Quadratic Equations

Ex. 2.1

1. खालीलपैकी कोणती समीकरणे वर्गसमीकरणे आहेत? **[प्रत्येकी 1 गुण]**

i. $11 = -4x^2 - x^3$

ii. $-\frac{3}{4}y^2 = 2y + 7$

iii. $(y - 2)(y + 2) = 0$ **[ऑक्टोबर 13]**

iv. $\frac{3}{y} - 4 = y$ **[मार्च 13]**

v. $m^3 + m + 2 = 4m$

vi. $n - 3 = 4n$

vii. $y^2 - 4 = 11y$

viii. $z - \frac{7}{z} = 4z + 5$

ix. $3y^2 - 7 = \sqrt{3}\,y$

x. $\frac{q^2 - 4}{q^2} = -3$

उकल :

i. दिलेले समीकरण :

$11 = -4x^2 - x^3$

$\therefore$ $x^3 + 4x^2 + 11 = 0$

येथे, x चा जास्तीत जास्त घातांक 3 आहे.

$\therefore$ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण नाही.**

ii. दिलेले समीकरण :

$-\frac{3}{4}y^2 = 2y + 7$

$\therefore$ $-\frac{3}{4}y^2 - 2y - 7 = 0$

येथे, y चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

$a = -\frac{3}{4}$, $b = -2$, $c = -7$ या वास्तव संख्या आहेत

आणि $a \neq 0$

$\therefore$ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

iii. दिलेले समीकरण :

$(y-2)(y+2)=0$

∴ $y^2-(2)^2=0$

∴ $y^2-4=0$

∴ $y^2+0y-4=0$

येथे, y चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

a = 1, b = 0, c = –4 या वास्तव संख्या आहेत आणि

$a \neq 0$

∴ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

iv. दिलेले समीकरण :

$\frac{3}{y}-4=y$

∴ $y-\frac{3}{y}+4=0$

∴ $y^2-3+4y=0$ ...[दोन्ही बाजूंना y ने गुणून]

∴ $y^2+4y-3=0$

येथे, y चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

a = 1, b = 4, c = –3 या वास्तव संख्या आहेत आणि

$a \neq 0$

∴ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

v. दिलेले समीकरण :

$m^3+m+2=4m$

∴ $m^3+m-4m+2=0$

∴ $m^3-3m+2=0$

येथे, m चा जास्तीत जास्त घातांक 3 आहे.

∴ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण नाही.**

vi. दिलेले समीकरण :

$n-3=4n$

∴ $4n-n+3=0$

∴ $3n+3=0$

∴ $n+1=0$ ----[दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून]

येथे, n चा जास्तीत जास्त घातांक 1 आहे.

∴ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण नाही.**

vii. दिलेले समीकरण :

$y^2 - 4 = 11y$

$\therefore \quad y^2 - 11y - 4 = 0$

येथे, y चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

$a = 1, b = -11, c = -4$ या वास्तव संख्या आहेत आणि $a \neq 0$

$\therefore$ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

viii. दिलेले समीकरण :

$z - \frac{7}{z} = 4z + 5$

$\therefore \quad z^2 - 7 = 4z^2 + 5z$

----[दोन्ही बाजूंना z ने गुणून]

$\therefore \quad 4z^2 - z^2 + 5z + 7 = 0$

$\therefore \quad 3z^2 + 5z + 7 = 0$

येथे, z चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

$a = 3, b = 5, c = 7$ या वास्तव संख्या आहेत आणि $a \neq 0$

$\therefore$ **दिलेले समीकरण हे y या चलातील वर्गसमीकरण आहे.**

ix. दिलेले समीकरण :

$3y^2 - 7 = \sqrt{3}\, y$

$\therefore \quad 3y^2 - \sqrt{3}\, y - 7 = 0$

येथे, y चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

$a = 3, b = -\sqrt{3}, c = -7$ या वास्तव संख्या आहेत व $a \neq 0$

$\therefore$ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

x. दिलेले समीकरण :

$$\frac{q^2-4}{q^2} = -3$$

∴ $q^2 - 4 = -3q^2$

∴ $3q^2 + q^2 - 4 = 0$

∴ $4q^2 - 4 = 0$

∴ $q^2 - 1 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 4 ने भागून]

∴ $q^2 + 0q - 1 = 0$

येथे, q चा जास्तीत जास्त घातांक 2 आहे.

$a = 1, b = 0, c = -1$ या वास्तव संख्या आहेत आणि

$a \neq 0$

∴ **दिलेले समीकरण हे वर्गसमीकरण आहे.**

Ex. 2.2

1. **खालील प्रत्येक उदाहरणामध्ये वर्गसमीकरणासमोर दिलेल्या चलाच्या किमती त्या समीकरणाची मुळे आहेत की नाही ते ठरवा.** **[प्रत्येकी 3 गुण]**

   i. $x^2 + 3x - 4 = 0,\ x = 1, -2, -3$ **[मार्च 15]**

   ii. $4m^2 - 9 = 0,\ m = 2, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

   iii. $x^2 + 5x - 14 = 0, x = \sqrt{2}, -7, 3$

   iv. $2p^2 + 5p - 3 = 0,\ p = 1, \frac{1}{2}, -3$

   v. $n^2 + 4n = 0,\ n = 0, -2, -4$

उकल :

i. $x^2 + 3x - 4 = 0,\ x = 1, -2, -3$

दिलेले समीकरण:

$x^2 + 3x - 4 = 0$ … (i)

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = 1$ ठेवू

डा.बा $= (1)^2 + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

$\therefore$ डा.बा = उ.बा.

$\therefore$ **1 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = -2$ ठेवू

डा.बा. $= (-2)^2 + 3(-2) - 4$

$= 4 - 6 - 4 = -6$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा.

$\therefore$ **−2 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = -3$ ठेवू

डा.बा $= (-3)^2 + 3(-3) - 4$

$= 9 - 9 - 4 = -4$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा.

$\therefore$ **−3 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

ii. $4m^2 - 9 = 0,\ m = 2, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

दिलेले समीकरण:

$4m^2 - 9 = 0$ ...(i)

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $m = 2$ ठेवू

डा.बा $= 4(2)^2 - 9 = 16 - 9 = 7$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा.

$\therefore$ **2 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $m = \frac{2}{3}$ ठेवू

डा.बा $= 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 9 = \frac{16}{9} - 9 = \frac{16-81}{9} = \frac{-65}{9}$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा.

$\therefore$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$ **हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $m = \frac{3}{2}$ ठेवू

डा.बा. $= 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 = \frac{36}{4} - 9$

$= 9 - 9 = 0$

$=$ उ.बा

$\therefore$ डा.बा $=$ उ.बा

$\therefore$ $\mathbf{\frac{3}{2}}$ **हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

iii. $x^2 + 5x - 14 = 0,\ x = \sqrt{2},\ -7,\ 3$

दिलेले समीकरण:

$x^2 + 5x - 14 = 0$ ...(i)

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = \sqrt{2}$ ठेवू

डा.बा $= (\sqrt{2})^2 + 5(\sqrt{2}) - 14$

$= 2 + 5\sqrt{2} - 14 = 5\sqrt{2} - 12$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा

$\therefore$ **$\sqrt{2}$ हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = -7$ ठेवू

डा.बा $= (-7)^2 + 5(-7) - 14 = 49 - 35 - 14 = 0$

$\therefore$ डा.बा = उ.बा

$\therefore$ **-7 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $x = 3$ ठेवू

डा.बा $= (3)^2 + 5(3) - 14 = 9 + 15 - 14 = 10$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा

$\therefore$ **3 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

iv. $2p^2 + 5p - 3 = 0,\ p = 1, \frac{1}{2}, -3$

दिलेले समीकरण:

$2p^2 + 5p - 3 = 0$ ...(i)

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $p = 1$ ठेवू

डा.बा $= 2(1)^2 + 5(1) - 3$

$= 2 + 5 - 3 = 4$

∴ डा.बा ≠ उ.बा

∴ **1 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $p = \frac{1}{2}$ ठेवू

डा.बा $= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3$

$= \frac{1+5-6}{2} = 0$

∴ डा.बा = उ.बा

∴ **$\frac{1}{2}$ हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $p = -3$ ठेवू

डा.बा $= 2(-3)^2 + 5(-3) - 3$

$= 18 - 15 - 3 = 0$

∴ डा.बा = उ.बा

∴ **–3 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

v. $n^2 + 4n = 0,\ n = 0, -2, -4$

दिलेले समीकरण:

$n^2 + 4n = 0$ ...(i)

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $n = 0$ ठेवून

डा.बा $= 0^2 + 4(0) = 0$

$\therefore$ डा.बा $=$ उ.बा

$\therefore$ **0 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $n = -2$ ठेवून

डा.बा $= (-2)^2 + 4(-2)$

$= 4 - 8 = -4$

$\therefore$ डा.बा $\neq$ उ.बा

$\therefore$ **–2 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ नाही.**

समी (i) च्या डाव्या बाजूत $n = -4$ ठेवून

डा.बा $= (-4)^2 + 4(-4) = 16 - 16 = 0$

$\therefore$ डा.बा $=$ उ.बा

$\therefore$ **– 4 हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

2. जर $x^2 - 7x + k = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 4 असेल तर k ची किंमत काढा.

[जुलै 15, ऑक्टोबर 12][2 गुण]

उकल:

$x = 4$ हे समीकरण $x^2 - 7x + k = 0$ चे मूळ आहे.

$\therefore$ $x = 4$ ने समीकरणाचे समाधान होते.

$\therefore$ $(4)^2 - 7(4) + k = 0$

$\therefore$ $16 - 28 + k = 0$

$\therefore$ $-12 + k = 0$

$\therefore$ $\mathbf{k = 12}$

3. जर $3y^2 - ky + 8 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ $\frac{2}{3}$ असेल तर k ची किंमत काढा. [2 गुण]

उकल:

$y = \frac{2}{3}$ हे समीकरण $3y^2 - ky + 8 = 0$ चे मूळ आहे.

$\therefore \quad y = \frac{2}{3}$ ने समीकरणाचे समाधान होते.

