அத்தியாயம் 3

பகுமுறை வடிவியல்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- இயங்குவரை
- இருகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்
- ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகளின் கருத்துரு
- இரட்டை நேர்க்கோடுகள்
- ஒருவட்டத்தின் பொதுவடிவ மற்றும் துணையலகு சமன்பாடுகள்
- வட்டத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டின் மையம் மற்றும் ஆரம்
- ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல்
- ஒரு வட்டத்திற்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு
- கூம்புவெட்டியின் வகைகளை அறிதல்
- பரவளையத்தின் திட்டச்சமன்பாடு, குவியம், இயக்குவரை பரவளையத்தின் செவ்வகலம் மற்றும் வணிகப் பயன்பாடுகள்

ரானே டெகார்டே
(1596-1650)

அறிமுகம்

"Geometry" என்ற சொல்லானது கிரேக்க மொழியின் "geo" மற்றும் "metron" என்ற சொற்களிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டது. "geo" என்றால் பூமி என்றும், "metron" என்றால் அளப்பது என்றும் பொருளாகும்.

வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், கோடுகள், வளைவுகள், மேற்பரப்பு போன்றவைகளையும், அவைகளின் பண்புகளையும் பற்றியப் படிப்பாகும். வடிவியல் வளைவரைகளுக்கும், இயற்கணித சமன்பாடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை வலியுறுத்துவது, பகுமுறை வடிவியலின் முக்கியப் பங்காகும்.

புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு தத்துவ மேதையும், கணித மேதையுமான, ரானே டெகார்டே (1596-1650), இயற்கணிதத்தை பயன்படுத்தி, வடிவியலை கற்பது தொடர்பான, முறையான கற்றலை முதன்முதலில் தன்னுடைய நூலான "la Geometry" –ல் 1637-ல் பிரசுரித்தார். இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியலின் சேர்வு, தற்போது பகுமுறை வடிவியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதனால் அவர் பகுமுறை வடிவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார்.

விமானம் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலையில் பகுமுறை வடிவியல் பெருமளவில் பயன்படுகிறது. குறிப்பாக விமானப் பாகங்களின் வடிவங்கள் சார்ந்த துறையில் பெருமளவில் பயன்படுகிறது.

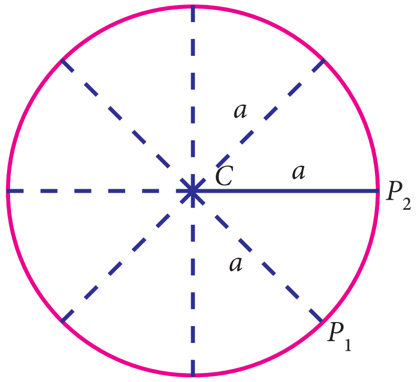
3.1 நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை (Locus)

வரையறை 3.1

ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவ கணித விதியின் அல்லது விதிகளின் அடிப்படையில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை அதன் இயங்குவரை அல்லது நியமப்பாதை எனப்படும்.

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 54 20-04-2020 05:04:19 PM

3.1.1 இயங்குவரையின் சமன்பாடு (Equation of a locus)



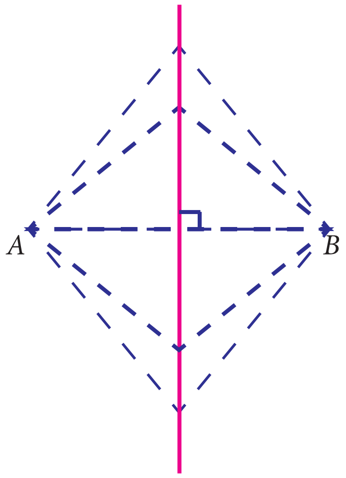
படம் 3.1

இயங்குவரையில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவுகளால் ஈடு செய்யப்படும் $x, y-$ல் உள்ள எந்த ஒரு தொடர்பும் இயங்குவரைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) $C(h,k)$ என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதூரத்தில் உள்ள $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை, அப்புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டமாகும். நிலையான புள்ளி c –ஐ வட்டத்தின் மையம் என்போம்.

(ii) A, B என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளியின் இயங்குவரை AB க்கு மையக் குத்துக்கோடாகும்.



படம் 3.2

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரே நேர் திசையில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி ஆதியிலிருந்து உள்ள தொலைவு அப்புள்ளியின் y-அச்சிலிருந்து அதன் தொலைவைப் போல் மூன்று மடங்கெனில் அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து y-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி A என்க.

$\text{OP} = 3\ \text{AP}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\text{OP}^2 = 9\text{AP}^2$$

$$(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = 9x_1^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 9x_1^2$$

$$8x_1^2 - y_1^2 = 0$$

$\therefore\ P(x_1, y_1)$ –ன் இயங்குவரை $8x^2 - y^2 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$(2, -3)$ மற்றும் $(3, -4)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும் ஒரு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை $A(2, -3)$ மற்றும் $B(3, -4)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$PA = PB$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$PA^2 = PB^2$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 55 20-04-2020 05:04:22 PM

$$(x_1-2)^2+(y_1+3)^2 = (x_1-3)^2+(y_1+4)^2$$

$$x_1^2-4x_1+4+y_1^2+6y_1+9 = x_1^2-6x_1+9+y_1^2+8y_1+16$$

$$2x_1-2y_1-12 = 0$$

$$x_1-y_1-6 = 0$$

$P(x_1, y_1)$ –ன் இயங்குவரை $x-y-6 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$(-5, 1)$ மற்றும் $(3, 2)$ என்ற புள்ளிகளுடன் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் வகையில் நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(-5, 1)$ மற்றும் $B(3, 2)$ என்க.

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$\angle APB = 90^o$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது ΔAPB ஓர் செங்கோண முக்கோணமாகும்

$$BA^2 = PA^2+PB^2$$

$$(3+5)^2 + (2-1)^2 = (x_1+5)^2 + (y_1-1)^2+(x_1-3)^2+(y_1-2)^2$$

$$65 = x_1^2+10x_1+25+y_1^2-2y_1+1 + x_1^2-6x_1+9+y_1^2-4y_1+4$$

அதாவது $2x_1^2+2y_1^2+4x_1-6y_1+39-65 = 0$

அதாவது $x_1^2+y_1^2+2x_1-3y_1-13 = 0$

எனவே $P(x_1, y_1)$ –ன் இயங்குவரை $x^2+y^2+2x-3y-13=0$

பயிற்சி 3.1

1. $(1, 3)$ என்ற புள்ளிக்கும், x-அச்சுக்கும், சமதொலைவில் உள்ளவாறு நகரும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.
2. $(3, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் 4 அலகு தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.
3. ஒரு நகரும் புள்ளி, $(2,1)$ மற்றும் $(1,2)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து உள்ள தொலைவுகள் 2:1 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருகிறதெனில், அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.
4. $(7, -6)$ மற்றும் $(3,4)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில், x - அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியைக் காண்க.
5. $A(-1, 1)$ மற்றும் $B(2, 3)$ என்பன இரு நிலைப்புள்ளிகள் எனில் முக்கோணம் APB –ன் பரப்பளவு 8 ச.அலகுகள் என்றவாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் காண்க.

3.2 நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு (System of straight lines)

3.2.1 நினைவு கூறுதல் – நேர்க்கோடுகள்

முந்தைய வகுப்புகளில், பகுமுறை வடிவியல் பற்றிய அடிப்படை கருத்துருக்களை, அறிந்துள்ளோம். தூர வாய்பாடு, பிரிவு வாய்பாடு, முக்கோணத்தின் பரப்பு காணும் வாய்பாடு மற்றும் கோடுகளின் சாய்வு முதலியனவற்றை கீழ்வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். நேர்கோடுகளின் பலவகை சமன்பாடுகளை, 10 ஆம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். 11 ஆம் வகுப்பின் புதிய கருத்துக்களையும், புதிய வரையறைகளையும் நன்கு புரிந்து கொள்ள, நினைவு கூறுதல் அவசியமாகிறது.

