03

ज्यामितीय घटक

(The Elements of Goemetry)

3.1 परिचय

आपने बड़े निर्माण जैसे बाँध, पाठशालाओं के भवन, हॉस्टेल, अस्पताल आदि देखे होंगे ऐसे बड़े निर्माण इंजिनियरों के लिए बड़ी चुनौती खड़े करते हैं।

क्या आप जानते है निर्माण कार्य का मूल्य कैसे निर्धारित करते हैं। मज़दूरों की मज़दूरी के अलावा, सिमेंट का मूल्य, कांक्रेट आदि उसके आकार तथा परिमाण पर आधारित होते हैं।

भवन का आकार तथा परिमाण में उसके आधार, चारों ओर का क्षेत्रफल, दिवारों का परिमाण, झुकाव, छत आदि को सम्मिलित करते हैं। निर्माण कार्य में समावेशित ज्यामितीय सिद्धान्त को समझने के लिए हमें ज्यामिति के आधार भूत घटकों का उपयोग समझना आवश्यक है।

हमें ज्ञात है कि ज्यामिति का हमारे दैनिक जीवन में सर्वाधिक उपयोग होता है जैसे रंग-रोगन, कुटिर कार्य, फर्श बिछाना खेतों में हल चलाना बीज बोना आदि। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि ज्यामिति के बिना जीवन की कल्पना ही नहीं हो सकती।

कुछ अद्‌भूत निर्माण जैसे इजिप्ट के पिरामीड (Pyramids in Egypt), चीन की अद्वितीय दिवार (Great wall of China), मंदिर (Temples), मस्जिद (Mosques), गिरिजाघर, ताजमहल (Tajmahal), चारमीनार (Charminar), भारत के अल्तार (altars in India), फ्रांस का इफेल टावर (Eifel tower of France) आदि। ज्यामितीय उपयोगिता के कुछ उदाहरण है।

इस अध्याय में हम इसके इतिहास को जानेंगे। ज्यामिति के अनेक विचारों को आजकल के विकसित ज्यामिति के साथ तुलना करेंगे।

3.2 इतिहास

गणित की वह शाखा जो निर्माणों के आकार तथा परिमाण को ज्यामिति के अंतर्गत परभिाषित करती है। *ज्यामिति* शब्द का अवर्भािव ग्रीक शब्द जियो 'geo' अर्थात पृथ्वी और मीटरीन 'metrein' अर्थात् मापन से हुआ है।

सर्वप्रथम ज्यामिति की शुरुआत प्राचिन लोगों की खोज जिसने अधिक कोण त्रिभुज को प्राचिन सिंधु घाटी तथा प्राचिन बेबिलोनिया (Babylonia) से हुई है। 'बकशाली लिपि' 'Bakshali manuscript' में ज्यामितीय प्रश्नों का सर्वाधिक उपयोग किया गया है। बिन आकार वाली ठोस वस्तु का आयतन जैसे कई उदाहरण उसमें प्राप्त होते हैं। ज्यामितिय ज्ञान के कुछ अवशेष सिंधु घाटी सभ्यता की खुदाई जो - 2500

ईसा पूर्व हरप्पा (Harappa) तथा मोहनजोदाडो (Mohenjo-Daro) में की गई थी उसमें वृत्त आकार वाले कुछ वस्तुएँ पाई गयी थी।

वैदिक यज्ञ के हवन कुण्ड के निर्माण उपयोगी ज्यामितीय सिद्धान्तों की सूचि हमें वैदिक संस्कृती के 'सुलभ सूत्रों' 'Sulba Sutras' में प्राप्त होते हैं। हवन कुण्डों के निर्माण के पिछे एक अद्भुत कला जो एक समान क्षेत्रफल वाले अनेक आकार होते हैं। आठवीं शताब्दी ईसा पूर्व बुधायन ने बौद्धायन सुलभ सूत्र को बनाया जो सर्वाधिक प्रचलित सुलभ सूत्र है जिसमें पायथोगोरस की त्रिसंखीय पद्धति (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17).....आदि उदाहरण पाये गये है। साथ ही साथ आयत के भुजाओं के लिए पायथोगोरस सिद्धान्त के लिए कथन दिये गये हैं।

प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ ने ***ज्यामिति*** की कल्पना कुछ इस प्रकार की है कि यह सभी विज्ञानों का ताज है। उन्होंने ज्यामिति का विस्तार अनेक नये चित्रों, चापों, तलों तथा ठोसों द्वारा की है। उन्होंने जाना कि कुछ कथनों की वैशिक सत्यता तर्कों के आधार पर स्थापित करना आवश्यक है। इस विचार ने ग्रीक गणितज्ञ थेल्स (Thales) को निगमन प्रणाली की सिद्धता के बारे में सोचने के लिए प्रेरित किया।