$\therefore \quad 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - k\left(\frac{2}{3}\right) + 8 = 0$

$\therefore \quad \frac{4}{3} - \frac{2}{3}k + 8 = 0$

दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणून,

$4 - 2k + 24 = 0$

$\therefore \quad 28 = 2k$

$\therefore \quad \mathbf{k = 14}$

4. $y^2 - (k - 4)y - 4k = 0$ या वर्गसमीकंरणाचे k हे मूळ आहे की नाही ते ठरवा. [2 गुण]

उकल:

दिलेले समीकरण:

$y^2 - (k - 4)y - 4k = 0$

समीकरणाच्या डाव्या बाजूत $y = k$ ठेवून

डा.बा $= (k)^2 - (k - 4)k - 4k$

$= k^2 - k^2 + 4k - 4k$

$= 0$

$=$ उ.बा

$\therefore$ डा.बा $=$ उ.बा

$\therefore$ **k हे दिलेल्या वर्गसमीकरणाचे मूळ आहे.**

5. **जर $kx^2 - 7x + 12 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 3 असेल तर k ची किंमत शोधा.**

[2 गुण]

उकल:

$x = 3$ हे समीकरण $kx^2 - 7x + 12 = 0$ चे मूळ आहे.

$\therefore$ $x = 3$ समीकरणाचे समाधान होते.

$\therefore$ $k(3)^2 - 7(3) + 12 = 0$

$\therefore$ $9k - 21 + 12 = 0$

$\therefore$ $9k - 9 = 0$

$\therefore$ $9k = 9$

$\therefore$ $\mathbf{k = 1}$

Ex. 2.3

1. खालील वर्गसमीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ [2 गुण]

उकल :

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$\therefore$ $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\therefore$ $(x - 3)(x - 2) = 0$

$\therefore$ $x - 3 = 0$ किंवा $x - 2 = 0$

$\therefore$ $x = 3$ किंवा $x = 2$

$\therefore$ **3 आणि 2 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ii. $x^2 + 10x + 24 = 0$ [मार्च 12][2 गुण]

उकल :

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 6x + 4x + 24 = 0$

$\therefore$ $x(x + 6) + 4(x + 6) = 0$

$\therefore$ $(x + 4)(x + 6) = 0$

$\therefore$ $x + 6 = 0$ किंवा $x + 4 = 0$

$\therefore$ $x = -6$ किंवा $x = -4$

$\therefore$ **–6 आणि –4 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iii. $x^2 - 13x - 30 = 0$ [2 गुण]

उकल :

$x^2 - 13x - 30 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 2x - 15x - 30 = 0$

$\therefore$ $x(x + 2) - 15(x + 2) = 0$

$\therefore$ $(x + 2)(x - 15) = 0$

$\therefore$ $x + 2 = 0$ किंवा $x - 15 = 0$

$\therefore$ $x = -2$ किंवा $x = 15$

$\therefore$ **– 2 आणि 15 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iv. $x^2 - 17x + 60 = 0$ **[2 गुण]**

उकल :

$x^2 - 17x + 60 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 12x - 5x + 60 = 0$

$\therefore$ $x(x - 12) - 5(x - 12) = 0$

$\therefore$ $(x - 12)(x - 5) = 0$

$\therefore$ $x - 12 = 0$ किंवा $x - 5 = 0$

$\therefore$ $x = 12$ किंवा $x = 5$

$\therefore$ **12 आणि 5 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

v. $m^2 - 84 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$m^2 - 84 = 0$

$\therefore$ $m^2 - 4 \times 21 = 0$

$\therefore$ $m^2 - \left(2\sqrt{21}\right)^2 = 0$

$\therefore$ $(m - 2\sqrt{21})(m + 2\sqrt{21}) = 0$

$\therefore$ $m - 2\sqrt{21} = 0$ किंवा $m + 2\sqrt{21} = 0$

$\therefore$ $m = 2\sqrt{21}$ किंवा $m = -2\sqrt{21}$

$\therefore$ $m = \pm 2\sqrt{21}$

$\therefore$ **$2\sqrt{21}$ आणि $-2\sqrt{21}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vi. $x + \frac{20}{x} - 12 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$x + \frac{20}{x} - 12 = 0$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना x ने गुणून,

$x^2 + 20 - 12x = 0$

$\therefore$ $x^2 - 12x + 20 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 10x - 2x + 20 = 0$

$\therefore \quad x(x-10)-2(x-10)=0$

$\therefore \quad (x-10)(x-2)=0$

$\therefore \quad x-10=0$ किंवा $x-2=0$

$\therefore \quad x=10$ किंवा $x=2$

$\therefore$ **10 आणि 2 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vii. $x^2=2(11x-48)$ **[3 गुण]**

उकल :

$x^2=2(11x-48)$

$\therefore \quad x^2=22x-96$

$\therefore \quad x^2-22x+96=0$

$\therefore \quad x^2-16x-6x+96=0$

$\therefore \quad x(x-16)-6(x-16)=0$

$\therefore \quad (x-16)(x-6)=0$

$\therefore \quad x-16=0$ किंवा $x-6=0$

$\therefore \quad x=16$ किंवा $x=6$

$\therefore$ **16 आणि 6 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

viii. $21x=196-x^2$ **[2 गुण]**

उकल :

$21x=196-x^2$

$\therefore \quad x^2+21x-196=0$

$\therefore \quad x^2+28x-7x-196=0$

$\therefore \quad x(x+28)-7(x+28)=0$

$\therefore \quad (x+28)(x-7)=0$

$\therefore \quad x+28=0$ किंवा $x-7=0$

$\therefore \quad x=-28$ किंवा $x=7$

$\therefore$ **–28 आणि 7 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ix. $\mathbf{2x - \frac{10}{x} = 1}$ **[3 गुण]**

उकल :

$2x - \frac{10}{x} = 1$

दोन्ही बाजूंना x ने गुणून,

$2x^2 - 10 = x$

$\therefore \quad 2x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + 4x - 5x - 10 = 0$

$\therefore \quad 2x(x + 2) - 5(x + 2) = 0$

$\therefore \quad (x + 2)(2x - 5) = 0$

$\therefore \quad x + 2 = 0$ किंवा $2x - 5 = 0$

$\therefore \quad x = -2$ किंवा $2x = 5$

$\therefore \quad x = -2$ किंवा $x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ **-2 आणि $\frac{5}{2}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

x. $\mathbf{x^2 - x - 132 = 0}$ **[2 गुण]**

उकल :

$x^2 - x - 132 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 11x - 12x - 132 = 0$

$\therefore \quad x(x + 11) - 12(x + 11) = 0$

$\therefore \quad (x + 11)(x - 12) = 0$

$\therefore \quad x + 11 = 0$ किंवा $x - 12 = 0$

$\therefore \quad x = -11$ किंवा $x = 12$

$\therefore$ **-11 आणि 12 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xi. $\mathbf{5x^2 - 22x - 15 = 0}$ **[3 गुण]**

उकल :

$5x^2 - 22x - 15 = 0$

$\therefore$ $5x^2 + 3x - 25x - 15 = 0$

$\therefore$ $x(5x + 3) - 5(5x + 3) = 0$

$\therefore$ $(5x + 3)(x - 5) = 0$

$\therefore$ $5x + 3 = 0$ किंवा $x - 5 = 0$

$\therefore$ $5x = -3$ किंवा $x = 5$

$\therefore$ $x = \frac{-3}{5}$ किंवा $x = 5$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{-3}{5}}$ **आणि 5 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xii. $\mathbf{3x^2 - x - 10 = 0}$ **[3 गुण]**

उकल :

$3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore$ $3x^2 + 5x - 6x - 10 = 0$

$\therefore$ $x(3x + 5) - 2(3x + 5) = 0$

$\therefore$ $(3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore$ $3x + 5 = 0$ किंवा $x - 2 = 0$

$\therefore$ $3x = -5$ किंवा $x = 2$

$\therefore$ $x = \frac{-5}{3}$ किंवा $x = 2$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{-5}{3}}$ **आणि 2 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xiii. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + x - 6x - 3 = 0$

$\therefore \quad x(2x + 1) - 3(2x + 1) = 0$

$\therefore \quad (2x + 1)(x - 3) = 0$

$\therefore \quad 2x + 1 = 0$ किंवा $x - 3 = 0$

$\therefore \quad 2x = -1$ किंवा $x = 3$

$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$ किंवा $x = 3$

$\therefore$ **$\frac{-1}{2}$ आणि 3 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xiv. $x(2x + 3) = 35$ **[3 गुण]**

उकल :

$x(2x + 3) = 35$

$\therefore \quad 2x^2 + 3x = 35$

$\therefore \quad 2x^2 + 3x - 35 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + 10x - 7x - 35 = 0$

$\therefore \quad 2x(x + 5) - 7(x + 5) = 0$

$\therefore \quad (x + 5)(2x - 7) = 0$

$\therefore \quad x + 5 = 0$ किंवा $2x - 7 = 0$

$\therefore \quad x = -5$ किंवा $2x = 7$

$\therefore \quad x = -5$ किंवा $x = \frac{7}{2}$

$\therefore$ **-5 आणि $\frac{7}{2}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xv. $\mathbf{7x^2 + 4x - 20 = 0}$ **[3 गुण]**

उकल :

$7x^2 + 4x - 20 = 0$

$\therefore$ $7x^2 + 14x - 10x - 20 = 0$

$\therefore$ $7x(x + 2) - 10(x + 2) = 0$

$\therefore$ $(x + 2)(7x - 10) = 0$

$\therefore$ $x + 2 = 0$ किंवा $7x - 10 = 0$

$\therefore$ $x = -2$ किंवा $7x = 10$

$\therefore$ $x = -2$ किंवा $x = \frac{10}{7}$

$\therefore$ **-2 आणि $\frac{10}{7}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xvi. $\mathbf{10x^2 + 3x - 4 = 0}$ **[3 गुण]**

उकल :

$10x^2 + 3x - 4 = 0$

$\therefore$ $10x^2 + 8x - 5x - 4 = 0$

$\therefore$ $2x(5x + 4) - 1(5x + 4) = 0$

$\therefore$ $(5x + 4)(2x - 1) = 0$

$\therefore$ $5x + 4 = 0$ किंवा $2x - 1 = 0$

$\therefore$ $5x = -4$ किंवा $2x = 1$

$\therefore$ $x = \frac{-4}{5}$ किंवा $x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ **$\frac{-4}{5}$ आणि $\frac{1}{2}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xvii. $6x^2 - 7x - 13 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$6x^2 - 7x - 13 = 0$

