7 تغیّر

آیئے ذرا یاد کریں

ایک درجن بیاضوں کی قیمت 240 روپے ہو تو 3 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 9 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 24 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 50 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

بیاضوں کی تعداد (x)	12	3	9	24	50	1
قیمت (روپے میں) (y)	240					20

مذکورہ بالا جدول سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی میں بیاضوں کی تعداد (x) اور ان کی قیمت (y) کے درمیان $\frac{1}{20}$ کی نسبت ہے۔ یہ مستقل ہے۔ بیاضوں کی تعداد اور ان کی قیمت مستقیم تناسب میں ہے۔ ایسی مثالوں میں دو میں سے ایک کی تعداد بڑھتی ہے تو دوسری بھی اسی تناسب سے بڑھتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مستقیم تغیر (Direct Variation) :

x اور y مستقیم تناسب میں ہیں۔ اسی بیان کو x اور y مستقیم تغیر میں ہیں یا x اور y کے درمیان مستقیم تغیر ہے، لکھتے ہیں۔ اس بیان کو علامت کا استعمال کرکے $y \propto x$ بھی لکھتے ہیں۔

[$\propto$ (الفا) تغیر کے معنی میں استعمال کیا جانے والا لاطینی حرف ہے]

$x \propto y$ اسے مساوات کی صورت میں $x = ky$ لکھتے ہیں؛ یہاں k مستقل رکن ہے۔

$x = ky$ یا $\frac{x}{y} = k$ تغیر کی مساوات ہے۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

درج ذیل بیان تغیر کی علامت استعمال کرکے کس طرح لکھا گیا ہے، اسے دیکھیے۔

(i) دائرے کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے مستقیم تناسب میں ہے۔

دائرے کا رقبہ = A، نصف قطر = r، ان متغیروں کو لے کر مذکورہ بالا بیان کو $A \propto r^2$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) مائع کا دباؤ (p)، مائع کی گہرائی (d) کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہوتا ہے۔ اس بیان کو $p \propto d$ لکھتے ہیں۔

مستقیم تغیر کی علامتی ترتیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے۔

مثال (1) y، x کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، جب $x = 5$ ہوتا ہے تب $y = 30$ تو تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

حل : y، x کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ یعنی $y \propto x$

$\therefore \quad x = ky$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

$x = 5$ تب $y = 30$ دیا ہوا ہے۔

$\therefore \quad 5 = k \times 30 \quad , \quad \therefore \ k = \frac{1}{6}$ ... (تغیر کا مستقل عدد)

اس کی مدد سے $x = ky$ یعنی $x = \frac{y}{6}$ یا $y = 6x$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال (2) مونگ پھلی کے دانے کی قیمت اس کے وزن کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ 5 کلوگرام مونگ پھلی کے دانے کی قیمت ₹450 ہو تو 1 کوئنٹل مونگ پھلی کے دانے کی قیمت معلوم کیجیے۔ (1 کوئنٹل = 100 کلوگرام)

حل : فرض کیجیے مونگ پھلی کے دانے کی قیمت x ₹ اور مونگ پھلی کے دانے کا وزن y ہے۔

x اور y مستقیم تغیر میں ہیں۔ ... (دیا ہوا ہے) لہٰذا $x \propto y$ یا $x = ky$

جب $x = 450$ تب $y = 5$ ہوتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے) اس کی مدد سے k معلوم کریں گے۔

$x = ky, \qquad \therefore \ 450 = 5k, \qquad \therefore \ k = 90$ ... (تغیر کا مستقل)

$\therefore$ تغیر کی مساوات $x = 90\,y$

اب، $y = 100$ ہو تو x معلوم کریں گے۔

$x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 کوئنٹل مونگ پھلی کے دانوں کی قیمت 9000 روپے ہوگی۔

مشقی سیٹ 7.1

.1 تغیر کی علامت استعمال کرکے لکھیے۔

(1) دائرے کا محیط (c) اس کے نصف قطر (r) کے ساتھ مستقیم تناسب میں ہوتا ہے۔

(2) موٹر گاڑی میں بھرے ہوئے پٹرول (l) اور اس کے ذریعے طے کردہ فاصلہ (d) مستقیم تغیر میں ہوتے ہیں۔

.2 سیبوں کی قیمت اور سیبوں کی تعداد کے درمیان مستقیم تغیر ہے۔ اس کی مدد سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

سیبوں کی تعداد (x)	1	4	...	12	...
سیبوں کی قیمت (y)	8	32	56	...	160

.3 اگر $n \propto m$ اور جب $m = 154$ ہو تب $n = 7$۔ اس لیے اگر $n = 14$ ہو تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

.4 n، m کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، تو ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

m	3	5	6.5	...	1.25
n	12	20	...	28	...

