समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल

Exercise 11.1

प्रश्न 1. एक त्रिभुज का आधार 20 सेमी तथा ऊँचाई 6 सेमी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है-
त्रिभुज का आधार 20 सेमी व ऊँचाई 6 सेमी है।
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई।
= $\frac{1}{2}$ × 20 × 6
= 60 वर्ग सेमी

प्रश्न 2. त्रिभुज जिसकी भुजाएँ क्रमशः 15 सेमी, 25 सेमी एवं 30 सेमी हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं।
a = 15 सेमी, b = 25 सेमी, c = 30 सेमी

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+25+30}{2} = 35 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{35(35-15)(35-25)(35-30)}$$

$$= \sqrt{35\times20\times10\times5}$$

$$= \sqrt{5\times7\times2\times2\times5\times5\times2\times5}$$

$$= 2\times5\times5\sqrt{2\times7}$$

$$= 50\sqrt{14} \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्न 3. एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी समान भुजा 8 सेमी है तथा तीसरी भुजा 4 सेमी हो, तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाएँ हैं :
a = 8 सेमी तथा b = 4 सेमी
समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2} = \frac{4}{4}\sqrt{4\times(8)^2-4^2}$$

$$= \sqrt{4\times64-16} = \sqrt{256-16}$$

$$= \sqrt{240} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times3\times5}$$

$$= 2\times2\sqrt{15} = 4\sqrt{15} \text{ वर्ग सेमी।}$$

प्रश्न 4. एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 20 सेमी है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समबाहु त्रिभुज की भुजा (a) = 20 सेमी

∴ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (20)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 400 = 100\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 5. एक त्रिभुजाकार मैदान जिसकी दो भुजाएँ 8 सेमी तथा 15 सेमी हैं, उसका परिमाप 40 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिभुज का परिमाप (2s) = 40 सेमी
त्रिभुज की दो भुजाएँ a = 8 सेमी, b = 15 सेमी
2s = a + b + c
⇒ 40 = 8 + 15 + c
⇒ 40 = 23 + c
⇒ c = 40 – 23 = 17 सेमी

तथा $s = \frac{\text{परिमाप}}{2} = \frac{40}{2} = 20$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$

$= \sqrt{20 \times 12 \times 5 \times 3}$

$= \sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3}$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ वर्ग सेमी

प्रश्न 6. एक त्रिभुजाकार मेज जिसकी भुजाओं का अनुपात 3 : 4 : 5 तथा परिमाप 36 मी. है उस मेज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: मेज की भुजाओं का अनुपात = 3 : 4 : 5
माना मेज की भुजाएँ 3x मी. 4x मी. तथा 5 मी. है।।
मेज का परिमाप = 36. मी.
⇒ 3x + 4x + 5x = 36
⇒ 12x = 36
⇒ x = 3
अतः मेज की भुजाएँ हैं:
a = 3 × 3 = 9 मी.

b = 4 × 3 = 12 मी.
c = 5 × 3 = 15 मी.

$$\therefore \quad s = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ मी.}$$

मेज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$

$= \sqrt{18 \times 9 \times 6 \times 3} = \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3}$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ वर्ग मी.

प्रश्न 7. एक खेत जिसकी आकृति त्रिभुजाकार है। इसकी भुजाएँ 20 मी, 51 मी एवं 37 मी है तो उस खेत में 2 × 3 वर्ग मीटर माप की कितनी क्यारियाँ बनाई जा सकती हैं?

हल: त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ हैं:
a = 20 मी, b = 51 मी तथा c = 37 मी

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+51+37}{2} = \frac{108}{2} = 54 \text{ मी}$$

खेत का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{54(54-20)(54-51)(54-37)}$

$= \sqrt{54 \times 34 \times 3 \times 17}$

$= \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 17 \times 3 \times 17}$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 17 = 306$ वर्ग मी

खेत में बनी क्यारी का क्षेत्रफल $= 2 \times 3 = 6$ वर्ग मी

खेत में बनी क्यारियों की संख्या $= \frac{306}{6} = 51$

Exercise 11.2

प्रश्न 1. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण की लम्बाई 12 सेमी है तथा सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमशः 7 सेमी एवं 8 सेमी है।

हल: चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई = 12 सेमी
तथा सम्मुख शीर्षों से विकर्ण पर डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमशः = 7 सेमी तथा 8 सेमी
चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण की लम्बाई × सम्मुख शीर्षों से विकर्ण पर डाले गये लम्बों का योग
= $\frac{1}{2}$ × 12 × (7 + 8)
= 6 × 15
= 90 वर्ग सेमी
अतः चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 90 वर्ग सेमी

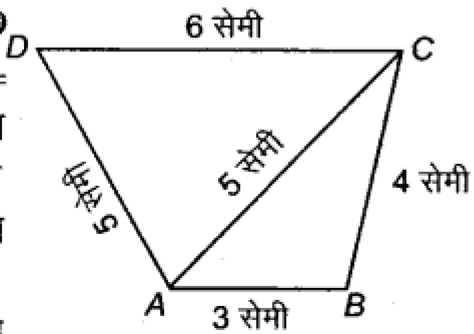
प्रश्न 2. एक समान्तर चतुर्भुजाकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 2000 वर्ग मीटर है। यदि इसका आधार 50 मीटर हो तो मैदान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर चतुर्भुजाकार मैदान का आधार = 50 मी
माना इसकी ऊँचाई h मी है।
तथा समान्तर चतुर्भुजाकार खेत के मैदान का क्षेत्रफल = 2000 मी2
⇒ आधार × ऊँचाई = 2000
⇒ 50 × h = 2000
⇒ h = $\frac{2000}{50}$ = 40 मी
अत: समान्तर चतुर्भुजाकार खेत की ऊँचाई = 40 मी।

प्रश्न 3. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमश: AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 6 सेमी एवं DA = 5 सेमी है तथा विकर्ण AC = 5 सेमी है।

हल:

चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल



त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं:

$a = BC = 4$ सेमी, $b = AC = 5$ सेमी तथा $c = AB = 3$ सेमी

$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+3}{2} = 6$ सेमी

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-4)(6-5)(6-3)} = \sqrt{6 \times 2 \times 1 \times 3}$

$= \sqrt{2 \times 3 \times 2 \times 3} = 2 \times 3 = 6$ वर्ग सेमी

त्रिभुज ACD की भुजाएँ हैं:

$a = CD = 6$ सेमी, $b = AD = 5$ सेमी तथा $c = AC = 5$ सेमी

$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+5}{2} = 8$ सेमी

त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)}$

$= \sqrt{8 \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$

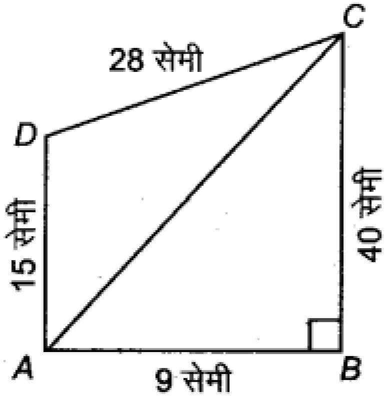
$= 2 \times 2 \times 3 = 12$ वर्ग सेमी

$\therefore$ चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल

$= 6 + 12 = 18$ वर्ग सेमी

अत: चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= 18$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 4. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमश: 9 सेमी, 40 सेमी, 28 सेमी एवं 15 सेमी है। तथा इसकी प्रथम दो भुजाओं के मध्य समकोण है।



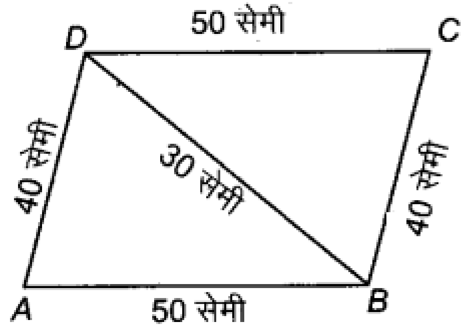
हल: माना कि ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी 28 सेमी प्रथम दो भुजाओं (AB तथा BC) के मध्य समकोण है।
अर्थात् $\angle B = 90°$
समकोण त्रिभुज ABC में,
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$\Rightarrow AC^2 = 9^2 + 40^2$
$\Rightarrow AC^2 = 81 + 1600 = 1681$
$\Rightarrow AC = \sqrt{1681} = 41$ सेमी
समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई
= $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$ सेमी2
त्रिभुज ACD की भुजाएँ हैं:
a = CD = 28 सेमी, b = AD = 15 सेमी तथा c = AC = 41 सेमी।

$$\therefore\ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज } ACD \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$$
$$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$$
$$= \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7 \times 3 \times 3 \times 3}$$
$$= 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126 \text{ वर्ग सेमी}$$

चतुर्भुज ABC का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल = 180 + 126 = 306 वर्ग सेमी
अत: चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 306 वर्ग सेमी

प्रश्न 5. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः 50 सेमी एवं 40 सेमी हो तथा विकर्ण 30 सेमी हो।



हल: माना कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी दो आसन्न भुजाएँ AB = 50 सेमी तथा BC = 40 सेमी तथा विकर्ण BD = 30 सेमी है।
चूंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
CD = AB = 50 सेमी तथा AD = BC = 40 सेमी
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 2 × (ΔABD का क्षेत्रफल)
त्रिभुज ABD की भुजाएँ है:
a = BD = 30 सेमी, b = AD = 40 सेमी तथा c = AB = 50 सेमी

$$\therefore \quad s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{30+40+50}{2}=60 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज } ABD \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$$

$$=\sqrt{60\times30\times20\times10}$$

$$=\sqrt{2\times2\times3\times5\times5\times3\times2\times2\times2\times5\times5\times2}$$

$$=2\times2\times2\times3\times5\times5=600 \text{ वर्ग सेमी}$$

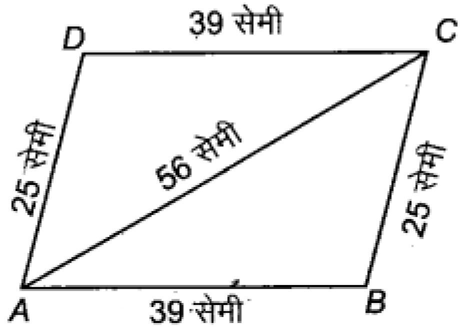
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 2 × (ΔABD का क्षेत्रफल) = 2 x 600 = 1200 सेमी
अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 1200 वर्ग सेमी।