$\therefore$ $6x^2 + 6x - 13x - 13 = 0$

$\therefore$ $6x(x + 1) - 13(x + 1) = 0$

$\therefore$ $(x + 1)(6x - 13) = 0$

$\therefore$ $x + 1 = 0$ किंवा $6x - 13 = 0$

$\therefore$ $x = -1$ किंवा $6x = 13$

$\therefore$ $x = -1$ किंवा $x = \frac{13}{6}$

$\therefore$ **-1 आणि $\frac{13}{6}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xviii. $3x^2 + 34x + 11 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$3x^2 + 34x + 11 = 0$

$\therefore$ $3x^2 + 33x + x + 11 = 0$

$\therefore$ $3x(x + 11) + 1(x + 11) = 0$

$\therefore$ $(x + 11)(3x + 1) = 0$

$\therefore$ $x + 11 = 0$ किंवा $3x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = -11$ किंवा $3x = -1$

$\therefore$ $x = -11$ किंवा $x = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ **-11 आणि $\frac{-1}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xix. $3x^2 - 11x + 6 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$3x^2 - 11x + 6 = 0$

$\therefore \quad 3x^2 - 9x - 2x + 6 = 0$

$\therefore \quad 3x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\therefore \quad (x - 3)(3x - 2) = 0$

$\therefore \quad x - 3 = 0$ किंवा $3x - 2 = 0$

$\therefore \quad x = 3$ किंवा $3x = 2$

$\therefore \quad x = 3$ किंवा $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ **3 आणि $\frac{2}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xx. $3x^2 - 10x + 8 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$3x^2 - 10x + 8 = 0$

$\therefore \quad 3x^2 - 6x - 4x + 8 = 0$

$\therefore \quad 3x(x - 2) - 4(x - 2) = 0$

$\therefore \quad (x - 2)(3x - 4) = 0$

$\therefore \quad x - 2 = 0$ किंवा $3x - 4 = 0$

$\therefore \quad x = 2$ किंवा $3x = 4$

$\therefore \quad x = 2$ किंवा $x = \frac{4}{3}$

$\therefore$ **2 आणि $\frac{4}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xxi. $2m^2 + 19m + 30 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$2m^2 + 19m + 30 = 0$

$\therefore \quad 2m^2 + 15m + 4m + 30 = 0$

$\therefore \quad m(2m + 15) + 2(2m + 15) = 0$

$\therefore \quad (2m + 15)(m + 2) = 0$

$\therefore \quad 2m + 15 = 0$ किंवा $m + 2 = 0$

$\therefore \quad 2m = -15$ किंवा $m = -2$

$\therefore \quad m = \frac{-15}{2}$ किंवा $m = -2$

$\therefore$ **$\frac{-15}{2}$ आणि -2 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xxii. $7m^2 - 84 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$7m^2 - 84 = 0$

$\therefore \quad 7(m^2 - 12) = 0$

$\therefore \quad m^2 - 12 = 0$

$\therefore \quad m^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2 = 0$

$\therefore \quad m^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 0$

$\therefore \quad (m - 2\sqrt{3})(m + 2\sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad m - 2\sqrt{3} = 0$ किंवा $m + 2\sqrt{3} = 0$

$\therefore \quad m = 2\sqrt{3}$ किंवा $m = -2\sqrt{3}$

$\therefore \quad m = \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore$ **$2\sqrt{3}$ आणि $-2\sqrt{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xxiii. $x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ **[3 गुण]**

उकल :

$x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$

$\therefore \quad x^2 - \sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}\,x + 6 = 0$

$\therefore \quad x(x - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad (x - \sqrt{3})\,(x - 2\sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad x - \sqrt{3} = 0$ किंवा $x - 2\sqrt{3} = 0$

$\therefore \quad x = \sqrt{3}$ किंवा $x = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ **$\sqrt{3}$ आणि $2\sqrt{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

Ex. 2.4

1. खालील वर्गसमीकरणे पूर्ण वर्ग पद्धतीने सोडवा.

[प्रत्येकी 3 गुण]

i. $x^2 + 8x + 9 = 0$ **[मार्च 13]**

ii. $z^2 + 6z - 8 = 0$ **[मार्च 13]**

iii. $m^2 - 3m - 1 = 0$ **[मार्च 13]**

iv. $y^2 = 3 + 4y$ **[मार्च 13]**

v. $p^2 - 12p + 32 = 0$

vi. $x(x - 1) = 1$

vii. $3y^2 + 7y + 1 = 0$

viii. $4p^2 + 7 = 12p$

ix. $6m^2 + m = 2$

उकल :

i. $x^2 + 8x + 9 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 8x = -9$ … (i)

आता, तिसरे पद$=\left(\frac{1}{2} \times x \text{ चा सहगुणक}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = 16$

समी. (i) च्या दोन्ही बाजूत 16 मिळवू.

$x^2 + 8x + 16 = -9 + 16$

$\therefore$ $(x + 4)^2 = 7$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$(x + 4) = \pm\sqrt{7}$

$\therefore$ $x = -4 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ $x = -4 + \sqrt{7}$ किंवा $x = -4 - \sqrt{7}$

$\therefore$ **$-4 + \sqrt{7}$ आणि $-4 - \sqrt{7}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ii. $z^2 + 6z - 8 = 0$

$\therefore$ $z^2 + 6z = 8$ ... (i)

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2} \times z \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = 9$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत 9 मिळवू.

$z^2 + 6z + 9 = 8 + 9$

$\therefore$ $(z + 3)^2 = 17$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन

$z + 3 = \pm\sqrt{17}$

$\therefore$ $z = -3 \pm \sqrt{17}$

$\therefore$ $z = -3 + \sqrt{17}$ किंवा $z = -3 - \sqrt{17}$

$\therefore$ **$-3 + \sqrt{17}$ आणि $-3 - \sqrt{17}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iii. $m^2 - 3m - 1 = 0$

$\therefore$ $m^2 - 3m = 1 \quad \dots \text{(i)}$

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2} \times m \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times -3\right)^2 = \frac{9}{4}$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{9}{4}$ मिळवू.

$m^2 - 3m + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$

$\therefore$ $\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$m - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ $m = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ $m = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ $m = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ किंवा $m = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ **$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ आणि $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iv. $y^2 = 3 + 4y$

∴ $y^2 - 4y = 3$ ... (i)

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2} \times y \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times -4\right)^2 = 4$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत 4 मिळवू.

$y^2 - 4y + 4 = 3 + 4$

∴ $(y - 2)^2 = 7$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन

$(y - 2) = \pm\sqrt{7}$

∴ $y = 2 \pm \sqrt{7}$

∴ $y = 2 + \sqrt{7}$ किंवा $y = 2 - \sqrt{7}$

∴ **$2 + \sqrt{7}$ आणि $2 - \sqrt{7}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

v. $p^2 - 12p + 32 = 0$

∴ $p^2 - 12p = -32$ ...(i)

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2} \times p \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times -12\right)^2 = 36$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत 36 मिळवू.

$p^2 - 12p + 36 = -32 + 36$

∴ $(p - 6)^2 = 4$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$p - 6 = \pm 2$

∴ $p = 6 \pm 2$

∴ $p = 6 + 2 = 8$ किंवा $p = 6 - 2 = 4$

∴ **8 आणि 4 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vi. $x(x-1)=1$

$\therefore$ $x^2-x=1$ ... (i)

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2}\times x \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\times -1\right)^2 = \frac{1}{4}$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{1}{4}$ मिळवू.

$x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\therefore$ $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ किंवा $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ **$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ आणि $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vii. $3y^2+7y+1=0$

दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून,

$y^2+\frac{7}{3}y+\frac{1}{3}=0$

$\therefore \quad y^2 + \frac{7}{3}y = \frac{-1}{3} \qquad \ldots \text{(i)}$

आता, तिसरे पद = $\left(\frac{1}{2} \times y \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{36}$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{49}{36}$ मिळवू.

$y^2 + \frac{7}{3}y + \frac{49}{36} = \frac{-1}{3} + \frac{49}{36}$

$\therefore \quad \left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{37}{36}$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$y + \frac{7}{6} = \pm\frac{\sqrt{37}}{6}$

$\therefore \quad y = \frac{-7}{6} \pm \frac{\sqrt{37}}{6}$

$\therefore \quad y = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$

$\therefore \quad y = \frac{-7 + \sqrt{37}}{6}$ किंवा $y = \frac{-7 - \sqrt{37}}{6}$

$\therefore$ **$\frac{-7 + \sqrt{37}}{6}$ आणि $\frac{-7 - \sqrt{37}}{6}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

viii. $4p^2 + 7 = 12p$

$\therefore$ $4p^2 - 12p = -7$

दोन्ही बाजूंना 4 ने भागून,

$p^2 - 3p = \frac{-7}{4}$ ...(i)

आता, तिसरे पद $= \left(\frac{1}{2} \times \text{p चा सहगुणक}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2} \times -3\right)^2 = \frac{9}{4}$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{9}{4}$ मिळवू.

