अध्याय 13 बीजीय व्यंजक

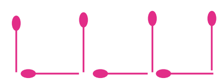
13.1 हमने चरों और अचरों से युक्त पदों जैसे x, $x + 1$, 2p-1, y-5, 3y+4 के बारे में पिछली कक्षा में अध्ययन किया है। हमने यह देखा कि इन पदों के द्वारा समस्याओं को सरलता और व्यापकता से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

बीजीय व्यंजकों (Algebric expressions) को बीजगणित में व्यापक आवश्यकता के रुप में प्रस्तुत किया जाता है और इसी व्यापक अवधारणा को केन्द्र में मान कर बीजीय व्यंजकों के साथ संक्रियाएँ कर इनका अनुप्रयोग समस्याओं के समाधान में किया जाता है।

13.2 बीजीय व्यंजक

पिछली कक्षा में हमने तीलियों के खेल से पैटर्न बनाए।

उदाहरण 1 चित्रानुसार एक माचिस की तीली ( ) के साथ आकार की दो–दो तीलियों के तीन सेट रख दिए जाएँ।



इस आकृति में तीलियों की संख्या क्रमशः 3, 5, 7 हैं जिसे 2 x 1 + 1, 2 x 2 + 1, 2 x 3 + 1 आदि लिखा जा सकता है।

यदि तीलियों के सेट को "n" द्वारा व्यक्त किया जाए तो सामान्य रुप से तीलियों की संख्या को 2 x n + 1 अर्थात् (2n +1) द्वारा सरलता से व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार से चरों और अचरों का संयोजन ही ''बीजीय पद'' कहलाता है। आओ कुछ और बीजीय पदों को देखते हैं।

(1) किसी संख्या में 3 के जोड़ को (x + 3) द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

(2) किसी संख्या के चौगुने में से 5 के घटाव को (4x-5) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(3) किसी संख्या के आधे से एक कम को ($\frac{x}{2}$ - 1) द्वारा व्यक्त करते हैं।

यहाँ अज्ञात संख्या को x द्वारा दर्शाया गया है।

अतः बीजीय पदों का इस प्रकार संयोजन करने से (x + 3), (4x - 5) ($\frac{x}{2}$ -1) आदि **'बीजीय व्यंजक'** प्राप्त होते है। यहाँ हम उनके गुणधर्मों के बारे में अध्ययन करेंगे।

बीजीय व्यंजक में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती है।

13.3 बीजीय व्यंजक के पद

किसी भी बीजीय व्यंजक के छोटे – छोटे भाग होते हैं जैसे 5x + 3 पर विचार करते हैं। इसमें पहले हम 5 व x का गुणा करके 5x बनाते हैं और फिर इसमें 3 जोड़ते हैं। इसी प्रकार $2x^2 + 3y$ में हमने 2, x और x का गुणा करके $2x^2$ बनाया फिर अलग से 3 व y का गुणा करके 3y बनाया $2x^2$ व 3y बनाने के बाद हमने दोनों को जोड़ दिया।

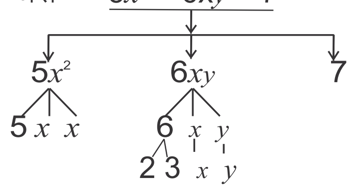
इस प्रकार व्यंजक $2x^2 + 3y$ बनता है।

व्यंजक के ये छोटे –छोटे भाग जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं **व्यंजक के पद** कहलाते हैं। व्यंजक $9y^2 - 4xy$ में दो पद है पहला पद $9y^2$ क्रमशः 9, y और y का गुणनफल है। दूसरा पद $-4xy$ क्रमशः -4, x, y का गुणनफल है।

फिर इन्हें $9y^2 + (-4xy)$ करते हैं और व्यंजक $9y^2 - 4xy$ प्राप्त होता है।

13.3.1 एक पद के गुणनखण्ड

बीजीय व्यंजक का एक पद कई चरों एवं अचरों का गुणनफल हो सकता है। हम एक व्यंजक के तथा पदों के गुणनखण्डों को एक सरल एवं आकर्षक प्रकार से पेड़ आरेख (Tree diagram) द्वारा निरुपित कर सकते हैं जैसे :– $5x^2 - 6xy + 7$



यहाँ

पद	चर	अचर
$5x^2, -6xy, +7$	x व y	5, -6, 7

करो और सीखो नीचे दी गई सारणी को भरिए।

व्यंजक	पदों की संख्या	पद	पद के गुणनखण्ड	बीज (चर)	अचर
$3x^2 + 6xy + 7y^2$	3	$3x^2, 6xy, 7y^2$	$3x^2 = 3 \times x \times x$	x, y	3, 6, 7
			$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$		
			$7y^2 = 7 \times y \times y$		
$a^2 - b^2$	2				
$8p^2 - 3p + 7$					

13.4 गुणांक

किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है। गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

जैसे –

$10xy$ में xy का गुणांक $= 10$

$10xy$ में y का गुणांक $= 10x$

$10xy$ में 10 का गुणांक $= xy$

> जब किसी पद का गुणांक +1 होता है हम उसे नहीं लिखते हैं जैसे x^3y^2 में x^3y^2 का गुणांक +1 है, इसी प्रकार $-x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक (-1) है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में x का गुणांक क्या है ?

