अन्दर स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता निम्न होती हैं

बाहर $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad (r > R)$$

पृष्ठ पर $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R^2}\hat{r} \qquad (r = R)$$

अन्दर $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \qquad (r < R)$$

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ में किसी बिन्दु पर विभव निम्न सूत्र द्वारा परिकलित किया जाता है

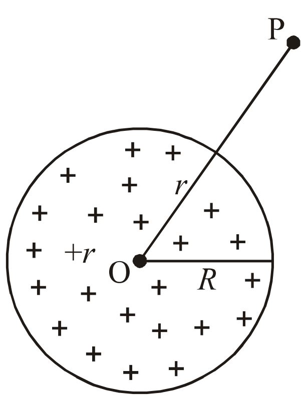
$$V = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

अब प्रेक्षण बिन्दू की विभिन्न स्थितियों में विद्युत विभव का परिकलन करते है–

(अ) अचालक गोले के बाहर ($r > R$) स्थित बिन्दु पर

$$V = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

परन्तु $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



चित्र 3.13 कुचालक गोले में $r > R$

अतः $$V = -\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

या $$V = -\frac{q}{4\pi\in_0}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr \qquad (\hat{r}\cdot d\vec{r} = dr)$$

या $$V = -\frac{q}{4\pi\in_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\in_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] \qquad \because \frac{1}{\infty} = o$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\in_0 r} \qquad \ldots (3.31)$$

अतः अचालक गोले के बाहरी बिन्दुओं के लिए $V \propto \frac{1}{r}$ होता है।

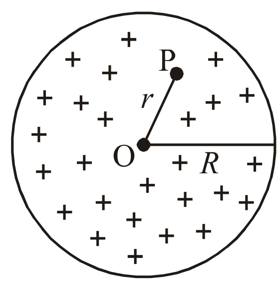
(ब) अचालक गोले की सतह पर ($r = R$) स्थित बिन्दु पर

समीकरण 3.31 में 3.32 से $r = R$ रखने पर

$$V_S = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R} \qquad \ldots (3.32)$$

(स) अचालक गोले के अन्दर ($r < R$) स्थित बिन्दु पर

अचालक गोले के अन्दर स्थित बिन्दु के लिये अनन्त से r दूरी तक विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E एकसमान रूप से निर्भर नहीं करती अर्थात अनन्त से सतह तक दूरी r के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती तथा सतह से गोले के केन्द्र तक दूरी r के समानुपाती होती है। अतः समाकलन को दो भागों में विभक्त करते है।



चित्र 3.14 अचालक गोले के भीतर या अन्दर $r < R$

अतः $$V = \left(-\int_{\infty}^{R}\vec{E}\cdot d\vec{r}\right) + \left(-\int_{R}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}\right)$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R} - \int_{R}^{r}\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R^3}r\,\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$\left(\because \vec{E}_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R^3}r\,\hat{r}\right)$$

या $$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R}-\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R^3}\left(\frac{r^2}{2}\right)_R^r$$

या $$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R}-\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R^3}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right)$$

या $$V=\frac{1}{4\pi\in_0}q\left(\frac{1}{R}-\frac{r^2}{2R^3}+\frac{1}{2R}\right)$$

या $$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

या $$V=\frac{q}{4\pi\in_0}\left(\frac{3R^2-r^2}{2R^3}\right) \qquad \ldots(3.33)$$

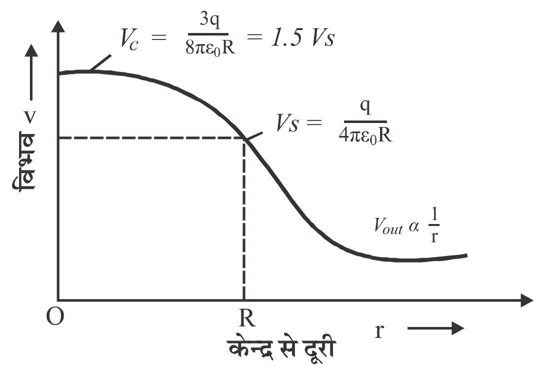
केन्द्र पर स्थित बिन्दु के लिये समी. (3.33) में $r=0$ रखने पर

$$V_{centre}=\frac{3}{2}\left(\frac{q}{4\pi\in_0 R}\right) \qquad \ldots(3.34)$$

या $$V_{centre}=\frac{3}{2}V_S=1.5V_S$$

अतः आवेशित अचालक गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव उसके पृष्ठ की तुलना में 1.5 गुना होता है।

स्पष्ट है कि आवेशित अचालक गोले में केन्द्र से सतह तक विभव r^2 की विशिष्ट निर्भरता से घटता है उसके पश्चात् r^{-1} के नियम से कम होकर अनन्त पर शून्य हो जाता है। इसे चित्र (3.15) में ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया गया हैं



चित्र 3.15 आवेशित अचालक गोले में केन्द्र से दूरी के साथ विभव की निर्भरता

उदाहरण 3.9 10 cm त्रिज्या के एक ठोस अचालक गोले को $3.2\times10^{-19}C$ आवेश दिया जाता है। गोले के केन्द्र से (i) 14cm (ii) 10cm तथा (iii) 4cm दूर स्थित बिन्दुओं पर विद्युत विभव ज्ञात करो।

हल: यहाँ $R=10\,cm=0.10\,m$

$$q=3.2\times10^{-19}\,C$$

(i) $r=14\,cm=0.14\,m$

अर्थात् बिन्दु गोले के बाहर स्थित है

$$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r}$$

या $$V=9\times10^9\times\frac{3.2\times10^{-19}}{0.14}=2.057\times10^{-8}\text{ V}$$

(ii) $r=10\,\text{cm}=0.10\,\text{m}$ अर्थात बिन्दु गोले के प्रष्ठ पर स्थित है $r=R$

$$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{R}=\frac{9\times10^9\times3.2\times10^{-19}}{0.10}$$

या $$V=2.88\times10^{-8}\text{ Volt}$$

(iii) $r=4\,\text{cm}=0.04\,\text{m}$ अर्थात बिन्दु गोले के अन्दर स्थित है तब

$$V=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{2R}\left[3-\frac{r^2}{R^2}\right]$$

या $$V=\frac{9\times10^9\times3.2\times10^{-19}}{2\times0.10}\left[3-\frac{(0.04)^2}{(0.10)^2}\right]$$

या $$V=1.44\times10^{-8}\left[3-\frac{16}{100}\right]$$

या $$V=1.44\times10^{-8}\left[2.84\right]$$

या $$V=4.09\times10^{-8}\text{ Volt}$$

3.8 आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy of a System of Charges)

