अध्याय-4 पूर्णांक

भूमिका

आपने कारगिल युद्ध के समय भारतीय सैनिकों को 14000 फीट ऊँचाई पर भी रहते हुए सुना होगा। उन्हें इतनी सर्दी में भी अपने देश के लिए वहाँ रहना पड़ा। क्या आपको मालूम है कि जनवरी के महीने में कारगिल हिल का औसत तापमान शून्य से भी 40°C नीचे रहता है। इसे हम –40°C लिख सकते हैं। अब निम्नलिखित स्थानों के तापमान को + या – चिह्न से निरूपित कीजिए–

(a) उदयपुर का औसत तापमान शून्य से 39°C ऊपर की ओर ....

(b) बोधगया का तापमान शून्य से 26°C ऊपर की ओर ....

(c) लेह का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 14°C नीचे की ओर ....

(d) कारगिल शहर का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 13°C नीचे की ओर.....

रामू दो कि.ग्रा. दाल लेने बाजार जाता है। उसके पास 30 रुपये हैं। दुकानदार दाल का भाव 18 रुपये प्रति कि.ग्रा. बताता है। इसका मतलब 2 कि.ग्रा. का मूल्य 36 रुपये होगा। किन्तु रामू के पास 30 रुपये हैं। वह 30 रुपये दुकानदार को देता है और कहता है कि 6 रुपये उधार रहे। अब यदि हम पूछें कि रामू के पास कितने बचे तो क्या हम कह सकते हैं कि उसके पास शून्य रुपये बचे? क्यों नहीं?

क्योंकि अब यदि रामू के पास दो रुपये आते हैं तो उन्हें वह दुकानदार को देगा और तब भी उस पर 4 रुपये का उधार रहेगा। यदि उसके पास शून्य रुपये होते तो 2 रुपये मिलने पर उसके पास 2 रुपये हो जाते।

अब सोचने की बात यह है कि हम इन 4 रुपयों को किस प्रकार दिखाएँ? रामू उन 4 रु. के उधार को याद रखने के लिए अपनी डायरी में 4 लिख देता है, पर कैसे पता चले कि 4 रु. लेने हैं या देने हैं? क्या हम इस उधार राशि के लिए कोई चिह्न बना सकते हैं?

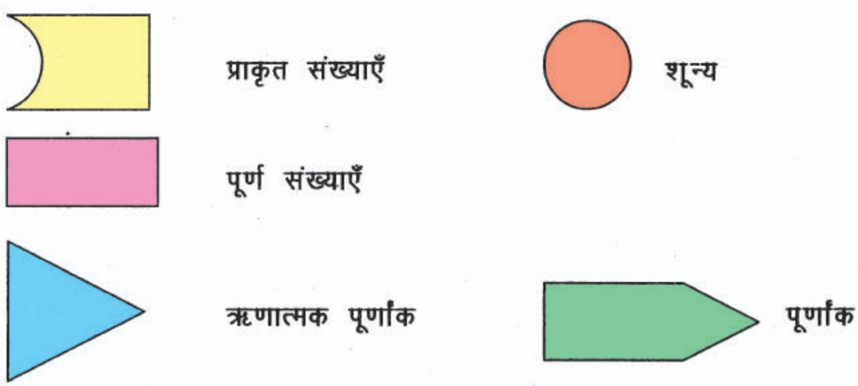
इस प्रकार की समस्या को दूर करने के लिए एक अलग प्रकार की संख्या की परिकल्पना की गई जिसे ऋणात्मक संख्या कहते हैं।

4.1 पूर्णांक

जैसा कि आप पहले पढ़ चुके हैं कि प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, 4 ...... हैं।

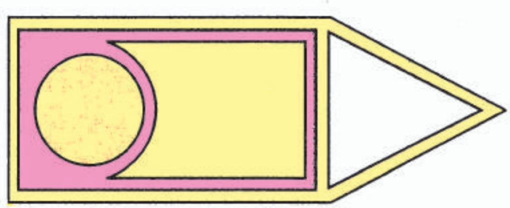
यदि हम प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित कर लेते हैं, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होता है। इन संख्याओं को **पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4 ..... पूर्ण संख्याएँ हैं।