युनान के पायथोगोरस शायद थेल्स के शीष्य होते और उनका प्रमेय भी शायद उनके नाम पर नहीं होता लेकिन वे एक ऐसे गणितज्ञ है जिन्होंने निगमन प्रणाली को सिद्ध किया। इजिप्त में एलेक्जेंडेरिया के युक्लीद (325-265B.C) ने 'तत्वों' पर 13 पुस्तकें लिखी। इसलिए युक्लीद ने प्रथम मूलभूत सिद्धान्तों पर आधारित परिभाषायें, स्वयं तथ्य, सार्वानुपात तथा तर्कों का निर्माण किया।

3.3 युक्लीद के ज्यामितीय तत्व

युक्लीद ने कहा कि ज्यामिति उस विश्व का अमूर्त प्रतिरूप है जिसमें वे रहते है बिन्दु, तल तथा रेखा की धारणा को अपने चरों ओर दिखाई देने वाली वस्तुओं में से ही बनाया गया है। अंतरिक्ष तथा अंतरिक्ष में पाये जाने वाले ठोसों के अध्ययन से ठोस वस्तुओं के ज्यामितीय अमूर्त धारणाओं का विकास हुआ है। ठोसों में आकार, परिमाण तथा एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरित होने का गुण पाया जाता है। उनके किनारों को **पार्श्वतल** कहते है। वे ठोसों के भागों को एक दूसरे से अलग करते हैं। और उनमें कोई मोटाई नहीं होती है। इन तलों के **किनारें** या तो चाप या **सरल रेखा** के रूप में होते हैं। इन रेखाओं का अंतिम छोर **बिन्दु** रूप होता है। ठोसों से बिन्दु तक के चरणों का अवलोकन करो (घनाकृति-तल-रेखा-बिन्दु)।

अगले पन्ने पर दिये गये चित्रों का अवलोकन कीजिए यह एक घनाभाकार [चित्र.(i)] जो एक त्रिपरिमाणीय (three dimensions) पिंड है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई पायी जाती है। जिनमें से अगर कोई एक परिमाण घटता है जैसे ऊँचाई तो उसमें सिर्फ दो परिमाण शेष रहते हैं जसिसे वह आयत बनता है। आप जानते है कि आयत में दो परिमाण होते हैं लम्बाई तथा चौडाई। [चित्र.(ii)] यदि उनमें एक और परिमाण घटते हैं जो कि चौडाई जिससे इसमें सिर्फ एक रेखा खण्ड शेष रहता है [चित्र.(iii)] यदि तीसरा परिमाण भी निकाल दिया जाय तो सिर्फ बिन्दु शेष रहता है। [चित्र.(iv)] आप याद कीजिए बिन्दु का कोई

परिमाण नहीं होता हैं। उसी प्रकार जब हम टेबल के किनारों को या पुस्तक के किनारों को देखते हैं तो उसमें रेखा दिखाई देगी। रेखा का अंतिम छोर या वह स्थान जहाँ दो रेखाएँ मिलती है उसे बिन्दु कहते हैं।

(i) (ii) (iii) (iv)

घनाभीय पिंड →	**तल →**	**रेखायें →**	**बिन्दु**
3-D	2-D	1-D	कोई परिमाण नहीं

ये सभी ज्यामिति के मूलभूत पद है। इन पदों की सहायता से हम दूसरे पद जैसे रेखाखण्ड, कोम, त्रिभुज आदि को परिभाषित करेंगे।

उपरोक्त निरिक्षण के आधार पर युक्लीद ने बिन्दु, रेखा तथा तल को परिभाषित किया है।

युक्लीद ने अपनी 'तत्व' पुस्तक-1 में 23 परिभाषायें दि है। उनमें से कुछ यहाँ निचे दिये गये हैं।

- **बिन्दु** के कोई भाग नहीं होते हैं।
- **रेखा** एक बिना चौड़ई वाली लम्बाई हाती हैं।
- रेखा के अन्तिम छोर को बिन्दु कहते हैं।
- **सरल रेखा** एक ऐसी रेखा है जो सम बिन्दुओं का समूह होता है।
- **तल** एक ऐसा भाग है जिसमें लम्बाई और चौड़ाई होते हैं।
- तल के किनारों को रेखा कहते हैं।
- **समतल** एक ऐसा तल है जो सरल रेखा के समूह से बनता है।

युक्लीद 300 ई.पू.
ज्यामिति के जनक

युक्लीद ने अपनी परिभाषाओं में कुछ पदों का **उपयोग** किया जैसे 'भाग', 'चौडाई', 'सम', जिनको और गहराई से समझना आवश्यक है यदि हम समतल को इस प्रकार परिभाषित करें कि वह एक क्षेत्रफल है तब हमें क्षेत्रफल शब्द को फिर से समझना पड़ेगा। इसलिए एक पद को परिभाषित करने के लिए हमें अनेक अनंत पदों को श्रृंखलाबद्ध रूप से परिभाषित करना पड़ेगा। इसलिए गणितज्ञों ने उन्हें अपरिभाषित ही रखा। वैसे भी हम ज्यामितीय पद के लिए दी गई परिभाषा से हमें अनुमानिक अनुभव होता है। इसलिए हमने बिन्दु को एक डॉट (dot) से दर्शित किया जबकी उसके भी कुछ परिमाण होते है। चीन के एक प्राचीन दार्शनिक ने कहा कि "रेखा को कुछ भागों में विभाजित किया जाता है। जब वे भाग अविभाजित रह जाते हैं तब उसे बिन्दु कहते हैं"