इस अध्याय के प्रारंभ में हमने देखा था कि किसी स्थिर विद्युतीय क्षेत्र के साथ एक स्थितिज ऊर्जा संबद्ध की जा सकती हैं। हम आवेशों के किसी निकाय के लिए स्थितिज ऊर्जा की विवेचना करेंगे। आवेशों के किसी निकाय पर विचार करें। निकाय के आवेश एक दूसरे पर स्थिर वैद्युतीय बल लगाते हैं यदि इस निकाय में एक या अधिक आवेशों की स्थिति परिवर्तित की जाए अर्थात निकाय की संरचना परिवर्तित हो रही है तो इन विद्युत बलों द्वारा कार्य किया जाता है। यदि निकाय किसी प्रारंभिक अवस्था i से अपना विन्यास परिवर्तित कर किसी अन्तिम

अवस्था f तक पहुँचना है तथा स्थिर विद्युतीय बलों द्वारा किया गया कार्य W_e है तो परिभाषा से निकाय की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_e$$

अर्थात् किसी निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन निकाय के विन्यास परिवर्तन में स्थिर विद्युतीय बलो द्वारा किए गए कार्य का ऋणात्मक होता है। तुल्य रूप में इसे बाह्य बलो के द्वारा किए गए कार्य W_{ext} के रूप में भी समझा जा सकता है यदि हम मान ले कि प्रक्रम के प्रारंभ और अंत में निकाय की गतिज ऊर्जा शून्य है तब

$$\Delta U = U_f - U_i = W_{ext}$$

सुविधा के लिए हम शून्य स्थितिज ऊर्जा के लिए संदर्भ को आवेशित कणों के निकाय की उस संरचना के लिए मानते हैं जिसमें निकाय के कण एक दूसरे से अनन्त दूरी पर है तब $U_i = U_\infty = 0$ लेने पर निकाय की अन्तिम स्थितिज ऊर्जा को इसकी स्थितिज ऊर्जा कहा जाता है अर्थात्

$$U = -W_{e\infty}$$

यहाँ $W_{e\infty}$ निकाय के आवेशों को अनन्त से अन्तिम स्थिति तक लाने में विद्युत बलों द्वारा किया गया कार्य हैं यदि हम बाह्य बलों के द्वारा किए गए कार्य के रूप में उपर्युक्त समीकरण को लिखना चाहते तो

$$U = -W_{e\infty} = +W_{ext}$$

यहाँ W_{ext} निकाय पर बाह्य बलो द्वारा कार्य है जबकि निकाय की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन नहीं हो रहा है।

उपर्युक्त परिभाषाओं के आधार पर सबसे पहले हम दो आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का परिकलन करते हैं। चित्र (3.16) दो बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 को दर्शाता है। जिनकी प्रकृति समान है तथा जो r दूरी से स्थित है। हम कल्पना करते है कि आवेश प्रारंभ में एक दूसरे से अनन्त दूरी पर विराम में थे। जब आवेश q_1 को अनन्त से इसकी वर्तमान स्थिति में लाया जाता है तो क्योंकि पहले से कोई विद्युत क्षेत्र उपस्थित नहीं है अतः ना तो क्षेत्र ना ही किसी बाह्य कर्त्ता द्वारा कोई कार्य किया जाता है। परन्तु जब q_2 को अनन्त से जाकर उसकी वर्तमान स्थिति पर रखा जाता है तो किसी बाह्य कर्त्ता को स्थिर वैद्युत बल (क्षेत्र) के विरूद्ध कार्य करना होगा।

बिन्दु आवेश q_2 की स्थिति पर q_1 के कारण विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

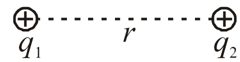
तब विभव की परिभाषा से

$$W_\infty = -W_e = qV$$

अतः $U = W_\infty = qV$

$q = q_2$ रखने पर

या $$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} \qquad \ldots(3.35)$$



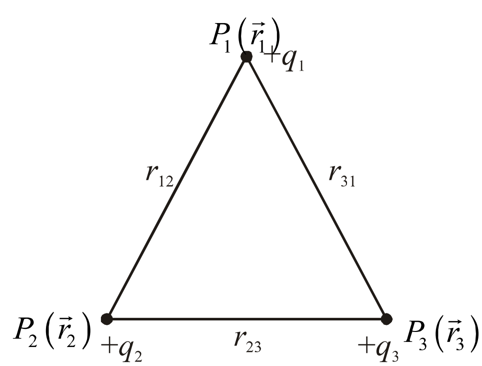
चित्र 3.16 दो आवेश निकाय

यदि दोनों आवेश समान चिन्ह के हैं तो बाह्य कर्त्ता द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होगा क्योंकि यह कार्य इनके पारस्परिक प्रतिकर्षण के विरूद्ध किया जाता है। यही कार्य निकाय की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संग्रहित होता है तथा स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होगी। अब यदि निकाय को मुक्त कर दिया जाए तो आवेशों के एक दूसरे से दूर जाने के कारण स्थतिज ऊर्जा आवेशों की गतिज ऊर्जा के रूप में बदलेगी।

यदि आवेश q_1 व q_2 के चिन्ह विपरीत है तो युग्म की स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होगी। अतः विद्युतीय स्थितिज ऊर्जा गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा से इस आशय में भिन्न है कि यह आवेशों की प्रकृति के अनुरूप धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है जबकि कणों के एक युग्म के लिए गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा सदैव ऋणात्मक ही होती है।

3.8.1 दो से अधिक बिन्दु आवेशों के निकाय की स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा (Electrostatic Potential Energy of a System of more than Two Point Charges)

दो से अधिक आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करने के लिये इन आवेशों में से दो–दो आवेशों से बने सभी संभव युग्मों की विद्युत स्थितिज ऊर्जाओं को बीजगणितीय विधि से (चिह्न सहित) योग कर देते हैं। यह योग ही सम्पूर्ण निकाय की कुल विद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है।



चित्र 3.17 तीन आवेश निकाय

माना कि चित्र 3.17 की भाँति आवेश q_1, q_2 व q_3 क्रमशः बिन्दु P_1, P_2 तथा P_3 पर स्थित हैं तब सम्पूर्ण निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है–

प्रथम आवेश q_1 को $P_1(\vec{r}_1)$ तक लाने में किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि क्षेत्र मे कोई अन्य आवेश नहीं है अर्थात

$$W_1 = 0$$

जब q_2 आवेश को क्षेत्र के $P_2(\vec{r}_2)$ पर q_1 से r_{12} दूरी पर लाते हैं तो किया गया कार्य

$$W_2 = (q_1 \text{ के कारण विभव}) \times q_2$$

या $$W_2 = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

इसी प्रकार आवेश q_3 को अनन्त से क्षेत्र के $P_3(\vec{r}_3)$ बिन्दु पर लाने में किया गया कार्य

$$W_3 = (q_1 \text{ व } q_2 \text{ के कारण विभव}) \times q_3$$

या $$W_3 = \left(\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right) \times q_3$$