अब हमें ज्ञात हो गया है कि कुछ स्थितियों को दर्शाने के लिए ऋणात्मक संख्याओं की भी आवश्यकता होती है। जैसे −1, −2, −3, −4, −5 ....। यदि हम पूर्ण संख्याओं और इन ऋणात्मक संख्याओं को मिला लें तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होगा, जिसे पूर्णांक कहते हैं जो −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3 .... है। संख्याओं के इस संग्रह में 1, 2, 3 .... धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं और −1, −2, −3 .... ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं। आइए इसे निम्न आकृतियों द्वारा समझने का प्रयत्न करें। मान लीजिए ये आकृतियाँ अपने सम्मुख लिखी संख्याओं या उनके संग्रह को निरूपित करती हैं।



तब पूर्णांकों के संग्रह को निम्नलिखित आरेख से समझा जा सकता है, जिसमें पिछली सभी संख्याएँ और उनके संग्रह सम्मिलित हैं।

पूर्णांक



4.1.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण

एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर आकृति में दिखाया गया है। इनमें से एक बिन्दु को शून्य से अंकित कीजिए। शून्य के दाईं ओर के बिन्दु धनात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें +1, +2, +3 इत्यादि या केवल 1, 2, 3 इत्यादि से अंकित किया गया है। शून्य के बाईं ओर के बिन्दु ऋणात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें –1, –2, –3 इत्यादि से अंकित किया गया है।

नीचे की रेखा पर +4 अंकित करने के लिए हम शून्य के दाईं ओर 4 कदम (1 बिन्दु को 1 कदम मान लीजिए) चलते हैं।

इसी प्रकार –2 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर 2 बिन्दु चलते हैं।

स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा पर –4, 3, –5, 6 और –1 को अंकित कीजिए।

इसी प्रकार की अन्य स्थितियाँ, जहाँ हम इन चिह्नों का प्रयोग करते हैं, आगे दी गई हैं।

जैसे-जैसे हम नीचे जाते हैं, ऊँचाई कम होती जाती है। जैसे– समुद्र तल के स्तर से नीचे की गहराई को हम एक ऋणात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं और समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई को एक धनात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं। समुद्र के तल की ऊँचाई शून्य है।

कारगिल और लेह का तापमान कई बार शून्य (0°C) से नीचे चला जाता है। इस तापमान को (–) चिह्न से निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ– लेह का फरवरी माह का औसत तापमान 0° से 12°C नीचे रहने पर तापमान को –12°C लिखा जाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित को उचित चिह्न के साथ लिखिए–

(a) चंपारण समुद्र तल से 100 मी ऊँचाई पर है ....

(b) कोलकाता का औसत तापमान 0° से 32°C ऊपर ....

(c) कुट्टनड़ (केरल) समुद्र तल से 2.20 मी नीचे ....

(d) कारगिल हिल का औसत तापमान 0° से 40°C नीचे ....

4.1.2 पूर्णांकों की क्रमबद्धता

I

I मेढ़क : बादल घुमड़ रहे हैं। लगता है वर्षा आने वाली हैं, अब कुएँ में पानी आएगा।

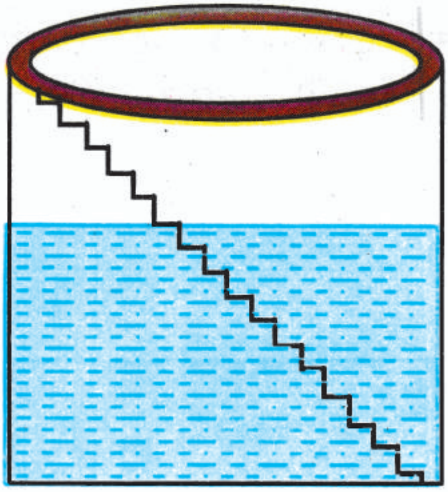
II मेढ़क : जब कुएँ में पानी आएगा तो हमें ऊपर की सीढ़ी पर बैठकर बात करनी होगी।

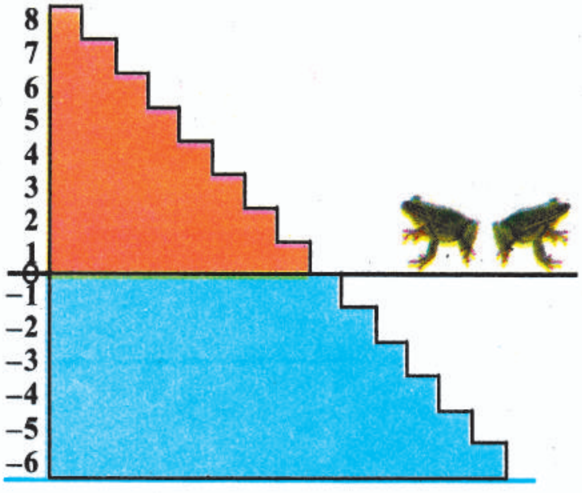
I मेढ़क : ऊपर कौन-सी सीढ़ी पर बैठेंगे, यह तो वर्षा पर निर्भर करेगा। क्या हम कुएँ में चढ़े पानी को नाप सकेंगे?