$p^2 - 3p + \frac{9}{4} = \frac{-7}{4} + \frac{9}{4}$

$\therefore$ $\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$p - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $p = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $p = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ...[छेदाचे परिमेयकरण करून]

$\therefore$ $p = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $p = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $p = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ किंवा $p = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}}$ **आणि** $\mathbf{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ix. $6m^2 + m = 2$

दोन्ही बाजूंना 6 ने भागून,

$$m^2 + \frac{m}{6} = \frac{1}{3} \quad \ldots \text{(i)}$$

आता, तिसरे पद = $\left(\frac{1}{2} \times m \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूत $\frac{1}{144}$ मिळवू.

$$m^2 + \frac{m}{6} + \frac{1}{144} = \frac{1}{3} + \frac{1}{144}$$

$$\therefore \quad \left(m + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$$

दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन,

$$m + \frac{1}{12} = \pm \frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad m = \frac{-1}{12} \pm \frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad m = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$\therefore \quad m = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ किंवा}$$

$$m = \frac{-1-7}{12} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

$\therefore$ **$\frac{1}{2}$ आणि $\frac{-2}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

Ex. 2.5

1. खालील वर्गसमीकरणे सूत्र पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा. **[प्रत्येकी 3 गुण]**

i. $m^2 - 3m - 10 = 0$ **[ऑक्टोबर 12]**

ii. $x^2 + 3x - 2 = 0$

iii. $x^2 + \frac{x-1}{3} = 0$

iv. $5m^2 - 2m = 2$

v. $7x + 1 = 6x^2$

vi. $2x^2 - x - 4 = 0$

vii. $3y^2 + 7y + 4 = 0$

[मार्च 12, 14, ऑक्टोबर 13]

viii. $2n^2 + 5n + 2 = 0$

ix. $7p^2 - 5p - 2 = 0$

x. $9s^2 - 4 = -6s$

xi. $3q^2 = 2q + 8$

xii. $4x^2 + 7x + 2 = 0$ **[मार्च 13, 14]**

उकल :

i. दिलेले समीकरण:

$m^2 - 3m - 10 = 0$

$am^2 + bm + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = -3,\ c = -10$

$$\therefore \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 7}{2}$$

$\therefore \quad m = \frac{3+7}{2} = 5$ किंवा $m = \frac{3-7}{2} = -2$

$\therefore$ **5, –2 ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ii. दिलेले समीकरण:

$x^2 + 3x - 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = 3,\ c = -2$

$\therefore \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}$, $\mathbf{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iii. दिलेले समीकरण:

$x^2 + \dfrac{x-1}{3} = 0$

दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणून,

$3x^2 + x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 3,\ b = 1,\ c = -1$

$\therefore \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$

$\therefore$ $\mathbf{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}}$, $\mathbf{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

iv. दिलेले समीकरण:

$5m^2 - 2m = 2$

$\therefore \quad 5m^2 - 2m - 2 = 0$

$am^2 + bm + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 5, \ b = -2, \ c = -2$

$$\therefore \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5 \times (-2)}}{2 \times 5}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 40}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{10} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{11}\right)}{10}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{11}}{5}$$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{1+\sqrt{11}}{5}}$, $\mathbf{\frac{1-\sqrt{11}}{5}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

v. दिलेले समीकरण:

$7x + 1 = 6x^2$

$\therefore \quad 6x^2 - 7x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 6, \ b = -7, \ c = -1$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2(6)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{12}$$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{7+\sqrt{73}}{12}}$, $\mathbf{\frac{7-\sqrt{73}}{12}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vi. दिलेले समीकरण:

$2x^2 - x - 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 2, \ b = -1, \ c = -4$

$\therefore \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2(2)}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 32}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$

$\therefore$ **$\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$, $\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

vii. दिलेले समीकरण:

$3y^2 + 7y + 4 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 3, \ b = 7, \ c = 4$

$\therefore \quad y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \dfrac{-7 \pm 1}{6}$

$\therefore \quad y = \dfrac{-7 + 1}{6}$ किंवा $y = \dfrac{-7 - 1}{6}$

$\therefore \quad y = \dfrac{-6}{6}$ किंवा $y = \dfrac{-8}{6}$

$\therefore \quad y = -1$ किंवा $y = \dfrac{-4}{3}$

$\therefore$ **$-1, \dfrac{-4}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

viii. दिलेले समीकरण:

$2n^2 + 5n + 2 = 0$

$an^2 + bn + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 2,\ b = 5,\ c = 2$

$\therefore \quad n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$\therefore \quad n = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ किंवा

$n = \frac{-5 - 3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{-1}{2}, -2}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

ix. दिलेले समीकरण:

$7p^2 - 5p - 2 = 0$

$ap^2 + bp + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 7,\ b = -5,\ c = -2$

$\therefore \quad p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 7 \times (-2)}}{2(7)}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{14} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{14} = \frac{5 \pm 9}{14}$

$\therefore \quad p = \frac{5 + 9}{14} = \frac{14}{14} = 1$ किंवा

$p = \frac{5 - 9}{14} = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}$

$\therefore$ $\mathbf{1, \frac{-2}{7}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

x. दिलेले समीकरण:

$9s^2 - 4 = -6s$

$\therefore$ $9s^2 + 6s - 4 = 0$

$as^2 + bs + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 9, \ b = 6, \ c = -4$

$\therefore$ $s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \times (9) \times (-4)}}{2(9)}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 144}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{180}}{18}$

$s = \frac{-6 \pm 6\sqrt{5}}{18} = \frac{6\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)}{18} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{-1 + \sqrt{5}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{3}}$ **ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xi. दिलेले समीकरण:

$3q^2 = 2q + 8$

$\therefore$ $3q^2 - 2q - 8 = 0$

$aq^2 + bq + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 3, \ b = -2, \ c = -8$

$\therefore$ $q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6}$$

$\therefore \quad q = \frac{2 + 10}{6} = \frac{12}{6} = 2$ किंवा

$q = \frac{2 - 10}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

$\therefore$ **$2, \frac{-4}{3}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

xii. दिलेले समीकरण:

$4x^2 + 7x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 4, \ b = 7, \ c = 2$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(4)(2)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$\therefore \quad x = \frac{-7 + \sqrt{17}}{8}$ किंवा $x = \frac{-7 - \sqrt{17}}{8}$

$\therefore$ **$\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}, \frac{-7 - \sqrt{17}}{8}$ ही दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.**

Ex. 2.6

1. खालील वर्गसमीकरणासाठी विवेचकाची (discriminant) किंमत काढा. **[प्रत्येकी 1 गुण]**

i. $x^2 + 4x + 1 = 0$

ii. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

iii. $x^2 + x + 1 = 0$

iv. $\sqrt{3}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{3} = 0$

v. $4x^2 - kx + 2 = 0$

vi. $x^2 + 4x + k = 0$

उकल :

i. दिलेले समीकरण:

$x^2 + 4x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, b = 4, c = 1$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4$

$\mathbf{= 12}$

ii. दिलेले समीकरण:

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 3, b = 2, c = -1$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12$

$\mathbf{= 16}$

iii. दिलेले समीकरण:

$x^2 + x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, \ b = 1, c = 1$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4$

$\mathbf{= -3}$

iv. दिलेले समीकरण:

$\sqrt{3}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{3} = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = -2\sqrt{3}$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times \left(\sqrt{3}\right) \times \left(-2\sqrt{3}\right)$

$= 8 + 24$

$\mathbf{= 32}$

v. दिलेले समीकरण:

$4x^2 - kx + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 4$, $b = -k$, $c = 2$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-k)^2 - 4(4)(2)$

$\mathbf{= k^2 - 32}$

vi. दिलेले समीकरण:

$x^2 + 4x + k = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1$, $b = 4$, $c = k$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(1)(k)$

$\mathbf{= 16 - 4k}$

2. विवेचकाच्या साहाय्याने खालील वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप ठरवा. **[प्रत्येकी 2 गुण]**

i. $y^2 - 4y - 1 = 0$
ii. $y^2 + 6y - 2 = 0$
iii. $y^2 + 8y + 4 = 0$
iv. $2y^2 + 5y - 3 = 0$
v. $3y^2 + 9y + 4 = 0$
vi. $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 16 = 0$

उकल :

i. दिलेले समीकरण:

$y^2 - 4y - 1 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1,\ b = -4,\ c = -1$

$\therefore$ $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-4)^2 - 4\,(1)\,(-1) = 16 + 4$
$= 20$

$\therefore$ $\Delta > 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि असमान आहेत.**

ii. दिलेले समीकरण:

$y^2 + 6y - 2 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, b = 6, c = -2$

$\therefore$ $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (6)^2 - 4(1)(-2) = 36 + 8$
$= 44$

$\therefore$ $\Delta > 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि असमान आहेत.**

iii. दिलेले समीकरण:

$y^2 + 8y + 4 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, b = 8, c = 4$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (8)^2 - 4(1)(4) = 64 - 16$

$= 48$

$\therefore \quad \Delta > 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि असमान आहेत.**

iv. दिलेले समीकरण:

$2y^2 + 5y - 3 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 2, \ b = 5, \ c = -3$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24$

$= 49$

$\therefore \quad \Delta > 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि असमान आहेत.**

v. दिलेले समीकरण:

$3y^2 + 9y + 4 = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 3, b = 9, c = 4$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= (9)^2 - 4(3)(4) = 81 - 48$

$= 33$

$\therefore \quad \Delta > 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव आणि असमान आहेत.**

vi. दिलेले समीकरण:

$2x^2 + 5\sqrt{3}x + 16 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 2,\ b = 5\sqrt{3},\ c = 16$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 4(2)(16)$

$= 75 - 128$

$= -53$

$\therefore \quad \Delta < 0$

$\therefore$ **वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव संख्या नाहीत.**

3. जर खालील प्रत्येक वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असतील तर k ची किंमत काढा.

[प्रत्येकी 3 गुण]

i. $(k - 12)x^2 + 2(k - 12)x + 2 = 0$

ii. $k^2x^2 - 2(k - 1)x + 4 = 0$

उकल :

i. $(k - 12)x^2 + 2(k - 12)x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = k - 12,\ \ b = 2(k - 12),\ c = 2$

$\therefore \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$= [2(k - 12)]^2 - 4(k - 12) \times 2$

$= 4(k - 12)^2 - 8(k - 12)$

$= (k - 12)\,[4(k - 12) - 8]$

$= (k - 12)\,[4k - 48 - 8]$

$= (k - 12)\,(4k - 56)$

$= (k - 12)\,4(k - 14)$

$= 4(k - 12)(k - 14)$

परंतु मुळे वास्तव व समान आहेत.

$\therefore$ $\Delta = 0$

$\therefore$ $4(k - 12)(k - 14) = 0$

$\therefore$ $(k - 12)(k - 14) = 0$

$\therefore$ $k - 12 = 0$ किंवा $k - 14 = 0$

$\therefore$ $k = 12$ किंवा $k = 14$

परंतु जर $k = 12$ तर वर्गीय पदाचा सहगुणक शून्य होतो.