या $$W_3 = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

इन सभी आवेशों के निकाय की कुल विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2 + W_3$$

या $$U = 0 + \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

या $$U = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

या $$U = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad \ldots (3.36)$$

उक्त व्यंजक तीन आवेश निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा को प्रदर्शित करता है जिसमें तीन पद है।

चार आवेशों के निकाय के लिये स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$U = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right) \quad \ldots (3.37)$$

जिसमें विभिन्न युग्मों के संगत छह पद है। इसी प्रकार हम N आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ यह ध्यान रखना आवश्यक होगा कि आवेशों के एक युग्म के लिए एक ही पद लिया जाना चाहिए।

तब N आवेशों के निकाय के लिए स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक है

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad \ldots (3.38)$$

जहाँ योग के चिन्ह से पूर्व 1/2 का पद यह सुनिश्चित कर रहा है कि योग में उपस्थित युग्मों के दो बार लिखे जाने के उपरान्त भी प्रभावी रूप से इसका स्थितिज ऊर्जा एक ही बार योगदान है।

उदाहरण 3.10 दो प्रोटॅान 6×10^{-15} m की दूरी पर स्थित है। प्रोटॅानों की अन्योन्य स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का इलेक्ट्रॉन वोल्ट में मान ज्ञात कीजिये।

हल: यहाँ $r = 6\times10^{-15}\, m$

$$q_1 = q_2 = 1.6\times10^{-19}\, C$$

तब दो आवेशित कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

या $$U = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

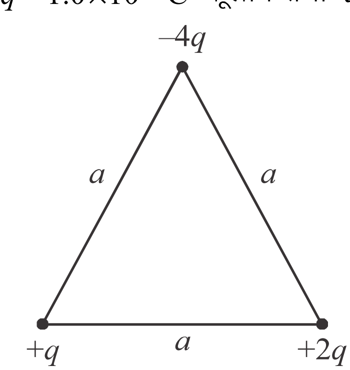
या $$U = \frac{9\times10^{9}\times1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{6\times10^{-15}}$$

या $$U = 3.84\times10^{-14}\, J$$

या $$U = \frac{3.84\times10^{-14}}{1.6\times10^{-19}}\text{eV}$$

या $$U = 0.24\times10^{6}\text{eV} = 0.24\,\text{MeV}$$

उदाहरण 3.11 चित्र के अनुसार तीन आवेश व्यवस्थित किये गये हैं। उनकी पारस्परिक स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात करो। मान लो कि $q = 1.0\times10^{-7}$ C कूलॉम तथा $a = 0.10$ m



हल: कुल ऊर्जा $U = U_{12} + U_{23} + U_{31}$

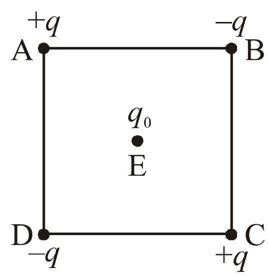
$$= \left(9.0\times10^{9}\right)\left[\frac{(+q)(-4q)}{a}+\frac{(+q)(+2q)}{a}+\frac{(-4q)(+2q)}{a}\right]$$

$$= 9.0\times10^{9}\times\left(-10q^{2}\right)/a$$

$$= -\frac{9.0\times10^{9}\times10\times\left(1\times10^{-7}\right)^{2}}{0.10} = -9.0\times10^{-3}\,\text{J}$$

ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि इन आवेश को एक दूसरे से अलग कर अनन्त तक लाने में 9×10^{-3} J कार्य करना पड़ेगा।

उदाहरण 3.12 चित्र में दर्शाए अनुसार चार आवेश d भुजा वाले किसी वर्ग ABCD के शीर्षों पर व्यवस्थित किए गए है। (a) इस व्यवस्था को एक साथ बनाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। (b) कोई आवेश q_0 अनन्त से वर्ग के केन्द्र E पर लाया जाता है तथा चारों आवेश अपने शीर्षों पर दृढ़ रहते हैं। ऐसा करने के लिए कितना अतिरिक्त कार्य करना पड़ता है?



हल: (a) चित्र में दर्शाई गई व्यवस्था को बनाने में किया गया कुल कार्य निकाय की स्थितिज ऊर्जा के बराबर होगा। यहाँ चार आवेशों के निकाय के लिए $\frac{4\times(4-1)}{2} = 6$ आवेश युग्म होंगे

$$W = U = k\left[\frac{q(-q)}{AB}+\frac{q(-q)}{AD}+\frac{qq}{AC}\right.$$

$$\left.+\frac{(-q)q}{BC}+\frac{(-q)(-q)}{BD}+\frac{q(-q)}{CD}\right]$$

तथा $\quad AB = BC = CD = AD = d$

एवं $\quad AC = BD = d\sqrt{2}$ है।

$$\therefore \quad W = -\frac{4kq^{2}}{d}+\frac{2kq^{2}}{d\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{kq^{2}}{d}\left[4-\sqrt{2}\right] \text{ जहाँ } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ है।}$$

(b) बिन्दु E पर वर्ग के कोनों पर स्थित चारों आवेशों के कारण कुल विद्युत विभव

$$V = \frac{+kq}{(AE)}+-\frac{-kq}{(BE)}+\frac{+kq}{(CE)}+\frac{-kq}{(DE)}$$

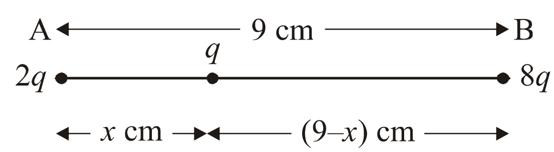
या $$V = \frac{kq}{d/\sqrt{2}}-\frac{kq}{d/\sqrt{2}}+\frac{kq}{d/\sqrt{2}}-\frac{kq}{d/\sqrt{2}} = 0$$

अतः बिन्दु E पर कुल विभव शून्य है अतः किसी आवेश q_0 को E तक लाने में कोई अतिरिक्त कार्य नहीं करना पड़ेगा।

उदाहरण 3.13 तीन आवेश q, $2q$ तथा $8q$ को 9 cm लम्बी रेखा पर रखा जाना है। इन आवेशों को कहाँ रखें ताकि निकाय की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम हो सके?