II मेढ़क : हम इस सीढ़ी पर शून्य लगाकर इससे ऊपर वाली सीढ़ियों को क्रमशः 1, 2, 3. .. आदि संख्या लिख देंगे तब हम बता सकेंगे कि कुएँ में कितना पानी आया।

I मेढ़क : और हम नीचे वाली सीढ़ियों को –1, –2, –3 ... लिखेंगे तो गर्मी में हुई पानी की कमी का भी हिसाब रखा जा सकेगा।

II मेढ़क : आओ चलो, सीढ़ियों पर मान लिख देते हैं।





मेढ़क I : अब यदि पानी चढ़ता है तो हमें उतनी ही सीढ़ियाँ ऊपर जाना होगा।

मेढ़क II : हाँ, और यदि घटेगा तो हमें सीढ़ियाँ नीचे जाना होगा।

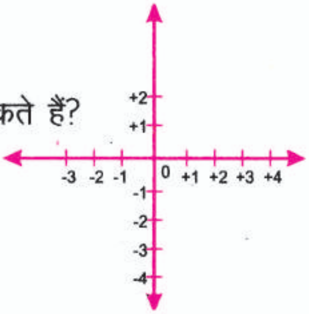
मेढ़क I : लेकिन गर्मी में जब पानी "–1" पर है तब क्या वहाँ "–2" से ज्यादा पानी होगा?

मेढ़क II : कुएँ की सबसे निचली सीढ़ी से ऊपर गिनते जाओ और बताओ कि –1 कितनी सीढ़ी पर आता है।

मेढ़क I : –2 तो पाँचवीं सीढ़ी पर तथा –1 छठी सीढ़ी पर है। इसका मतलब –1 का मान –2 से ज्यादा है।

मेढ़क II : इस प्रकार किसी जगह को यदि शून्य मान लें तो उसके बाएँ चलने पर संख्याओं में ऋणात्मक चिह्न (–) और दाएँ चलने पर धनात्मक चिह्न (+), तथा ऊपर जाने पर धनात्मक चिह्न (+) और नीचे जाने पर ऋणात्मक चिह्न (–) संख्या पर लगता है।

मेढ़क I : तो क्या हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं?



मेढ़क II : हाँ, बिल्कुल

मेढ़क I : अब समझा।

प्रयास कीजिए

आप भी मेढ़कों की बातचीत के आधार पर =, <, > का चिह्न लगाइए–

(i)	0 ☐ –1	(iv)	50 ☐ 70
(ii)	–5 ☐ 5	(v)	–1 ☐ 100
(iii)	100 ☐ 100	(vi)	–53 ☐ –5

आइए, अब पुनः उन पूर्णांकों को देखें जो एक संख्या रेखा पर निरूपित किए गए हैं। हम जानते हैं कि $7 > 4$ होता है। और ऊपर खींची गई संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है।

इसी प्रकार, $4 > 0$। संख्या 4, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूँकि संख्या 0 संख्या – 3 के दाईं ओर स्थित है इसलिए $0 > -3$ है। पुनः संख्या– 3 संख्या– 8 के दाईं ओर स्थित है। इसलिए $-3 > -8$ है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान बढ़ता है और जब हम बाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान घटता है।

अतः पूर्णांकों के संग्रह को ...., –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.... लिखा जा सकता है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि–

(a) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक, प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(b) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।