நேர்க்கோடுகளின் பல்வேறு வடிவங்கள்:

(i) சாய்வு– வெட்டுதுண்டுவடிவம்

சாய்வு m மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு c உடைய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx+c$ ஆகும்

(ii) புள்ளி– சாய்வு வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $P(x_1,y_1)$ வழிச் செல்வதும் சாய்வு m உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 56 20-04-2020 05:04:26 PM

(iii) இருபுள்ளிகள் வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ ஆகும்.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு அணிக்கோவை வடிவில்

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(iv) வெட்டுதுண்டு வடிவம்

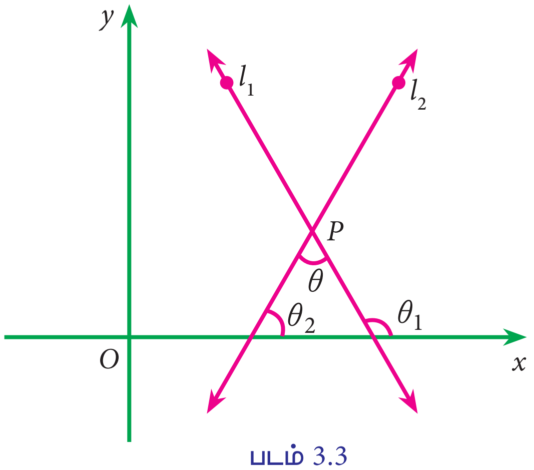
x-அச்சு வெட்டுதுண்டு a மற்றும் y-அச்சு வெட்டுத்துண்டு b எனில், நேர்க்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ ஆகும்.}$$

(v) பொதுவடிவம்

நேர்க்கோட்டின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $ax+by+c=0$ ஆகும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள். மேலும் a, b என்பன ஒரே சமயத்தில் பூச்சியமற்ற மாறிலிகள் ஆகும்.

3.2.2 இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் (Angle between two straight lines)



படம் 3.3

l_1 மற்றும் l_2 என்பன, P-யில் வெட்டிக் கொள்ளும் $l_1 : y=m_1x+c_1$ மற்றும் $l_2 : y=m_2x+c_2$ என்ற சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படும் இருகோடுகள் என்க.

θ_1 மற்றும் θ_2 என்பன l_1 மற்றும் l_2 கோடுகளால் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் கோணங்கள் என்க. எனவே கோடுகளின் சாய்வுகள் $m_1=\tan\theta_1$ மற்றும் $m_2=\tan\theta_2$ என்க.

கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\theta_1-\theta_2$ (படம் 3.3).

$$\therefore \tan\theta = \left|\tan(\theta_1-\theta_2)\right|$$

$$= \left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|\right]$$

குறிப்பு

(i) இங்கு $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ என்பது மிகை (>0)எனில், l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைபட்ட கோணம் θ என்பது குறுங்கோணமாகும். $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ –ன் மதிப்பு குறை (<0) எனில், θ என்பது விரிகோணமாக இருக்கும்.

(ii) இருகோடுகள் இணையாக இருப்பதற்கான தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு அவற்றின் சாய்வுகள் சமம். அதாவது $m_1=m_2$.

(iii) இருகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதற்கான, தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு, அந்தக் கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆக இருக்க வேண்டும், அதாவது $m_1\ m_2=-1$. (இங்கு m_1 மற்றும் m_2 என்பன முடிவுறு எண்ணாகும்)

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 57 20-04-2020 05:04:31 PM

உங்களுக்கு தெரியுமா?

x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து, ஆனால் இவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $m_1 m_2 = -1$ என்பது உண்மையல்ல. ஏனெனில் x-அச்சின் சாய்வு $m_1 = 0$, y- அச்சின் சாய்வு m_2 முடிவிலி.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 என்பன $2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க் கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

இங்கு $m_1 = 2$, $m_2 = -1$

θ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{2+1}{1+2(-1)}\right| = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

3.2.3 ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு (Distance of a point from a line)

(i) $P(l, m)$ என்ற புள்ளியிருந்து $ax + by + c = 0$ –ன் செங்குத்து தூரம் $d = \left|\frac{al + bm + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

(ii) ஆதி $(0, 0)$ லிருந்து $ax + by + c = 0$ –ன் செங்குத்து தொலைவு $d = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$x - y + 5 = 0$ என்ற கோடு ஆதியிலிருந்தும் $P(2, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்தும் சம தொலைவில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $x - y + 5 = 0$

$P(2, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து உள்ள செங்குத்து தொலைவு

$$= \left|\frac{2-2+5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$(0, 0)$ லிருந்து உள்ள தொலைவு

$$= \left|\frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $(0,0)$ மற்றும் $(2,2)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளது

எடுத்துக்காட்டு 3.6

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{4}$, மேலும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு 3, எனில் மற்றொரு கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவகைளை சாய்வுகளாக உடைய நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

இங்கு $m_1 = 3$, மற்றும் $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{3 - m_2}{1 + 3m_2}\right|$$

$$1 = \left(\frac{3 - m_2}{1 + 3m_2}\right)$$

$$1 + 3m_2 = 3 - m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{2}$$

மற்றோர் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{2}$.

3.2.4 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் (Concurrence of lines)

l_1 மற்றும் l_2 என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் பொதுவான புள்ளி 'P' எனில், P என்பது கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி எனப்படும். கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களின் சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதன் மூலம், வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு பொதுவான புள்ளியை பெற்றிருக்கும் எனில், அக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனப்படும். அந்த பொதுவான புள்ளி, கோடுகளின் ஒருங்கமைப் புள்ளி எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் புள்ளி வழிக் கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \quad \rightarrow (3)$$

என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று கோடுகள் என்க. இக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

$3x-4y-13=0, 8x-11y=33$ மற்றும் $2x-3y-7=0$ என்பன ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் எனக்காட்டுக. மேலும் அக்கோடுகளின் ஒருங்கமை புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$$3x-4y-13 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$8x-11y = 33 \quad \ldots (2)$$

$$2x-3y-7 = 0 \quad \ldots (3)$$

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -13 \\ 8 & -11 & -33 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$= 3(77-99) + 4(-56+66) - 13(-24+22)$

$= -66 + 40 + 26 = 0$

$\Rightarrow$ கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் ஆகும்.

ஒருங்கமைப் புள்ளியைக் காண

சமன்பாடு $(1) \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6x-8y = 26$

சமன்பாடு $(3) \times 3 \quad \Rightarrow \quad 6x-9y = 21$

$y = 5$

$y = 5$ எனும்பொழுது சமன்பாடு (2) லிருந்து $8x = 88$

$x = 11$

$\therefore$ ஒருங்கமைப் புள்ளி $(11, 5)$

எடுத்துக்காட்டு 3.8

$3x - 5y - 11 = 0,\ 5x + 3y - 7 = 0$ மற்றும் $x + ky = 0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில், k-ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -11 \\ 5 & 3 & -7 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$1(35+33) - k(-21+55) = 0$

$\Rightarrow 34k = 68. \ \therefore k = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு தனியார் நிறுவனம், 2012 ஆம் ஆண்டு ஒரு எழுத்தரை ₹20,000/– ஊதியத்திற்கு, பணியில் அமர்த்துகிறது. 2017 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியம் ₹25,000 ஆக உயர்த்தப்படுகிறது. எனில்,

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 59 20-04-2020 05:04:37 PM

(i) மேற்பட்ட விவரங்களை y-எழுத்தரின் ஊதியம் மற்றும் x-அவரது பணி ஆண்டாக கொண்டு x, y-ல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக எழுதுக.

(ii) 2020 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியத்தை கணக்கிடுக.

தீர்வு

இங்கு y என்பது எழுத்தரின் ஊதியம் எனவும், x-யை எழுத்தரின் பணி ஆண்டு எனவும் கொள்க.

ஆண்டு (x)	ஊதியம் (y)
$2012(x_1)$	$20,000(y_1)$
$2017(x_2)$	$25,000(y_2)$
2020	?

மேற்பட்ட விவரங்களிலிருந்து x, y- ன் ஒரு படிச்சமன்பாடானது

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-20,000}{25,000-20,000} = \frac{x-2012}{2017-2012}$$

$$\frac{y-20,000}{5000} = \frac{x-2012}{5}$$

$y = 1000x - 2012000 + 20,000$

$y = 1000x - 19,92,000$

2020 ஆம் ஆண்டு அவரது சம்பளம்

$y = 1000(2020) - 19,92,000$

$y = ₹28000$

பயிற்சி 3.2

1. சாய்வுகள் $\frac{1}{2}$ மற்றும் 3 உடைய நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

2. (4, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x-4y+12=0$ என்ற கோடு உள்ள செங்குத்து தூரத்தைக் காண்க.

3. $x+y-4=0, 3x+2=0$ மற்றும் $3x-3y+16=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனக்காட்டு.

4. $3x+4y=13; 2x-7y=-1$ மற்றும் $ax-y-14=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில் 'a' –ன் மதிப்புக் காண்க.