प्रश्न 6. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके एक विकर्ण की लम्बाई 5.2 सेमी है तथा विकर्ण के सम्मुख शीर्षों से लम्बों की दूरियाँ क्रमश: 3.5 सेमी है।

हल: समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई = 5.2 सेमी
विकर्ण के सम्मुख शीर्षों से लम्बों की दूरियां क्रमशः 3.5 सेमी है।
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण की लम्बाई × विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग
= $\frac{1}{2}$ × 5.2 × (3.5 + 3.5)
= 2.6 × 7

= 18.2 सेमी2
अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 18.2 सेमी2

प्रश्न 7. ऐक भूखण्ड समान्तर चतुर्भुजाकार आकृति का है। इस पर मिट्टी डलवानी है। मिट्टी डलवाने का व्यय ₹ 100 प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए जबकि भूखण्ड की आसन्न भुजाएँ 39 मीटर एवं 25 मीटर है तथा विकर्ण 56 मीटर हो।



हल: माना कि. समान्तर चतुर्भुजाकार भूखण्ड ABCD है। जिसकी आसन्न, भुजाएँ AB = 39 मी, BC = 25 मी तथा विकर्ण AC = 56 मी।
चूँकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
CD = AB = 39 मी तथा AD = BC = 25 मी.
समान्तर चतुर्भुजाकार भूखण्ड ABCD का क्षेत्रफल = 2 × (ΔABC का क्षेत्रफल)
त्रिभुज ABC की भुजाएँ हैं:
a = 25 मी, b = 56 मी तथा c = 39 मी

$$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{25+56+39}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ मी}$$

$$\text{त्रिभुज } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{60(60-25)(60-56)(60-39)}$$
$$= \sqrt{60 \times 35 \times 4 \times 21}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7}$$
$$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420 \text{ वर्ग मी}$$

समान्तर चतुर्भुजाकार भूखण्ड का क्षेत्रफल = 2 × (ΔABC का क्षेत्रफल) = 2 × 420 = 840 वर्ग मी
भूखंड पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 100 प्रति वर्ग मी
अर्थात् 1 वर्ग मी क्षेत्रफल पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 100
840 वर्ग मी क्षेत्रफल पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 840 × 100 = ₹ 84000
अतः समान्तर चतुर्भुजाकार भूखण्ड पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 84000

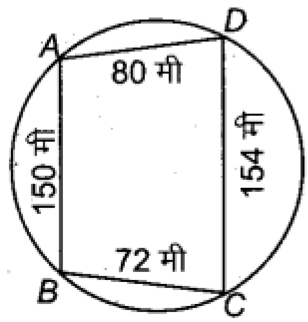
Exercise 11.3

प्रश्न 1. एक चक्रीय चतुर्भुजाकार मैदान की भुजाएँ क्रमशः 72 मीटर, 154 मीटर, 80 मीटर एवं 150 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस मैदान में टाइल बिछवाने का व्यय 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो तो कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि चक्रीय चतुर्भुजाकार मैदान $ABCD$ है। जिसकी भुजाएँ हैं:

$a = 72$ मी, $b = 154$ मी, $c = 80$ मी तथा $d = 150$ मी।



$$\therefore s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{72+154+80+150}{2}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{456}{2} \quad \Rightarrow \quad s = 228 \text{ मी}$$

चक्रीय चतुर्भुजाकार मैदान का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$= \sqrt{(228-72)(228-154)(228-80)(228-150)}$$

$$= \sqrt{156 \times 74 \times 148 \times 78}$$

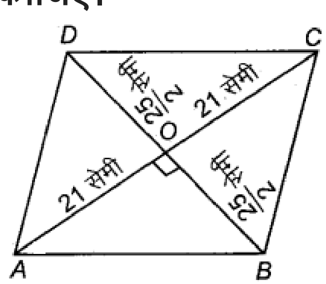
$$= \sqrt{11544 \times 11544} = 11544 \text{ वर्ग मी}$$

मैदान में 1 वर्ग मी टाइल बिछवाने का व्यय = ₹ 5

मैदान में 11544 वर्ग मी टाइल बिछवाने का व्यय

$$= 11544 \times 5 = ₹\ 57720$$

प्रश्न 2. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 25 सेमी तथा 42 सेमी है। इसका क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल: माना कि एक समचतुर्भुज ABCD है, जिसके विकर्ण BD = 25 सेमी तथा AC = 42 सेमी है।
माना कि समचतुर्भुज के विकर्ण O पर A प्रतिच्छेद करते हैं।
समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
= $\frac{1}{2}$ × AC × BD
= $\frac{1}{2}$ × 42 × 25
= 525 वर्ग सेमी
चूँकि समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।
अतः ∠AOB = 90°

$$AO = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AO = \frac{42}{2} = 21 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } BO = OD \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BD = \frac{25}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{समकोण त्रिभुज } AOB \text{ में, } AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = 21^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 441 + \frac{625}{4}$$

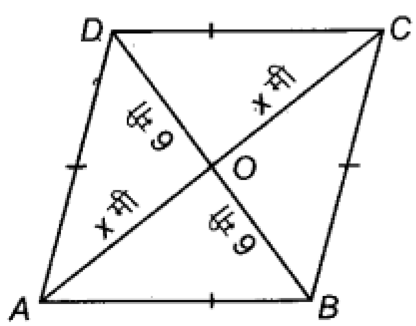
$$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{1764 + 625}{4} = \frac{2389}{4}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{\frac{2389}{4}} = \frac{48.88}{2} \text{ (लगभग)}$$

$$\Rightarrow \quad AB = 24.44 \text{ सेमी}$$

समचतुर्भुज का परिमाप = 4 × AB = 4 × 24.44 = 97.76 सेमी (लगभग)
अत: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 525 वर्ग सेमी
तथा इसका परिमाप = 97.72 सेमी लगभग

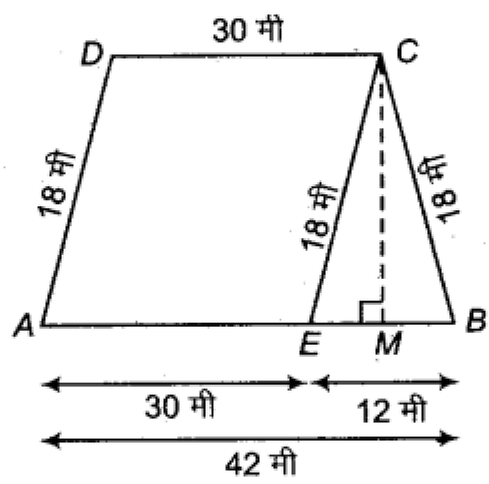
प्रश्न 3. एक समचतुर्भुज का परिमाप 40 मीटर हो तथा उसके विकर्ण की लम्बाई 12 मीटर हो तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल: माना कि ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसके विकर्ण की। लम्बाई (BD) = 12 मी है तथा इसका। परिमाप 40 मी है।

माना कि समचतुर्भुज की भुजा की लम्बाई a मी है। समचतुर्भुज का परिमाप = 40 मी।
$4 \times a = 40 \Rightarrow a = \frac{40}{4} = 10$ मी
⇒ समचतुर्भुज की भुजा (AB) = 10 मी
चूँकि, समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।
माना कि इसका दूसरा विकर्ण : (AC) = 2x मी है।
AO = OC
$\Rightarrow AO = \frac{1}{2} AC$
$\Rightarrow AO = \frac{1}{2} \times 2x = x$ मी
तथा BO = OD
$\Rightarrow BO = \frac{1}{2} BD$
$\Rightarrow BO = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ मी
तथा ∠AOB = 90°
समकोण त्रिभुज AOB में,
$AB^2 = AO^2 + BO^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)
$\Rightarrow 10^2 = x^2 + 6^2$ (∵ AB = 10 मी)
$\Rightarrow 100 = x^2 + 36$
$\Rightarrow x^2 = 100 - 36 = 64$
$\Rightarrow x = \sqrt{64} = 8$ तो $AC = 2 \times 8 = 16$ मी।
समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$ मी
अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 96 मी

प्रश्न 4. एक समलम्बाकार खेत जिसकी समान्तर भुजाएँ 42 मीटर एवं 30 मीटर हैं तथा अन्य भुजाएँ 18 मीटर एवं 18 मीटर हैं। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल: माना कि ABCD एक समलम्बाकार हैं खेत है, जिसकी समान्तर भुजाएँ 42 मी एवं 30 मी हैं।
अर्थात् AB = 42 मी। तथा CD = 30 मी
तथा अन्य भुजाएँ 18 मी तथा 18 मी हैं।
अर्थात् भुजा AD = BC = 18 मी
AD के समान्तर CE तथा CM ⊥ AB खींचे।

AB || CD ⇒ AE || CD तथा AD || CE (रचना से)
⇒ AECD एक समान्तर चतुर्भुज है।
AE = CD = 30 मी तथा CE = AD = 18 मी
BE = AB – AE = 42 – 30 = 12 मी
CEB एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
समान भुजाएँ (a) = 18 मी तथा असमान भुजा (b) = 12 मी

∴ त्रिभुज CEB का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$= \frac{12}{4}\sqrt{4 \times 18^2 - 12^2} = 3 \times \sqrt{4 \times 324 - 144}$