$\therefore$ $\mathbf{k \neq 12}$

$\therefore$ $\mathbf{k = 14}$

$\therefore$ **दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे वास्तव व समान असल्यास $\mathbf{k = 14}$ आहे.**

ii. $k^2 x^2 - 2(k - 1)x + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = k^2,\ b = -2(k - 1),\ c = 4$

$\therefore$
$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= [-2(k - 1)]^2 - 4(k^2) \times 4 \\
&= 4(k - 1)^2 - 16k^2 \\
&= 4(k^2 - 2k + 1) - 16k^2 \\
&= 4k^2 - 8k + 4 - 16k^2 \\
&= -12k^2 - 8k + 4 \\
&= -4[3k^2 + 2k - 1] \\
&= -4[3k^2 + 3k - k - 1] \\
&= -4[3k(k + 1) - 1(k + 1)] \\
&= -4[(3k - 1)(k + 1)]
\end{aligned}
$$

परंतु मुळे वास्तव व समान आहेत.

$\Delta = 0$

$\therefore$ $-4(3k - 1)(k + 1) = 0$

$\therefore$ $(3k - 1)(k + 1) = 0$

$\therefore$ $3k - 1 = 0$ किंवा $k + 1 = 0$

$\therefore$ $3k = 1$ किंवा $k = -1$

$\therefore$ $\mathbf{k = \frac{1}{3}}$ **किंवा** $\mathbf{k = -1}$

Ex. 2.7

1. **जर समीकरण $kx^2 - 5x + 2 = 0$ चे एक मुळ दुसऱ्या मुळाच्या 4 पट असेल तर k ची किंमत काढा.** **[3 गुण]**

उकल:

दिलेले समीकरण:

$kx^2 - 5x + 2 = 0$

सामान्य रूप $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = k, \quad b = -5, \quad c = 2$

समजा, α आणि β दिलेल्या समीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha = 4\beta$ ... (i)

आता, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-5)}{k}$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \dfrac{5}{k}$

$\therefore \quad 4\beta + \beta = \dfrac{5}{k}$ ...[(i) वरून]

$\therefore \quad 5\beta = \dfrac{5}{k}$

$\therefore \quad \beta = \dfrac{1}{k}$ ... (ii)

तसेच $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{k}$

$\therefore \quad 4\beta \cdot \beta = \dfrac{2}{k}$ ...[(i) वरून]

$\therefore \quad 4\beta^2 = \dfrac{2}{k}$

$\therefore \quad 4\left(\dfrac{1}{k}\right)^2 = \dfrac{2}{k}$ ...[(ii) वरून]

$\therefore \quad \frac{4}{k^2} = \frac{2}{k}$

$\therefore \quad \frac{2}{k} = 1$

$\therefore \quad \mathbf{k = 2}$

2. जर वर्गसमीकरण $x^2 + kx + 40 = 0$ ची मुळे 2:5 या प्रमाणात असतील तर k ची किंमत काढा.

[3 गुण]

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$x^2 + kx + 40 = 0$

सामान्य रूप $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, \quad b = k, \quad c = 40$

समजा, α आणि β दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha:\beta = 2:5$

गुणोत्तराची समानपट m मानू,

$\alpha = 2m, \quad \beta = 5m \qquad \ldots$ (i)

आता, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{40}{1}$

$\therefore \quad \alpha\beta = 40$

$\therefore \quad (2m)(5m) = 40 \qquad \ldots$ [(i) वरून]

$\therefore \quad 10m^2 = 40$

$\therefore \quad m^2 = 4$

$\therefore \quad m = \pm 2 \qquad \ldots$(ii) [वर्गमुळ घेऊन]

तसेच $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-k}{1} = -k$

$2m + 5m = -k \qquad \ldots$[(i) वरून]

$\therefore \quad 7m = -k$

$\therefore \quad 7(\pm 2) = -k \qquad \ldots$[(ii) वरून]

$\therefore \quad \mathbf{k = \pm 14}$

3. जर $kx^2 - 7x + 12 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मूळ 3 असेल तर k ची किंमत काढा. [3 गुण]

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$kx^2 - 7x + 12 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = k,\ b = -7,\ c = 12$

समजा, α आणि β दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha = 3$ ...(i)

आता, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ 3\beta = \dfrac{12}{k}$ ...[(i) वरून]

$\therefore\ \beta = \dfrac{4}{k}$ ... (ii)

तसेच $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-7)}{k}$

$\therefore\ 3 + \dfrac{4}{k} = \dfrac{7}{k}$ ...[(i) व (ii) वरून]

$\therefore\ 3k + 4 = 7$ ...[दोन्ही बाजुंना k ने गुणून]

$\therefore\ 3k = 3$

$\therefore$ **$k = 1$**

4. जर $x^2 + px + q = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांमधील फरक 1असेल तर सिद्ध करा की $p^2 = 1 + 4q$ [4 गुण]

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$x^2 + px + q = 0$

सामान्य रूप $ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून

$a = 1, b = p, c = q$

समजा, α आणि β दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha - \beta = 1$

$\therefore \quad \alpha = \beta + 1 \quad \ldots$ (i)

आता, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-p}{1} = -p$

$\therefore \quad p = -\alpha - \beta$

$= -(\beta + 1) - \beta \quad \ldots$ [(i) वरून]

$= -\beta - 1 - \beta$

$\therefore \quad p = -2\beta - 1 \quad \ldots$ (ii)

तसेच, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{q}{1} = q$

$\therefore \quad (\beta + 1)\beta = q \quad \ldots$ [(i) वरून]

$\therefore \quad \beta^2 + \beta = q \quad \ldots$(iii)

डावी बाजू $= p^2$

$= (-2\beta - 1)^2 \quad \ldots$ [(ii) वरून]

$= 4\beta^2 + 4\beta + 1$

$= 4(\beta^2 + \beta) + 1$

$= 4q + 1$ ... [(iii) वरून]

= उ.बा

$\therefore$ $\mathbf{p^2 = 1 + 4q}$

5. जर $4x^2 + 8kx + k + 9 = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या मुळांची बेरीज व त्यांचा गुणाकार समान असेल तर k ची किंमत काढा.

[3 गुण]

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$4x^2 + 8kx + k + 9 = 0.$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून

$a = 4, b = 8k, c = k + 9$

समजा, α आणि β दिलेल्या वर्गसमीकरणाची मुळे आहेत.

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha + \beta = \alpha\beta$

आता, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ आणि $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$\therefore \quad \dfrac{-b}{a} = \dfrac{c}{a}$

$\therefore \quad -b = c$

$\therefore \quad -8k = k + 9$

$\therefore \quad -8k - k = 9$

$\therefore \quad -9k = 9$

$\therefore \quad \mathbf{k = -1}$

6. **जर α आणि β ही $x^2 - 5x + 6 = 0$ या समीकरणाची मुळे असतील तर**

i. $\alpha^2 + \beta^2$

ii. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ **च्या किंमती काढा.**

[4 गुण]

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$

आता, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$ ...(i)

तसेच, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$ ...(ii)

i. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (5) - 2(6)$

...[(i) व (ii) वरून]

$= 25 - 12$

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 13}$ ...(iii)

ii. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{13}{6}$ ...[(ii) व (iii) वरून]

$\therefore$ $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{13}{6}}$

7. **जर $kx^2 - 20x + 34 = 0$ या वर्गसमीकरणाचे एक मुळ $5 - 2\sqrt{2}$ असेल तर k ची किंमत काढा.** **[3 गुण]**

उकल :

दिलेले वर्गसमीकरण,

$kx^2 - 20x + 34 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = k,\ b = -20, c = 34$

समजा, $\alpha = 5 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad \beta = 5 + 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad \alpha\beta = (5 - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})$

$= (5)^2 - (2\sqrt{2})^2$

$\alpha\beta = 25 - 8$

$\alpha\beta = 17$ ...(i)

आता, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{34}{k}$

$\therefore \quad 17 = \frac{34}{k}$ ...[(i) वरून]

$\therefore \quad k = \frac{34}{17}$

$\therefore \quad \mathbf{k = 2}$

Ex. 2.8

1. ज्या वर्गसमीकरणाची मुळे खालीलप्रमाणे आहेत असे वर्गसमीकरण तयार करा.

i. 5 आणि –7 **[2 गुण]**

उकल :

5 आणि –7

तर $\alpha = 5, \beta = -7$

$\therefore$ $\alpha + \beta = 5 - 7 = -2$

आणि $\alpha\beta = (5)(-7) = -35$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - (-2)x + (-35) = 0$

म्हणजे $x^2 + 2x - 35 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 + 2x - 35 = 0$.**

ii. $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{-3}{4}$ **[3 गुण]**

उकल :

$\frac{1}{2}$ आणि $\frac{-3}{4}$

समजा, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{-3}{4}$

तर $\alpha + \beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$

आणि $\alpha\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{8}$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - \left(\frac{-1}{4}\right)x - \frac{3}{8} = 0$

म्हणजे $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

म्हणजे $8x^2 + 2x - 3 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 8 ने गुणून]

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $8x^2 + 2x - 3 = 0$.**

iii. -3 आणि -11 **[2 गुण]**

उकल :

-3 आणि -11

समजा, $\alpha = -3, \beta = -11$

तर $\alpha + \beta = -3 - 11 = -14$

आणि $\alpha\beta = (-3)(-11) = 33$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - (-14)x + 33 = 0$

म्हणजे $x^2 + 14x + 33 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 + 14x + 33 = 0$.**

iv. -2 आणि $\frac{11}{2}$ **[3 गुण]**

उकल :

-2 आणि $\frac{11}{2}$

समजा, $\alpha = -2$, $\beta = \frac{11}{2}$

तर $\alpha + \beta = -2 + \frac{11}{2} = \frac{-4+11}{2} = \frac{7}{2}$

आणि $\alpha\beta = -2 \times \frac{11}{2} = -11$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - \frac{7}{2}x - 11 = 0$

म्हणजे $2x^2 - 7x - 22 = 0$

...[दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून]

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $2x^2 - 7x - 22 = 0$.**

v. $\frac{1}{2}$ **आणि** $\frac{-1}{2}$ **[3 गुण]**

उकल :

$\frac{1}{2}$ आणि $\frac{-1}{2}$

समजा, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2}$

तर $\alpha + \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

आणि $\alpha\beta = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 0x - \frac{1}{4} = 0$

म्हणजे $4x^2 - 1 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून]

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $4x^2 - 1 = 0$.**

vi. 0 आणि –4 **[2 गुण]**

उकल :