हल: निकाय की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होने के लिये अधिक मान वाले सजातीय आवेशों को परस्पर अधिकतम सम्भव दूरी पर रखा जाना चाहिए। इसलिये $2q$ तथा $8q$ वाले मान परस्पर 9 cm दूर रखे जाने चाहिये।

माना तीसरे आवेश q को आवेश $2q$ से $x$cm दूर रखा है तो निकाय की स्थितिज ऊर्जा चित्र से



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2q\times q}{x\times10^{-2}}+\frac{8q\times q}{(9-x)\times10^{-2}}+\frac{2q\times8q}{9\times10^{-2}}\right]$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q^{2}}{10^{-2}}\right]\left[\frac{2}{x}+\frac{8}{9-x}+\frac{16}{9}\right]$$

स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होने के लिये $\frac{dU}{dx} = 0$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^{2}}{10^{-2}}\left[-\frac{2}{x^{2}}+\frac{8}{(9-x)^{2}}+0\right] = 0$$

$$\frac{2}{x^{2}} = \frac{8}{(9-x)^{2}}$$

$$\frac{1}{x^{2}} = \frac{4}{(9-x)^{2}}$$

$$(9-x)^2 = 4x^2$$

$$(9-x) = \pm 2x$$

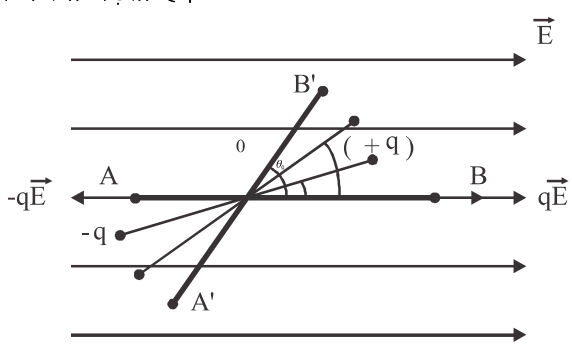
$$x = 3cm$$

अथवा $x = -9cm$

यहाँ $x = -9\,cm$ मान संभव नहीं है। अतः आवेश q को आवेश $2q$ तथा $8q$ के बीच $2q$ से 3 cm दूरी पर रखना चाहिए।

3.9 विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव के घूर्णन में कार्य (Work in Rotation of Electric Dipole in Electric Field)

किसी विद्युत द्विध्रुव को विद्युत क्षेत्र में रखने पर द्विध्रुव पर एक बलयुग्म उत्पन्न होता है जो इसे क्षेत्र की दिशा में संरेखित करने का प्रयत्न करता है। अन्ततः द्विध्रुव साम्यावस्था को प्राप्त कर विद्युत क्षेत्र की दिशा में आ जाता है। इस प्रकार एकसमान विद्युत क्षेत्र में रखे द्विध्रुव को साम्यावस्था से घुमाने में कार्य करना पड़ता है।



चित्र 3.18 समरूप विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव को घुमाने में किया गया कार्य

चित्र 3.18 के अनुसार माना एक विद्युत द्विध्रुव समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में स्थिति AB में साम्यावस्था में रखा है। अब विद्युत द्विध्रुव को θ_0 कोण घुमाकर A'B' स्थिति में लाया जाता हैं।

माना किसी क्षण द्विध्रुव पर θ कोण पर बल आपूर्ण

$\tau = pE\sin\theta$

अब द्विध्रुव को अल्प कोण $d\theta$ से घुमाने में किया गया कार्य

dW = बलाघूर्ण × कोणीय विस्थापन

या $dW = \tau d\theta$

या $dW = pE\sin\theta d\theta$

अब द्विध्रुव को $\theta = 0^\circ$ से $\theta = \theta_0$ तक घुमाने में किया गया कार्य

$$W = \int_{\theta=0^\circ}^{\theta=\theta_0} pE\sin\theta\, d\theta$$

या $W = pE\left[-\cos\theta\right]_0^{\theta_0}$

या $W = pE\left(\cos 0^\circ - \cos\theta_0\right)$

या $W = pE\left(1-\cos\theta_0\right)$

यदि $\theta_0 = \theta$ हो तो

$$W = pE\left(1-\cos\theta\right) \qquad ...(3.39)$$

विशिष्ट स्थितियाँ (special cases)

(i) यदि द्विध्रुव को θ_1 से θ_2 तक घुमाया जाये तब

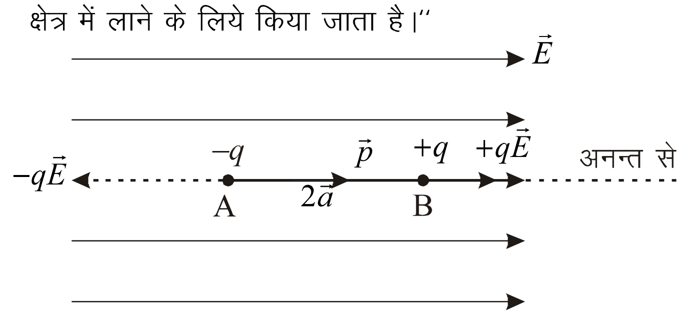
$$W = pE\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \qquad ...(3.40a)$$

(ii) यदि $\theta_1 = 0^o$ तथा $\theta_2 = 90^o$ तब $W = pE$ ...(3.40b)

(iii) यदि $\theta_1 = 0^o$ तथा $\theta_2 = 180^o$ तब $W = 2pE$ ...(3.40c)

3.10 बाह्य क्षेत्र में किसी विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy of an Electric Dipole in Electric Field)

"विद्युत क्षेत्र में किसी विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा उस कार्य के बराबर होती है। जो विद्युत द्विध्रुव को अनन्त से इस क्षेत्र में लाने के लिये किया जाता है।"



चित्र 3.19 बाह्य विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव

चित्र 3.19 में एक विद्युत द्विध्रुव को अनन्त से समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में इस प्रकार लाया जाता है कि द्विध्रुव अघूर्ण $\vec{P}$ सदैव विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा में रहे। विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के कारण $+q$ आवेश पर बल $\vec{F} = q\vec{E}$ क्षेत्र की दिशा में तथा आवेश $-q$ पर बल $\vec{F} = -q\vec{E}$ क्षेत्र के विपरीत दिशा में कार्य करता है। अतः द्विध्रुव को विद्युत क्षेत्र में लाने के लिये आवेश q पर बाह्य कार्य किया जाता है जबकि आवेश $-q$ पर स्वयं विद्युत क्षेत्र कार्य करता है। अनन्त से विद्युत क्षेत्र में आने में $-q$ आवेश को q की

तुलना में $2a$ दूरी अधिक तय करनी पड़ती है। अतः आवेश $-q$ द्वारा किया गया कार्य अधिक तथा ऋणात्मक होता है। अतः विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य