$= 3 \times \sqrt{1296 - 144} = 3 \times \sqrt{1152} = 101.82$ मी

ΔCEB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

⇒ $101.82 = \frac{1}{2} \times 12 \times$ ऊँचाई

⇒ $\frac{101.82 \times 2}{12}$ = ऊँचाई ⇒ ऊँचाई $= 16.97$ मी

∴ समलम्बाकार खेत का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}(AB + CD) \times CM = \frac{1}{2}(42 + 30) \times 16.97$

$= 36 \times 16.97 = 610.92$ वर्ग मी

अत: समलम्बाकार खेत का क्षेत्रफल $= 610.92$ वर्ग मी

प्रश्न 5. यदि एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 350 वर्ग सेमी हो एवं उसकी समान्तर भुजाओं की लम्बाई 26 सेमी एवं 44 सेमी हो तो समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं की लम्बाई = 26 सेमी तथा 44 सेमी।
माना कि समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी h सेमी है।
अब समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 350 वर्ग सेमी
⇒ $\frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × उनके मध्य दूरी
⇒ $\frac{1}{2}$ (26 + 44) × h = 350
⇒ $\frac{70}{2}$ × h = 350
⇒ 35 × h = 350
⇒ h = $\frac{350}{35}$ = 10 सेमी
अतः समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी = 10 सेमी

प्रश्न 6. एक मेज समलम्ब चतुर्भुजाकार है। मेज की समान्तर भुजाएँ 8 मीटर तथा 16 मीटर हैं। मेज का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर हो तो मेज की चौड़ाई (समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी) ज्ञात कीजिए।

हल: समलम्बाकार मेज की समान्तर भुजाओं की लम्बाई = 8 मी तथा 16 मी
माना कि मेज की चौड़ाई h मी है।
मेज का क्षेत्रफल = 108 वर्ग मी
⇒ $\frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × चौड़ाई = 108
⇒ $\frac{1}{2}$ (8 + 16) × h = 108
⇒ 12 × h = 108
⇒ h = $\frac{108}{2}$ = 9 मी
अत: मेज की चौड़ाई = 9 मी

Exercise 11.4

प्रश्न 1. निम्नलिखित माप के आयतों के क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।
(i) लम्बाई 9.5 मीटर, चौड़ाई 7.5 मीटर
(ii) लम्बाई 125 मीटर, चौड़ाई 75 मीटर
(iii) लम्बाई 12.5 सेमी, चौड़ाई 7.5 सेमी

हल: (i) आयत की लम्बाई = 9.5 मी तथा आयत की चौड़ाई = 7.5 मी
आयतं का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 9.5 × 7.5 = 71.25 वर्ग मी
तथा आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) = 2(9.5 + 7.5) = 2 × 17 = 34 मी

(ii) आयत की लम्बाई = 125 मी तथा चौड़ाई = 75 मी
आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 125 × 75 = 9375 वर्ग मी
तथा आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौडाई) = 2 (125 + 75) = 2 × 200 = 400

(iii) आयत की लम्बाई = 12.5 सेमी तथा चौड़ाई = 7.5 सेमी
आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 12.5 × 7.5 = 93.75 वर्ग सेमी
तथा आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) = 2 (12.5 + 7.5) = 2 × 20 = 40 सेमी
अतः आयत का क्षेत्रफल = 93.75 वर्ग सेमी तथा परिमाप = 40 सेमी

प्रश्न 2. निम्नलिखित माप की भुजा के वर्गों के क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए:
(i) 5.3 मीटर
(ii) 8.5 मीटर
(iii) 9.6 मीटर

हल:
(i) वर्ग की भुजा (a) = 5.3 मी
वर्ग का क्षेत्रफल = a^2 = 5.3 × 5.3 = 28.09 वर्ग मी
तथा वर्ग का परिमाप = 4a = 4 × 53 = 212 मी
(ii) वर्ग की भुजा (a) = 8.5 मी
वर्ग का क्षेत्रफल = a^2 = 8.5 × 8.5 = 72.25 वर्ग मी
तथा वर्ग का परिमाप = 4a = 4 × 8.5 = 34.0 मी
(iii) वर्ग की भुजा (a) = 9.6 मी
वर्ग का क्षेत्रफल = a^2 = 9.6 × 9.6 = 92.16 वर्ग मी
तथा वर्ग का परिमाप = 4a = 4 × 9.6 = 384 मी

प्रश्न 3. एक वर्गाकार मैदान के 4 चक्कर लगाने पर 16 किमी की दौड़ पूर्ण होती है तो मैदान की लम्बाई एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: मैदान के चार चक्कर लगाने पर तय की गई दूरी = 16 किमी
मैदान का एक चक्कर लगाने पर तय की गई दूरी = $\frac{16}{4}$ = 4 किमी
वर्गाकार मैदान का 1 चक्कर लगाने पर तय की गई दूरी = वर्गाकार मैदान का परिमाप
⇒ 4 = 4 × वर्गाकार मैदान की भुजा
⇒ वर्गाकार मैदान की भुजा = $\frac{4}{4}$ = 1 किमी
वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = a^2 = 1 × 1 = 1 वर्ग किमी
अतः वर्गाकार मैदान की भुजा (a) = 1 किमी
तथा क्षेत्रफल = 1 वर्ग किमी

प्रश्न 4. एक आयताकार खेत 75 मीटर लम्बा एवं 45 मीटर चौड़ा है। इसमें 5 मीटर लम्बी एवं 3 मीटर चौड़ी कितनी क्यारियाँ बन सकती हैं?

हल:
आयताकार खेत की लम्बाई = 75 मी
आयताकार खेत की चौड़ाई = 45 मी
आयताकार खेत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 75 × 45 = 3375 वर्ग किमी
एक क्यारी की लम्बाई = 5 मी तथा चौड़ाई = 8 मी
एक क्यारी का क्षेत्रफल = 5 × 3 = 15 वर्ग मी
खेत में बनी क्यारियों की संख्या

$$= \frac{\text{खेत का क्षेत्रफल}}{\text{एक क्यारी का क्षेत्रफल}} = \frac{3375}{15} = 225$$

अतः खेत में बनी क्यारियों की संख्या = 225

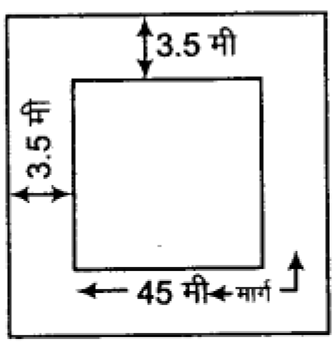
प्रश्न 5. एक कमरे की लम्बाई 10 मीटर तथा चौड़ाई 5 मीटर है। इसके फर्श पर 50 वर्ग सेमी के कितने चौकों की आवश्यकता होगी तथा 20 रुपये प्रति चौके की दर से चौके लगवाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे की लम्बाई = 10 मी तथा चौड़ाई = 5 मी
कमरे का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 10 × 5 = 50 मी^{2} = 50 × 10000 सेमी^{2} (∵ 1 मी^{2} = 10000 सेमी^{2})
= 500000 सेमी^{2}
एक चौके का क्षेत्रफल = 50 सेमी^{2}
कमरे के फर्श में लगे चौकों की संख्या

$$= \frac{\text{कमरे का क्षेत्रफल}}{\text{एक चौके का क्षेत्रफल}} = \frac{500000}{50} = 10000$$

1 चौके की कीमत = ₹ 20
10000 चौकों की कीमत = 10000 x 20 = ₹ 3200000
अत: चौकों की संख्या = 10000
तथा चौकों की कीमत = ₹ 200000

प्रश्न 6. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 2025 वर्ग मीटर है। इसके चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ा मार्ग हो तो मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

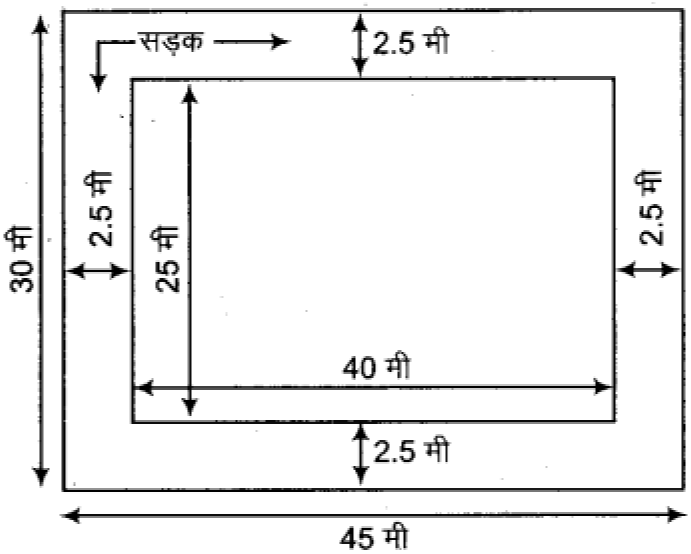


हल: माना कि वर्गाकार मैदान की भुजा a मी है।
वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 2025 वर्ग मी
⇒ $a^2 = 2025$
⇒ $a = \sqrt{2025}$
⇒ $a = 45$
वर्गाकार मैदान के चारों ओर 3.5 मी चौड़ा मार्ग है।
मार्ग सहित वर्गाकार मैदान की भुजा = 45 + (3.5 + 3.5) = 52 मी
मार्ग सहित वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 52 × 52 = 2704 वर्ग मी
मार्ग का क्षेत्रफल = मार्ग सहित वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल – वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल
= 2704 – 2025

= 679 वर्ग मी
अत: मार्ग का क्षेत्रफल = 679 वर्ग मी

प्रश्न 7. एक आयताकार कमरा 40 मीटर लम्बा तथा 25 मीटर चौड़ा है। इसके चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ाई की एक सड़क है। इसमें 50 सेमी × 70 सेमी के चौके बिछाने है। चौकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार कमरे की लम्बाई = 40 मी
आयताकार कमरे की चौड़ाई = 25 मी
आयताकार कमरे का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 40 × 25 = 1000 वर्ग मी