5. ஒரு தனியார் உற்பத்தி நிறுவனம் 80 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை, ₹2,20,000 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது. மேலும் 125 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை ₹2,87,500 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது என்க. செலவு–வளைவரை ஒரு நேர்கோடு எனில், மேற்பட்ட விவரங்களுக்கான செலவு–வளைவரையைக் காண்க. மேலும் 95 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவை கணக்கிடுக.

3.3 இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines)

3.3.1 இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு (Combined equation of the pair of straight lines)

$l_1x+m_1y+n_1=0$ மற்றும் $l_2x+m_2y+n_2=0$ என்பன இரு தனித்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க.

அந்த நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2) = 0$$

$$l_1l_2x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+m_1m_2y^2 + (l_1n_2+l_2n_1)x+(m_1n_2+m_2n_1)y + n_1n_2 = 0$$

இது,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

என்ற இருபடி பொதுவடிவ சமன்பாட்டின் அமைப்பில் உள்ளது. (இங்கு a, b, c, f, g, h மாறிலிகள்) எனவே இதனை இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 60 20-04-2020 05:04:41 PM

3.3.2 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines passing through the origin)

x, y –ன் இரண்டாம் படி சமபடித்தான சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \ldots (1)$$

ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர்க்கோடுகளின் தனித்த சமன்பாடுகள்

$y = m_1 x$ மற்றும் $y = m_2 x$ என்க.

அவற்றின் சேர்ப்பு சமன்பாடானது

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1), (2) ஆகியவை ஒரே இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன.

$$\therefore \quad \frac{a}{m_1 m_2} = \frac{2h}{-(m_1 + m_2)} = \frac{b}{1}$$

$\Rightarrow \quad m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{a}{b}$

$m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் கூடுதல் $= -\dfrac{2h}{b}$

3.3.3 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between pair of straight lines passing through the origin)

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

இதன் தனித்த கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 என்க.

$\therefore m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$ மற்றும் $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|$$

'θ' –ஐ ஒரு குறுங்கோணமாக எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\therefore \qquad \theta = \tan^{-1}\left[\left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|\right]$$

குறிப்பு

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|\right]$$

(ii) நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனில் $h^2 = ab$.

(iii) நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை எனில், $a + b = 0$

அதாவது x^2 –ன் கெழு + y^2 –ன் கெழு = 0

3.3.4 பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு (The condition for general second degree equation to represent the pair of straight lines)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற இருபடி பொதுச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

குறிப்பு

இதனை அணிக்கோவை வடிவில்

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$ என எழுதலாம்.

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 61 20-04-2020 05:04:46 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$2x+y-1=0,\ x+2y-5=0$ என்ற தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(2x+y-1)(x+2y-5)=0$$

அதாவது

$$2x^2+xy-x+4xy+2y^2-2y-$$
$$10x-5y+5=0$$

$$2x^2+5xy+2y^2-11x-7y+5=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$$

என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$$

இதனை

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

உடன் ஒப்பிடும்போது

$$a=2, b=3, h=\frac{5}{2}, g=3, f=\frac{7}{2}$$

மற்றும் $c=4$

இரட்டை நேர்க்கோட்டிற்கான கட்டுப்பாடு

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=$$

$$24+\frac{105}{2}-\frac{49}{2}-27-25=0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

இரட்டை நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ‘θ’ என்க.

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}-6}}{5}\right]$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப்போல இரண்டு மடங்கு எனில் $8h^2=9ab$ என நிறுவுக.

தீர்வு

m_1, m_2 என்பன

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

$$\therefore\ m_1+m_2=-\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1m_2=\frac{a}{b}$$

கணக்கின்படி $m_2=2m_1$

$$\therefore\ m_1+2m_1=-\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1\cdot 2m_1=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\ m_1=-\frac{2h}{3b} \text{ மற்றும் } 2m_1^2=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad 2\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{8h^2}{9b^2}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad 8h^2=9ab$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$$

என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$ இதனை

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

உடன் ஒப்பிடும்போது

$$a=2,\ b=3,\ h=\frac{7}{2}, g=\frac{5}{2},\ f=\frac{5}{2},\ c=2$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 62 20-04-2020 05:04:53 PM

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(6-\frac{25}{4}\right)-\frac{7}{2}\left(7-\frac{25}{4}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{35}{4}-\frac{15}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{21}{8}+\frac{25}{8} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

$$2x^2+7xy+3y^2 = 2x^2+6xy+xy+3y^2$$
$$= 2x(x+3y)+y(x+3y)$$
$$= (x+3y)(2x+y)$$

$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2 = (x+3y+l)(2x+y+m)$ என்க.

x –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த,

$$2l + m = 5 \qquad (1)$$

y –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த,

$$l + 3m = 5 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) –ஐ தீர்க்க நமக்கு கிடைப்பது $m = 1$ மற்றும் $l = 2$

எனவே, இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு

$x+3y+2=0$ மற்றும் $2x+y+1=0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$

இங்கு $a = 4, b = 9, h = -6$

$$h^2-ab = 36-36 = 0$$

எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையாகும்.

$$4x^2-12xy+9y^2 = (2x-3y)^2$$

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8 = 0$ என்பதை

$\Rightarrow \quad (2x-3y)^2+9(2x-3y)+8 = 0$ என எழுதலாம்.

$2x-3y = z$ என்க.

$$z^2+9z+8 = 0$$
$$(z+1)(z+8) = 0$$

$z+1 = 0$	$z+8 = 0$
$2x-3y+1 = 0$	$2x-3y+8 = 0$

எனவே இரட்டை இணை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்

$2x-3y+1 = 0$ மற்றும் $2x-3y+8 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

$x^2+4xy+y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2+4xy+y^2=0$

இங்கு $a = 1$, $b = 1$ மற்றும் $h = 2$.

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'θ' என்க

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$$
$$= \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{4-1}}{2}\right|\right]$$
$$= \tan^{-1}(\sqrt{3})$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

k-ன் எம்மதிப்பிற்கு $2x^2+5xy+2y^2+15x+18y+k=0$ என்பது இரட்டை நேர்க் கோடுகளைக் குறிக்கும்?

தீர்வு

இங்கு $a = 2, b = 2, h = \frac{5}{2}, g = \frac{15}{2}, f = 9, c = k.$

கொடுக்கப்பட்ட கோடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிப்பதால்,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

அதாவது, $4k + \frac{675}{2} - 162 - \frac{225}{2} - \frac{25}{4}k = 0$

$$\Rightarrow 16k + 1350 - 648 - 450 - 25k = 0$$

$$\Rightarrow 9k = 252 \quad \therefore k = 28$$

பயிற்சி 3.3

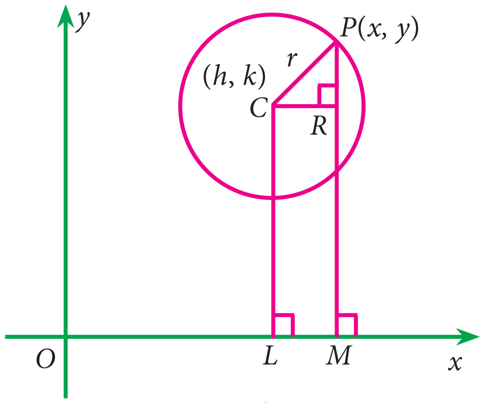
1. $ax^2 + 5xy - 6y^2 + 12x + 5y + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் a மற்றும் c -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
2. $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 14x - 5y + 2 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.
3. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.
4. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

3.4 வட்டங்கள் (Circles)

வரையறை 3.2

ஒரு நிலையானப் புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் மாறாத தூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்டம் எனப்படும். நிலையான புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் எனவும், மாறாத தூரத்தை அதன் ஆரம் எனவும் கூறுவர்.