परिभाषा 2 में भी यही समस्या खडी होती है, क्योंकि उसमें लम्बाई और चौड़ाी दी गई है जिसमें दोनों की भी परिभाषा नहीं दी गई है। इसी कारणवश आगे के विकसीत अध्ययन में कुछ पदों को अपरिभाषित रखा गया है। इसलिए ज्यामिति में हम *बिन्दु, रेखा, तथा तल (युक्लीद के शब्दों में समतल) को अपरिभाषित पद कहते है।* हम उनका भौतिक प्रतिरूप के आधार पर अनुमानिक या विस्तार रूप ही लेते हैं।

युक्लीद ने अपने ज्यामितिय गुणों को अनुमानिक रूप से परिभाषित किया है यह परिकल्पनाएँ स्वयं सिद्ध सत्य है उसे किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं है। ये परिकल्पनाएँ स्वसिद्ध सत्य होती है। उन्होंने उसे दो भागों में विभाजित किया स्वयंतथ्य तथा अभिगृहीत।

3.3.1 स्वयंतथ्य और अभिधारणाएँ (Axioms and Postulates)

स्वयंतथ्य (Axioms) वे कथन है जो स्वयं सिद्ध होते हैं या सत्य होने की संभावना गणितीय पद्धति द्वारा होती है। उदाहरण के लिए "एक पूर्ण संख्या उसके भागों से बड़ी होती है।" यह स्वयंसिद्ध तथ्य हैं इसे किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं है। यह स्वयंतथ्य "से बड़ा है" को परिभाषित करता है उदाहरण के लिए यदि P परिमाण C का भाग है तब हम C को P तथा उसके दूसरे भाग R का योगफल के रूप में दर्शाते हैं। इसे $C > P$ के रूप में सूचित किया जाता है। अर्थात् R एक मूल्य है जिसे $C = P + R$ के रूप में लिखा जाता है।

युक्लीद ने **इस साधारण धारणा या स्वयंतथ्य** को सिर्फ ज्यामिति में ही नहीं बल्कि पूर्ण गणित में उपयोग में लाया है। लेकिन पद अभिगृहित को ज्यामिति में कल्पना के स्थान पर उपयोग में लाया गया है। स्वयँ तथ्यों का ज्यामिति के विकास में मूलभूत आधार है। इन स्वयं तथ्यों का अविर्भाव अलग-अलग परिस्थितियों में हुआ है।

युक्लीद के कुछ स्वयंतथ्य इस प्रकार है।

- जब दो वस्तुएँ किसी तीसरी वस्तु के समान हो तो वे आपस में एक दूसरे के समान होती है।
- यदि समान संख्याएँ समान संख्याओं के साथ जोड़ी जाय तो उनकी पूर्ण संख्याएँ भी समान होती है।
- यदि समान संख्याएँ समान संख्याओं में से घटायी जाय तो उनका शेष समान होता है।
- वस्तुएँ जो एक दूसरे से मेल खाती है वे एक दूसरे के समान होती है।
- वस्तुएँ जो समान वस्तुओं की दुगुनी होती है। वे भी एक दूसरे के समान होती है।
- समान संख्याओं के आधे भाग भी एक दूसरे के समान होती है।

ये 'सामान्य धारणायें' किसी दूसरे प्रकार की धारणाओं का दिग्दर्शन करते हैं। पहली धारणा कुछ सामान्य चित्रों के लिए लागू होती है। उदाहरण के लिए यदि एक वस्तु A का क्षेत्रफल किसी दूसरे वस्तु B के क्षेत्रफल के समान हो तो वस्तु A, वस्तु B के समान होती है।

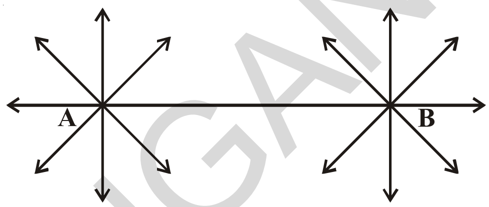
सम वस्तुओं के आकार-परिमाण की तुलना तथा योग किया जाता है लेकिन विषम वस्तुओं के आकार-परिमाण की तुलना नहीं की जा सकती। उदाहरण के लिए किसी रेखा को क्षेत्रफल के साथ नहीं जोड़ा जा सकता न हीं कोणों की तुलना पंचभुजों के साथ की जा सकती है।