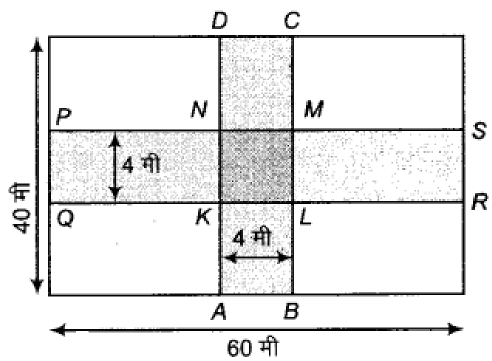
आयताकार कमरे के चारों ओर 2.5 मी. चौड़ी सड़क है।
अतः सड़क को माप में लेने पर, कमरे की लम्बाई = 40 + (2.5 + 2.5) = 45 मी।
कमरे की चौड़ाई = 25 + (2.5 + 2.5) = 30 मी
कमरे का क्षेत्रफल = 45 × 30 = 1350 वर्ग मी
सड़क का क्षेत्रफल = सड़क सहित कमरे का क्षेत्रफल – कमरे का क्षेत्रफल = 1350 – 1000 = 350 वर्ग मी।
1 चौके का क्षेत्रफल = 50 × 70 = 3500 वर्ग सेमी = $\frac{3500}{10000}$ वर्ग मी = 0.35 वर्ग मी
सड़क में लगे चौकों की संख्या

$$= \frac{\text{सड़क का क्षेत्रफल}}{\text{1 चौके का क्षेत्रफल}} = \frac{350}{0.35} = \frac{35000}{35} = 1000$$

अतः सड़क में लगे चौकों की संख्या = 1000

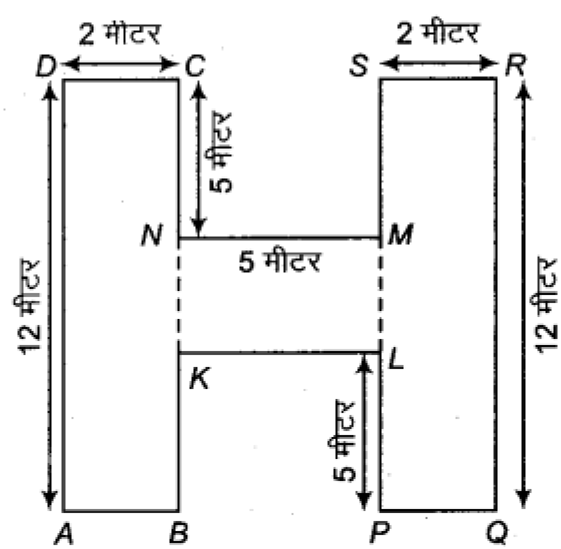
प्रश्न 8. एक आयताकार मैदान 60 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। इसके बीचो-बीच 4 मीटर चौड़ा मार्ग लम्बाई और चौड़ाई के समान्तर बना है। इस मार्ग पर 100 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से मिट्टी डलवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार मैदान की लम्बाई = 60 मी
आयताकार मैदान की चौड़ाई = 40 मी
माना कि आयताकार मैदान के बीच में लम्बाई के समान्तर मार्ग PQRS है तथा चौड़ाई के समान्तर मार्ग ABCD है।
आयताकार मार्ग PQRS का क्षेत्रफल = 60 × 4 = 240 वर्ग मी
आयताकार मार्ग ABCD का क्षेत्रफल = 40 × 4 = 160 वर्ग मी



वर्गाकार मार्ग KLMN का क्षेत्रफल = 4 × 4 = 16 वर्ग मी
कुल मार्ग का क्षेत्रफल = PQRS का क्षेत्रफल + ABCD का क्षेत्रफल – KLMN का क्षेत्रफल
= 240 + 160 – 16 = 384 वर्ग मी
1 मी2 मार्ग पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 100
384 वर्ग मी मार्ग पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 384 × 100 = ₹ 38400
अत: मार्ग पर मिट्टी डलवाने का व्यय = ₹ 38400

प्रश्न 9. चित्र में दी गई आकृति का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल: दी गई आकृति का क्षेत्रफल = आकृति ABCD का क्षेत्रफल + आकृति PQRS का क्षेत्रफल + आकृति KLMN का क्षेत्रफल
= AD × CD + QR × SR + MN × KN
= 12 × 2 + 12 × 2 + 6 × [12 – (5 + 5)]
= 24 + 24 + 5 × 2
= 24 + 24 + 10
= 58 मी
दी गई आकृति का परिमाप = AD + DC + CN + NM + MS + SR + RQ + QP + PL + LK + KB + BA
= 12 + 2 + 5 + 5 + 5 + 2 + 12 + 2 + 5 + 5 + 5 + 2 = 62 मी
अतः दी गई आकृति का क्षेत्रफल = 58
वर्ग मी तथा परिमाप = 62 मी

प्रश्न 10. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15.35 मीटर, 4.65 मीटर एवं 6.50 मीटर है। यदि कमरे में 4 दरवाजे प्रत्येक 1.5 मीटर × 1.3 मीटर और 3 खिड़कियाँ प्रत्येक 1.5 मीटर × 1.2 मीटर की हो तो 3.40 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे में रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे की लम्बाई = 15.35 मी
चौड़ाई = 4.65 मी तथा ऊँचाई = 6.50 मी
1 दरवाजे की लम्बाई = 1.5 मी। तथा चौड़ाई = 1.3 मी
1 दरवाजे का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 1.5 × 1.3 = 1.95 वर्ग मी
4 दरवाजों का क्षेत्रफल = 1.95 × 4 = 7.8 वर्ग मी
1 खिड़की की लम्बाई = 1.5 मी तथा चौड़ाई = 1.2 मी
1 खिड़की का क्षेत्रफल = 1.5 × 12 = 1.80 वर्ग मी
3 खिड़कियों का क्षेत्रफल = 1.8 × 3 = 5.4 वर्ग मी।
खिड़की तथा दरवाजों को छोड़कर कमरे में रंग करवाना हैं।
कमरे में रंग करवाने का वाँछित क्षेत्रफल = 2(लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई – (4 दरवाजों का क्षेत्रफल + 3 खिड़कियों का क्षेत्रफल)
= 2(15.35 + 4.65) × 6.5 – (7.8 + 5.4)
= 40 x 6.5 – 13.2
= 260.0 – 13.2
= 246.8 मी^{2}
1 वर्ग मी क्षेत्रफल पर रंग करने का खर्च = ₹ 3.40
246.8 वर्ग मी क्षेत्रफल पर रंग करने का खर्च = ₹ 246.8 × 3.40 = ₹ 839.12
अतः कमरे की दीवारों पर रंग करवाने का खर्च = ₹ 839.12

प्रश्न 11. एक पानी की टंकी 10 मीटर लम्बी, 8 मीटर चौड़ी तथा 2 मीटर गहरी है। इसकी चारों दीवारों एवं तल की मरम्मत कराने का व्यय 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

हल: पानी की टंकी लम्बाई = 10 मी।
चौड़ाई = 8 मी तथा गहराई (ऊँचाई) = 2 मी
पानी की टंकी की चारों दीवारों तथा तल की मरम्मत करनी है।
वांछित क्षेत्रफल = टंकी की चारों दीवारों का क्षेत्रफल + टंकी के तल का क्षेत्रफले
= 2(लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई + लम्बाई × चौड़ाई
= 2(10 + 8) × 2 + 10 × 8
= 72 + 80
= 152 मी
1 वर्ग मी पर मरम्मत करवाने का व्यय = ₹ 15
152 वर्ग मी पर मरम्मत करवाने का व्यय = ₹ 152 × 15 = ₹ 2280
अतः टंकी की दीवारों एवं तले की मरम्मत करवाने का व्यय = ₹ 2280

Miscellaneous Exercise

निम्नलिखित में से प्रत्येक का सही उत्तर लिखिए-

प्रश्न 1. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 8 सेमी है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा:
(A) 16√3 वर्ग सेमी
(B) 8√3 वर्ग सेमी
(C) 64√3 वर्ग सेमी
(D) 4√3 वर्ग सेमी

उत्तर : (A) 16√3 वर्ग सेमी

संकेत

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्न 2. एक त्रिभुज की भुजाएँ 40 सेमी, 70 सेमी एवं 90 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल होगाः
(A) 600√5 वर्ग मी
(B) 500√6 वर्ग सेमी
(C) 482√5 वर्ग सेमी
(D) 60√5 वर्ग सेमी

उत्तर : (A) 600√5 वर्ग मी

संकेत

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+70+90}{2} = 100 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{100(100-40)(100-70)(100-90)}$$
$$= \sqrt{100 \times 60 \times 30 \times 10}$$
$$= \sqrt{10 \times 10 \times 2 \times 30 \times 30 \times 2 \times 5}$$
$$= 10 \times 30 \times 2\sqrt{5} = 600\sqrt{5} \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्न 3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 6 सेमी तथा अन्य भुजा 8 सेमी है। तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगाः

(A) 8√5 वर्ग सेमी
(B) 5√8 वर्ग सेमी
(C) 3√55 वर्ग सेमी
(D) 3√8 वर्ग सेमी

उत्तर : (A) 8√5 वर्ग सेमी

संकेत

$$\text{समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$$
$$= \frac{8}{4}\sqrt{4 \times 6^2 - 8^2} = 2\sqrt{4 \times 36 - 64}$$
$$= 2\sqrt{144 - 64} = 2\sqrt{80} = 2\sqrt{4 \times 4 \times 5}$$
$$= 2 \times 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्न 4. समबाहु त्रिभुज का परिमाप 60 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल होगाः

(A) 400√3 वर्ग सेमी
(B) 100√3 वर्ग सेमी
(C) 50√3 वर्ग सेमी
(D) 200√3 वर्ग सेमी

उत्तर : (B) 100√3 वर्ग सेमी

संकेत:

माना समबाहु त्रिभुज की भुजा a सेमी है।

समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 60$ सेमी

$\Rightarrow \quad 3a = 60 \Rightarrow a = \frac{60}{3} = 20$ सेमी

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (20)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 20 \times 20 = 100\sqrt{3}$ सेमी^{2}

प्रश्न 5. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी है एवं आधार 9 सेमी हो तो लम्ब की लम्बाई होगी:

(A) 8 सेमी

(B) 4 सेमी

(C) 16 सेमी

(D) 32 सेमी

उत्तर : (A) 8 सेमी

संकेत:

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई = क्षेत्रफल

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ × 9 × ऊँचाई = 36

⇒ ऊँचाई = 8 सेमी

प्रश्न 6. किसी वर्ग की भुजा 10 सेमी हो तो परिमाप होगाः

(A) 20 सेमी

(B) 10 सेमी

(C) 40 सेमी

(D) 30 सेमी

उत्तर : (C) 40 सेमी

संकेत : वर्ग का परिमाप = 4 × a = 4 × 10 = 40 सेमी

प्रश्न 7. समचतुर्भुज के विकर्ण 8 सेमी एवं 6 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल होगा :

(A) 48 वर्ग सेमी

(B) 24 वर्ग सेमी

(C) 12 वर्ग सेमी
(D) 96 वर्ग सेमी

उत्तर : (B) 24 वर्ग सेमी
संकेत : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्मों का गुणनफल
= $\frac{1}{2}$ × 8 × 6
= 24 सेमी^{2}

प्रश्न 8. किसी कमरे का परिमाप 40 मीटर और ऊँचाई 4 मीटर है तो उसकी चारों दीवारों का क्षेत्रफल होगा:
(A) 40 वर्ग सेमी
(B) 80 वर्ग सेमी
(C) 120 वर्ग सेमी
(D) 160 वर्ग सेमी

उत्तर : (D) 160 वर्ग सेमी
संकेत : कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2(लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई = 40 × 4 = 160 सेमी^{2}

प्रश्न 9. समबाहु त्रिभुज भुजा की लम्बाई क्या होगी जिसका क्षेत्रफल 9√3 वर्ग सेमी है।

हल: माना समबाहु त्रिभुज की भुजा a सेमी है।

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 9\sqrt{3}$ **वर्ग सेमी**

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = \frac{9\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}} = 36$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{36} = 6 \text{ सेमी}$$

अत: समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई $= 6$ **सेमी**

प्रश्न 10. चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

हल: चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र है:

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

जहाँ $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ **तथा** a, b, c, d **चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ हैं।**

प्रश्न 11. एक वर्ग का क्षेत्रफल 144 आर है तो इसका परिमाप लिखिए।

हल: माना कि वर्ग की भुजा a मी है।
वर्ग का क्षेत्रफल = 144 आर (∵ 1 आर (are या a) = 100 वर्ग मी)
⇒ a^2 = 144 × 100 वर्ग मी
⇒ a = √(144 × 100) = 120 मी
वर्ग का परिमाप = 4a = 4 × 120 = 480 मी
अतः वर्ग का परिमाप = 480 मी
नोट : आर क्षेत्रफल की बड़ी इकाई है। इसे are या a से दर्शाते हैं।
अतः 1 आर = 100 वर्ग मीटर

प्रश्न 12. समान्तर चतुर्भुज का आधार 18 मीटर एवं क्षेत्रफल 174.60 वर्ग मीटर हो तो इसकी ऊँचाई लिखिए।

हल: समान्तर चतुर्भुज का आधार = 18 मी
माना कि समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई h मी है।
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 174.60 वर्ग मी
⇒ आधार × ऊँचाई = 174.60
⇒ 18 × h = 174.60
⇒ h = $\frac{174.60}{18}$ = 9.7 मी
अत: समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई = 9.7 मी

प्रश्न 13. चतुर्भुज का क्षेत्रफल लिखिए जिसका विकर्ण 6 सेमी एवं अन्तः लम्बों का योग 12 सेमी है।

हल: चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई = 6 सेमी
चतुर्भुज के अन्तः लम्बों का योग = 12 सेमी
चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × (अन्तः लम्बों का योग)
$\frac{1}{2}$ × 6 × 12 = 36 वर्ग सेमी

प्रश्न 14. किसी त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 25 : 17 : 12 है तथा परिमाप 540 मीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि त्रिभुज की भुजाएँ 25x मी, 17x मी तथा 12x मी है।
त्रिभुज का परिमाप = 25x + 17x + 12x
⇒ 540 = 54x
⇒ x = $\frac{540}{54}$
⇒ x = 10
त्रिभुज की भुजाएँ हैं :

a = 25 × 10 = 250 मी, b = 17 × 10 = 170 मी तथा c = 12 × 10 = 120 मी

$$\therefore \quad s = \frac{250+170+120}{2} = 270 \text{ मी}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270(270-250)(270-170)(270-120)}$

$= \sqrt{270 \times 20 \times 100 \times 150}$

$= \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 10 \times 10 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 10 = 9000$ वर्ग मीटर

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 9000$ वर्ग मीटर

प्रश्न 15. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 12 वर्ग सेमी है। इसका आधार ज्ञात कीजिए यदि इसकी समान भुजाओं की लम्बाई 5 सेमी हो।

हल: समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं की लम्बाई (a) = 5 सेमी।
माना कि समद्विबाहु त्रिभुज की तीसरी भुजा b सेमी है।
समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = 12 वर्ग सेमी

$\Rightarrow \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 12 \Rightarrow \frac{b}{4}\sqrt{4 \times 5^2 - b^2} = 12$

$\Rightarrow b\sqrt{(100 - b^2)} = 48 \Rightarrow 100b^2 - b^4 = 2304$

$\Rightarrow \quad b^4 - 100b^2 + 2304 = 0$

$\Rightarrow \quad b^4 - (64 + 36)b^2 + 2304 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \because 64 \times 36 = 2304 \\ \quad 64 + 36 = 100 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad b^4 - 64b^2 - 36b^2 + 2304 = 0$

$\Rightarrow \quad b^2(b^2 - 64) - 36(b^2 - 64) = 0$

$\Rightarrow \quad (b^2 - 64)(b^2 - 36) = 0$

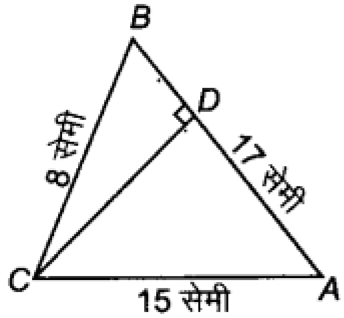
$\Rightarrow \quad b^2 - 64 = 0$ या $b^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow b^2 = 64$ या $b^2 = 36 \Rightarrow b = 8$ या $b = 6$

अत: त्रिभुज का आधार $= 8$ सेमी या 6 सेमी

प्रश्न 16. किसी त्रिभुज का परिमाप 40 सेमी है। यदि इसकी दो भुजाएँ क्रमशः 8 सेमी एवं 15 सेमी हो तो इसको क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा सबसे लम्बी भुजा पर शीर्ष से डाले गए लम्ब की लम्बाई

ज्ञात कीजिए।



हल: त्रिभुज की दो भुजाएँ 8 सेमी तथा 15 सेमी है। माना कि त्रिभुज की तीसरी भुजा a सेमी है।
त्रिभुज को परिमाप = 40 सेमी
⇒ 8 + 15 + a = 40
⇒ 23 + a = 40
⇒ a = 40 – 23 = 17 सेमी
अतः त्रिभुज की भुजाएँ हैं:
a = 8 सेमी, b = 15 सेमी तथा c = 17 सेमी

$$\therefore \quad s = \frac{\text{परिमाप}}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ सेमी}$$

हीरो के सूत्र से,

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$$
$$= \sqrt{20\times12\times5\times3}$$
$$= \sqrt{2\times2\times5\times2\times2\times3\times5\times3}$$
$$= 2\times2\times3\times5 = 60 \text{ वर्ग सेमी}$$

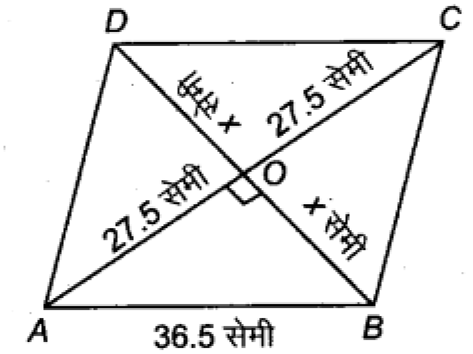
सबसे लम्बी भुजा AB पर C से CD लम्ब डाला।

पुन: त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{1}{2}\times17\times\text{लम्ब} \Rightarrow \text{लम्ब} = \frac{120}{17} = 7\frac{1}{17} \text{ सेमी}$$

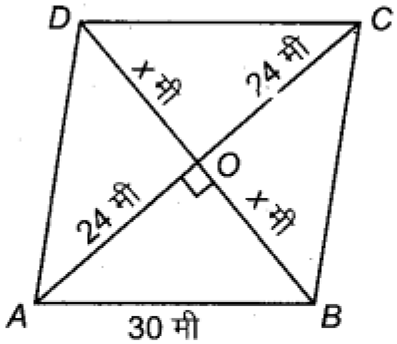
प्रश्न 17. एक समचतुर्भुज का परिमाप 146 सेमी तथा एक विकर्ण की लम्बाई 55 सेमी हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल: माना ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसका विकर्ण (AC) = 55 सेमी, विकर्ण (BD) = 2x सेमी तथा भुजा = a सेमी
समचतुर्भुज का परिमाप = 146 सेमी
⇒ 4a = 146
⇒ a = 36.5 सेमी
समचतुर्भुज की भुजा (AB) = 36.5 सेमी
चूँकि समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।
$\angle AOB = 90°$ तथा AO = OC = $\frac{AC}{2}$
⇒ AO = $\frac{55}{2}$ = 27.5 सेमी
तथा BO = OD = $\frac{1}{2}$ BD
⇒ OB = $\frac{2x}{2}$ = x सेमी
समकोण त्रिभुज AOB में, (पाइथागोरस प्रमेय से)
$AB^2 = AO^2 + BO^2$
⇒ $36.5^2 = 27.5^2 + x^2$
⇒ $36.5^2 - 27.5^2 = x^2$
⇒ $(36.5 + 27.5)(36.5 - 27.5) = x^2$
⇒ $640 \times 9 = x^2$
⇒ x = 8 × 3 = 24 सेमी
विकर्ण (BD) = 2 × 24 = 48 सेमी
समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × AC × BD = $\frac{1}{2}$ × 55 × 48 = 1320 सेमी^{2}
अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 1320 सेमी^{2}