0 आणि –4

समजा, $\alpha = 0, \beta = -4$

तर $\alpha + \beta = -4$

आणि $\alpha\beta = 0$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - (-4)x + 0 = 0$

म्हणजे $x^2 + 4x + 0 = 0$

म्हणजे $x^2 + 4x = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 + 4x = 0$.**

2. वर्गसमीकरणाचे एक मूळ खालीलप्रमाणे असल्यास वर्गसमीकरण तयार करा. **[प्रत्येकी 3 गुण]**

i.	$\mathbf{3 - 2\sqrt{5}}$	**ii.**	$\mathbf{4 - 3\sqrt{2}}$
iii.	$\mathbf{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$	**iv.**	$\mathbf{2\sqrt{3} - 4}$
v.	$\mathbf{2 + \sqrt{5}}$	**vi.**	$\mathbf{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

उकल :

i. $3 - 2\sqrt{5}$

समजा, $\alpha = 3 - 2\sqrt{5}$

तर $\beta = 3 + 2\sqrt{5}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = (3 - 2\sqrt{5}) + (3 + 2\sqrt{5}) = 6$

आणि $\alpha\beta = (3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$

$= (3)^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2$

$= 9 - 20 = -11$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 6x - 11 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $\boldsymbol{x^2 - 6x - 11 = 0}$.**

ii. $4 - 3\sqrt{2}$

समजा, $\alpha = 4 - 3\sqrt{2}$

तर $\beta = 4 + 3\sqrt{2}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = (4 - 3\sqrt{2}) + (4 + 3\sqrt{2})$

$= 8$

आणि $\alpha\beta = (4 - 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$

$= (4)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 16 - 18$

$= -2$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 8x - 2 = 0$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 8x - 2 = 0$.

iii. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

समजा, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

तर $\beta = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

$= 2\sqrt{2}$

आणि $\alpha\beta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 2 - 3$

$= -1$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1 = 0$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1 = 0$.

iv. $2\sqrt{3} - 4$

समजा, $\alpha = 2\sqrt{3} - 4$

तर $\beta = 2\sqrt{3} + 4$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \left(2\sqrt{3} - 4\right) + \left(2\sqrt{3} + 4\right)$

$= 4\sqrt{3}$

आणि $\alpha\beta = (2\sqrt{3} - 4)(2\sqrt{3} + 4)$

$= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - (4)^2 = 12 - 16$

$= -4$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 4\sqrt{3}\,x - 4 = 0$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 4\sqrt{3}\,x - 4 = 0$.

v. $2+\sqrt{5}$

समजा, $\alpha = 2+\sqrt{5}$

तर $\beta = 2-\sqrt{5}$

$\therefore$ $\alpha+\beta = \left(2+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{5}\right)$

$= 4$

आणि $\alpha\beta = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$

$= (2)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4-5$

$= -1$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 4x - 1 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 4x - 1 = 0$.**

vi. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

समजा, $\alpha = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

तर $\beta = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\therefore$ $\alpha+\beta = (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{5}$

आणि $\alpha\beta = (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$= \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5-3$

$= 2$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 2 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 2 = 0$.**

3. एका वर्गसमीकरणाच्या दोन मुळांची बेरीज 3 व त्यांच्या घनांची बेरीज 63 आहे. त्यावरून वर्गसमीकरण तयार करा. [3 गुण]

उकल :

समजा, वर्गसमीकरणाची मुळे α व β मानू,

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha + \beta = 3$ आणि $\alpha^3 + \beta^3 = 63$

आता, $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$\therefore \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$\therefore \quad 63 = (3)^3 - 3\alpha\beta(3)$

$\therefore \quad 63 = 27 - 9\alpha\beta$

$\therefore \quad 9\alpha\beta = 27 - 63$

$\therefore \quad 9\alpha\beta = -36$

$\therefore \quad \alpha\beta = -4$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 - 3x - 4 = 0$.**

4. एका वर्गसमीकरणाच्या दोन मुळांमधील फरक 5 व त्यांच्या घनांमधील फरक 215 आहे. तर वर्गसमीकरण तयार करा. [4 गुण]

उकल :

समजा, वर्गसमीकरणाची मुळे α व β मानू,

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$\alpha - \beta = 5$ आणि $\alpha^3 - \beta^3 = 215$

आता, $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\therefore \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

$\therefore \quad 215 = (5)^3 + 3\alpha\beta(5)$

$\therefore \quad 215 = 125 + 15\alpha\beta$

$\therefore \quad 215 - 125 = 15\alpha\beta$

$\therefore \quad 90 = 15\alpha\beta$

$\therefore \quad \alpha\beta = 6$

तसेच, $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta$

$\therefore \quad (\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$

$\therefore \quad (\alpha + \beta)^2 = (5)^2 + 4(6) = 25 + 24 = 49$

$\therefore \quad (\alpha + \beta) = \pm 7$

$\therefore$ मिळणारे वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

म्हणजे $x^2 \pm 7x + 6 = 0$

$\therefore$ **मिळणारे वर्गसमीकरण $x^2 \pm 7x + 6 = 0$.**

Ex. 2.9

1. खालील समीकरणे सोडवा.

i. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ [3 गुण]

उकल :

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

समजा, $x^2 = m$

$\therefore$ त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$\therefore$ $m^2 - 2m - m + 2 = 0$

$\therefore$ $m(m - 2) - 1(m - 2) = 0$

$\therefore$ $(m - 2)(m - 1) = 0$

$\therefore$ $m - 2 = 0$ किंवा $m - 1 = 0$

$\therefore$ $m = 2$ किंवा $m = 1$

परंतु $m = x^2$

$\therefore$ $x^2 = 2$ किंवा $x^2 = 1$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{2}$ किंवा $x = \pm 1$

$\therefore$ **उकलसंच $\{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$**

ii. $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) + 24 = 0$ [5 गुण]

उकल :

$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) + 24 = 0$

समजा, $x^2 + 2x = m$ … (i)

त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$m(m - 11) + 24 = 0$

$\therefore \quad m^2 - 11m + 24 = 0$

$\therefore \quad m^2 - 8m - 3m + 24 = 0$

$\therefore \quad m(m - 8) - 3(m - 8) = 0$

$\therefore \quad (m - 8)(m - 3) = 0$

$\therefore \quad m - 8 = 0$ किंवा $m - 3 = 0$

$\therefore \quad m = 8$ किंवा $m = 3$

जेव्हा $m = 8$

$x^2 + 2x = 8$ ... [(i) वरून]

$x^2 + 2x = 8$

$\therefore \quad x^2 + 2x - 8 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$

$\therefore \quad x(x + 4) - 2(x + 4) = 0$

$\therefore \quad (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore \quad x + 4 = 0$ किंवा $x - 2 = 0$

$\therefore \quad x = -4$ किंवा $x = 2$

जेव्हा $m = 3$

$x^2 + 2x = 3$ ... [(i) वरून]

$\therefore \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 3x - x - 3 = 0$

$\therefore \quad x(x + 3) - 1(x + 3) = 0$

$\therefore \quad (x + 3)(x - 1) = 0$

$\therefore \quad x + 3 = 0$ किंवा $x - 1 = 0$

$\therefore \quad x = -3$ किंवा $x = 1$

$\therefore$ **उकलसंच $\{-3, 1, -4, 2\}$**

iii. $\mathbf{2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0}$ **[5 गुण]**

उकल :

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

येथे, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

∴ दिलेले वर्गसमीकरण खालीलप्रमाणे,

∴ $2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

समजा, $x+\frac{1}{x}=\text{m}$ …(i)

त्यावरून तयार झालेले समीकरण

∴ $2(\text{m}^2-2)-9\text{m}+14=0$

∴ $2\text{m}^2-4-9\text{m}+14=0$

∴ $2\text{m}^2-9\text{m}+10=0$

∴ $2\text{m}^2-4\text{m}-5\text{m}+10=0$

∴ $2\text{m}(\text{m}-2)-5(\text{m}-2)=0$

$\therefore$ $(m - 2)(2m - 5) = 0$

$\therefore$ $m - 2 = 0$ किंवा $2m - 5 = 0$

$\therefore$ $m = 2$ किंवा $m = \frac{5}{2}$

जेव्हा $m = 2$

$x + \frac{1}{x} = 2$ ...[(i) वरून]

$\therefore$ $x^2 + 1 = 2x$ ...[दोन्ही बाजूंना x ने गुणून]

$\therefore$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore$ $(x - 1)^2 = 0$

$\therefore$ $x - 1 = 0$

$\therefore$ $x = 1$

जेव्हा $m = \frac{5}{2}$

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ... [(i) वरून]

$\therefore$ $x^2 + 1 = \frac{5}{2}x$ ...[दोन्ही बाजूंना x ने गुणून]

$\therefore$ $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$\therefore$ $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ...[दोन्ही बाजुंना 2 ने गुणून]

$\therefore$ $2x^2 - 4x - x + 2 = 0$

$\therefore$ $2x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$

$\therefore$ $(x - 2)(2x - 1) = 0$

$\therefore$ $x - 2 = 0$ किंवा $2x - 1 = 0$

$\therefore$ $x = 2$ किंवा $x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ **उकलसंच $\{1, 2, \frac{1}{2}\}$**

iv. $\mathbf{35y^2 + \frac{12}{y^2} = 44}$ **[4 गुण]**

उकल :

$35y^2 + \frac{12}{y^2} = 44$

समजा, $y^2 = \text{m}$

त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$\therefore \quad 35\text{m} + \frac{12}{\text{m}} = 44$

$\therefore \quad 35\text{m}^2 + 12 = 44\text{m}$ ...[दोन्ही बाजूंना m ने गुणून]

$\therefore \quad 35\text{m}^2 - 44\text{m} + 12 = 0$

$\therefore \quad 35\text{m}^2 - 14\text{m} - 30\text{m} + 12 = 0$

$\therefore \quad 7\text{m}(5\text{m} - 2) - 6(5\text{m} - 2) = 0$

$\therefore \quad (5\text{m} - 2)(7\text{m} - 6) = 0$

$\therefore$ 5m − 2 = 0 किंवा 7m − 6 = 0

$\therefore$ 5m = 2 किंवा 7m = 6

$\therefore$ $\text{m} = \frac{2}{5}$ किंवा $\text{m} = \frac{6}{7}$

परंतु $\text{m} = y^2$

$\therefore$ $y^2 = \frac{2}{5}$ किंवा $y^2 = \frac{6}{7}$

$\therefore$ $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ किंवा $y = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$