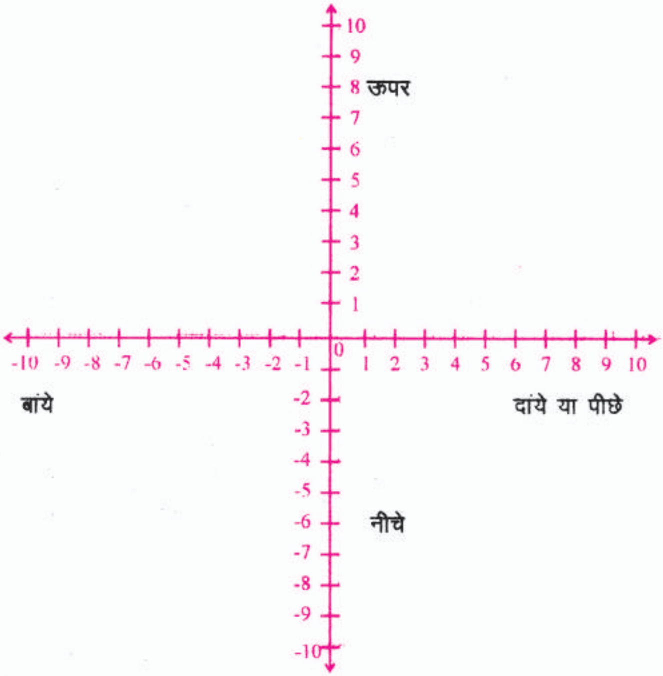
(c) शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(d) शून्य न तो ऋणात्मक पूर्णांक है न ही धनात्मक पूर्णांक।

(e) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक ऊपर होगी वह शून्य से उतनी ही बड़ी होगी।

(f) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक नीचे होगी वह शून्य से उतनी ही छोटी होगी।

"यदि इन मानों को संख्या रेखा पर देखें तो संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर बढ़ती हुई संख्याएँ होंगी एवं शून्य के बाईं ओर घटती हुई संख्याएँ होंगी"।



स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) –1 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं?

(b) –10 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन-सी सबसे बड़ी है और कौन-सी पूर्णांक संख्या सबसे छोटी है?

(c) –3 पर एक मेढ़क बैठा हुआ है। –9 पर बैठे दूसरे मेढ़क के पास पहुँचने के लिए उसे किस दिशा में और कितनी सीढ़ियाँ चलनी होंगी?

(d) यदि हम संख्या –6 के ऊपर 4 कदम चलें, तो किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

प्रश्नावली – 4.1

1. निम्नलिखित में प्रयुक्त हुई संख्याओं को उचित चिह्न लगाकर पूर्णांकों के रूप में लिखिए–

(a) पारा शून्य से 4°C नीचे है।

(b) एक हवाई जहाज भूमि से एक हजार पाँच सौ मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है।

(c) यदि 5 कदम पूरब की दिशा में चली दूरी को + 5 से व्यक्त करें तो 5 कदम पश्चिम की दिशा में चली दूरी को किस पूर्णांक से व्यक्त करेंगे?

(d) बैंक खाते में 500 रु. जमा कराना।

2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए–

(a) –1 (b) +5 (c) –4 (d) +7 (e) –8

3. नीचे दिए गए चित्र में एक संख्या रेखा को दिखाया गया है, जो पूर्णांकों को निरूपित करती है।

इस रेखा को देखते हुए निम्न बिन्दुओं के स्थान ज्ञात कीजिए–

(a) यदि बिन्दु D पूर्णांक –8 है, तो + 8 वाला बिन्दु कौन-सा है?

(b) बिन्दु B एक ऋणात्मक पूर्णांक है या धनात्मक पूर्णांक।

(c) बिन्दु C और E के संगत पूर्णांक लिखिए।

(d) इस संख्या रेखा पर अंकित बिन्दुओं में से किसका मान सबसे कम है?

(e) सभी बिन्दुओं को उनके मानों के घटते क्रम में लिखिए।

4. निम्नलिखित युग्मों में, कौन-सी संख्या, संख्या रेखा पर दाईं ओर स्थित है?