3.4.1 மையம், ஆரம் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல் (The equation of a circle when the centre and radius are given)



படம் 3.4

வட்டத்தின் மையம் $C(h, k)$ எனவும், ஆரம் 'r' எனவும் கொள்க.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$CP = r$$

$$CP^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பாக மையம் ஆதி எனில் $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

மையம் $(3, -1)$ மற்றும் ஆரம் 4 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

இங்கு $(h, k) = (3, -1)$ மேலும் $r = 4$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 64 20-04-2020 05:05:02 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.18

ஆதியை மையமாகவும், ஆரம் 3 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

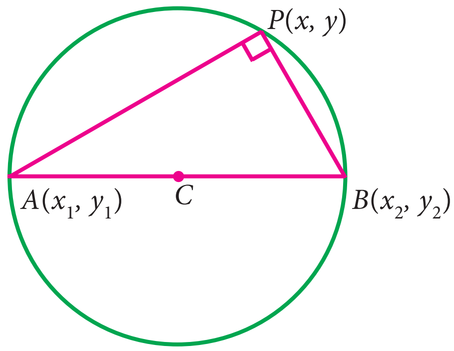
தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$

இங்கு $r = 3$

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = 9$

3.4.2 இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல் (Equation of a circle when the end points of a diameter are given)



படம் 3.5

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ என்பன விட்டத்தின் இரு முனைப்புள்ளிகள் என்க

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் $\underline{|APB} = 90^\circ$

$\therefore$ (AP ன் சாய்வு) (BP ன் சாய்வு) $= -1$

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\times\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இதுவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$(2, 4), (3, -2)$ என்பன ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இங்கு $(x_1,y_1) = (2, 4)$ மற்றும் $(x_2,y_2) = (3, -2)$

$$\therefore (x-2)(x-3)+(y-4)(y+2) = 0$$

$$x^2+y^2-5x-2y-2 = 0$$

3.4.3 வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு (General equation of a circle)

வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்பதாகும்,

இங்கு g, f, c என்பன மாறிலிகள்.

$$x^2+y^2+2gx+2fy = -c$$

$$x^2+2gx+g^2-g^2+y^2+2fy+f^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2-g^2+(y+f)^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2 = g^2+f^2-c$$

$$[x-(-g)]^2+[y-(-f)]^2 = \left[\sqrt{g^2+f^2-c}\right]^2$$

இதனை $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது

வட்டத்தின் மையம் $(-g,-f)$ என்றும், ஆரம் $\sqrt{g^2+f^2-c}$ என்றும் கிடைக்கும்.

குறிப்பு

பொது வடிவ இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டத்தை குறிப்பதற்கு கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்

(i) $a = b$ (அதாவது) x^2 –ன் கெழு = y^2 –ன் கெழு.

(ii) $h = 0$ (அதாவது) xy-ன் கெழு =0 (xy உறுப்பு கிடையாது).

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 65 20-04-2020 05:05:07 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.20

$x^2+y^2-8x+6y-24=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-8x+6y-24 = 0$$

இங்கு $g = -4, f = 3, c = -24$

மையம் $= C(-g,-f) = C(4,-3)$

ஆரம் $r = \sqrt{g^2+f^2-c}$

$= \sqrt{16+9+24} = 7$ அலகு.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

a, b களின் எம்மதிப்புகளுக்கு $(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$ எனும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும்? வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$$

கட்டுப்பாட்டின்படி,

(i) xy –ன் கெழு $= 0 \Rightarrow b-2 = 0$

$\therefore b = 2$

(ii) x^2 –ன் கெழு $= y^2$ –ன் கெழு

$\Rightarrow a-2 = b$

$a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$2x^2+2y^2+4x+4y-1=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.22

$x^2+y^2+ax+by = 0$ என்ற வட்டமானது $(1, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனில் 'a' மற்றும் 'b'-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$x^2+y^2+ax+by = 0$ என்ற வட்டமானது $(1, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால்

$1 + 4 + a + 2b = 0$ மற்றும்

$1 + 1 + a + b = 0$

$\Rightarrow \quad a+2b = -5 \qquad (1)$

மற்றும் $\quad a + b = -2 \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) –ஐ தீர்ப்பதன் மூலம் நமக்கு கிடைப்பது $a = 1, b, = -3$.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

$x^2+y^2+2x-6y+1 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $ax+2y+2 = 0$ என்ற கோட்டின் மீது அமையுமெனில் 'a'-ன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு

வட்ட மையம் $C(-1, 3)$

இது $ax+2y+2 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளது.

எனவே $-a + 6 + 2 = 0$

$a = 8$

எடுத்துக்காட்டு 3.24

$x^2+y^2-6x+4y-12 = 0$ என்ற வட்டம் $(7, -5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக்காட்டு. மேலும் இப்புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையைக் காண்க.

தீர்வு

$A(7, -5)$ என்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-6x+4y-12 = 0$$

$(7, -5)$ –ஐ பிரதியிட

$$x^2+y^2-6x+4y-12 =$$

$$7^2+(-5)^2-6(7)+4(-5)-12$$

$$= 49 + 25 - 42 - 20 - 12 = 0$$

$\therefore$ $(7, -5)$ ஆனது வட்டத்தின் மேல் அமைகிறது

இங்கு $g = -3$ மற்றும் $f = 2$

$\therefore$ மையம் $= C(3, -2)$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 66 20-04-2020 05:05:10 PM

விட்டத்தின் மறுமுனை $B\,(x,y)$ என்க.

$$AB\text{-ன்மையம்} = \left(\frac{x+7}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = C(3,-2)$$

$$\frac{x+7}{2} = 3 \qquad \frac{y-5}{2} = -2$$

$$x+7 = 6 \qquad y-5 = -4$$

$$x = -1 \qquad y = 1$$

$\therefore$ விட்டத்தின் மறுமுனை $(-1, 1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

$(0,0)$, $(1, 2)$ மற்றும் $(2, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்க.

வட்டமானது $(0, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$c = 0 \qquad \ldots (1)$$

வட்டமானது $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$1^2+2^2+2g(1)+2f(2)+c = 0$$

$$2g + 4f + c = -5 \quad \ldots (2)$$

வட்டமானது $(2, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$2^2+0+2g(2)+2f(0)+c = 0$$

$$4g + c = -4 \quad \ldots (3)$$

(1) –ஐ (3) –ல் பிரதியிட

$4g = -4 \;\Rightarrow\; g = -1$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) –ஐ தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது

$$g = -1, \quad f = -\frac{3}{4}, \; c = 0$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

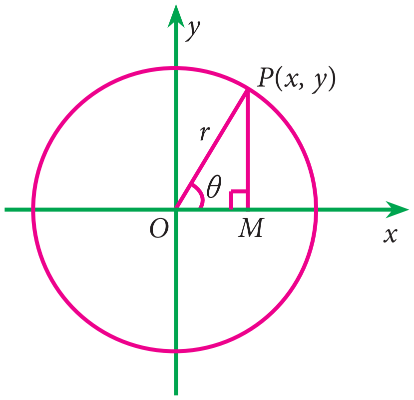
$$x^2+y^2+2(-1)x+2\left(\frac{-3}{4}\right)y+0 = 0$$

அதாவது, $\quad 2x^2+2y^2-4x-3y = 0$

3.4.4 வட்டத்தின் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of a circle)

ஆதியை மையமாகவும் r –ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x,y)$ வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. x-அச்சின் மிகை திசையோடு OP என்ற நேர்க்கோடு θ என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்க.

x -அச்சுக்கு செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.



படம் 3.6

படத்திலிருந்து,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் $x^2+y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் ஆகும். இங்கு 'θ' என்பது துணையலகு மற்றும் $0 \le \theta \le 2\pi$.

எடுத்துக்காட்டு 3.26

$x^2+y^2 = 25$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $r^2 = 25 \;\Rightarrow\; r = 5$

வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள்

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \; x = 5\cos\theta,\; y = 5\sin\theta,\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 67 20-04-2020 05:05:14 PM

பயிற்சி 3.4

1. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாடு காண்க.

    (i) மையம் (3,5) மற்றும் ஆரம் 5 அலகுகள்

    (ii) மையம் (0, 0) மற்றும் ஆரம் 2 அலகுகள்

2. பின்வரும் வட்டங்களின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க

    (i) $x^2+y^2 = 16$

    (ii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$

    (iii) $5x^2+5y^2+4x-8y-16=0$

    (iv) $(x+2)(x-5)+(y-2)(y-1)=0$

3. 16π அலகினை சுற்றளவாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மையம் (−3, −2) எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

4. (1,4) என்ற புள்ளியின் வழியாகவும் (2,3) –ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. (0,1),(4,3) மற்றும் (1, −1) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

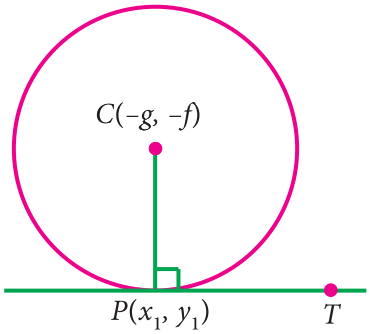
6. (1, 0), (0, 1) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும் $x+y = 1$ என்ற கோட்டின் மேல் மையத்தையும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. $x+y = 6$ மற்றும் $x+2y = 4$ ஆகியவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்டதும் (2, 6) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

8. (4, 7) மற்றும் (−2, 5) என்பன ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ என்பன ஒரு வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் எனில், வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு காண்க.