$\therefore$ **उकलसंच** $\left\{\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{6}{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right\}$

v. $x^2 + \frac{12}{x^2} = 7$ **[4 गुण]**

उकल :

$x^2 + \frac{12}{x^2} = 7$

समजा, $x^2 = m$

$\therefore$ त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$m + \frac{12}{m} = 7$

$\therefore$ $m^2 + 12 = 7m$ ...[दोन्ही बाजूंना m ने गुणून]

$\therefore$ $m^2 - 7m + 12 = 0$

$\therefore$ $m^2 - 4m - 3m + 12 = 0$

$\therefore$ $m(m - 4) - 3(m - 4) = 0$

$\therefore$ $(m - 4)(m - 3) = 0$

$\therefore$ $m - 4 = 0$ किंवा $m - 3 = 0$

$\therefore$ $m = 4$ किंवा $m = 3$

परंतु $x^2 = m$

$\therefore$ $x^2 = 4$ किंवा $x^2 = 3$

$\therefore$ $x = \pm 2$ किंवा $x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ **उकलसंच $\{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$**

vi. $(x^2 + x)(x^2 + x - 7) + 10 = 0$ **[5 गुण]**

उकल :

$(x^2 + x)(x^2 + x - 7) + 10 = 0$

समजा, $x^2 + x = m$ ...(i)

$\therefore$ त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$m(m - 7) + 10 = 0$

$\therefore$ $m^2 - 7m + 10 = 0$

$\therefore \quad m^2 - 5m - 2m + 10 = 0$

$\therefore \quad m(m - 5) - 2(m - 5) = 0$

$\therefore \quad (m - 5)(m - 2) = 0$

$\therefore \quad m - 5 = 0$ किंवा $m - 2 = 0$

$\therefore \quad m = 5$ किंवा $m = 2$

जेव्हा $m = 5$

$\therefore \quad x^2 + x = 5$ ... [(i) वरून]

$x^2 + x - 5 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 1, b = 1, c = -5$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

जेव्हा $m = 2$ ... [(i) वरून]

$x^2 + x = 2$

$\therefore \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 2x - x - 2 = 0$

$\therefore \quad x(x + 2) - 1(x + 2) = 0$

$\therefore \quad (x + 2)(x - 1) = 0$

$\therefore \quad x + 2 = 0$ किंवा $x - 1 = 0$

$\therefore \quad x = -2$ किंवा $x = 1$

$\therefore$ **उकलसंच** $\left\{ \mathbf{1, -2, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}} \right\}$

vii. $\mathbf{3x^4 - 13x^2 + 10 = 0}$ **[जुलै 15][4 गुण]**

उकल :

$3x^4 - 13x^2 + 10 = 0$

समजा, $x^2 = m$

$\therefore$ त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$3m^2 - 13m + 10 = 0$

$\therefore$ $3m^2 - 3m - 10m + 10 = 0$

$\therefore$ $3m(m - 1) - 10(m - 1) = 0$

$\therefore$ $(m - 1)(3m - 10) = 0$

$\therefore$ $m - 1 = 0$ किंवा $3m - 10 = 0$

$\therefore$ $m = 1$ किंवा $m = \frac{10}{3}$

परंतु $x^2 = m$

$\therefore$ $x^2 = 1$ किंवा $x^2 = \frac{10}{3}$

$\therefore$ $x = \pm 1$ किंवा $x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$

$\therefore$ **उकलसंच** $\left\{1, -1, \sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$

viii. $2y^2 + \frac{15}{y^2} = 12$ **[4 गुण]**

उकल :

$$2y^2 + \frac{15}{y^2} = 12$$

समजा, $y^2 = m$

त्यावरून तयार झालेले समीकरण

$\therefore \quad 2m + \frac{15}{m} = 12$

$\therefore \quad 2m^2 + 15 = 12m$ ...[दोन्ही बाजूंना m ने गुणून]

$\therefore \quad 2m^2 - 12m + 15 = 0$

$am^2 + bm + c = 0$ शी तुलना करून,

$a = 2, b = -12, c = 15$

$\therefore \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore \quad m = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(15)}}{2(2)}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{24}}{4}$

$\therefore \quad = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2\left(6 \pm \sqrt{6}\right)}{4}$

$m = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$

परंतु $y^2 = m$

$\therefore \quad y^2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{2}}$

$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{6 + \sqrt{6}}{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{6 - \sqrt{6}}{2}}$

उकलसंच $\left\{\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}}, -\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}}, \sqrt{\dfrac{6-\sqrt{6}}{2}}, -\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{6}}{2}}\right\}$

Ex. 2.10

1. दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गाची बेरीज 113 आहे, तर त्या संख्या काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, पहिली नैसर्गिक लहान संख्या x आहे.

$\therefore$ दुसरी क्रमागत नैसर्गिक संख्या $x+1$ होईल.

दिलेल्या अटीनुसार,

$x^2 + (x+1)^2 = 113$

$\therefore$ $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 113$

$\therefore$ $2x^2 + 2x + 1 = 113$

$\therefore$ $2x^2 + 2x - 112 = 0$

$\therefore$ $x^2 + x - 56 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून]

$\therefore$ $x^2 + 8x - 7x - 56 = 0$

$\therefore$ $x(x+8) - 7(x+8) = 0$

$\therefore$ $(x+8)(x-7) = 0$

$\therefore$ $x + 8 = 0$ किंवा $x - 7 = 0$

$\therefore$ $x = -8$ किंवा $x = 7$

परंतु, x ही नैसर्गिक संख्या आहे

$x \neq -8$

$\therefore$ $x = 7$ आणि $x + 1 = 7 + 1 = 8$

$\therefore$ **त्या दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्या 7 आणि 8 आहेत.**

2. टिनू हा पिंकीपेक्षा 3 वर्षांने लहान आहे. जर त्यांच्या वयाचा गुणाकार 180 असेल, तर त्यांची आजची वये काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, टिनूचे आजचे वय x वर्षे आहे

दिलेल्या पहिल्या अटीनुसार,

पिंकीचे आजचे वय = $(x+3)$ वर्षे

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

$x(x+3) = 180$

$\therefore \quad x^2 + 3x - 180 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 15x - 12x - 180 = 0$

$\therefore \quad x(x+15) - 12(x+15) = 0$

$\therefore \quad (x+15)(x-12) = 0$

$\therefore \quad (x+15) = 0$ किंवा $(x-12) = 0$

$\therefore \quad x = -15$ किंवा $x = 12$

परंतु वय ऋण नसते.

$\therefore \quad x \neq -15$

$\therefore \quad x = 12$ आणि $x + 3 = 12 + 3 = 15$

$\therefore$ **टिनूचे आजचे वय 12 वर्षे आणि पिंकीचे आजचे वय 15 वर्षे आहे.**

3. एका आयताची लांबी रुंदीपेक्षा 2 सेमीने अधिक आहे. जर आयताचे क्षेत्रफळ 24 चौ. सेमी असेल, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, आयताची लांबी x सेमी आहे

दिलेल्या पहिल्या अटीनूसार,

आयताची रुंदी = $(x - 2)$ सेमी

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

आयताचे क्षेत्रफळ = 24 चौ. सेमी

$\therefore$ लांबी $\times$ रुंदी $= 24$

$\therefore \quad x(x-2) = 24$

$\therefore \quad x^2 - 2x = 24$

$\therefore \quad x^2 - 2x - 24 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 4x - 6x - 24 = 0$

$\therefore \quad x(x+4) - 6(x+4) = 0$

$\therefore \quad (x+4)(x-6) = 0$

$\therefore \quad x + 4 = 0$ किंवा $x - 6 = 0$

$\therefore \quad x = -4$ किंवा $x = 6$

परंतु लांबी ऋण नसते.

$\therefore \quad x \neq -4$

$\therefore \quad x = 6$ आणि $x - 2 = 6 - 2 = 4$

$\therefore$ **आयताची लांबी 6 सेमी आणि रुंदी 4 सेमी आहे.**

4. दोन क्रमागत सम नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 100 आहे, तर त्या संख्या काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, पहिली सम नैसर्गिक संख्या x आहे.

$\therefore$ दुसरी क्रमागत सम नैसर्गिक संख्या $(x + 2)$ होईल

$\therefore$ दिलेल्या अटीनुसार,

$x^2 + (x + 2)^2 = 100$

$\therefore$ $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$

$\therefore$ $2x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$

$\therefore$ $2x^2 + 4x - 96 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 2x - 48 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून]

$\therefore$ $x^2 + 8x - 6x - 48 = 0$

$\therefore$ $x(x + 8) - 6(x + 8) = 0$

$\therefore$ $(x + 8)(x - 6) = 0$

$\therefore$ $x + 8 = 0$ किंवा $x - 6 = 0$

$\therefore$ $x = -8$ किंवा $x = 6$

$\therefore$ $x \neq -8$ कारण x नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore$ $x = 6$ आणि $x + 2 = 6 + 2 = 8$

$\therefore$ **त्या दोन क्रमागत नैसर्गिक संख्या 6 आणि 8 आहेत.**

5. **एक नैसर्गिक संख्या तिच्या वर्गमुळाच्या दुप्पटीपेक्षा 3 ने मोठी आहे तर ती संख्या काढा.**

[4 गुण]

उकल:

समजा, एक नैसर्गिक संख्या x आहे.

दिलेल्या अटीनुसार,

$x = 2\sqrt{x} + 3$ (धन वर्गमूळ गृहीत धरून)

$\therefore \quad x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

$\sqrt{x} = y$ ठेवून, (x चे घन वर्गमूळ म्हणजेच $y > 0$)

$\therefore \quad x = y^2$

$\therefore$ समीकरण खालीलप्रमाणे

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$\therefore \quad y^2 - 3y + y - 3 = 0$

$\therefore \quad y(y - 3) + 1(y - 3) = 0$

$\therefore \quad (y - 3)(y + 1) = 0$

$\therefore \quad y - 3 = 0$ किंवा $y + 1 = 0$

$\therefore \quad y = 3$ किंवा $y = -1$

परंतु, $y > 0$

$\therefore \quad y \neq -1 \qquad \therefore \quad y = 3$

परंतु $y = \sqrt{x}$

$\therefore \quad \sqrt{x} = 3$

$\therefore \quad x = (3)^2 = 9$

$\therefore$ **ती नैसर्गिक संख्या 9 आहे.**

6. एक नैसर्गिक संख्या व त्या संख्येचा गुणाकार व्यस्त यांची बेरीज $\frac{10}{3}$ आहे, तर ती संख्या काढा.