हल $8x - 3y$, $5 - x + z$, $y^2x - z^2$, $2z - 5xp$

	व्यंजक	गुणनखण्ड वाला पद	गुणांक
(i)	$8x - 3y$	$8x$	8
(ii)	$5 - x + z$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - z^2$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xp$	$-5xp$	$-5p$

करो और सीखो

निम्नलिखित बीजीय व्यंजक $4x^2y^2 - 3xy + 15$ में गुणांक का मिलान कीजिए।

x^2y^2 का गुणांक	x^2
xy का गुणांक	$-3y$
x^2 का गुणांक	$-y$
$4y^2$ का गुणांक	-3
x का गुणांक	$4y^2$
$3x$ का गुणांक	4

प्रश्नावली 13.1

1. पेड़ आरेख बनाकर व्यंजक के पदों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) $9x^2-8$ (ii) $12x^2y + 8xy^2 - 15y^3$ (iii) $a^3 - b^3$
2. दिए गए पदों में गुणांक बताइए।
   (i) $4x$ में x का (ii) $9x^2y^2$ में y^2, x^2 एवं 9 का
   (iii) $\frac{-8}{5}x^3y^3$ में x^3, y^3 एवं x^3y^3 का (iv) $\frac{9a^2b^2}{13}$ में a^2 का एवं b^2 का

13.5 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हों तो वे पद समान कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड भिन्न–भिन्न हो तो वे असमान पद कहलाते हैं। जैसे $5xy-6x+3xy-9$ में $5xy$ और $3xy$ को देखते हैं तो $5xy$ के गुणनखण्ड 5, x और y है तथा $3xy$ में 3, x और y है। इस प्रकार इनके बीजीय (अर्थात वे जिनमें चर है) गुणनखण्ड एक ही है। इसलिए ये समान पद है।

> $3xy$, $5yx$ समान पदीय होते हैं इनमें चरों के गुणन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि $xy = yx$

इसके विपरीत पदों $5xy$ और $-6x$ में भिन्न–भिन्न बीजीय गुणनखण्ड है। वे असमान पद है इसी प्रकार पद $5xy$ और -9 असमान पद है। और $3xy$ और -9 भी असमान पद है।

करो और सीखो

निम्नलिखित में से समान पदों को छाँटिए।

$3pq$, $-5p$, $6q + 5$, $-8pq$, $p^2 + q$, qp

उदाहरण 2 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों के कौन–कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन कौन से युग्म असमान पदों के है ?

क्रम	पद युग्म	गुणनफल	बीजीय गुणनखण्ड	कारण
1.	3ab 3b	3 x a x b 3 x b	भिन्न–भिन्न	a चर दूसरे पद में नहीं है।
2.	17a -6a	17 x a -6 x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान है।
3.	$5a^2b$ $5ab^2$	5 x a x a x b 5 x a x b x b	भिन्न–भिन्न	दोनों में चर एक समान है पर उनकी घातें असमान है।
4.	-4ab 7ab	-4 x a x b 7 x b x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान है।

13.6 बहुपदी व्यंजक

एक पदीय	जिनमें केवल एक पद हो जैसे	$7xy$, $-3m$, y^2, x^2y^2
द्विपदीय	जिनमें केवल दो पद हों जैसे	$x+y$, $x-5$, $pq+5$, m^2n^2+5m
त्रिपदीय	जिनमें केवल तीन पद हों जैसे	$x+y+2$, $3x^2-5x+7$, $ab+ab^2+b^2$

एक या एक से अधिक पदों वाले व्यंजक को बहुपदीय व्यंजक भी कहते हैं।

करो और सीखो

निम्नलिखित में से एक पदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजकों को छाँटकर उपयुक्त बॉक्स में लिखिए।

1. $2a^2 + b$
2. $4x^2y^3$
3. $3m - 2n + 1$
4. $2mn - 3$
5. $\frac{7}{8}xy^2z$
6. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}xy + xy^2$
7. $ab + bc + ca$
8. $ax^2 + bx + c$
9. $5xy - 7 + 3n$
10. $3x + 1$
11. $\frac{9}{17}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}$
12. $\frac{8}{19}p^2r^2q^2$