3.4.5 தொடுகோடுகள் (Tangents)



படம் 3.7

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்தில்

$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

ஆகும்.

கிளைமுடிவு:

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்டத்தின் சமன்பாடு
$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ –ல்
x^2 –ஐ xx_1 எனவும், y^2 –ஐ yy_1 எனவும்
x –ஐ $\frac{x+x_1}{2}$ எனவும் மேலும்
y –ஐ $\frac{y+y_1}{2}$ எனவும் பிரதியிட (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

(−2, 5) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2+3x-8y+17 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

(x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+3\times\frac{1}{2}(x+x_1)-8\times\frac{1}{2}(y+y_1)+17 = 0$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 68 20-04-2020 05:05:17 PM

இங்கு $(x_1, y_1) = (-2, 5)$

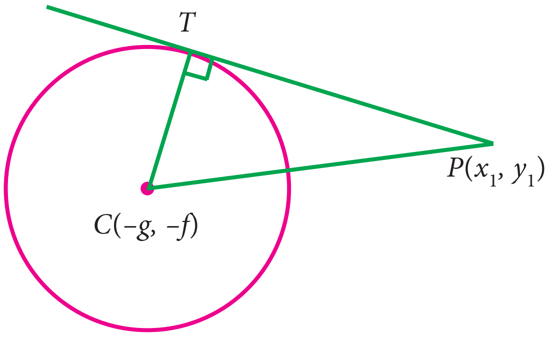
$$-2x+5y+\frac{3}{2}(x-2)-4(y+5)+17 = 0$$
$$-2x+5y+\frac{3}{2}x-3-4y-20+17 = 0$$
$$-4x+10y+3x-6-8y-40+34 = 0$$

தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x-2y+12 = 0$ ஆகும்.

வட்டத்திற்கான தொடுகோட்டின் நீளம் (Length of the tangent to the circle)

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்

$$PT = \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$$



படம் 3.8

குறிப்பு

(i) P என்ற புள்ளி வட்டப் பரிதியின் மேல் இருந்தால் $PT^2 = 0$

(ii) P என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், $PT^2 > 0$

(iii) $PT^2 < 0$ எனில் P யானது வட்டத்திற்கு உள்ளே அமையும்

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$x^2+y^2+8x+4y+8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு $(2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு

$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$$

அதாவது தொடுகோட்டின் நீளம்

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+8x_1+4y_1+8}$$
$$= \sqrt{2^2+3^2+8(2)+4(3)+8}$$

[இங்கு $(x_1, y_1) = (2, 3)$]

$$= \sqrt{49}$$

தொடுகோட்டின் நீளம் $= 7$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

$P(0,1), Q(5,9), R(-2,3)$ மற்றும் $S(2,2)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x+4y-8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-4x+4y-8 = 0$$
$$PT^2 = x_1^2+y_1^2-4x_1+4y_1-8$$

$P(0, 1)$ என்ற புள்ளியில்

$$PT^2 = 0+1+0+4-8 = -3 < 0$$

$Q(5, 9)$ என்ற புள்ளியில்

$$QT^2 = 25+81-20+36-8 = 114 > 0$$

$R(-2, 3)$ என்ற புள்ளியில்

$$RT^2 = 4+9+8+12-8 = 25 > 0$$

$S(2, 2)$ என்ற புள்ளியில்

$$ST^2 = 4+4-8+8-8 = 0$$

எனவே P என்பது வட்டத்திற்கு உள்ளேயும், Q மற்றும் R என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயும், S வட்டத்தின் மேலேயும் அமைகிறது.

முடிவு	$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையானக் கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1+m^2)$ ஆகும்.

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 69 20-04-2020 05:05:21 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.30

$3x+4y-k=0$ என்ற கோடானது $x^2+y^2-64=0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனில் k –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் $x^2+y^2-64=0$ மற்றும் $3x+4y-k=0$

தொடுகோடாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு $c^2=a^2(1+m^2)$

இங்கு $a^2=64,\ m=\dfrac{-3}{4},\ c=\dfrac{k}{4}$

$$c^2=a^2(1+m^2)\Rightarrow \frac{k^2}{16}=64\left(1+\frac{9}{16}\right)$$

$$k^2=64\times 25$$

$$k=\pm 40$$

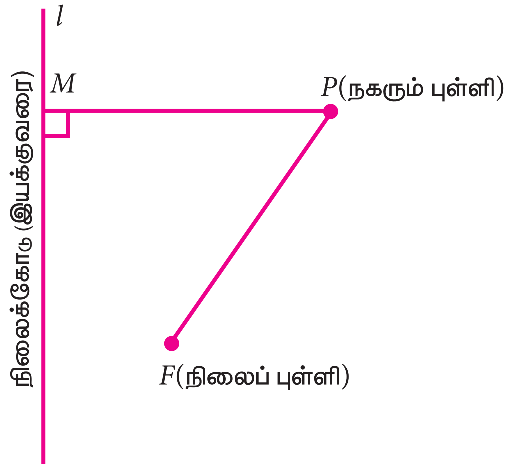
பயிற்சி 3.5

1. $(-2,\ -2)$ என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு காண்க.
2. $P(1,\ 0)$, $Q(2,\ 1)$ மற்றும் $R(2,\ 3)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?
3. $(1,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x+4y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.
4. $3x+4y-P=0$ என்ற கோடு $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு எனில் P யின் மதிப்புக் காண்க.

3.5 கூம்புவெட்டுமுக வளைவரைகள் (Conics)

வரையறை 3.3

ஒரு தளத்தில், நகரும் புள்ளியானது, நிலையானக் கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியின் செங்குத்து தூரமும், நிலையான புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரமும் மாறாத விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்கு பாதை கூம்பு வெட்டு முக **வளைவரை** எனப்படும்.



படம் 3.9

படத்தில் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். நிலையான கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். P என்பது நகரும் புள்ளி எனில், $\dfrac{FP}{PM}=e$, மாறிலி எனுமாறு இயங்கும் P–ன் இயங்குபாதை கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை எனப்படும். இங்கு 'e' என்பது மையத் தொலைத் தகவு எனப்படும்.

மையத் தொலைத்தகவின் மதிப்பின் அடிப்படையில் கூம்பு வெட்டு முக வளைவரையை கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தலாம்,

a) $e=1$, எனில், கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை பரவளையம் எனப்படும்

b) $e<1$, எனில், இவ்வளைவரை நீள்வட்டம் எனப்படும்.

c) $e>1$, எனில், இவ்வளைவரை அதிபரவளையம் எனப்படும்.

பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

என்பது,

(i) இரட்டைக் கோடுகளை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆகும்.

(ii) வட்டத்தை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $a=b$ மற்றும் $h=0$ ஆகும்.

மேற்கண்ட இரு கட்டுப்பாடுகள், நிறைவு செய்யப்படவில்லை எனில்,

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 70 20-04-2020 05:05:24 PM

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில்

(i) $h^2 - ab = 0$ எனில், ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

(ii) $h^2 - ab < 0$ எனில், ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(iii) $h^2 - ab > 0$ எனில், ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

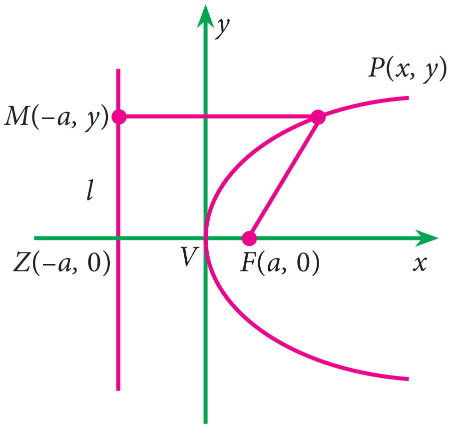
3.5.1 பரவளையம் (Parabola)

வரையறை 3.4

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தும், நிலையானக் கோட்டிலிருந்தும் சம தூரத்தில் இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை, பரவளையம் எனப்படும்.

$y^2 = 4ax$ என்பது பரவளையத்தின் திட்ட வடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இது வலப்பக்கம் திறப்புடையது.