[4 गुण]

उकल:

समजा, एक नैसर्गिक संख्या x **आहे.**

तिची गुणाकार व्यस्त $\frac{1}{x}$

दिलेल्या अटीनुसार,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

$\therefore \quad x^2 + 1 = \frac{10}{3}x$ ...[दोन्ही बाजूंना x ने गुणून]

$\therefore \quad 3x^2 + 3 = 10x$ ...[दोन्ही बाजुंना 3 ने गुणून]

$\therefore \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\therefore \quad 3x^2 - 9x - x + 3 = 0$

$\therefore \quad 3x(x - 3) - 1(x - 3) = 0$

$\therefore \quad (x - 3)(3x - 1) = 0$

$\therefore \quad x - 3 = 0$ किंवा $3x - 1 = 0$

$\therefore \quad x = 3$ किंवा $x = \frac{1}{3}$

परंतु, x ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore \quad x \neq \frac{1}{3}$

$\therefore \quad x = 3$

$\therefore$ **ती नैसर्गिक संख्या 3 आहे.**

7. मुलगा व वडिल यांच्या वयाची बेरीज 42 वर्षे आहे. जर त्यांच्या वयाचा गुणाकार 185 असेल, तर दोघांची आजची वये काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, वडिलांचे आजचे वय x वर्षे आहे.

दिलेल्या पहिल्या अटीनुसार

मुलाचे आजचे वय $= (42 - x)$ वर्षे

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

$x(42 - x) = 185$

$\therefore \quad 42x - x^2 = 185$

$\therefore \quad x^2 - 42x + 185 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 37x - 5x + 185 = 0$

$\therefore \quad x(x - 37) - 5(x - 37) = 0$

$\therefore \quad (x - 37)(x - 5) = 0$

$\therefore \quad x - 37 = 0$ किंवा $x - 5 = 0$

$\therefore \quad x = 37$ किंवा $x = 5$

जर $x = 5$ असेल, तर वडिलांचे वय 5 वर्षे असणे अशक्य आहे.

$\therefore \quad x = 37$ आणि $42 - x = 42 - 37 = 5$

$\therefore$ **वडिलांचे आजचे वय 37 वर्ष आणि मुलाचे आजचे वय 5 वर्षे आहे.**

8. एका नैसर्गिक संख्येच्या वर्गाची तिप्पट 363 आहे, तर ती संख्या काढा. [3 गुण]

उकल:

समजा, एक नैसर्गिक संख्या x आहे.

दिलेल्या अटीनुसार,

$3(x^2) = 363$

$\therefore \quad x^2 = 121$

$\therefore \quad x = \pm 11$

परंतु, x ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore \quad x \neq -11$

$\therefore \quad x = 11$

$\therefore$ **ती संख्या 11 आहे.**

9. एका समभुज चौकोनाचा कर्ण दुसऱ्या कर्णापेक्षा 4 सेमीने लहान आहे. जर चौकोनाचे क्षेत्रफळ 30 चौ. सेमी असेल, तर त्या चौकोनाच्या कर्णांची लांबी काढा. [4 गुण]

उकल:

समजा, एका कर्णाची लांबी x सेमी आहे.

दिलेल्या पहिल्या अटीनुसार,

∴ दुसऱ्या कर्णाची लांबी = $(x - 4)$

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 30 चौ. सेमी

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णाच्या लांबीचा गुणाकार = 30

∴ $\frac{1}{2}[x(x-4)] = 30$

∴ $x^2 - 4x = 60$

∴ $x^2 - 4x - 60 = 0$

∴ $x^2 + 6x - 10x - 60 = 0$

∴ $x(x + 6) - 10(x + 6) = 0$

∴ $(x + 6)(x - 10) = 0$

∴ $x + 6 = 0$ किंवा $x - 10 = 0$

∴ $x = -6$ किंवा $x = 10$

परंतु, लांबी ऋण नसते.

∴ $x \neq -6$

∴ $x = 10$ आणि $x - 4 = 10 - 4 = 6$

∴ **एका कर्णाची लांबी 10 सेमी आणि दुसऱ्या कर्णाची लांबी 6 सेमी आहे.**

10. एक नैसर्गिक संख्या दुसऱ्या संख्येपेक्षा 5 ने मोठी आहे. त्यांच्या वर्गांची बेरीज 73 आहे, तर त्या संख्या काढा. **[4 गुण]**

उकल:

समजा, पहिली नैसर्गिक संख्या x आहे.

दिलेल्या पहिल्या अटीनुसार,

∴ दुसरी नैसर्गिक संख्या $(x + 5)$

दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

$x^2 + (x + 5)^2 = 73$

∴ $x^2 + x^2 + 10x + 25 = 73$

∴ $2x^2 + 10x - 48 = 0$

∴ $x^2 + 5x - 24 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून]

∴ $x^2 + 8x - 3x - 24 = 0$

∴ $x(x + 8) - 3(x + 8) = 0$

∴ $(x + 8)(x - 3) = 0$

∴ $x + 8 = 0$ किंवा $x - 3 = 0$

∴ $x = -8$ किंवा $x = 3$

परंतु, x ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$x \neq -8$

∴ $x = 3$ आणि $x + 5 = 3 + 5 = 8$

∴ त्या दोन संख्या 3 आणि 8 आहेत.

11. **पहिल्या 'n' नैसर्गिक संख्यांची बेरीज $S = \frac{n(n+1)}{2}$ या सूत्राने दिली जाते. जर ही बेरीज 276 असेल, तर 'n' ची किंमत काढा.** **[4 गुण]**

उकल:

S = 276 ...[दिलेले]

परंतु $S = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \quad 276 = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \quad 276 \times 2 = n(n+1)$

$\therefore \quad n^2 + n = 552$

$\therefore \quad n^2 + n - 552 = 0$

$\therefore \quad n^2 + 24n - 23n - 552 = 0$

$\therefore \quad n(n+24) - 23(n+24) = 0$

$\therefore \quad (n+24)(n-23) = 0$

$\therefore \quad n + 24 = 0$ किंवा $n - 23 = 0$

$\therefore \quad n = -24$ किंवा $n = 23$

$\therefore \quad n \neq -24$ कारण n ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore \quad \mathbf{n = 23}$

12. **एका आयताकृती मैदानाचे क्षेत्रफळ 420 चौ. सेमी आहे. जर त्याची लांबी 7 मीटरने वाढवली व रुंदी 5 मीटरने कमी केली तर क्षेत्रफळ कायम राहते, तर त्या मैदानाची लांबी व रुंदी काढा.** **[5 गुण]**

उकल:

समजा, आयताकृती मैदानाची लांबी x मीटर आहे.

दिलेल्या पहिल्या अटीनुसार,

आयताकृती मैदानाचे क्षेत्रफळ = 420 चौ. सेमी

$\therefore$ लांबी $\times$ रुंदी $= 420$

$\therefore$ $x \times$ रुंदी $= 420$

$\therefore$ रुंदी $= \dfrac{420}{x}$

आता, दिलेल्या दुसऱ्या अटीनुसार,

$(x + 7) \times \left(\dfrac{420}{x} - 5\right) = 420$

$\therefore$ $(x + 7) \left(\dfrac{420 - 5x}{x}\right) = 420$

दोन्ही बाजूंना x ने गुणून,

$(x + 7)(420 - 5x) = 420x$

$\therefore$ $420x - 5x^2 + 2940 - 35x = 420x$

$\therefore$ $5x^2 + 35x - 2940 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 7x - 588 = 0$ ...[दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून]

$\therefore$ $x^2 + 28x - 21x - 588 = 0$

$\therefore$ $x(x + 28) - 21(x + 28) = 0$

$\therefore$ $(x + 28)(x - 21) = 0$

$\therefore$ $x = -28$ किंवा $x = 21$

परंतु, लांबी ऋण नसते.

$\therefore$ $x \neq -28$

$\therefore$ $x = 21$ आणि $\dfrac{420}{x} = \dfrac{420}{21} = 20$

$\therefore$ **आयताकृती मैदानाची लांबी 21 मीटर आणि**

आयताकृती मैदानाची रुंदी 20 मीटर आहे.

13. जर केळीचा भाव प्रति डझन ₹ 1 ने वाढवला तर ₹ 840 स पूर्वीपेक्षा दोन डझन केळी कमी मिळतात, तर सुरुवातीचा केळीचा प्रति डझन भाव काढा.

[5 गुण]

उकल:

समजा, केळीचा प्रति डझन भाव ₹ x मानू,

$\therefore$ ₹840 मध्ये $\frac{840}{x}$ डझन केळी मिळतील

जर केळीचा भाव प्रति डझन $x+1$ ने वाढवला

$\therefore$ तर ₹ 840 मध्ये $\frac{840}{x+1}$ डझन केळी मिळतील

उदाहरणात दिलेल्या अटीनुसार,

$$\frac{840}{x+1} = \frac{840}{x} - 2$$

$$\therefore \quad \frac{840}{x} - \frac{840}{x+1} = 2$$

$$\therefore \quad 840\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{840}$$

$$\therefore \quad \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{420}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{420}$$

$\therefore \quad x^2 + x = 420$

$\therefore \quad x^2 + x - 420 = 0$

$\therefore \quad x^2 + 21x - 20x - 420 = 0$

$\therefore \quad x(x + 21) - 20(x + 21) = 0$

$\therefore \quad (x + 21)(x - 20) = 0$

$\therefore \quad x + 21 = 0$ किंवा $x - 20 = 0$

$\therefore \quad x = -21$ किंवा $x = 20$

परंतु, दर ऋण नसतो.

$\therefore \quad x \neq -21$

$\therefore \quad x = 20$

$\therefore$ **केळीचा मूळ दर ₹ 20 प्रति डझन.**