प्रयत्न कीजिए

क्या आप दैनिक जीवन के स्वयंतथ्यों को बता सकते हैं।

अब हम युक्लीद के पाँच अभिगृहीतों (postulates) की चर्चा करेंगे :

1. पेपर पर दो भिन्न बिन्दु A और B लगाओ।



A और B से गुजरती हुई एक रेखा खिंचिए। A और B से गुजरती हुई हम कितनी रेखायें खींच सकते हैं? हम एक से ज्यादा रेखायें नहीं खींच सकते।

युक्लीद की पहली अभिधारणा उपरोक्त उदाहरण से सिद्ध होती है। उसकी अभिधारणा कुछ इस प्रकार है।

अभिगृहीत (Postulates)-1 : दिए हुए दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

युक्लीद की भाषा में "एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक सरल रेखा खींचो"।

2. रेखाखण्ड PQ खींचो।

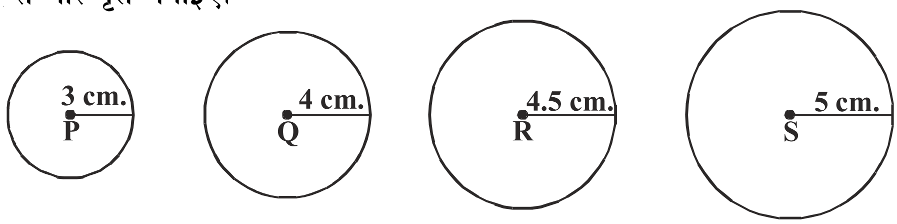
उसे दोनों ओर बढ़ाइए।

PQ को कितना विस्तृत कर सकते हैं? क्या उसका कोई अंतिम बिन्दु होगा? हम देखेंगे कि PQ को दोनों ओर अनंत तक बढ़ा सकते हैं उनका कोई अंतिम बिन्दु नहीं होगा। युक्लीद ने यह अपने दूसरे अभिधारणा में सिद्ध किया है।

अभिगृहीत-2 :

युक्लिद की भाषा में ''किसी रेखा को दोनों ओर क्रमशः बढ़ाया जाय तो'' उसे युक्लीद ने उसे सांत रेखा का नाम दिया है।

3. चार वृत्तों की त्रिज्यायें 3 सें-मी, 4 सें-मी, 4.5 सें-मी तथा 5 सें-मी. दी गई है सहायता से P, Q, R तथा S केन्द्र से चार वृत्त बनाइए।



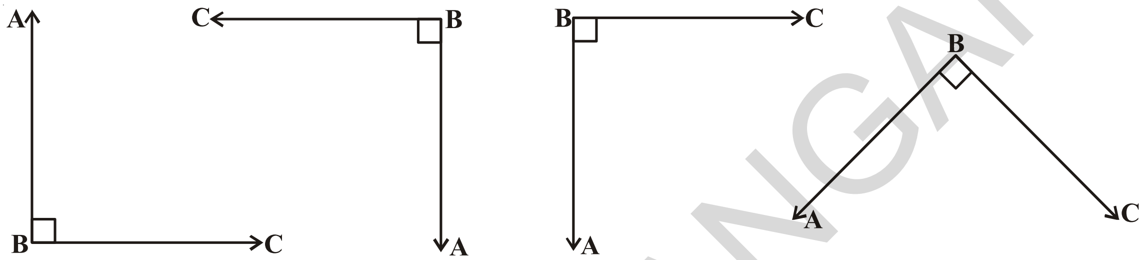
यदि आपको वृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या दी गई हो तो क्या आप वृत्तों को बना सकते हैं? हम किसी भी केन्द्र से किसी त्रिज्या द्वारा हम वृत्त बना सकते हैं। (वृत्त अध्याय-12 देखिए)

युक्लीद का तीसरा अभिगृहीत सिद्ध होता है।

(वृत्त को किसी भी केन्द्र तथा दूरी से परिभाषित करने के लिए)

अभिधारणा-3 : किसी को केन्द्र मानकर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

4. एक ड्राइंग पेपर लेकर उस पर विभिन्न रूपों से समकोणों को उतारिए। उनकी भुजाओं को काटकर एक के ऊपर एक व्यवस्थित कीजिए। आपने क्या देखा?