2. समान पदों का मिलान कीजिए।

(a) $4a^2b$	(i) $\frac{8}{13}x^2y^2z^2$
(b) 5nm	(ii) $\frac{3p}{q}$
(c) $\frac{3}{4}x^2y^2z^2$	(iii) $\frac{5a^2}{7b^2}$
(d) $\frac{-1}{5}\frac{a^3b^3}{c^3}$	(iv) ga^2b
(e) $\frac{-22}{7}\frac{p}{q}$	(v) nm
(f) $\frac{a^2}{b^2}$	(vi) $\frac{a^3b^3}{c^3}$
(g) xyz	(vii) $\frac{8}{x^2y^2z^2}$
(h) $\frac{3}{x^2y^2z^2}$	(viii) $19xyz$

13.7 समान पदों को जोड़ना और घटाना

2 पेन्सिल + 3 पेन्सिल = 5 पेन्सिल   2 पेन्सिल + 3 चॉक

$2x + 3x = (2+3)x$

$= 5x$

हम पेंसिलों का योग कर सकते हैं परन्तु पेंसिलों तथा चॉक को नहीं जोड़ सकते हैं। अर्थात् हम समान इकाई (समान चर वाली)राशियों को जोड़ घटा सकते हैं।

इसी प्रकार – $5x^2y + 3x^2y = 8x^2y$

$9a^2b^2 - 4a^2b^2 = 5a^2b^2$

समान पदों को जोड़ने पर प्राप्त पद का संख्यात्मक गुणांक उन सभी पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार दो समान पदों के घटाने पर प्राप्त परिणाम इनके संख्यात्मक गुणांकों के अंतर के बराबर होता है। यह ध्यान रखना है कि असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता जिस प्रकार कि समान पदों को जोड या घटा लिया जाता है।

अर्थात् x में 5 जोड़ने पर परिणाम $x + 5$ आता है इसी प्रकार $3xy$ में 7 जोड़ने पर $3xy + 7$ व $3xy$ मे से 7 घटाने पर $3xy - 7$ आता है।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ने, घटाने के लिए चरण –

1. समान एवं असमान पदों की पहचान करते हैं।
2. समान पदों को उनके चिह्न के साथ लिखते हैं।
3. उन समान पदों का नियमों से जोड़ घटा करते हैं।
4. यदि एक या अधिक असमान पद शेष रहते हैं तो उन्हें उनके चिह्न के साथ संयोजित कर लिख देते हैं।

उदाहरण 3 $3x + 8y$ और $8x + 5y$ को जोड़िए।

हल

$(3x + 8y) + (8x + 5y)$

$= 3x + 8x + 8y + 5y$ (समान बीजों वाले पदों को एक साथ रखने पर)