(a) 3, 7 (b) –5, –7 (c) 2, –2

(d) –12, 11 (e) –5, –8 (f) 1, 0

5. नीचे दिए हुए युग्म पूर्णांकों के बीच के सभी पूर्णांक (बढ़ते हुए क्रम में) लिखिए–

(a) 1 और –8 (b) –6 और 6

(c) –9 और –15 (d) –30 और –21

6. (a) –25 से छोटे चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

(b) –8 से बड़े पाँच ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

7. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य और असत्य लिखिए–

(a) संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ होती हैं।

(b) संख्या रेखा पर दाहिनी ओर की संख्या उसके बाईं ओर की संख्या से छोटी होती है।

(c) सबसे छोटा पूर्णांक – 1 है

(d) –28 पूर्णांक –25 से बड़ा है।

8. एक संख्या रेखा खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) यदि हम –5 के बाईं ओर 5 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(b) यदि हम +2 के दाईं ओर 4 कदम चलें तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(c) यदि हम संख्या रेखा पर –7 पर हैं, तो –15 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

(d) यदि हम संख्या रेखा पर –4 पर हैं तो +3 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

9. पानी के जमाव बिन्दु को शून्य (0°C) से दर्शाया जाता है। यदि माउन्ट आबू का तापमान जमाव बिन्दु से 2°C कम है तो उसे हम –2°C लिख सकते हैं।

अब निम्न प्रश्नों के उत्तर दें–

(a) सर्दियों में यदि कश्मीर का तापमान जमाव बिन्दु से 7°C कम हो, तो उसे कैसे लिखेंगे?

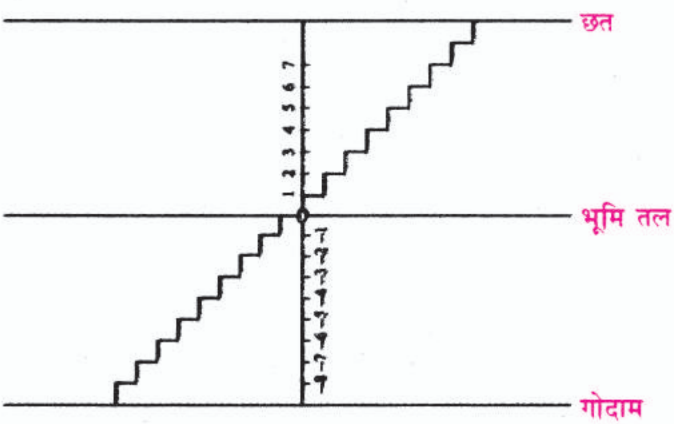
(b) प्रत्येक युग्मों में कम तापमान पर गोला लगाइए :

(a) 20°C या 26°C (b) 0°C या –4°C

(c) –3°C या -1°C (d) –8°C या –12°C

4.1.3 पूर्णांकों का योग

सिद्धार्थ ने छत पर जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक माना और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक माना तथा भूमि तल से 0 माना। उन्होंने मोहन को भूमितल से ऊपर तथा नीचे वाली सीढ़ियों पर चलने को कहा



तथा प्रत्येक के लिए गणितीय कथन भी लिखा।

(a) भूमि तल से 16 सीढ़ी ऊपर चलिए। (+16)

(b) भूमि तल से 8 सीढ़ी नीचे चलिए। (–8)

(c) भूमि तल से 6 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 3 सीढ़ी और ऊपर चलिए। (–6) + (+3)

(d) भूमि तल से 4 सीढ़ी नीचे चलिए और वहाँ से 2 सीढ़ी और नीचे चलिए। (–4) + (–2)

स्वयं प्रयास कीजिए

नीचे दिए गए कथनों के लिए गणितीय कथन लिखिए–

(a) भूमि तल से 5 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 12 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(b) भूमि तल से 4 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 6 सीढ़ी नीचे चलिए।

(c) भूमि तल से 7 सीढ़ी नीचे चलिए एवं फिर वहाँ से 8 सीढ़ी ऊपर चलिए।

सिद्धार्थ ने मोहन के चलने के अनुसार संख्या लिखने का प्रयास किया–

(a) $-5 + 12 = -17$ (b) $4 - 6 = 2$ (c) $-7 + 8 = 1$

सिद्धार्थ ने कुछ गलतियाँ की हैं। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

आप भी एक संख्या रेखा बनाइए एवं इस तरह के प्रश्न स्वयं बनाइए एवं उन्हें हल करने के लिए अपने साथियों को दीजिए।

प्रश्नावली – 4.2

1. **संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो–**

(a) 5 से 3 अधिक है (b) –5 से 5 अधिक है

(c) 2 से 6 कम है (d) –2 से 3 कम है

2. **संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए–**

(a) $9 + (-6)$ (b) $5 + (-11)$

(c) $(-1) + (-7)$ (d) $(-5) + 10$

(e) $(-1) + (-2) + (-3)$ (f) $(-2) + 8 + (-4)$