Roll No. : | | | | | | | | | | |

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]

Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 12

[Total No. of Printed Pages : 12

L-242204/804-B

हायर सेकण्डरी परीक्षा / Higher Secondary Examination

विषय : गणित

Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]

Time : 3 Hours]

[पूर्णांक : 100

[Maximum Marks : 100

नोट :- सभी प्रश्न अनिवार्य है।

***Note* :- All questions are compulsory.**

सामान्य निर्देश :-

General Instructions :-

(i) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं।

Total number of questions in this question paper are 29.

(ii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

Use of calculator is not permitted.

(iii) इस प्रश्न पत्र में ग्राफ पेपर की आवश्यकता है।

Graph paper is required in this question paper.

निर्देश:

(अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अति लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction:

(A) Question No. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Very Short Answer Type Questions)

प्रश्न-1 सरल कीजिए [1]

$$\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$$

Simplify –

$$\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$$

प्रश्न-2 यदि $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=2$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ हो तो सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

If $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=2$ and $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ then find the angle between vector $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

प्रश्न-3 $\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

Evaluate $\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

प्रश्न-4

अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = k\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए। [1]

Find the order and degree of differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$$

निर्देश:

(ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित है।

Instruction:

(B) Question No. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions)

प्रश्न-5 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ है तथा $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5$ तब $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If A and B are independent event and $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ then find the value of $P(A \cup B)$.

प्रश्न-6 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Evaluate

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx$$

प्रश्न-7 $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Find the value of $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

प्रश्न-8 यदि किसी सरल रेखा की दिक कोज्याएं $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ हो तो सिध्द कीजिए कि $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ [2]

If direction cosines of a straight line are $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ then prove that $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$.

प्रश्न-9 सारणिक का मान ज्ञात कीजिए। [2]

$$\begin{vmatrix} 0 & 99 & -998 \\ -99 & 0 & 997 \\ 998 & -997 & 0 \end{vmatrix}$$

Evaluate the determinants

$$\begin{vmatrix} 0 & 99 & -998 \\ -99 & 0 & 997 \\ 998 & -997 & 0 \end{vmatrix}$$

प्रश्न-10 $\sin(x^2+5)$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए। [2]

Find the differential coefficient of $\sin(x^2+5)$.

प्रश्न-11 $x=1$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{यदि } x \le 1 \\ x-2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ के सांतत्य की जाँच कीजिए। [2]

Test the continuity of the function

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{if } x\le 1 \\ x-2 & \text{if } x>1 \end{cases}$$

at the point $x=1$.

प्रश्न-12 सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन $y=\sqrt{1+x^2}$ संगत अवकल समीकरण $y'=\frac{xy}{1+x^2}$ का हल है। **[2]**

Prove that the given function $y=\sqrt{1+x^2}$ is a solution of differential equation $y'=\frac{xy}{1+x^2}$.

निर्देश:

(स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 13, 14 एवं 20 में आंतरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित है।

Instruction:

(C) Question No. 13 to 23 are long answer type questions. Question No. 13, 14 and 20, have internal choice. Each question carries 4 marks.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न-13 समीकरण हल कीजिए **[4]**

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

Solve the following equation

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

अथवा

OR

सरलतम रूप में लिखिए

$$\tan^{-1}\left[\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right] \text{ जहाँ } -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$$

Simplify

$$\tan^{-1}\left[\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right] \text{ where } -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

प्रश्न-14 ऐसी दो धन संख्याएं x और y ज्ञात कीजिए जबकि $x+y=60$ और xy^3 उच्चतम हो। **[4]**

Find two positive numbers x and y such that $x+y=60$ and xy^3 is maximum.

अथवा

OR

एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंपद्वारा 900 सेमी^{3} गैस प्रति सेकण्ड भरकर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 सेमी. है।

A ballon which always remains spherical, is being inflated by pumping 900 cubic centimeters of gas per second. Find the rate at which the radius of the ballon is increasing when the radius is 15 cm?