$= 11x + 13y$

इनको हम सामान्य स्तम्भ जोड़ो की तरह भी जोड़ सकते हैं।

$$\begin{array}{r} 3x + 8y \\ 8x + 5y \\ \hline 11x + 13y \end{array}$$

उदाहरण 4 $7ab+4a$ और $2a+5ba$ को जोड़िए।

हल

$(7ab + 4a) + (2a + 5ba)$

$= 7ab + 4a + 2a + 5ab$

$= 7ab + 5ab + 4a + 2a$

$= 12ab + 6a$

$$\begin{array}{r} 7ab + 4a \\ + 5ab + 2a \\ \hline 12ab + 6a \end{array}$$

उदाहरण 5 $11xy - 5m^2$ में से $3m^2 - 2xy$ को घटाइए।

हल

$= (11xy - 5m^2) - (3m^2 - 2xy)$

$= 11xy - 5m^2 - 3m^2 + 2xy$

$= 11xy + 2xy - 5m^2 - 3m^2$

$= 13xy - 8m^2$

उदाहरण 6 $(3m + 2n-7) +(2m^2 + 5m + n^2)$ को हल कीजिए।

हल

$3m + 2n - 7 + 2m^2 + 5m + n^2$

$= 3m + 5m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2$

$= 8m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2$

$= 2m^2 + n^2 + 8m + 2n - 7$

करो और सीखो

बीजीय व्यंजकों को जोडिए और घटाइए।

(1) $m - n$ व $m + n$ को

(2) $mn - 5 + 2n$ व $nm + 2m - 3$

(3) $\frac{xy}{5} + \frac{x}{3}$ व $\frac{xy}{2} - \frac{x}{3}$

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।
   (i) t - 4tz, 2t + 6tz
   (ii) $7xy$, $5xy$, $3xy$, $-2xy$
   (iii) $5x - 7y$, $3y - 4x + 2$, $2x - 3xy - 5$
   (iv) $m^2 - n^2 - 1$, $n^2 - 1 - m^2$, $1 - m^2 - n^2$
   (v) $3x + 11 + 8z$, $5x - 7$
   (vi) $a^2b + ab + ab^2$, $-a^2b + 2ba + 2a^2b^2$
   (vii) $x - y$, $y - z$, $z - x$
2. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को घटाइए।
   (i) x^2 में से $-5x^2$
   (ii) (a +b) में से (a-b)
   (iii) $4x^2 - 3xy + 8$ में से $x^2 + 5x + 4$.
   (iv) $3xy - 2x^2 - 2y^2$ में से $5x^2 - 7xy + 5y^2$
   (v) $5p^2 + 2q^2 - pq^2$ में से $4pq - 5q^2 - 3p^2$
   (vi) $5x - 10$ में से $x^2 + 10x - 5$
3. $x + y + z$ प्राप्त करने के लिए $7x - 8y$ में से क्या घटाना चाहिए ?
4. 2p + 6 में क्या जोड़ें कि 3p - q + 6 प्राप्त हो जाए ?

13.8 किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। हम अनेक स्थितियों में किसी भी व्यंजक में चर का मान रखकर उससे बनने वाले समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं, यह जाँच करते हैं।

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 3$ के लिए ज्ञात कीजिए।

(i) $x + 5$ (ii) $9x - 3$ (iii) $25 - 3x^2$ (iv) $4x^2 + 5x - 51$

हल

(i) $x + 5$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
$= 3 + 5$
$= 8$

(ii) $9x - 3$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
$= (9 \times 3) - 3$
$= 27 - 3 = 24$

(iii) $25 - 3x^2$
$= 25 - 3 \times (3)^2$
$= 25 - 3 \times 3 \times 3 = 25 - 27 = -2$

(iv) $4x^2 + 5x - 51$
$= 4 \times (3)^2 + 5(3) - 51$
$= 4 \times 9 + 5 \times 3 - 51$
$= 36 + 15 - 51 = 51 - 51 = 0$

उदाहरण 8 a = 3 और b= 2 के लिए निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $a + b$ (ii) $5a - 2b$ (iii) $a^2 - 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

हल a = 3 और b = 2, दिए गए व्यंजकों में रखने पर

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$ (ii) $5a - 2b = 5 \times 3 - 2 \times 2 = 15 - 4 = 11$

(iii) $a^2 - 2ab + b^2$
$= (3)^2 - 2 \times 3 \times 2 + (2)^2$
$= 9 - 12 + 4$
$= 13 - 12 = 1$

(iv) $a^3 - b^3$
$= (3)^3 - (2)^3$
$= 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2$
$= 27 - 8$
$= 19$

प्रश्नावली 13.3

1 यदि $x = 2$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $x - 3$ (ii) $2x - 5$ (iii) $9 - 6x$ (iv) $3x^2 - 4x - 7$ (v) $\frac{5x}{2} - 4$

2 यदि p = -1 है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $4p + 5$ (ii) $-3p^2 + 4p + 8$ (iii) $3(p - 2) + 6$

3 यदि a = 2 और b = -2 है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $a^2 - b^2$ (ii) $a^2 - ab + b^2$ (iii) $a^2 + b^2$

4 यदि $x = 1$ और $y = 0$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $2x + 2y$ (ii) $2x^2 + y^2 + 1$ (iii) $2x^2y + 2x^2y^2 + y^2$ (iv) $x^2 + xy + 5$

हमने सीखा

1. बीजीय व्यंजक चरों एवं अचरों से बनते हैं इनको बनाने के लिये चरों एवं अचरों पर +, -, x,÷ की संक्रियाएँ करते हैं।
2. व्यंजक, पदों से मिलकर बनते हैं, पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है।
3. कोई भी पद उसके गुणनखण्ड का एक गुणनफल होता है, चरों के गुणनखण्ड को बीजीय गुणनखण्ड कहते है। पद का गुणांक उसका संख्यात्मक गुणनखण्ड होता है। पद का कोई भी एक गुणनखण्ड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।
4. एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक बहुपद कहलाता हैं ये एक पदीय (एक पद वाला), द्विपदी (दो पदों वाला) तथा त्रिपदीय (तीन पदों वाला) हो सकता हैं।
5. जिनके बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे हो समान पद कहलाते है तथा भिन्न–भिन्न बीजीय गुणनखण्ड वाले पद असमान पद कहलाते है।
6. दो समान पदों का योग या अंतर एक अन्य समान पद होता है। जिनका गुणांक उन समान पदों के गुणांकों का योग या अंतर के बराबर होता है।
7. दो समान पदों वाले बीजीय व्यंजकों को जोड़ा या घटाया जा सकता है। जो पद समान नहीं है उन्हें छोड दिया जाता है।
8. किसी भी बीजीय व्यंजक का मान चरों के मान पर निर्भर करता है।