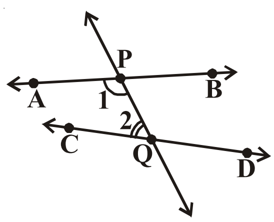
आप देखेंगे कि कोणों की भुजायें एक दूसरे पर होंगे सभी समकोण समान होते है। यह युक्लीद का चौथा स्वयं तथ्य है। क्या यह दूसरे कोणों पर लागू होता है? युक्लीद ने सभी कोणों के लिए समकोण का संदर्भ लिया है जो आगे भी परिस्थिति अनुसार उल्लेखीत किया गया है।

अभिधारणा-4 : सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते है।

आइए अब हम युक्लीद के पाँचवीं अभिधारणा को देखेंगे।

अभिधारणा-5 : (यदि एक सरल रेखा अन्य दो सरल रेखाओं पर तिर्यक डाली गयी हो जिससे एक ही ओर बननेवाले दो अंतः कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए गए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।)

नोट: उदाहरणार्थ, दिए गए चित्र में रेखा PQ रेखाएँ AB और CD पर इस प्रकार डाली गयी कि अंतःकोण 1 और 2 का योग जो PQ के बाईं ओर स्थित है, 180° से कम है अतः रेखाएँ AB और CD अंततः PQ के बाई ओर प्रतिच्छेदी होंगी।

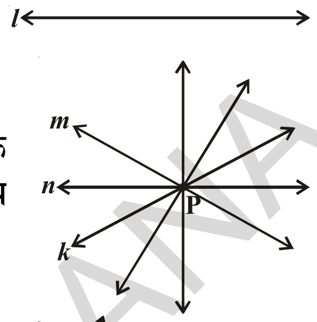


यह अभिगृहीत गणित में अपना महत्वपूर्ण स्थान पा चुका है युक्लीद ने भी माना कि पाँचवीं अभिधारणा एक प्रमेय है। 2000 वर्षों तक गणितज्ञों ने यह सिद्ध करने का प्रयत्न किया कि युक्लीद की पाँचवीं अभिधारणा उनके दूसरी नौं अभिधारणाओं का परिणाम है। उन्होंने यह कोशीश की दूसरी परिकल्पनायें जो उसके समान है उनको लिया जाय। (जॉन प्ले फेयर)।

3.3.2 पाँचवीं धारणा या पाँचवें अभिगृहीत का समतुल्य संस्करण (Equivalent Version of Fifth Postulate)

आगे के गणितज्ञों ने कुछ महत्वपूण विकल्प बताये हैं

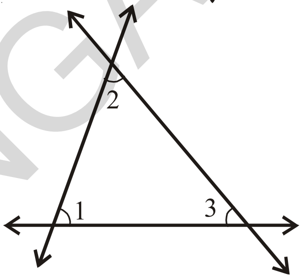
- दिये गये बिन्दु पर दि गयी रेखा पर नहीं बल्कि एक समानान्तर रेखा खींच सकते हैं (जॉन प्ले फेयर – 1748-1819)



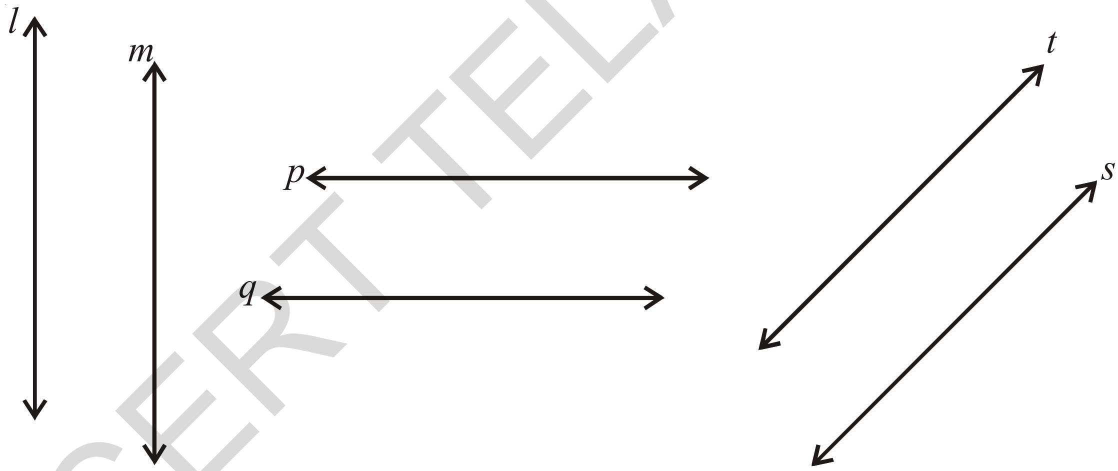
मान लीजिए l एक रेखा है तथा P बिन्दु जो रेखा l पर नहीं है। P से l के समानान्तर एक रेखा खींच सकते हैं। इसे प्ले फेयर (Play Fair) का स्वयं तथ्य कहते हैं।

- किसी भी त्रिभुज के कोणों का योग स्थिर होता है तथा दो समकोणों के समान होता है। (काल्पनिक Legendre)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (दो समकोण)



- रेखाओं की जोडी जो सभी जगहों पर समान दूरी पर होते हैं। (तथ्य प्रस्तुती Posidominus)



- यदि एक सरल रेखा दो समानान्तर रेखाओं में से एक को काटती है तो वह दूसरी को भी काटेगी। (उद्घोषणा Proclus)

- यदि रेखायें किसी रेखा की समानान्तर हो तो वह एक दूसरे की भी समानान्तर होती है। (उद्घोषणा Proclus)