.5 y، x کے جذر المربع کے ساتھ مستقیم تغیر میں بدلتا ہے اور جب $x = 16$ ہوتا ہے تب $y = 24$ تو تغیر کا مستقل عدد معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

6. سویابین کی فصل نکالنے کے لیے 4 مزدوروں کو 1000 ₹ مزدوری دینا پڑتی ہے۔اگر مزدوری کی رقم اور مزدوروں کی تعداد مستقیم تغیر میں ہو تو 17 مزدوروں کو کتنی مزدوری دینا ہوگی؟

آیئے ذرا یاد کریں

ڈرل کے لیے بچوں کی قطاریں بنائی گئیں۔ ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔

ہر قطار میں بچوں کی تعداد	40	10	24	12	8
قطاروں کی تعداد	6	24	10	20	30

مذکورہ بالا جدول کی مدد سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی کی ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور کل قطاروں کی تعداد کا حاصل ضرب 240 ہے۔

یعنی ان کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ (یا) ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔

جب دو تعداد میں سے ایک تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری تعداد میں اسی تناسب سے کمی واقع ہوتی ہے۔تب یہ دونوں تعداد معکوس تناسب میں ہوتی ہیں۔مثلاً ایک تعداد دگنا ہوتی ہے تو دوسری تعداد نصف ہو جاتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

معکوس تغیر (Inverse Variation) :

x اور y اعداد معکوس تناسب میں ہیں۔اس بیان کو x اور y معکوس تغیر میں ہیں، لکھتے ہیں۔ x اور y معکوس تغیر میں ہوں تب $x \times y$ مستقل ہوتا ہے۔اسے k فرض کرکے مثالیں حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

x اور y معکوس تغیر میں ہیں، یعنی اسے $x \propto \frac{1}{y}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$x \propto \frac{1}{y}$ یعنی $x = \frac{k}{y}$ یا $x \times y = k$ یہ سب تغیر کی مساوات ہیں۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) اگر a، b کے ساتھ معکوس تغیر میں ہو تو درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

a	6	12	15	☐
b	20	☐	☐	4
$a \times b$	120	120	☐	☐

حل : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ یعنی $a \times b = k$

(تغیر کا مستقل) ... $a = 6$ تب $b = 20$ ، $\therefore\ k = 6 \times 20 = 120$

(ii) $a = 12$ تب $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ تب $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ تب $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore \quad a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

مثال (2) : $f \propto \frac{1}{d^2}$، $d = 5$ تب $f = 18$

تو (i) $d = 10$ ہوتو f کی قیمت معلوم کیجیے۔ (ii) $f = 50$ ہوتو d کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $f \propto \frac{1}{d^2}$ ، $\therefore \ f \times d^2 = k$

$d = 5$ تب $f = 18$ ہوتو k کی قیمت معلوم کریں گے۔

$\therefore 18 \times 5^2 = k$ ، $\therefore \ k = 18 \times 25 = 450$ ... (تغیر کا مستقل)

(i) $d = 10$ ہوتو $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$ ہوتو $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore \quad 50 \times d^2 = 450$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ یا $d = -3$

مشقی سیٹ 7.2

1. ایک کام پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور کام پورا ہونے کے لیے درکار دنوں کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ جدول مکمل کیجیے۔

مزدوروں کی تعداد	30	20		10	
دن	6	9	12		36

2. ہر مثال میں تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

(1) $p \propto \frac{1}{q}$ ، جب $p = 15$ تب $q = 4$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$ جب $z = 2.5$ تب $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$ ، جب $s = 4$ تب $t = 5$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ جب $x = 15$ تب $y = 9$

3. سیبوں کے ذخیرے سے تمام سیب پیٹیوں میں بھرنا ہے۔ ہر پیٹی میں 24 سیب رکھیں تو اسے بھرنے کے لیے 27 پیٹیاں درکار ہوتی ہیں۔ اگر ہر پیٹی میں 36 سیب رکھیں تو کتنی پیٹیاں درکار ہوں گی؟

.4 درج ذیل بیانات کو تغیر کی علامت استعمال کرکے لکھیے۔

(1) آواز کی طولی لہروں کی لمبائی (l) اور تعدد (f) کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

(2) بلب کی روشنی کی شدت (I) اور بلب اور پردے کے درمیان فاصلہ (d) کے مربع کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

.5 $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ اور $x = 40$ ہوتا ہے تب $y = 16$ ہوتا ہے۔ اگر $x = 10$ ہو تو y کتنا ہوگا؟

.6 x اور y کے درمیان معکوس تغیر ہے۔ $x = 15$ تب $y = 10$ ہوتا ہے۔ $x = 20$ ہو تو $y = ?$