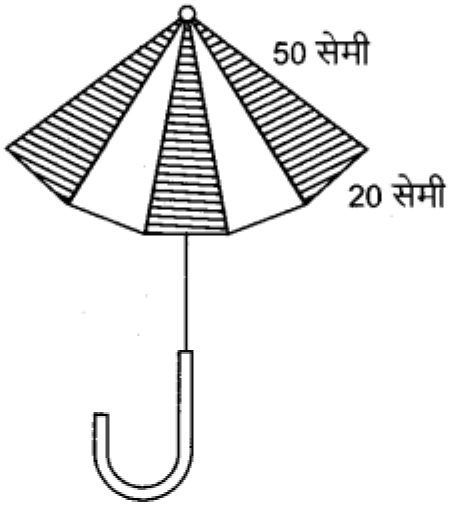
प्रश्न 18. एक समचतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के खाने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 मीटर हो और बड़ा विकर्ण 48 मीटर है तो प्रत्येक गाय को खाने के

लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?



हल: मानी ABCD एक समचतुर्भुजाकार घास का मैदान है, जिसकी। प्रत्येक भुजा 30 मी तथा विकर्ण (AC) = 48 मी है।
माना विकर्ण (BD) = 2x मी है।
चूँकि समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।
$\angle AOB = 90°$, $AO = OC = \frac{AC}{2}$
$\Rightarrow AO = \frac{48}{2} = 24$ मी
तथा $OB = OD = \frac{2x}{2} = x$ मी
समकोण त्रिभुज AOB में, (पाइथागोरस प्रमेय से)
$AB^2 = AO^2 + OB^2$
$\Rightarrow 30^2 = 24^2 + x^2$
$\Rightarrow x^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324$
$\Rightarrow x = \sqrt{324} = 18$ मी
तथा $BD = 2 \times 18 = 36$ मी
समचतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 48 \times 36 = 864$ वर्ग मी
18 गायों के लिए समचतुर्भुजाकार खेत की घास का क्षेत्रफल = 864 वर्ग मी.
1 गाय के लिए समचतुर्भुजाकार खेत की घास का क्षेत्रफल = $\frac{864}{18} = 48$ वर्ग मी
अतः 1 गाय के लिए खेत की घास का क्षेत्रफल = 48 मी

प्रश्न 19. दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को जोड़कर एक छाता बनाया जाता है। प्रत्येक टुकड़े की माप 20 सेमी, 50 सेमी और 50 सेमी है। छाते में कितना कपड़ा लगा है।



हल: एक त्रिभुजाकार कपड़े के टुकड़े की माप हैं।
a = 20 सेमी, b = 50 सेमी तथा c = 50 सेमी

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{20+50+50}{2}$$

$$= 60 \text{ सेमी}$$

त्रिभुजाकार कपड़े के टुकड़े का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{60(60-20)(60-50)(60-50)}$$

$$= \sqrt{60 \times 40 \times 10 \times 10}$$

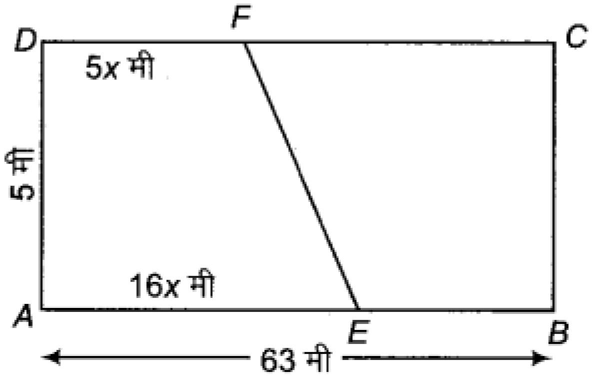
$$= \sqrt{3 \times 20 \times 20 \times 2 \times 10 \times 10}$$

$$= 10 \times 20\sqrt{6} = 200\sqrt{6} \text{ वर्ग सेमी}$$

चूँकि दो विभिन्न रंगों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को जोड़कर छाता बनाया जाता है।
अत: छाते में लगे कपड़े का क्षेत्रफल = $200\sqrt{6} \times 10 = 2000\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 20. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं का अनुपात 16 : 5 है जिसे एक आयत जिसकी भुजाएँ 63 मीटर एवं 5 मीटर में से काटा गया है। यदि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का $\frac{4}{15}$ भाग हो तो समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं को ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि ABCD एक आयत है, जिसमें से काटकर समलम्ब चतुर्भुज बनाया गया है।
समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं का अनुपात = 16 : 5



माना कि समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 16x मी तथा 5x मी है।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$= 63 \times 5 = 315 \text{ वर्ग मी}$$

समलम्ब चतुर्भुज ($AEFD$) का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(\text{समान्तर भुजाओं का योग}) \times \text{उनके बीच की दूरी}$$

$$= \frac{1}{2} \times (16x + 5x) \times 5 = \frac{5 \times 21x}{2} = \frac{105x}{2} \text{ वर्ग मी}$$

प्रश्नानुसार, समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{4}{15} \times \text{आयत का क्षेत्रफल}$$

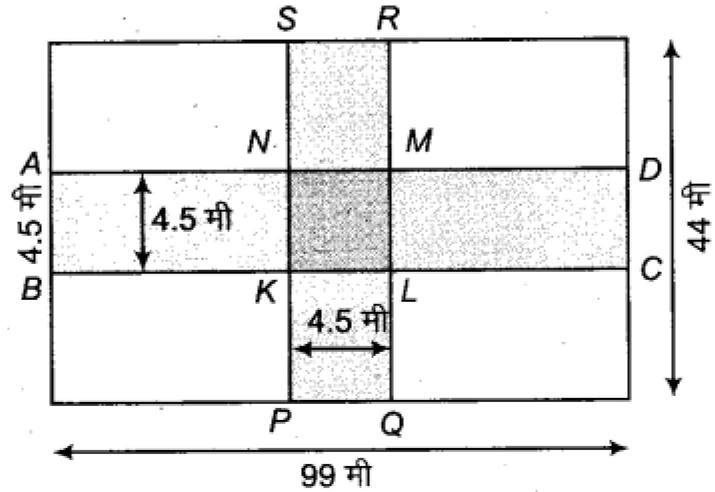
$$\Rightarrow \quad \frac{105x}{2} = \frac{4}{15} \times 315 \Rightarrow \quad \frac{105x}{2} = 84$$

$$x = \frac{84 \times 2}{105} = 1.6$$

अत: समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ हैं-
AE = 16x = 16 × 1.6 = 25.6 मी।
तथा DF = 5x = 5 × 1.6 = 8 मी
अतः समान्तर भुजाओं की लम्बाई = 25.6 मी तथा 8 मी

प्रश्न 21. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 4356 वर्ग मीटर है। मैदान की लम्बाई 99 मीटर है। मैदान के बीचों बीच लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर 4.5 मीटर चौड़ी सड़क बनाई गई है। सड़क पर 1.50 मीटर भुजा वाले कितने वर्गाकार चौके लगेंगे?

हल: आयताकार मैदान की लम्बाई = 99 मी
आयताकार मैदान का क्षेत्रफल = 4356 वर्ग मी



⇒ लम्बाई × चौड़ाई = 4356
⇒ 99 × चौड़ाई = 4356
⇒ चौड़ाई = $\frac{4356}{99}$ = 44 मी
चूँकि आयताकार मैदान के बीचों-बीच लम्बाई तथा चौड़ाई के समान्तर 4.5 मी चौड़ी सड़क बनाई गई हैं।
लम्बाई के समान्तर सड़क (ABCD) का क्षेत्रफल = 99 × 4.5 = 445.5 वर्ग मी
चौड़ाई के समान्तर सड़क (PQRS) का क्षेत्रफल = 44 × 4.5 = 198 वर्ग मी
वर्गाकार सड़क KLMN को क्षेत्रफल = 4.5 × 4.5 = 20.25 वर्ग मी
सड़क का कुल क्षेत्रफल = ABCD का क्षेत्रफल + PQRS का क्षेत्रफल – KLMN का क्षेत्रफल
= 445.5 + 198 – 20.25 = 623.25 वर्ग मी
सड़क पर लगने वाले वर्गाकार चौके की भुजा = 1.5 मी
सड़क पर लगने वाले वर्गाकार चौके का क्षेत्रफल = 1.5 × 1.5 = 2.25 वर्ग मी
सड़क पर लगने वाले चौकों की संख्या

$$= \frac{\text{सड़क का क्षेत्रफल}}{1 \text{ चौके का क्षेत्रफल}} = \frac{623.25}{2.25} = 227$$

अत: सड़क पर लगने वाले चौकों की संख्या = 277

प्रश्न 22. एक कमरा 8 मीटर 50 सेमी लम्बा एवं 6 मीटर 50 सेमी चौड़ा है। इसके फर्श के लिए 25 सेमी चौड़ाई की कितनी लम्बी दरी पट्टी चाहिए? 20 रुपये प्रति मीटर की दर से पट्टी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे की लम्बाई = 8 मी 50 सेमी = 8.50 मी
कमरे की चौड़ाई = 6 मी 50 सेमी = 6.50 मी
कमरे के फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = 8.50 × 6.50 = 55.25 वर्ग मी
फर्श पर 25 सेमी चौड़ाई की दरी पट्टी बिछानी है।
25 सेमी = 0.25 मी

$$\text{दरी पट्टी की लम्बाई} = \frac{\text{कमरे का क्षेत्रफल}}{\text{दरी पट्टी की चौड़ाई}}$$

$$= \frac{55.25}{0.25} = \frac{5525}{25} = 221 \text{ मी.}$$

1 मी दरी पट्टी की कीमत = ₹ 20
221 मी दरी पट्टी की कीमत = 221 × 20 = ₹ 4420
अतः दरी. पट्टी की लम्बाई = 221 मी
तथा इसकी कीमत = ₹ 4420