3.5.2 பரவளையத்துடன் தொடர்புடைய வரையறைகள் (Definitions regarding a parabola) $y^2 = 4ax$



படம் 3.10

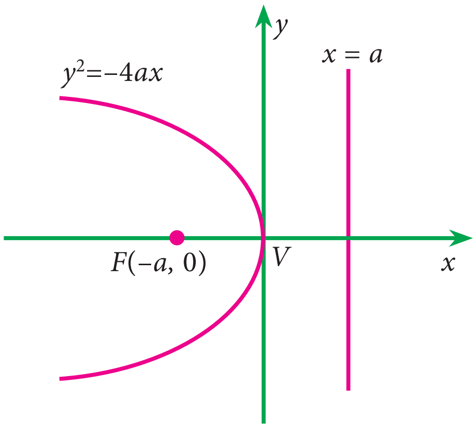
குவியம்	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். இங்கு $F(a,0)$ என்பது குவியம் ஆகும்.
இயக்குவரை	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையானக் கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். இங்கு இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -a$.
அச்சு	பரவளையத்தின் அச்சானது பரவளையத்தின் சமசீர் அச்சாகும். $y^2 = 4ax$ வளைவரை x -அச்சை பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது. எனவே x -அச்சு அல்லது $y = 0$ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் அச்சு ஆகும்.
முனை	பரவளையம், அதன் அச்சை வெட்டும் புள்ளி, பரவளையத்தின் முனை எனப்படும். இங்கு $V(0,0)$ என்பது பரவளையத்தின் முனை எனப்படும்.
குவியதூரம்	பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி, அதன் குவியத்தில் இருந்து உள்ள தொலைவு, குவிய தூரம் எனப்படும்.
குவிய நாண்	ஒரு பரவளையத்தின் குவியம் வழிச் செல்லும் நாண். குவிய நாண் எனப்படும்.
செவ்வகலம்	பரவளையத்தின், அச்சுக்கு செங்குத்தான குவியநாண், செவ்வகலம் எனப்படும். இங்கு செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = a$. செவ்வகலத்தின் நீளம் $4a$

3.5.3 பரவளையத்தின் பிற திட்ட வடிவங்கள் (Other standard parabolas)

1. இடப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம்: $y^2 = -4ax [a > 0]$

$x > 0$, எனும் பொழுது, y ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $x \le 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.

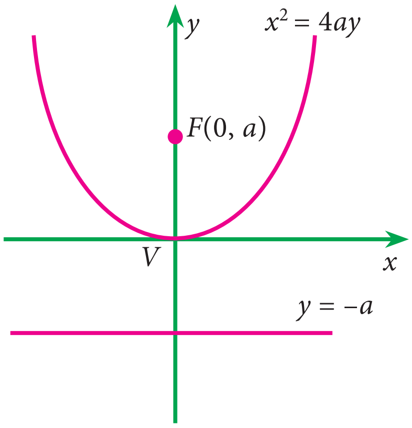
03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 71 20-04-2020 05:05:26 PM



படம் 3.11

2. மேல்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = 4ay [a > 0]$

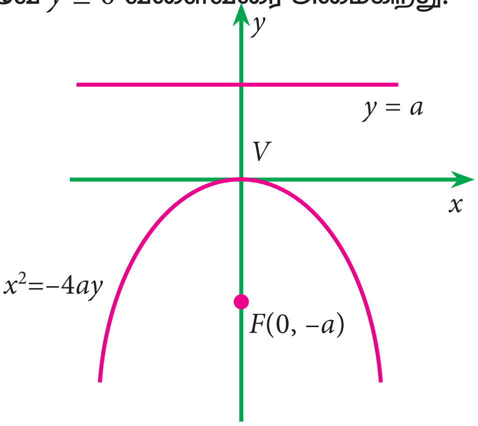
$y < 0$ எனும் பொழுது x ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $y \geq 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.



படம் 3.12

3. கீழ்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = -4ay [a > 0]$

$y > 0$ எனும் பொழுது, x கற்பனை ஆகிறது. எனவே $y \leq 0$ வளைவரை அமைகிறது.

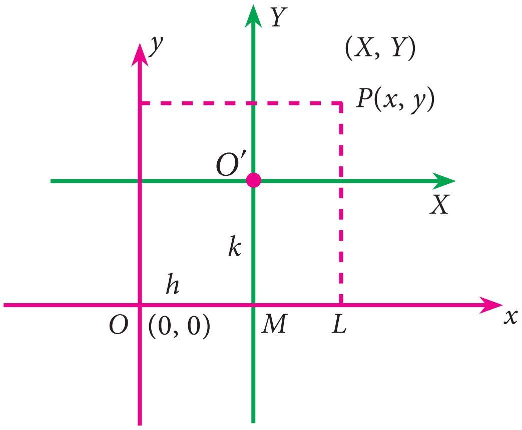


படம் 3.13

சமன்பாடுகள்	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
அச்சு	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
முனை	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$
குவியம்	$F(a, 0)$	$F(-a, 0)$	$F(0, a)$	$F(0, -a)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$

ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் அல்லது அச்சுக்களை இடப்பெயர்ச்சி செய்யும் முறை (The process of shifting the origin or translation of axes)

xoy அமைப்பில் x –அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக. (X-அச்சு என்க) மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக (Y- அச்சு என்க). $P(x,y)$ என்ற புள்ளியை xoy அமைப்பில் எடுத்துக்கொள்க. அதே புள்ளி $XO'Y$ அமைப்பில் $P(X,Y)$ என்க.



படம் 3.14

xoy -இன் அமைப்பில் O' -ன் அச்சுத்தூரங்கள் (h, k) என்க.

xoy அமைப்பில் P-ன் புதிய அச்சுத் தூரங்கள் :

$$OL = OM + ML$$

$$= h + X$$

அதாவது, $x = X + h$

இதே போல் $y = Y + k$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 72 20-04-2020 05:05:27 PM

$\therefore$ $XO'Y$ அமைப்பில் P -ன் புதிய ஆய அச்சுத் தூரங்கள்.

$X = x–h$ மற்றும் $Y = y–k$

குறிப்பு

முனை (h, k) எனில், பொது வடிவம் பெற x-ஐ $x–h$ ஆகவும் மற்றும் y-ஐ $y–k$ ஆகவும் மாற்றம் செய்க.

3.5.4 பரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் – வலது புறம் திறப்புடையது (அதாவது முனை ஆதியில் அமையாதது) (General form of the standard equation of a parabola, which is open rightward (i.e., the vertex other than origin) :

XOY அமைப்பில் முனை $V(0, 0)$ இருக்குமாறு ஒரு பரவளையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம், இதன் அச்சுத் தூரம் xoy அமைப்பில் (h, k) என்க.

இந்த பரவளையம் XOY அமைப்பில் வலதுபுறம் திறப்புடையது. எனவே இதன் சமன்பாடு $Y^2 = 4aX$ ஆகும்.

ஆதியை இடமாற்றம் செய்வதால் $X = x - h$ மற்றும் $Y = y - k$ என மாறுகிறது. xoy அமைப்பில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

இதுவே வலதுபுறம் திறப்புடைய பரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும். இதேபோல் மற்ற பொது வடிவங்கள்

$(y-k)^2 = -4a(x-h)$ (இடதுபக்கம் திறப்புடையது)

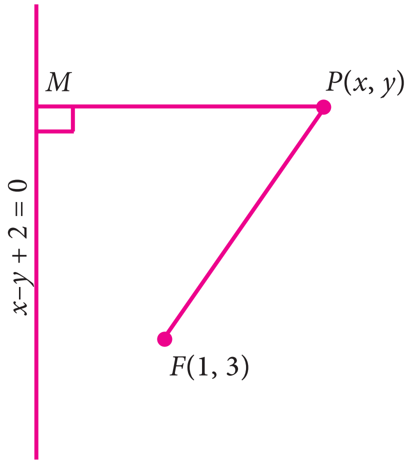
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ (மேல்பக்கம் திறப்புடையது)

$(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (கீழ்பக்கம் திறப்புடையது)

எடுத்துக்காட்டு 3.31

$x - y + 2 = 0$ என்ற இயக்குவரையும் $(1, 3)$ என்ற குவியத்தையும் உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு



படம் 3.15

கணக்கின்படி குவியம் $F(1, 3)$ மற்றும்

இயக்குவரை $x - y + 2 = 0$

$x - y + 2 = 0$

$P(x,y)$ என்பது பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி என்க.