$W =$ आवेश $(-q)$ पर बल × चली गई अतिरिक्त दूरी

या $\quad W = -qE \times 2a = -2qaE$

या $\quad W = -pE \qquad \because p = 2qa$

अतः विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के समान्तर रखे विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

$$U_1 = -pE \qquad \ldots (3.41)$$

अब विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के समान्तर स्थिति से θ कोण घुमाने में किया गया अतिरिक्त कार्य

$$U_2 = pE(1-\cos\theta) \qquad \ldots (3.42)$$

अतः विद्युत क्षेत्र में θ कोण पर स्थित विद्युत द्विध्रुव की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U = U_1 + U_2$$

$$U = -pE + pE(1-\cos\theta)$$

$$U = -pE\cos\theta$$

सदिश रूप में $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad \ldots (3.43)$

समीकरण (3.43) विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का समीकरण हैं।

विशिष्ट स्थितियाँ (Special Cases)

(अ) यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण विद्युत क्षेत्र से 0° कोण पर हो तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos\theta$$

$$U = -pE\cos 0^\circ$$

अर्थात् $U = -pE \qquad \ldots (3.44) \qquad$ (स्थायी संतुलन)

(ब) यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण विद्युत क्षेत्र के लम्बवत हो तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos 90^\circ$$

$$U = 0 \qquad \ldots (3.45)$$

(स) यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण, विद्युत क्षेत्र से 180° कोण पर हो तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos 180^\circ$$

$U = pE \qquad \ldots (3.46) \qquad$ (अस्थायी संतुलन)

स्थिति (अ) स्थायी संतुलन की स्थिति कहलाती है क्योंकि इस स्थिति में ऊर्जा न्यूनतम है तथा स्थिति (स) अस्थायी संतुलन की स्थिति कहलाती है क्योंकि इस स्थिति में ऊर्जा अधिकतम है।

उदाहरण 3.14 एक विद्युत द्विध्रुव में $+1.0\times10^{-6}$C तथा -1.0×10^{-6}C के दो बिन्दु आवेश एक दूसरे से 2cm की दूरी पर स्थित है। यह विद्युत द्विध्रुव 1.0×10^{5} V/m के समरूप विद्युत क्षेत्र में स्थित हैं। ज्ञात कीजिये–

(अ) द्विध्रुव पर विद्युत क्षेत्र द्वारा लगने वाला अधिकतम बलाघूर्ण

(ब) द्विध्रुव की स्थायी संतुलन की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा

(स) द्विध्रुव की स्थायी संतुलन की स्थिति से 180° घुमाने पर स्थितिज ऊर्जा

(द) द्विध्रुव को विध्रुत क्षेत्र की दिशा से 90° घुमाने में आवश्यक ऊर्जा

हलः यहाँ $q = 1\times10^{-6}$ C

$$2a = 2cm = 2\times10^{-2}m, E = 1\times10^{5} \text{ V/m}$$

द्विध्रुव आघूर्ण $p = q2a = 1\times10^{-6}\times2\times10^{-2}$

$$= 2\times10^{-8}\ C\,m$$

(अ) अधिकतम बलाघूर्ण $\tau = pE = 2\times10^{-8}\times1\times10^{5}$

$$= 2\times10^{-3}\ N\,m$$

(ब) स्थायी संतुलन में स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE$$

$$U = -2\times10^{-8}\times1\times10^{5} = -2\times10^{-3} J$$

(स) स्थायी संतुलन से 180° घुमाने पर स्थितिज ऊर्जा

$$U = +pE = +2\times10^{-3} J$$

(द) 90° घुमाने पर किया गया आवश्यक कार्य

$$W = pE(1-\cos\theta)$$

$$= 2\times10^{-8}\times1\times10^{5}(1-\cos 90^\circ)$$

$$W = 2\times10^{-3} J$$

महत्वपूर्ण बिन्दु (Important Points)

1. विद्युत विभव–विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर स्थिर विद्युत विभव, एकांक धन आवेश को अनन्त से उस बिन्दु तक क्षेत्र के विरूद्ध बिना गतिज ऊर्जा परिवर्तन किए लाने में किये गये कार्य के बराबर होता है। इसका S.I. मात्रक वोल्ट होता हैं।

अर्थात् $V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

2. विद्युत विभवान्तर–विद्युत क्षेत्र में एकांक धन आवेश को प्रारंभिक बिन्दु से अंतिम बिन्दु तक विस्थापित करने में क्षेत्र के विरूद्ध किया गया कार्य विभवान्तर के तुल्य होता है। इसका S.I. मात्रक वोल्ट होता है।

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q_o} = \int_{B}^{A} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

3. बिन्दु आवेश के कारण विद्युत विभव–

$$V = \frac{Q}{4\pi \in_0 r}$$

4. आवेशों के निकाय के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव–

$$V = V_1 + V_2 + V_3 ... + V_n$$

5. विद्युत द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव–

$$V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} \quad \text{यदि } a^2 << r^2$$

6. विद्युत द्विध्रुव के कारण उसके निरक्ष पर विद्युत विभव शून्य होता है।
7. समविभव पृष्ठ–किसी विद्युत क्षेत्र में वह पृष्ठ जिस पर स्थित समस्त बिन्दुओं पर विद्युत विभव का मान समान हो, समविभव पृष्ठ कहलाता है।
8. समविभव पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा पृष्ठ के तल के लम्बवत होती है।
9. विद्युत क्षेत्र एवं विद्युत विभव में सम्बन्ध– $\vec{E} = -grad\, v = -\nabla V$
10. आवेशित गोलीय कोश तथा चालक गोले के कारण विद्युत विभव–

(i) बाहरी बिन्दु पर $(r > R)$ $V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{r}$

(ii) सतह पर $(r = R)$ $V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{R}$

(iii) अन्दर स्थित बिन्दु पर $(r < R)$ $V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{R}$

11. आवेशित अचालक ठोस गोले के कारण विद्युत विभव–

(i) बाहरी बिन्दु पर $(r > R)$ $V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{r}$

(ii) सतह पर $(r = R)$ $V = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{R}$

(iii) अचालक गोले के अंदर $(r < R)$ स्थित बिन्दु पर $V = \frac{1}{4\pi \in_0}\left[\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right]$

12. दो आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा–

$$U = \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

13. N आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=N}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{k=N}\frac{1}{4\pi \in_0}\frac{q_j q_k}{r_{jk}}$$

14. बाह्य क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव को घुमाने में किया गया कार्य– यदि द्विध्रुव को $\theta = 0^\circ$ तथा $\theta = \theta$ तक घुमायें तब $W = pE(1 - \cos\theta)$

यदि द्विध्रुव को θ_1 से θ_2 तक घुमायें तब $W = pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

15. बाह्य क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा $U = -pE\cos\theta$