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. त्रिभुज की भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी तथा 7 सेमी है, तब त्रिभुज का अर्ध परिमाप है:
(A) 6 सेमी
(B) 7 सेमी
(C) 8 सेमी
(D) 9 सेमी

प्रश्न 2. 16√3 सेमी क्षेत्रफल वाले समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई है:
(A) 36 सेमी
(B) 8 सेमी
(C) 6 सेमी
(D) 4 सेमी

प्रश्न 3. समबाहु त्रिभुज की माध्यिका की लम्बाई 3 सेमी है। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई है:
(A) 2√3 सेमी
(B) 3√3 सेमी
(C) 4√3 सेमी
(D) 2√6 सेमी

प्रश्न 4. समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 सेमी है। त्रिभुज के लम्बे की लम्बाई है:
(A) √3 सेमी
(B) 2√3 सेमी
(C) 3√2 सेमी
(D) √2 सेमी

प्रश्न 5. यदि समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को दुगुना कर दिया जाय, तो नये त्रिभुज तथा पुराने त्रिभुज के क्षेत्रफलों में अनुपात होगाः

(A) 4 : 1

(B) 1 : 4

(C) 2 : 1

(D) 1 : 2

प्रश्न 6. एक समबाहु त्रिभुज तथा वर्ग का परिमाप बराबर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल 36√3 सेमी^{2} है तब वर्ग के विकर्ण की लम्बाई है:

(A) 9√3 सेमी

(B) 9√2 सेमी

(C) 8√2 सेमी

(D) 18√2 सेमी

प्रश्न 7. त्रिभुज के अर्द्ध परिमाप तथा इसकी भुजाओं में अन्तर क्रमशः 4 सेमी, 5 सेमी तथा 6 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल है:

(A) 2√30 सेमी^{2}

(B) 10√3 सेमी^{2}

(C) 20√10 सेमी^{2}

(D) 30√2 सेमी^{2}

प्रश्न 8. समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ 2.4 सेमी तथा 3.2 सेमी हैं। उनके संगत लम्बों का अनुपात हैं:

(A) 3 : 4

(B) 4 : 3

(C) 2 : 3

(D) 3 : 2

उत्तरमाला: 1. (D) 2. (B) 3. (A) 4. (B) 5. (B) 6. (B) 7. (D) 8. (B)

प्रश्न 9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1. परिमाप एक बहुभुज की भुजाओं का .... होता है।
2. एक समद्विबाहु समलम्ब की असमान्तर रेखाओं की लम्बाई .... होती है।
3. .... चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर होता है।
4. यदि त्रिभुज का आधार, आधा कर दिया, तब इसका क्षेत्रफल पुराने त्रिभुज के क्षेत्रफल का .... होगा।
5. हीरो सूत्र में s का मान त्रिभुज के .... के बराबर होता है।

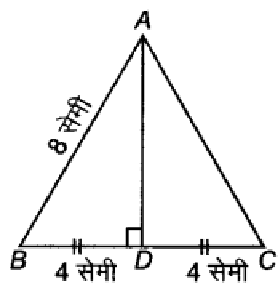
6. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x (.........) x समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी।
7. चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ...

हल

1. योग,
2. समान,
3. समलम्ब
4. आधा,
5. अर्द्धपरिमाप,
6. समान्तर भुजाओं का योग,
7. √[(s – a)(s – b)(s – c)(s – d)]

अतिलघूतरीय/लघूत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 सेमी है, ज्ञात करो-
(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल,
(ii) त्रिभुज की ऊँचाई



हल: (i) माना कि ABC एक समबाहु त्रिभुज हैं, जिसकी प्रत्येक भुजा 8 सेमी है।
समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 \times 8$
= 16√3 सेमी
अतः समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = 16√3 सेमी^{2}
(ii) समबाहु त्रिभुज ABC में AD, इसकी ऊँचाई हैं।
समबाहु त्रिभुज का लम्ब संगत भुजा को समद्विभाजित करता है।
BD = CD = $\frac{8}{2}$ = 4 सेमी
समकोण त्रिभज ABD में, (पाइथागोरस प्रमेय से)
$AB^2 = BD^2 + AD^2$
⇒ $AD^2 = 8^2 – 4^2$ = 64 – 16 = 48
⇒ AD = √48 = 4√3 सेमी
अतः त्रिभुज की ऊँचाई = 4√3 सेमी

प्रश्न 2. यदि समबाहु त्रिभुज का परिमाप अंकिक मान में इसके क्षेत्रफल के बराबर है, तब समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा?

हल: माना कि समबाहु त्रिभुज की भुजा a सेमी है।
त्रिभुज का परिमाप = 3a ...(i)
तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ...(ii)
प्रश्नानुसार, त्रिभुज का परिमाप = त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \quad 3a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (समी. (i) तथा (ii) से)

$\Rightarrow \quad \frac{3\times 4}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{a} \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{3} = a$

अत: समबाहु त्रिभुज की भुजा $(a) = 4\sqrt{3}$
a का मान समी. (ii) में रखने पर
समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times 4\times 3 = 12\sqrt{3}$ सेमी^{2}

अत: समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 12\sqrt{3}$ सेमी^{2}

प्रश्न 3. समद्विबाहु त्रिभुज का आधार समान भुजा का $\frac{3}{2}$ गुना है। यदि इसका परिमाप 28 सेमी है तब इसका क्षेत्रफल तथा ऊँचाई ज्ञात करो।

हल: माना कि समद्विबाहु त्रिभुज की प्रत्येक समान भुजा × सेमी है।
आधार = $\frac{3}{2}$ × तथा परिमाप = 28 सेमी

$\Rightarrow x + x + \frac{3}{2}x = 28 \quad \Rightarrow \quad 2x + \frac{3x}{2} = 28$

$\Rightarrow \quad \frac{7x}{2} = 28 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28\times 2}{7} = 8$

अत: प्रत्येक समान भुजा $(a) = 8$ सेमी, 8 सेमी
तथा आधार $(b) = \frac{3}{2}\times 8$ सेमी $= 12$ सेमी

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$= \frac{12}{4}\sqrt{4\times 8^2 - 12^2} = 3\sqrt{256 - 144} = 3\sqrt{112}$

$= 3\sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 7} = 3\times 2\times 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$ सेमी^{2}

पुन: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times$ आधार × ऊँचाई

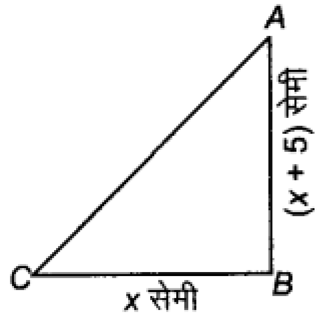
$\Rightarrow \quad 12\sqrt{7} = \frac{1}{2}\times 12\times$ ऊँचाई

$\Rightarrow \quad \frac{12\sqrt{7}}{6}$ = ऊँचाई $\Rightarrow 2\sqrt{7}$ = ऊँचाई

अत: समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 12\sqrt{7}$ सेमी^{2}

तथा ऊँचाई $= 2\sqrt{7}$ सेमी

प्रश्न 4. समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 150 सेमी है। यदि लम्ब की लम्बाई तथा आधार की लम्बाई का अन्तर 5 सेमी है तब त्रिभुज का परिमाप ज्ञात करो।



हल: माना ABC एक समकोण त्रिभुज है।
माना आधार × सेमी है, तब लम्ब की लम्बाई = (x + 5) सेमी।
समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = 150 सेमी^{2}
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times BC \times AB = 150$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times x \times (x + 5) = 150$
$\Rightarrow x^2 + 5x = 300$
$\Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$
हल करने पर,
$(x + 20)(x - 15) = 0$
$\Rightarrow x + 20 = 0$ तथा $x - 15 = 0$
$\Rightarrow x = -20$ (सम्भव नहीं) या $x = 15$
BC = 15 सेमी तथा AB = 15 + 5 = 20 सेमी
समकोण त्रिभुज ABC में,(पाइथागोरस प्रमेय से)
$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$\Rightarrow AC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$
$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25$ सेमी
त्रिभुज ABC को परिमाप = AB + BC + AC = 20 + 15 + 25 = 60 सेमी
अतः त्रिभुज का परिमाप = 60 सेमी

प्रश्न 5. एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो समान भुजाओं में प्रत्येक 5 सेमी एवं तीसरी भुजा 4 सेमी है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि a = 5 सेमी, b = 4 सेमी।
अतः समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{b}{4} \times \sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{4}{4} \times \sqrt{4 \times 25 - 16}$$

$$= \sqrt{84} \text{ वर्ग सेमी } = 2\sqrt{21} \text{ वर्ग सेमी।}$$

प्रश्न 6. समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 20 है।

हल: दिया है : भुजा = 2a

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$$

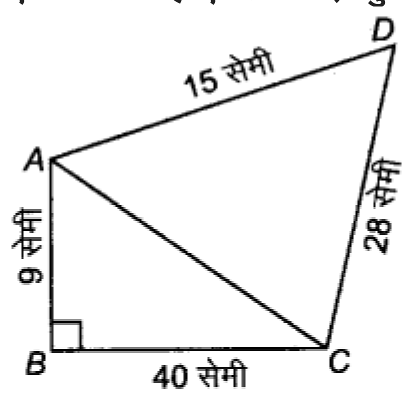
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4a^2 = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\therefore \text{त्रिभज की ऊँचाई} = \frac{2 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{2 \times a^2\sqrt{3}}{2a} = a\sqrt{3} \text{ इकाई।}$$