பரவளையத்தின் வரையறைப்படி

$$FP = PM$$

$$FP^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$
$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$
$$= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$$

$$PM = \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{1+1}}$$
$$= \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{2}}$$

$$PM^2 = \frac{(x-y+2)^2}{2}$$
$$= \frac{x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x}{2}$$

$$FP^2 = PM^2$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 20 = x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 4x + 4$$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 73 20-04-2020 05:05:32 PM

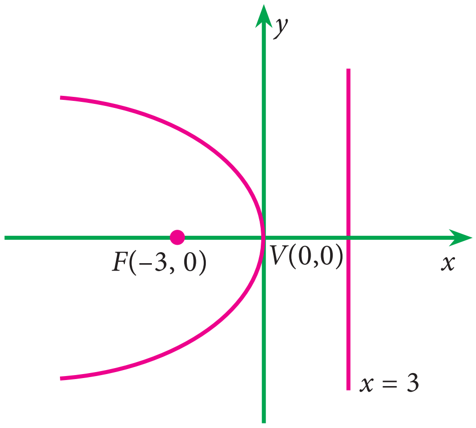
பரவளையத்தின் தேவையான சமன்பாடு

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy-8x-8y+16=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.32

$y^2=-12x$ என்ற பரவளையத்தின், குவியம், முனை, இயக்குவரையின் சமன்பாடு, அச்சு செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு



படம் 3.16

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் $y^2=-4ax$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

இங்கு $4a=12,\quad a=3$.

பரவளையம் இடப்புறம் திறப்புடையது. எனவே குவியம்

$F(-a,o)=F(-3,0)$

முனை $V(h,k)=V(0,0)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x=a$

அதாவது, $x=3$

பரவளையத்தின் அச்சு x-அச்சு இதன் சமன்பாடு $y=0$.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $=4a=12$

எடுத்துக்காட்டு 3.33

$x=10p-20-p^2$ என்ற தேவைச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக்காட்டு. மேலும் விலையானது பரவளையத்தின் முனையில் உச்சத்தை அடையும் எனக்காட்டு.

தீர்வு

$$x=10p-20-p^2$$
$$=-p^2-20+10p+5-5$$
$$x-5=-p^2+10p-25$$
$$=-(p^2-10p+25)$$
$$=-(p-5)^2$$

$X=x-5$ மற்றும் $P=p-5$ என்க.

$X=-P^2$ அதாவது $P^2=-X$

இது கீழ்ப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம்.

$\therefore$ மேலும் $x=5$ எனில் விலை $p=5$ அதாவது பரவளையத்தின் முனையில் விலை உச்சமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$x^2+6x-4y+21=0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு

$$4y=x^2+6x+21$$
$$4y=(x^2+6x+9)+12$$
$$4y-12=(x+3)^2$$
$$(x+3)^2=4(y-3)$$
$$X=x+3,\ Y=y-3$$

$x=X-3$ மற்றும் $y=Y+3$

$$X^2=4Y$$

$X^2=4aY$ உடன் ஒப்பிட $4a=4$

$$a=1$$

	(X, Y) –ஐ பொறுத்து	(x, y) –ஐ பொறுத்து $x=X-3$, $y=Y+3$
அச்சு $y=0$	$Y=0$	$y=3$
முனை $V(0,0)$	$V(0,0)$	$V(-3,3)$
குவியம் $F(0, a)$	$F(0, 1)$	$F(-3, 4)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு $(y=-a)$	$Y=-1$	$y=2$
செவ்வகலத்தின் நீளம் $(4a)$	$4(1)=4$	4

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 74 20-04-2020 05:05:37 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.35

பொருளின் அளிப்புக்கும், விலைக்கும் உள்ள தொடர்பு $x=\sqrt{5P-15}$ என கொடுக்கப்படுகிறது. அந்த அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

அளிப்பு விலை தொடர்பானது $x^2 = 5p - 15$

$= 5(p - 3)$

$\Rightarrow \quad X^2 = 4aP$ இங்கு $X = x, \quad P = p-3$

$\therefore$ அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் இதன் முனை $(X = 0, P = 0)$

இங்கு $V(0, 3)$ என்பது முனையாகும்.

பயிற்சி 3.6

1. $F(-1,-2)$ என்ற குவியத்தையும், $4x-3y+2=0$ என்ற இயங்குவரையையும் உடைய பரவளையத்தைக் காண்க.
2. $y^2 = kx$ என்ற பரவளையம் $(4,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில் பரவளையத்தின் குவியம் மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் காண்க.
3. $y^2-8y-8x+24=0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.
4. கீழ்காணும் பரவளையங்களின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

   (a) $y^2 = 20x$

   (b) $x^2 = 8y$

   (c) $x^2 = -16y$

   9YUI1I

5. விலை மதிப்பு மிக்க உலோகத்தை தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் ஒருமாத உற்பத்தி x டன்களின் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு $\frac{1}{5}x^2-6x+100$ என கொடுக்கப்படுகிறது, எனில் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டு. மேலும் பரவளையத்தின் முனையில், உற்பத்தியின் அளவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியற்றைக் காண்க.
6. x மாதங்களில் ஈட்டப்பட்ட இலாபம் ₹y (ஆயிரங்களில்) என்க. மேலும் $y=-x^2+10x-15$ எனில், செயல்திட்டத்தை, முடிப்பதற்கான மிகச் சிறந்த காலத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 3.7

சரியானவிடையைத்தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $ax^2+2hxy+by^2=0$, என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 எனில், m_1+m_2 –ன் மதிப்பு

   (a) $\frac{2h}{b}$ (b) $-\frac{2h}{b}$

   (c) $\frac{2h}{a}$ (d) $-\frac{2h}{a}$

2. $x^2-7xy+4y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

   (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

   (c) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{33}}\right)$

3. $2x-3y-5=0$ மற்றும் $3x-4y-7=0$ என்ற கோடுகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள் எனில், அவ்வட்டத்தின் மையம்

   (a) $(-1, 1)$ (b) $(1,1)$

   (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, -1)$

4. $3x+2y-1=0$ என்ற கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு

   (a) 3 (b) 2 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

5. $7x+5y-8=0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

   (a) $\frac{7}{5}$ (b) $-\frac{7}{5}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $-\frac{5}{7}$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 75 20-04-2020 05:05:43 PM

6. ஆய அச்சுகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

(a) $y=\frac{1}{x}$ (b) $y=-x$

(c) $y=x$ (d) $y=\frac{-1}{x}$

7. $x+2y+7=0$ என்ற கோட்டிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதொலைவில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

(a) $x+2y+2=0$ (b) $x-2y+1=0$

(c) $2x-y+2=0$ (d) $3x+y+1=0$

8. $kx^2+3xy-2y^2=0$ என்பது செங்குத்து இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிக்குமெனில் $k=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) –2

9. $x^2+y^2+ax+by-4=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $(1,-2)$ எனில் அதன் ஆரம்

(a) 3 (b) 2 (c) 4 (d) 1

10. $(4,5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

(a) 4 (b) 5 (c) 16 (d) 25

11. $x^2=16y$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம்

(a) (4 ,0) (b) (–4 , 0)

(c) (0, 4) (d) (0, –4)

12. $y^2=-25x$ பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்.

(a) 25 (b) –5 (c) 5 (d) –25

13. $x^2+y^2-2x+2y-9=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம்

(a) (1 ,1) (b) (–1, –1)

(c) (–1,1) (d) (1, –1)

14. ஆதிவழிச் செல்வதும், x -அச்சின் மீது மையத்தை கொண்டதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2-2ax+y^2=0$

(b) $y^2-2ay+x^2=0$

(c) $x^2+y^2=a^2$

(d) $x^2-2ay+y^2=0$

15. வட்டத்தின் மையம் $(-a,-b)$ மற்றும் ஆரம் $\sqrt{a^2-b^2}$ எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2+y^2+2ax+2by+2b^2=0$

(b) $x^2+y^2+2ax+2by-2b^2=0$

(c) $x^2+y^2-2ax-2by-2b^2=0$

(d) $x^2+y^2-2ax-2by+2b^2=0$

16. ஆய அச்சுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

(a) $x^2-y^2=0$ (b) $x^2+y^2=0$

(c) $xy=c$ (d) $xy=0$

17. $ax^2+4xy+2y^2=0$ என்ற சமன்பாடு இணையான இரட்டைக் கோடுகளை குறிக்குமெனில் 'a' –ன் மதிப்பு

(a) 2 (b) –2 (c) 4 (d) –4

18. $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டின், y வெட்டுத்துண்டு(கள்)

(a) 4 (b)16 (c) ±4 (d) ±16

19. ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு 8π அலகுகள் மற்றும் மையம் $(2,2)$ எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