यदि इनमें से किसी भी कथन को पहली चार अभिधारणाओं को छोड़कर पाँचवीं के स्थान पर लगायेंगे तो वही ज्यामिति प्राप्त होगी।

इन पाँच अभिधारणाओं को बताने के बाद युक्लीद ने उनका उपयोग कुछ और परिणामों को सिद्ध करने में किया है। साध्य निगमित (deductive) तर्कों तथा कथनों को साध्य या प्रमेय कहते हैं।

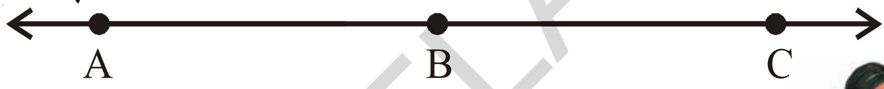
कभी-कभी आप सोचते हैं कि कथन सत्य है पर वह निरिक्षणों के आधार पर की गयी कल्पना होती है। ऐसे कथन जो न तो प्रमाणित होते हैं। न ही अप्रमाणित रहते हैं। उन्हें प्राक्कल्पना (hypothesis) कहते हैं। गणित की खोजें हमेशा अनुमान से ही शुरू होती है। "हर एक सम संख्या जो 4 से बड़ी है उन्हें दो रूढी संख्याओं के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है" यह एक प्राक्कल्पना (hypothesis) है जो गोल्ड बॉच (Gold Bach) ने दिया है।

एक परिकल्पना (conjecture) जिसे सत्य प्रमाणित किया जा सकता है उसे प्रमेय कहते हैं। प्रमेय चरणों की तार्कीक श्रृंखला होती है। उपपति में हम तर्क संगत पदों या कडियों द्वारा उस तथ्य को सिद्ध करते हैं।

युक्लीद ने अपने अभिगृहीतों अभिधारणाओं परिभाषाओं और पहले सिद्ध कीये गये प्रमेयों का प्रयोग कर, एक तार्किक श्रृंखला में 465 साध्य निगमित (deduce) किए गए है।

आइए आगे देखें कि युक्लीद ने कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए अभिधारणाओं का किस प्रकार प्रयोग किया।

उदाहरण-1. यदि A, B और C एक रेका पर स्थित तीन बिन्दु है और B बिन्दु A और C के बीच में स्थित हैं तो सिद्ध कीजिए कि AC - AB = BC.



हल : उपरोक्त चित्र में AB+BC के साथ AC संपाती है।

साथ ही युक्लीद का अभिगृहित 4 कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हो एक दूसरे के बराबर होती है अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$AB + BC = AC$,

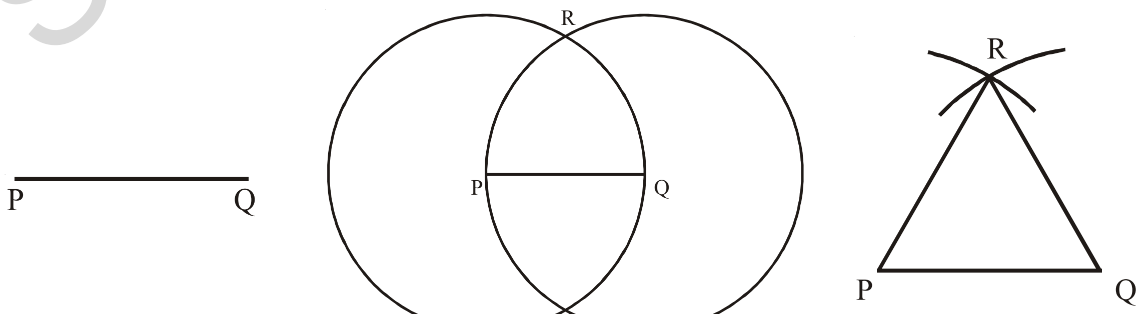
AC के इस मूल्य को दिये गये समीकरण $AC - AB = BC$ में लगाने पर

$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

ध्यान दीजिए इस हल में यह मान लिया गया है कि तीन बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

उदाहरण -2. सिद्ध कीजिए कि एक दिये हुए रेखाखण्ड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल : एक दी हुई लम्बाई का के रेखाखण्ड मान लीजिए PQ दिया गया है।



युक्लीद की अभिधारणा 3 का प्रयोग करके आप बिन्दु P को केन्द्र और PQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं इसी प्रकार Q को केन्द्र मानकर और QP. त्रिज्या लेकर के अन्य वृत्त खींचा जा सकता है ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिन्दु R पर मिलते हैं। अब रेखा खण्ड PR तथा QR खींच कर Δ PQR बनाइए।

अब आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है अर्थात् PQ = QR = RP है।

अब PQ = PR है (क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्यायें केन्द्र P से है)। इसीप्रकार, PQ = QR (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ जो केन्द्र Q से है)

युक्लीद के पहले अभिगृहीत वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती है। एक दूसरे के बराबर होती है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि PQ = QR = RP अतः ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है। ध्यान दीजिए कि यहाँ युक्लीद ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्र P और Q को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिन्दु पर मिलेंगे।

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

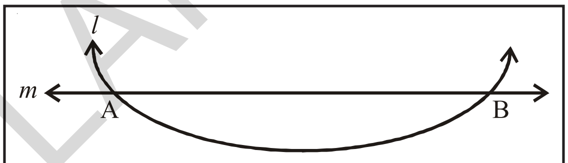
उदाहरण-3. दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं हो सकते।

दिया गया है : दो रेखायें l तथा m.