प्रश्न 7. एक चतुर्भुज को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाएँ क्रमशः 9 सेमी, 40 सेमी, 28 सेमी एवं 15 सेमी हैं एवं प्रथम दो भुजाओं के मध्य समकोण है।



हल: माना ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें भुजाएँ AB, BC, CD और DA क्रमशः 9 सेमी, 40 सेमी, 28 सेमी और 15 सेमी हैं।

AB तथा BC के मध्य कोण 90° है।
A को C से मिलाया जिससे चतुर्भुज, दो त्रिभुजों (ΔABC और (ΔACD) में विभक्त हो जाता है।
ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (लम्बवत् भुजाओं का गुणनफल)
= $\frac{1}{2}$ × 9 × 40
= 9 × 20
= 180 वर्ग सेमी
ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,
कर्ण^2 = (आधारे)^2 + (लम्ब)^2
$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$\Rightarrow AC^2 = (40)^2 + (9)^2 = 1600 + 81 = 1681$
⇒ AC = √1681 = 41 सेमी
अत: ΔACD में, a = AC = 41 सेमी, b = CD = 28 सेमी, c = DA = 15 सेमी

$$\text{अर्द्ध-परिमाप } (s) = \frac{41 + 28 + 15}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ सेमी}$$

ΔACD का क्षेत्रफल

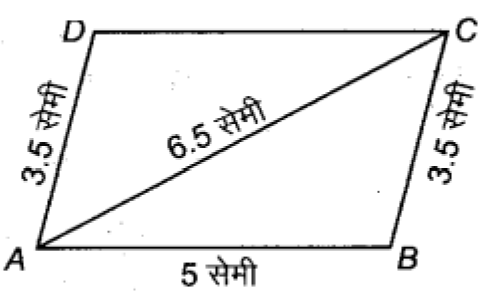
$$= \sqrt{42\,(42-41)\,(42-28)\,(42-15)}$$
$$= \sqrt{42 \times 1 \times 14 \times 27}$$
$$= \sqrt{14 \times 3 \times 14 \times 3 \times 3 \times 3}$$
$$= 14 \times 3 \times 3 = 126 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD को क्षेत्रफल
= 180 + 126
= 306 वर्ग सेमी।

प्रश्न 8. किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः 5 सेमी एवं 3.5 सेमी हैं तथा विकर्ण 6.5 सेमी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 2 × (ΔABC का क्षेत्रफल)

अत: ΔABC के लिए, $c = AB = 5$ सेमी, $a = BC = 3.5$ सेमी एवं $b = AC = 6.5$ सेमी



अत: $s = \frac{5 + 3.5 + 6.5}{2} = 7.5$ सेमी

ΔABC का क्षेत्रफल (हीरो के सूत्र से)

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

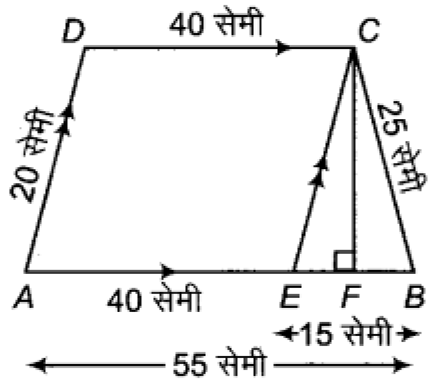
$= \sqrt{7.5 \times (7.5 - 3.5) \times (7.5 - 6.5) \times (7.5 - 5)}$

$= \sqrt{7.5 \times 4 \times 1 \times 2.5}$

अत: समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= 2 \times \sqrt{2.5 \times 3 \times 2.5} = 5\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 9. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान्तर भुजाएँ क्रमशः 55 सेमी एवं 40 सेमी हैं। तथा असमान्तर भुजाएँ क्रमशः 20 सेमी एवं 25 सेमी है।



हल: चित्र के अनुसार ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी समान्तर भुजाएँ AB = 55 सेमी, DC = 40 सेमी एवं असमान्तर भुजाएँ AD = 20 सेमी एवं BC = 25 सेमी हैं।
यहाँ AD || EC एवं CF ⊥ AB खींचा।
अतः EB = AB – AE = 55 – 40 = 15 सेमी एवं EC = 20 सेमी
ABEC में, यहाँ a = EB = 15, b = CE = 20, c = BC = 25

$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{15 + 20 + 25}{2} = \frac{60}{2} = 30$ सेमी

$\because \Delta BEC$ का क्षेत्रफल

$= \sqrt{30 \times (30 - 15) \times (30 - 20) \times (30 - 25)}$

$= \sqrt{30 \times 15 \times 10 \times 5} = \sqrt{22500} = 150$ वर्ग सेमी

ΔBCE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BE \times CF$

$\Rightarrow 150 = \frac{1}{2} \times 15 \times CF \Rightarrow CF = 20$ सेमी

समान्तर चतुर्भुज AECD का क्षेत्रफल = AE × CF = 40 × 20 = 800 वर्ग सेमी
अत: समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = (स.च. AECD का क्षे.) + (ABEC का क्षे.)
= 800 + 150 = 950 वर्ग सेमी।

प्रश्न 10. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 20 मीटर, 51 मीटर एवं 37 मीटर हैं। 2 × 3 वर्ग मीटर माप की कितनी क्यारियाँ इस खेत में बनाई जा सकती हैं?

हल: माना कि त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ।
a = 20 मीटर, b = 51 मीटर, c = 37 मीटर

$$\text{खेत का अर्द्ध–परिमाप } (s) = \frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{20+51+37}{2} = \frac{108}{2} = 54 \text{ सेमी}$$

$$\text{खेत का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{54(54-20)(54-51)(54-37)}$$

$$= \sqrt{54 \times 34 \times 3 \times 17}$$

$$= \sqrt{9 \times 6 \times 17 \times 2 \times 3 \times 17}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 17 \times 2 \times 3 \times 17}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 17 \times 17}$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 17 = 306 \text{ वर्ग मीटर}$$

$$\text{अत: एक क्यारी का क्षेत्रफल} = 2 \times 3 \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= 6 \text{ वर्ग मीटर}$$

$$\text{क्यारियों की संख्या} = \frac{\text{खेत का क्षेत्रफल}}{\text{1 क्यारी का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{306 \text{ वर्ग मीटर}}{6 \text{ वर्ग मीटर}} = 51 \text{ क्यारियाँ।}$$

प्रश्न 11. एक समबाहु त्रिभुज की माध्यिका की लम्बाई x सेमी है तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: दिया है : त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा a (माना) है।

ΔAPC में,

$$AC^2 = AP^2 + PC^2$$

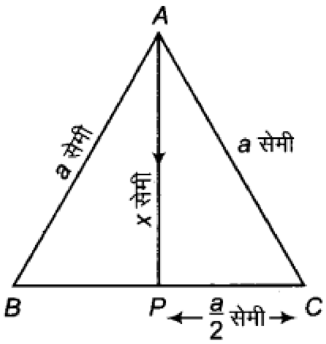
$$a^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{4} = x^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4x^2}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4x^2}{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$



अब, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AP = \frac{1}{2} \times a \times x = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{3}} \times x = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 12. यदि किसी त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को दुगुना कर दिया जाए तो इस त्रिभुज के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि हो जायेगी।

हल: माना कि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः x, y तथा z हैं एवं s इसका अर्द्ध-परिमाप है। अत.

$$s = \frac{x+y+z}{2}$$

अब पुन: माना कि नये त्रिभुज की भुजाएँ $2x, 2y$ तथा $2z$ हैं, एवं s' इसका अर्द्ध-परिमाप है। अत:

$$s' = \frac{2x+2y+2z}{2} = \frac{2(x+y+z)}{2} = 2s$$

अब माना कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमश: A_1 तथा A_2 हैं तो

$$A_1 = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

तथा $$A_2 = \sqrt{s'(s'-2x)(s'-2y)(s'-2z)}$$

$$\Rightarrow A_2 = \sqrt{2s(2s-2s)(2s-2y)(2s-2z)}$$

$$(\because s' = 2s)$$

$$\Rightarrow A_2 = 4\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

$\therefore$ त्रिभुज के क्षेत्रफल में वृद्धि $= A_2 - A_1$

$$= 4A_1 - A_1 = 3A_1$$

प्रतिशत वृद्धि $= \frac{3A_1}{A_1} \times 100 = 300\%$

अत: क्षत्रफल में वृद्धि $= 300\%$

प्रश्न 13. एक त्रिभुज तथा समचतुर्भुज का समान आधार तथा समान क्षेत्रफल है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 30 सेमी, 32 सेमी तथा 34 सेमी हो तथा समचतुर्भुज का आधार 32 सेमी पर स्थित हो तो इसकी ऊँचाई ज्ञात करो।

हल: त्रिभुज की भुजाएँ हैं:
a = 30 सेमी, b = 32 सेमी तथा c = 34 सेमी

$$\therefore\ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{30+32+34}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{48(48-30)(48-32)(48-34)}$$
$$= \sqrt{48\times18\times16\times14}$$
$$= \sqrt{3\times4\times4\times3\times3\times2\times4\times4\times2\times7}$$
$$= 4\times3\times4\times2\sqrt{21} = 96\sqrt{21}$$

चूँकि समचतुर्भुज का आधार 32 सेमी है तथा समचतुर्भुज व त्रिभुज का समान आधार तथा समान क्षेत्रफल है।

∴ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \quad \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = 96\sqrt{21}$$
$$\Rightarrow \quad 32\times \text{ऊँचाई} = 96\sqrt{21}$$
$$\Rightarrow \quad \text{ऊँचाई} = \frac{96\sqrt{21}}{32} = 3\sqrt{21} \text{ सेमी}$$

अत: समचतुर्भुज की ऊँचाई $= 3\sqrt{21}$ सेमी