آیئے سمجھ لیں

وقت، کام، رفتار (Time, Work, Speed) :

کسی تعمیراتی کام کو پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے لیے لگنے والا وقت ، جیسی مثالیں معکوس تغیر کی ہوتی ہیں۔ اسی طرح معکوس تغیر کی بعض مثالیں سواریوں کی رفتار اور اُن کے ذریعے متعین کردہ فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت سے متعلق ہوتی ہیں۔

ایسی مثالوں کو وقت - کام - رفتار سے متعلق مثالیں کہتے ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ تغیر کی علامت کا استعمال کرکے اس قسم کی مثالیں کس طرح حل کرتے ہیں؟

مثال (1) ایک کھیت میں مونگ پھلی نکالنے کا کام 15 عورتیں 8 دن میں پورا کرتی ہیں۔ وہی کام 6 دنوں میں پورا کرنا ہو تو کتنی عورتیں کام پر ہونا چاہیے؟

حل : کام پورا ہونے کے لیے درکار وقت اور کام کرنے والی عورتوں کی تعداد کے درمیان معکوس تغیر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ دنوں کی تعداد (d) اور عورتوں کی تعداد n ہے۔

$d \propto \frac{1}{n}$, $\therefore d \times n = k$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

جب $n = 15$ تب $d = 8$

$\therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120$ ... (تغیر کا مستقل)

اب $d = 6$ ہو تو $n = ?$، معلوم کریں گے۔

$d \times n = 120$

$\therefore 6 \times n = 120$, $\therefore n = 20$

$\therefore$ 6 دن میں کام پورا کرنے کے لیے 20 عورتیں کام پر ہونا چاہیے۔

مثال (2) ایک سواری کی اوسط رفتار 48 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تب کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے 6 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوجاتی ہے تب اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے کتنا وقت لگے گا؟

حل : فرض کیجیے سواری کی رفتار s ہے اور درکار وقت t ہے۔ رفتار اور وقت کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

$$s \alpha \frac{1}{t} \quad , \quad \therefore s \times t = k$$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

$$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$$ ... (تغیر کا مستقل)

اب $s = 72$ ہو تو t معلوم کریں گے۔

$$s \times t = 288 \; , \; \therefore 72 \times t = 288 \; , \; \therefore t = \frac{288}{72} = 4$$

$\therefore$ سواری کی رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 4 گھنٹے درکار ہوں گے۔

مشقی سیٹ 7.3

.1 درج ذیل میں سے کون سے بیانات معکوس تغیر کے ہیں؟

(1) مزدوروں کی تعداد اور ان کے کام پورا کرنے کے لیے لگنے والا وقت۔

(2) حوض بھرنے کے لیے ایک جیسے نلوں کی تعداد اور حوض بھرنے کے لیے درکار وقت۔

(3) سواری میں بھرا ہوا پٹرول اور اس کی قیمت۔

(4) دائرے کا رقبہ اور اس دائرے کا نصف قطر۔

.2 اگر 15 مزدوروں کو ایک دیوار تعمیر کرنے کے لیے 48 گھنٹے لگتے ہیں تو 30 گھنٹوں میں وہ کام پورا کرنے کے لیے کتنے مزدور لگیں گے؟

.3 تھیلی میں دودھ بھرنے والی مشین کے ذریعے 3 منٹ میں آدھے لٹر کی 120 تھیلیاں بھری جاتی ہیں تو 1800 تھیلیاں بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

.4 ایک کار کو 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ وہی فاصلہ ساڑھے سات گھنٹے میں طے کرنے کے لیے کار کی اوسط رفتار میں کتنا اضافہ کرنا ہوگا؟

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 7.1

1. (1) $c \alpha r$ (2) $l \alpha d$ **2.** x اور $y = 96$ بالترتیب 20 اور 7

3. 308 **4.** n اور $m = 7$ بالترتیب 26 اور 5 **5.** $k = 6, \; y = 6\sqrt{x}$ **6.** ₹4250

مشقی سیٹ 7.2

1. 18 دن اور مزدوروں کی تعداد بالترتیب 15 اور 5 **2.** (1) $k = 60, \; pq = 60$

(2) $k = 60, zw = 60$ (3) $k = 100, st^2 = 100$ (4) $k = 45, \; x\sqrt{y} = 45$

3. 18 پیٹیاں **4.** (1) $l \alpha \frac{1}{f}$ (2) $I \alpha \frac{1}{d^2}$ **5.** $y = 256$ **6.** $y = 7.5$

مشقی سیٹ 7.3

1. (1), (2) معکوس تغیر **2.** 24 مزدور **3.** 45 منٹ **4.** 4 کلومیٹر فی گھنٹہ

DF5H8I

❑❑❑