सिद्ध करना है : उनमें एक ही उभनिष्ठ बिन्दु होगा।

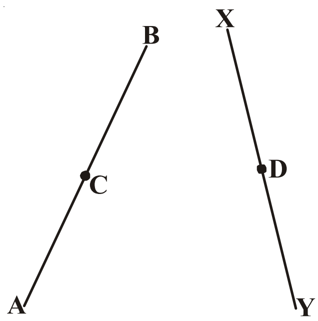
उपपति : मान लीजिए कि दो भिन्न रेखायें दो भिन्न बन्दि A और B पर प्रतिच्छेदित होते हैं।

इस प्रकार दो भिन्न बिन्दु से A और B से होकर जाने वाली आपके पास दो रेखाएँ l और m होती है। परन्तु यह कथन अभिगृहीत (उदा-3) के विरुद्ध है जिसके अनुसार दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। अतः हम जिस परिकल्पना से चले थे कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिन्दुओं से होकर जाती है गलत है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होगा।



ध्यान दीजिए कि युक्लीद ने यह स्वयंतथ्य सरल रेखाओं के लिए दिया था न कि वक्र रेखा के लिए। कहीं पर भी रेखा शब्द का उपयोग किया गया है वह सिर्फ सीधी रेखाएँ ही होंगी।

उदाहरण-4. दिये गये चित्र में हम यह देखते हैं कि AC = XD, C तथा D क्रमशः AB तथा XY के मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए AB = XY.



हल : दिया गया AB = 2 AC (AB का मध्य बिन्दु C है)

XY = 2 XD (XY का मध्य बिन्दु D है)

तथा AC = XD (दिया गया)

$\therefore$ AB = XY

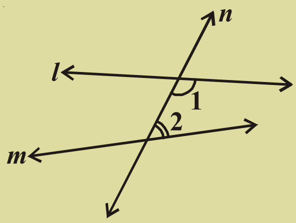
चूंकि एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

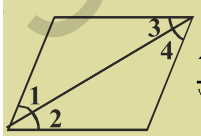
अभ्यास - 3.1

1. निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :-
   - i. ठोस पिण्ड के कितने परिमाण होते हैं?
   - ii. युक्लीद तत्व की कितनी पुस्तकें हैं?
   - iii. घनाभ के कितने पृष्ट होते हैं?
   - iv. त्रिभुज के तीन अंतः कोणों का योग कितना होता है?
   - v. ज्यामिति के किन्ही तीन अपरिभाषित पदों को लिखिए।
2. दिए गए कथन सत्य है या असत्य लिखिए उसका कारण बताइए।
   - a) एक बिन्दु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
   - b) सभी समकोण समान होते हैं।
   - c) सम त्रिज्या वाले वृत्त समान होते हैं।
   - d) एक साथ रेखा खंण्ड दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढाई जा सकती है।

   - e) दिये गये चित्र में $AB > AC$
3. निचे दिये गये चित्र में $AH > AB + BC + CD$ को सिद्ध कीजिए।

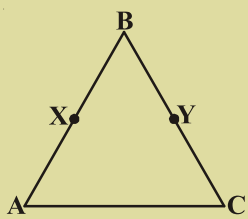
4. यदि बिन्दु Q दो बिन्दु P और R के बीच स्थित है जैसे कि $PQ = QR$, तो सिद्ध कीजिए $PQ = \frac{1}{2}PR$.
5. 5.2 सें-मी वाली भुजा वाला समबाहु त्रिभुज उतारिए
6. प्राव्वकल्पना क्या है? उसका एक उदाहरण दीजिए।
7. P तथा Q दो बिन्दु डालकर उनसे गुजरने वाली रेखा खींचिए क्या आप बता सकते हैं उसके समानान्तर कितनी रेखाएँ होंगी? क्या आप उन्हें उतार सकते है?
8. संलग्न चित्र में n रेखा l और m पर तिर्यक डाली गयी है जिसके अंतः कोण 1 और 2 का योगफल 180° होगा, l और m के बारे में आप क्या कहेंगे?