प्रश्न-15 एक पासे को तीन बार उछाला जाता है। घटना A एवं B निम्नानुसार परिभाषित है - [4]

A : तीसरी बार उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना।

B : पहली उछाल पर 6 और दूसरी उछाल पर 5 प्रकट होना

घटना A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि घटना B घट चुकी है।

A die is thrown three times. Events A and B are defined as follows:

A : 4 on the third throw

B : 6 on the first and 5 on the second throw.

Find the probability of A, given that B has already occurred.

प्रश्न-16 सिध्द कीजिए कि - [4]

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

Prove that –

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

प्रश्न-17 यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ तो [4]

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए-

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are unit vectors such that $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ find the value of $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

प्रश्न-18 मान ज्ञात कीजिए - **[4]**

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

Evaluate -

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

प्रश्न-19 एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है – **[4]**

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

ज्ञात कीजिए (i) k, (ii) $P(X<6)$.

A random variable X has the following probability distribution

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

Find the following
(i) k (ii) $P(X<6)$.

प्रश्न-20 सिध्द कीजिए कि $f(x)=2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f:R\rightarrow R$ एकैकी तथा आच्छादक है। **[4]**

Prove that the function $f:R\rightarrow R$ given by $f(x)=2x$ is one-one and onto.

अथवा

OR

यदि $f:R \to R$ जहाँ $f(x)=x^2-3x+2$ द्वारा परिभाषित है तो $f[f(x)]$ ज्ञात कीजिए।

If $f:R \to R$ is defined by $f(x)=x^2-3x+2$ find $f[f(x)]$

प्रश्न-21 $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए जबकि $0<x<1$. **[4]**

Differentiate $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ with respect to x, when $0<x<1$.

प्रश्न-22 सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। **[4]**

Find the unit vector in the direction of the sum of vectors $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ and $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$.

प्रश्न-23 अवकल समीकरण हल कीजिए - **[4]**

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$$

Solve the differential equation -

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$$

निर्देश:

(द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है। प्रश्न क्र. 25 एवं 28 में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित है।

Instruction:

(D) Question No. 24 to 29 are long answer type questions. Question No. 25 and 28 have internal choice. Each question carries 6 marks.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न-24 यदि $y = (\log x)^x + x^{\log x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [6]

If $y = (\log x)^x + x^{\log x}$ then find $\frac{dy}{dx}$:

प्रश्न-25 रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है - [6]

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

और $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

Find the shortest distance between the lines whose vector equations are-

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

and $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

अथवा

OR

समतलों $x+y+z=1$ और $2x+3y+4z=5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा समतल $x-y+z=0$ पर लंबवत समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x+y+z=1$ and $2x+3y+4z=5$ which is perpendicular to the plane $x-y+z=0$.

प्रश्न-26 निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए - **[6]**

$x-y+z=4$

$2x+y-3z=0$

$x+y+z=2$

Using matrix method, solve the following system of equations

$x-y+z=4$

$2x+y-3z=0$

$x+y+z=2$

प्रश्न-27 आलेखीय विधिद्वारा निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को हल कीजिए **[6]**

न्यूनतम $Z=200x+500y$

निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$x+2y \geq 10$

$3x+4y \leq 24$

और $x \geq 0, y \geq 0$

Solve the following Linear Programming graphically

Minimize $Z=200x+500y$

Subject to the constraints

$x + 2y \geq 10$

$3x + 4y \leq 24$

and $x \geq 0, y \geq 0$

प्रश्न-28 दो परवलयों $y = x^2$ एवं $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[6]**

Find the area of the region bounded by the two parabolas $y = x^2$ and $y^2 = x$.

अथवा

OR

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (समाकलन विधि से)

Find the area bounded by the ellipse (by integration method)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न-29 सिध्द कीजिए कि - **[6]**

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx = \frac{\pi}{12}$$

Prove that -

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx = \frac{\pi}{12}$$