अभ्यासार्थ प्रश्न

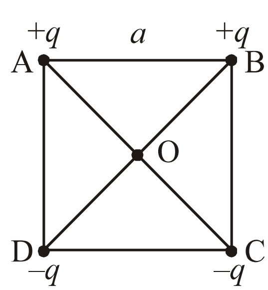
वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. किसी बिन्दु आवेश से नियत दूरी पर विद्युत क्षेत्र 50 V / m तथा विभव 300 V है यह दूरी है

(अ) 9 m (ब) 15 m

(स) 6 m (द) 3 m

2. एक वर्ग के कोनों पर संलग्न आवेश चित्र की भाँति रखे हैं। माना इसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा विद्युत विभव V है। यदि A तथा B पर रखें आवेश C तथा D पर रखे आवेशों से परस्पर प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं तो–



(अ) $\vec{E}$ अपरिवर्तित रहता है, V बदल जाता है।

(ब) $\vec{E}$ तथा V दोनों बदल जाते है।

(स) $\vec{E}$ तथा V दोनों अपरिवर्तित रहते है

(द) $\vec{E}$ बदल जाता है तथा V अपरिवर्तित रहता है।

3. एक विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विभव का मान 200 V है तो एक इलेक्ट्रोन को अनन्त से वहाँ ले जाने में कार्य करना पड़ेगा

(अ) -3.2×10^{-17} जूल (ब) 200 जूल

(स) –200 जूल (द) 100 जूल

4. r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दो आवेशित चालक गोले समान विभव पर हैं तब उनके पृष्ठ आवेश घनत्वों का अनुपातहोगा

(अ) $\frac{r_2}{r_1}$ (ब) $\frac{r_1}{r_2}$

(स) $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ (द) $\frac{r_1^2}{r_2^2}$

5. $X - Y$ निर्देशांक के मूल बिन्दु पर $10\,\mu C$ का आवेश स्थित है। बिन्दुओं $(a, 0)$ तथा $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ के मध्य विभवान्तर का मान volt में होगा

(अ) 9×10^4 (ब) शून्य

(स) $\frac{9\times10^4}{a}$ (द) $\frac{9\times10^4}{\sqrt{2}}$

6. 2 मीटर त्रिज्या के एक आवेशित खोखले गोलीय चालक के पृष्ठ पर 500 volt विद्युत विभव है। केन्द्र से 1.5 मीटर दूरी पर विद्युत विभव होगा–

(अ) 375 V (ब) 250 V

(स) शून्य (द) 500 V

7. एक α–कण को विरामावस्था में एक बिन्दु जहाँ विभव 70 V है से दूसरे बिन्दु जहाँ विभव 50 V है तक ले जाने पर उसकी गतिज ऊर्जा होगी–

(अ) 20 eV (ब) 40 eV

(स) 20 MeV (द) 40 MeV

8. एक ऐसे क्षेत्र में जहाँ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E का मान शून्य है तो उस क्षेत्र में विभव के मान में दूरी के साथ परिवर्तन होगा

(अ) $V \propto \frac{1}{r}$ (ब) $V \propto \frac{1}{r^2}$

(स) $V =$ शून्य (द) $V =$ स्थिरांक

9. समान पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित दो चालक गोलों की त्रिज्यायें R_1 व R_2 हैं यदि उनके केन्द्र पर विभव क्रमशः V_1 व V_2 हो तब V_1/V_2 होगा–

(अ) $\frac{r_1}{r_2}$ (ब) $\frac{r_2}{r_1}$

(स) $\frac{r_1^2}{r_2^2}$ (द) $\frac{r_2^2}{r_1^2}$

10. एक विद्युत क्षेत्र का विभव फलन $V = -5x + 3y + \sqrt{15}z$ से परिभाषित हैं बिन्दु (x, y, z) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता SI मात्रक में होगी–

(अ) $3\sqrt{2}$ (ब) $4\sqrt{2}$

(स) $5\sqrt{2}$ (द) 7

11. एक एकांक आवेश को q आवेश से r दूरी पर उसके चारों ओर वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता हैं। तब एक पूर्ण चक्कर में किया गया कार्य होगा–

(अ) शून्य (ब) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$

(स) $2\pi r\,J$ (द) $2\pi rq\,J$

12. एक इलेक्ट्रान को दूसरे इलेक्ट्रान की ओर ले जाने पर निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा–

(अ) बढ़ती है (ब) घटती है

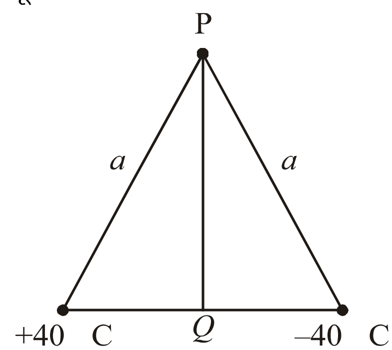
(स) उतना ही रहती है (द) शून्य हो जाती है

13. 1000 छोटी–छोटी पानी की बूंदें जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या r है और प्रत्येक पर आवेश q है मिलकर एक बड़ी बूँद बनाती है। बड़ी बूँद का विभव, छोटी बूँद के विभव से निम्न गुना अधिक होगा–

(अ) 1000 (ब) 100

(स) 10 (द) 1

14. चित्र के अनुसार व्यवस्थित आवेशों के कारण एक कूलॉम आवेश को P से Q तक ले जाने के लिये कार्य का मान जूल में होगा



(अ) 10 (ब) 5

(स) अनन्त (द) शून्य

15. एक जैसी 64 पारे की गोलियाँ (प्रत्येक पर विभव 10 वोल्ट) मिलाकर एक बड़ी गोली बनाई जाये तब बड़ी गोली की सतह पर विभव होगा–

(अ) 80 वोल्ट (ब) 160 वोल्ट

(स) 640 वोल्ट (द) 320 वोल्ट

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1 विद्युत विभव अदिश राशि है अथवा सदिश राशि, बताइये।

2. विद्युत विभव की परिभाषा दीजिये।

3. क्या दो समविभव पृष्ठ परस्पर काट सकते हैं?

4. किसी आवेश के कारण अनन्त पर विभव कितना होता है?