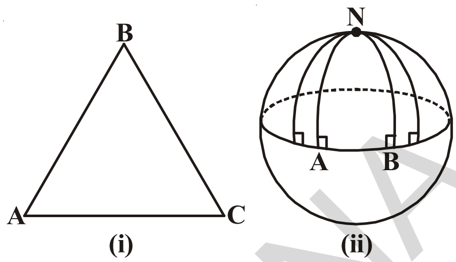
9. दिये गये चित्र में यदि $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ तथा $\angle 3 = \angle 4$, युक्लीद की अभिधारणा का उपयोग करते हुए $\angle 1$ तथा $\angle 2$ के बीच का संबंध बताइए।

10. संलग्न चित्र में $BX = \frac{1}{2}AB$,



$BY = \frac{1}{2}$ BC तथा AB = BC तो बताइए BX = BY होगा।

युक्लीद रहित ज्यामिति (Non-Euclidian Geometry)



युक्लीद के पाँचवी अभिधारण को गलत सिद्ध करने की अभिक्रिया में कार्ल फ्रेड्रीक गौस (Carl Fedrick Gauss) लोबाचेविस्की (Lobachevsky) तथा बोलयायी (Bolyai) ने कुछ नये विचारों को प्रकट किया। उन्होंने विचार किया कि पाँचवीं अभिधारणा सत्य है या उसके स्थान पर कोई नयी धारणा दे सकते हैं। यदि हम कोई नयी धारणा से उसे प्राप्त करते हैं तो उस ज्यामिती को युक्लीद रहित ज्यामिति कहते हैं।

यदि पृष्ट समतल न हो तो हमारे प्रमेय का क्या होगा?

चलिए हम देखें

एक गेंद लेकर उससे त्रिभुज बनाने की कोशीश करो? आप समतल पर बने त्रिभुज तथा गेंद के त्रिभुज में क्या अंतर देखेंगे? आप देखेंगे कि समतल पृष्ठ पर बनने वाले त्रिभुज की रेखायें सीधी होगी तथा गेंद वाले त्रिभुज की नहीं होगी।

चित्र (ii) में देखिए AN तथा BN (जो गोले के बड़े भाग है) जो एक ही रेखा AB पर लम्ब है। वे N बिन्दु पर मिलती है। फिर भी कोणों का योग दो समकोणों के योग से कम नहीं होगा $(90° + 90° = 180°)$. ध्यान दीजिए ΔNAB के कोणों का योग 180° से अधिक होगा क्यों कि $\angle A + \angle B = 180°$.

गोले पर बनने वाले पृष्ट को गोलीय पृष्ट कहते हैं। क्या गोले पर समानान्तर रेखाएँ बन सकती है। उसी प्रकार अलग-अलग पृष्टों से स्वयंतथ्य को जोड़कर नये अभिधारणाओं को बनाओ।

हमने क्या सीखा?

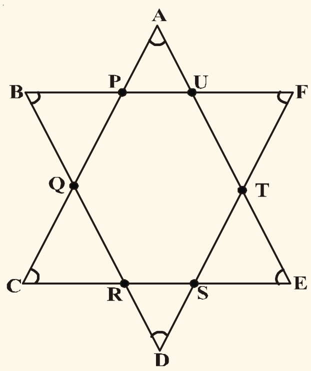
- ज्यामिति के तीन आधार बिन्दु, रेखा, तथा पृष्ट जो कि अपरिभाषित पद है।
- प्राचीन गणितज्ञ युक्लीद ने उन अपरिभाषित पदों को परिभाषित करने का प्रयत्न किया।
- युक्लीद ने एक नयी विचार पद्धती को अपनी पुस्तक "तत्व" में बताया है जो गणित के अगले विकास में सहायक बने।
- युक्लीद की कुछ अभिगृहीत साधारण धारणा।
    - वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हो, एक दूसरे के बराबर होती है।

- यदि बराबरों को बराबरों मे जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
- यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
- वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती है।
- पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
- एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।
- एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

- युक्लीद की अभिधारणाएँ निम्न थी :
  - अभिधारणा-1: एक बिन्दु से एक अन्य बिन्दु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।
  - अभिधारणा-2: एक अंत होनेवाली (terminated) रेखा को अनिश्चित रूप से बढाया जा सकता है।
  - अभिधारणा-3: किसी बिन्दु को केन्द्र मानकर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।
  - अभिधारणा-4: सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।
  - अभिधारणा-5: यदि एक सरल रेखा अन्य दो सरल रेखाओं पर तिर्यक डाली गयी हो जिसके एक और बनने वाले कोण इस प्रकार बनाये गये कि इन दोनों कोणों का योग दोथे सम कोणों से कम हो तो, वे दोनों रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाये जाने पर उसी और मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम हो ।

दिमागी खेल

1. दिये गये चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ का मान क्या होगा? उसके लिए कारण बताइए?



2. यदि किसी वर्ग का कर्ण 'a' इकाई हो तो, उस वर्ग का कर्ण कितना होगा जिसका क्षेत्रफल पहले वाले वर्ग से दुगुना है?