(b) $(x-2)^2+(y-2)^2=16$

(c) $(x-4)^2+(y-4)^2=2$

(d) $x^2+y^2=4$

20. (3, –4) –ஐ மையமாக கொண்ட வட்டம் x –அச்சைத் தொடுமானால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$

(b) $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

(c) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

(d) $x^2+y^2=16$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 76 20-04-2020 05:05:52 PM

21. ஒரு வட்டம், x-அச்சு, y-அச்சு மற்றும் $x = 6$ என்ற நேர்க்கோடு ஆகியவற்றைத் தொடுகிறது எனில், அவ்வட்டத்தின் விட்டத்தின் நீளம்

(a) 6 (b)3 (c) 12 (d) 4

22. பரவளையத்தின் மையத்தொலைத்தகவு

(a) 3 (b) 2 (c) 0 (d) 1

23. குவியம் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் என்பது

(a) குவியநாண் (b) செவ்வகலம்
(c) இயக்குவரை (d) அச்சு

24. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரைக்கும் குவியத்திற்கும் இடைப்பட்டத் தூரம்

(a) a (b) $2a$ (c) $4a$ (d) $3a$

25. $y^2 =- x$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு

(a) $4x + 1 = 0$ (b) $4x - 1 = 0$
(c) $x - 4 = 0$ (d) $x + 4 = 0$

இதர கணக்குகள்

1. நகரும் புள்ளி P, (2,3) மற்றும் (1, 5) ஆகியவை ஒரு கோடமை புள்ளிகள் எனில் P இன் நியமப்பாதை காண்க

2. உற்பத்தி பொருட்களின் எண்ணிக்கை 500 லிருந்து 1000 ஆக உயரும்போது உற்பத்தி செலவு ₹6000 லிருந்து ₹9000 ஆக உயருகிறது. x, y க்கு இடைப்பட்ட தொடர்பு ஓர் ஒருபடிச் சார்பெனில் செலவு (y) மற்றும் தயாரிக்கப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை (x)இவற்றுக்கிடைப்பட்ட தொடர்பினை காண்க.

3. $4x + 3y = 10, 3x - 4y = -5$ மற்றும் $5x + y = 7$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.

4. $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$ மற்றும் $px + 8y - 7 = 0$ என்ற கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் p யின் மதிப்பைக் காண்க

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றொன்று போல் 3 மடங்கு எனில் $3h^2 = 4ab$ என நிறுவுக

6. $(a-1)x^2 + by^2 + (b-8)xy + 4x + 4y - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனில் a, b யின் மதிப்பு காண்க

7. (−1,−2), (1, 0) மற்றும் (−3, −4) என்ற புள்ளிகள் $3x + 2y + 7 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு மேல், கீழ் அல்லது கோட்டின் மீது உள்ளதா என தீர்மானிக்க

8. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒரு முனை (4, 1) எனில் மற்றொரு முனை காண்க.

9. x-அச்சை பொறுத்து சமச்சீரான பரவளையம் (−2, −3) வழிச் செல்கிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

10. $(y-2)^2 = 4(x-1)$ என்ற பரவளையத்திற்கு அச்சு, முனை, குவியம் இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 77 20-04-2020 05:05:56 PM

தொகுப்புரை

- $y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $y = m_2 x + c_2$ என்ற வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|\right]$
- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ மற்றும் $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதற்கான கட்டுப்பாடு $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
- x, y–ல் பொதுவான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு $abc + 2fgh – af^2 – bg^2 – ch^2 = 0$ என்பதாகும்.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் எனில் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் = $\dfrac{a}{b}$ சாய்வுகளின் கூடுதல் பலன் = $\dfrac{-2h}{b}$.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\dfrac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$.
- மையம் (h,k), ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- மையம் ஆதிப்புள்ளி, ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாக உடைய விட்டத்தைக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு : $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
- $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$
- (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ ஆகும். (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் = $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$.
- $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையான கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.
- பரவளையத்தின் திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 78 20-04-2020 05:05:59 PM

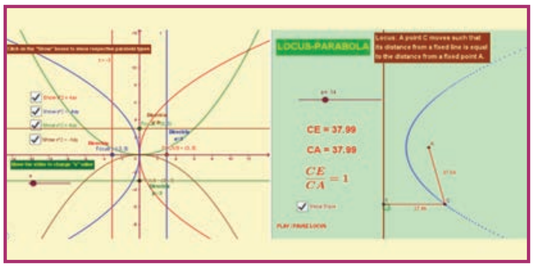
கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

ஆதி	Origin
ஆரம்	Radius
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இயக்குவரை	Directix
இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	Pair of straight lines
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	Concurrent Lines
ஒருங்கமை புள்ளி	Point of concurrency
குவியத்தூரம்	Focal distance
குவியம்	Focus
கூம்பு வெட்டிகள்	Conics
சமன்பாடு	Equation
செங்குத்துக் கோடு	Perpendicular line
செவ்வகலம்	Latus rectum
துணையலகு	Parameter
தொடுகோடு	Tangent
தொடுகோட்டின் நீளம்	Length of the tangent
நாண்	Chord
நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை	Locus
நேர்க்கோடு	Straight line
பரவளையம்	Parabola
முனை	Vertex
மையம்	Centre
வட்டம்	Circle
விட்டம்	Diameter
வெட்டும் புள்ளி	Point of intersection

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 79 20-04-2020 05:05:59 PM

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

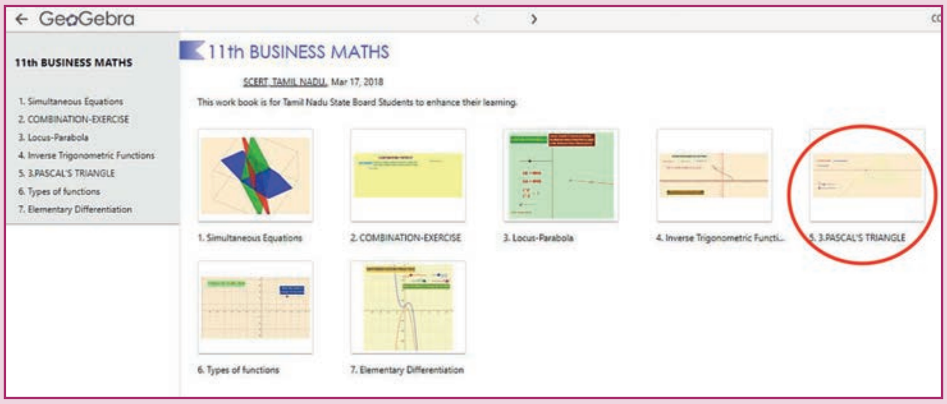
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Locus-Parabola"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

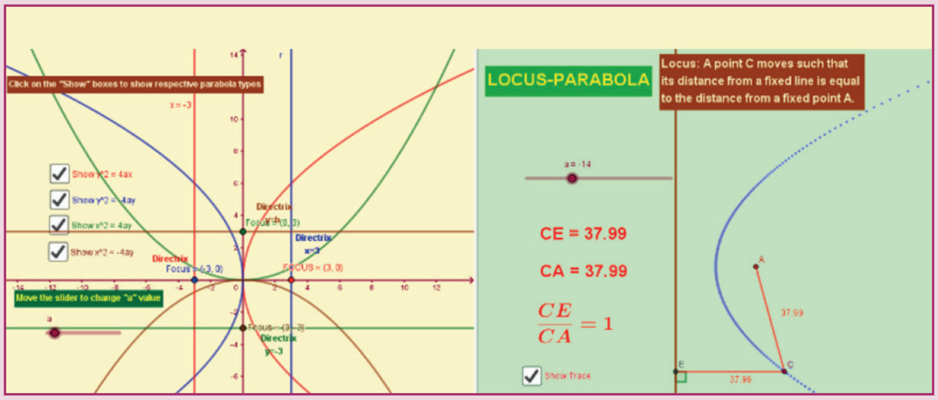
படி - 2

"Locus-Parabola" க்கான பணித்தாளில் இடப்பக்கம் உள்ள தேர்வுப்பெட்டிகளில் தேவையான பரவளையைத் தேர்வு செய்து 4 வகையான பரவளை, இயக்குவரை மற்றும் குவியம் ஆகியவற்றை ஆராய்ந்து பார்க்கவும். இடப் பக்கம் கீழே உள்ள நழுவலை நகர்த்தி "a" இன் மதிப்பை மாற்றலாம். மேலும் வலப் பக்கத்தில் பரவளையின் நியமபாதையையும் வரையறை நிபந்தனையையும் காண play/pause பொத்தானைச் சொடுக்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 80 20-04-2020 05:05:59 PM