5. क्या निर्वात में किसी बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य हो सकता है, जबकि उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं है। उदाहरण दीजिये।

6. क्या किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य हो सकता हो सकता है, जबकि उसी बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य न हो। उदाहरण दीजिये।

7. एक समविभव पृष्ठ पर परस्पर 10 cm दूर स्थित बिन्दुओं के मध्य 200 μc आवेश को ले जाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

8. निम्नलिखित के कारण समविभव पृष्ठों की आकृति क्या होती है
(अ) बिन्दु आवेश के कारण
(ब) एक समान विद्युत क्षेत्र के कारण
9. जब कोई विद्युत द्विध्रुव किसी विद्युत क्षेत्र के समान्तर रखा जाता है तब इसकी विद्युत स्थितिज ऊर्जा क्या होगी?
10. एक त्रिज्या $10\ \text{cm}$ के चालक गोले को आवेशित करने पर उसकी सतह पर $15\ V$ विभव है। इसके केन्द्र पर विभव कितना होगा?
11. एक $5\ \text{cm}$ त्रिज्या के समरूप आवेशित अचालक गोले की सतह पर $10\ V$ विभव है। इसके केन्द्र पर विभव कितना होगा?
12. निर्वात में किसी बिन्दु (x, y, z) (सभी मीटर में) पर विद्युत विभव $V = 2x^2$ volt है। $(1\text{m}, 2\text{m}, 3\text{m})$ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिये।
13. दो बिन्दु आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।
14. तीन बिन्दु आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।
15. विभव प्रवणता का SI मात्रक लिखिये।
16. एक इलेक्ट्रान को दो बिन्दुओं के मध्य, जिनमें विभवान्तर $20\ V$ है, ले जाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?
17. किसी बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर निर्वात में विद्युत विभव $10\ V$ है। यदि बिन्दु के चारों ओर 2 परावैधुतांक वाला पदार्थ रख दिया जाये, तब विद्युत विभव क्या होगा।
18. विद्युत द्विध्रुव को बाह्य समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में शून्य (0°) से 180° तक घुमाने में किये गये कार्य का मान लिखिये।
19. पृथ्वी का विद्युत विभव कितना माना जाता हैं?
20. यदि विभव फलन $V = 4x + 3y\,V$ हो तो $(2, 1)$ बिन्दु (सभी मीटर में) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण ज्ञात कीजिये।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

1 विद्युत विभव किसे कहते हैं? इसका सूत्र एवं मात्रक लिखिये।
2. सिद्ध कीजिये कि आवेशित गोलीय कोश के अन्दर विभव का मान उतना ही है जितना पृष्ठ पर।
3. समविभव पृष्ठ किसे कहते हैं? बिन्दु आवेश के कारण समविभव पृष्ठ बनाइये।
4. तीन बिन्दु आवेशों से निर्मित किसी तंत्र की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।
5. आवेशित चालक के पूर्ण आयतन में स्थिर विद्युत विभव उसके पृष्ठ पर स्थिर विद्युत विभव के तुल्य होता है। क्यों?
6. विद्युत विभव एवं विद्युत क्षेत्र की तीव्रता में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।
7. समरूप विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव को धुमाने में किये गये कार्य का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।
8. प्रदर्शित कीजिये कि समविभव पृष्ठ पर किसी परीक्षण आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता।
9. विद्युत स्थितिज ऊर्जा से क्या तात्पर्य है? आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक उत्पन्न कीजिये।
10. बाह्य विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक ज्ञात कीजिये।
11. समरूप बाह्य विद्युत क्षेत्र में $\vec{r}_1$ व $\vec{r}_2$ स्थिति सदिश पर रखे दो बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 के स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।
12. समविभव पृष्ठ के दो गुण लिखिये।
13. सिद्ध कीजिये कि किसी बिन्दु आवेश के चारों ओर परावैधुत माध्यम होने पर, उसके कारण विद्युत विभव निर्वात की तुलना $1/\in_r$ गुना कम होता हैं।
14. सिद्ध कीजिये की समरूप आवेशित आवेशित अचालक गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव उसकी सतह पर विद्युत विभव की तुलना में 1.5 गुना होता है।
15. $10\,\mu\text{C}$ तथा $5\,\mu\text{C}$ के दो आवेश परस्पर 1 m दूरों पर स्थित है। इन आवेशों के मध्य दूरी 0.5 m करने के लिये कितना कार्य करना पड़ेगा।
16. विद्युत विभवान्तर की परिभाषा दीजिये। विद्युत विभवान्तर एवं विद्युत विभव में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

निबन्धात्मक प्रश्न

1 किसी बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का व्यंजक व्युत्पन्न कीजियें
2. किसी विद्युत द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु (r, θ) पर विद्युत विभव का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये। सिद्ध कीजिये कि अक्ष पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव अधिकतम तथा निरक्ष पर विद्युत विभव शून्य होता हैं।

3. आवेशित गोलीय कोश द्वारा इसके बाहर, पृष्ठ पर तथा अन्दर स्थित बिन्दुओं के लिये विभव के सूत्र व्युत्पन्न कीजियें। दूरी के साथ विभव में परिवर्तन का आलेख खींचिये।

4. आवेशित अचालक गोले के द्वारा इसके बाहर, पृष्ठ तथा अन्दर स्थित बिन्दुओं के लिये विभव के सूत्र व्युत्पन्न कीजिये। दूरी के साथ विभव में परिवर्तन का आलेख खींचिये।

5. विद्युत स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कीजिये। एक समान विद्युत क्षेत्र में किसी द्विध्रुव की विद्युत स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त कीजिये। स्थाई एवं अस्थाई संतुलन की अवस्थाएँ किन स्थतियों में प्राप्त होगी।

उत्तरमाला (बहुचयानात्मक प्रश्न)

1. (स) 2. (द) 3. (अ) 4. (अ) 5. (ब) 6. (द)
7. (ब) 8. (द) 9. (अ) 10. (द) 11. (अ) 12. (अ)
13. (ब) 14. (द) 15. (ब)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. अदिश राशि

2. विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु आवेश पर विद्युत विभव, एकांक धन आवेश को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किये गये कार्य के बराबर होता हैं।

3. नहीं, क्योंकि यदि काटते तो कटान बिन्दु पर विद्युत विभव के दो मान हो जाते, जो कि संभव नहीं है।

4. शून्य

5. हाँ। (a) दो समान परिमाण तथा विपरीत प्रकृति के आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होता हैं, विद्युत क्षेत्र नहीं।
(b) विद्युत द्विध्रुव के निरक्ष पर विद्युत विभव शून्य होता है, विद्युत क्षेत्र नहीं।

6. हाँ। (a) दो समान परिमाण तथा समान प्रकृति के आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, विद्युत विभव नहीं।
(b) आवेशित गोलीय कोश के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, विद्युत विभव नहीं।

7. समविभव पृष्ठ के किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर
$\Delta V =$ शून्य
अतः कार्य $=$ आवेश $\times$ विभवान्तर
$= 200uc \times 0 = 0$ अर्थात् कोई कार्य नहीं करना पड़ेगा।

8. (अ) बिन्दु आवेश को केन्द्र मानते हुये खींचे गये संकेन्द्रीय गोले
(ब) विद्युत बल रेखाओं के लम्बवत परस्पर समान्तर समतल

9. $U = -pE$

10. 15 V

11. 15 V

12. चूँकि $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2) = -4x$

$E_y = E_z = 0$

अतः $\vec{E} = -4x\hat{i}$

$\vec{E}_{(1,2,3,\text{पर})} = -4\hat{i}\ V/m$

13. $U = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r}$

14. $U = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{q_1q_2}{r_{12}} + \dfrac{q_2q_3}{r_{23}} + \dfrac{q_3q_1}{r_{31}}\right]$

15. V/m

16. $W = qV = 1.6 \times 10^{-19} \times 20 = 32 \times 10^{-19} J$

17. $V_m = \dfrac{V}{\epsilon_r} = \dfrac{10}{2} = 5V$

18. $W = pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = pE(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ)$

$W = 2pE$ जूल

19. शून्य

20. $\vec{E} = -\left[\hat{i}\dfrac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial V}{\partial y}\right]$

$\vec{E} = -4i - 3j$

$|\vec{E}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5V/m$

आंकिक प्रश्न

1 दो बिन्दुओं के मध्य 3 C आवेश को ले जाने में 6 जूल कार्य करना पड़ता है। इन बिन्दुओं के मध्य विद्युत विभवान्तर ज्ञात कीजिये। उत्तरः– (2 V)

2. यदि दो बिन्दुओं A तथा B पर विद्युत विभव क्रमशः 2 V तथा 4 V हैं तब 8 μc के बिन्दु आवेश को बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाने में कितना कार्य करना होगा?

उत्तरः–$(1.6\times10^{-5} J)$

3. $\sqrt{2}$ m भुजा के वर्ग के कोनों पर 100 μC, –50 μC 20 μC तथा –60 μC के चार आवेश क्रमशः रखे है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिये।

उत्तरः– $(9\times10^4 V)$

4. $3\times10^{-8}C$ तथा $-2\times10^{-8}C$ के दो आवेश परस्पर 15 cm दूर है। इन दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होगा? अन्नत पर विद्युत विभव शून्य मान लीजिये।

उत्तरः–(धनावेश से 9 cm दूर तथा 45 cm दूर ऋणावेश की ओर)

5. एक वर्ग की प्रत्येक भुजा 0.9 m लम्बी है। इसके कोनों पर क्रमशः $-2\,\mu C$, $+3\,\mu C$, $-4\,\mu C$ तथा $+5\,\mu C$ आवेश रखे है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात करो।

उत्तरः–$\left(2.8\times10^{4}V\right)$

6. 10 cm भुजा के समषटभुज के प्रत्येक शीर्ष पर $5\,\mu c$ का आवेश है। समषटभुज के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिये।

उत्तरः–$\left(2.7\times10^{6}V\right)$

7. $2\sqrt{2}$ m भुजा वाले वर्ग ABCD के प्रत्येक कोने पर $2\,\mu C$ के आवेश रखे गये है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव की गणना कीजिये।

उत्तरः– $\left(36\times10^{5}V\right)$

8. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा 100 cm है। इसके तीनों कोनों पर क्रमशः $1\,\mu c$, $2\,\mu c$ तथा $3\,\mu c$ आवेश रखे है। त्रिभुज के तीनों कोनों से समान दूरी (केन्द्र) पर स्थित बिन्दु पर विभव की गणना कीजिये।

उत्तरः– (93.6 V)

9. एक विद्युत द्विध्रुव के आवेशों $-1\,\mu c$ तथा $+1\,\mu c$ के मध्य दूरी $4\times10^{-14}m$ है। द्विध्रुव के केन्द्र से $2\times10^{-6}m$ दूरी पर स्थित किसी अक्षीय बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिये।

उत्तरः– $\left(9\times10^{-2}V\right)$

10. (अ) आवेश $4\times10^{-7}C$ के कारण इससे 9cmदूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिये।

(ब) अब आवेश $2\times10^{-9}C$ को अनन्त से इस बिन्दु तक लाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिये। क्या यह कार्य उस पथ पर निर्भर करता है, जिसके अनुदिश उसे लाया गया है?

उत्तरः– (अ $4\times10^{4}V$) (ब $2\times10^{-5}W$, नहीं)

11. $30\,\mu c$ का एक आवेश x-y निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु पर स्थित है। $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ तथा $(a,\text{-}0)$ बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर ज्ञात कीजिये।

उत्तरः–(शून्य)

12. तीन आवेश $-q, +q$ तथा $+q$ क्रमशः x-y तल में $(0,-a)$, $(0, 0)$ तथा $(0, a)$ बिन्दुओं पर स्थित हैं। अक्ष से θ कोण बनाने वाली रेखा पर r दूरी पर सिद्ध कीजिये कि विभव V निम्न होगा–

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{2qa\cos}{r^2}\right), r>>a$$

13. आवेशों $+q, 2q$ तथा $+4q$ को a मीटर भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कोनों पर रखने पर कितना कार्य करना पड़ेगा?

उत्तरः–$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{14q^2}{a}\right)$

14. (अ) दो आवेशों $7\,\mu C$ तथा $-2\,\mu C$ जो क्रमशः (–9 cm, 0, 0) तथा (+9 cm, 0, 0) पर स्थित हैं, के निकाय पर कोई बाह्य क्षेत्र आरोपित नहीं है। इस निकाय की स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

(ब) दोनों आवेशों को परस्पर अनन्त दूरी तक अलग करने के लिये कितना कार्य करना होगा?

उत्तरः– (–0.7 J, 0.7 J)

15. किसी विद्युत क्षेत्र में (x, y) बिन्दु पर विद्युत विभव का मान निम्न है– $V=6xy+y^2-x^2$

इस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के मान का परिकलन कीजिये।

उत्तरः $\vec{E}=(2x-6y)\hat{i}-(6x+2y)\hat{j}$

16. 0.2m त्रिज्या के खोखले धातु के गोले को $+15\,\mu C$ का आवेश दिया जाता है। ज्ञात कीजिये (i) गोले के पृष्ठ पर विद्युत विभव (ii) गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव(iii) गोले के केन्द्र से 0.1 m की दूरी पर विद्युत विभव (iv) गोले के केन्द्र से 0.3 m की दूरी पर विद्युत विभव

उत्तरः–(i) 8.75×10^{5} V; (ii) 8.75×10^{5} V

(iii) 8.75×10^{5} V; (iv) 4.5×10^{5} V

17. r भुजा वाली समबाहु त्रिभुज के कोनों पर तीन बिन्दु आवेश $+q$, $+2q$ तथा xq रखे है। निकाय की स्थितिज ऊर्जा शून्य होने के लिये x का मान ज्ञात करो।

उत्तरः– $(x=-2/3)$