अध्याय 11

ज्यामितीय आकृतियों में समरूपता

[SIMILARITY IN GEOMETRICAL SHAPES]

F15H53

परिचय (Introduction)

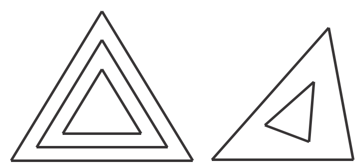
हम अपने आस–पास अलग–अलग तरह की छोटी–बड़ी आकृतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ वृत्ताकार, कुछ घनाकार, कुछ त्रिभुजाकार जैसी होती हैं और कुछ को इसी तरह की आकृतियों में बाँट कर देखा जा सकता है।

आकृति–1

आकृति–1 देखिए, इस मकान के चित्र में भी विभिन्न ज्यामितीय आकृतियाँ देखी जा सकती हैं। इनमें कुछ आयताकार हैं तो कुछ त्रिभुजाकार।

क्या आप इसमें कुछ और अन्य तरह की आकृतियाँ ढूँढ़ सकते हैं? कौन सी और आकृतियाँ हैं? साथियों से चर्चा करें।

समान आकृतियाँ :– ध्यान से देखने पर हम पाते हैं कि इनमें से कुछ आकृतियाँ, आकार (size) एवं आकृति (shape) दोनों में समान हैं। यानी सर्वांगसम हैं।



(i) (ii)

आकृति–2

अब आकृति–2 देखें, 2(i) में तीन त्रिभुज बने हैं। देखने में इन तीनों त्रिभुजों के कोण बराबर लगते हैं एवं भुजाएँ एक खास अनुपात में बड़ी या छोटी दिखती हैं। इसलिए आकृति 2(i) में बने तीनों त्रिभुज एक जैसे लगते हैं। किन्तु आकृति 2(ii) में दोनों त्रिभुज के कोण अलग–अलग हैं। अतः यह दोनों त्रिभुज दिखने में ही भिन्न हैं।

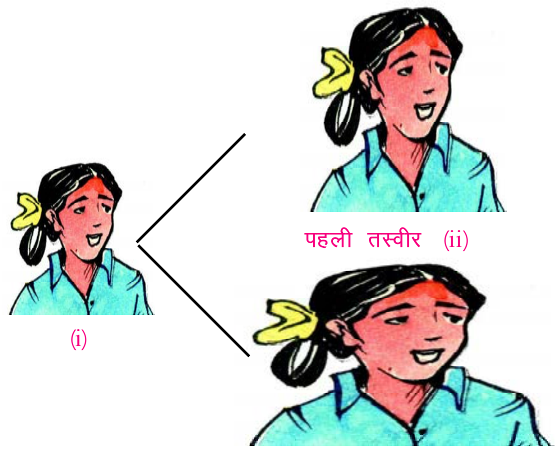
सामान्यतः एक जैसी दिखने वाली आकृतियों को हम समरूप कह देते हैं परन्तु गणित में समरूप होने की कुछ शर्तें होती हैं क्या 2(i) में बने तीनों त्रिभुज समरूप हैं? देखने में तो ये त्रिभुज समरूप दिख रहे हैं, पर यह कैसे निश्चित करें? आगे हम इनकी समरूपता पर चर्चा करेंगे।

स्केलिंग (Scaling)

अक्सर हमारे सामने ऐसी परिस्थियाँ आती हैं, किसी तस्वीर को बड़ा करके देखना है या किसी खेत, मकान, कारखाने अथवा मैदान का नक्शा, कागज पर बनाना है। या फिर बने हुए नक्शे से वास्तविक दूरियाँ, आकार, आकृति, क्षेत्रफल आदि पता करना है। इस तरह की सभी आवश्यकताओं के लिए हम स्केलिंग का उपयोग करते हैं।

स्केलिंग का अर्थ है आकार (size) में बदलाव करना। यानी आकार को बड़ा या छोटा करना। किन्तु बड़ा–छोटा करने में भी कुछ बातों का ध्यान रखना पड़ता है जिससे नया चित्र पहले वाले जैसा दिखे। पहले जैसे दिखने का क्या अर्थ है?

आकृति–3 के चित्रों को देखिए। आकृति 3(i) को बड़ा करने के प्रयास में 3(ii) और 3(iii) प्राप्त हुए हैं। इन दोनों में से कौन–सी तस्वीर चुनेंगे? जाहिर सी बात है पहली। इसमें पहली तस्वीर इस तरह बड़ी की गई है जिससे उसकी आकृति मूल तस्वीर 3(i) के जैसी ही रहे इसके लिए तस्वीर को निश्चित अनुपात में बड़ा किया गया है। हम यह कह सकते हैं कि आकृति 3(i) व 3(ii) समरूप हैं।


(i) पहली तस्वीर (ii) दूसरी तस्वीर (iii)
आकृति–3

अब आकृति 3(iii) को देखिए। इस तस्वीर की चौड़ाई, ऊँचाई के अनुपात में मूल तस्वीर की चौड़ाई से अधिक प्रतीत हो रही है। यह मूल तस्वीर से अलग दिखाई पड़ रही है अतः आकृति 3(i) व 3(iii)समरूप नहीं हैं।

इसलिए स्केलिंग करते समय हमें इस बात का ध्यान रखना होता है कि आकार बड़ा या छोटा करें तो उसकी आकृति में कोई परिवर्तन न हो और समरूपता का गुण बरकरार रहे।

स्केल गुणक (Scale Factor)

दो समरूप आकृतियों के माप में विशेष अनुपात होता है जिसे स्केल गुणक (Scale factor) कहते हैं। स्केल गुणक का उपयोग करके किसी आकृति को आवश्यकतानुसार निश्चित अनुपात में बड़ा या छोटा किया जा सकता है।

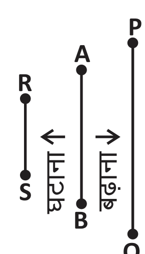
जैसे 5 सेमी. के रेखाखण्ड को 10 सेमी. करने के लिए स्केल गुणक 2 होगा क्योंकि $5\times2=10$। इसी तरह 50 सेमी. × 20 सेमी. के नक्शे को 10 सेमी. × 4 सेमी. तक स्केल करने के लिए स्केल गुणक $\frac{1}{5}$ या 0.2 होगा। $50\times\frac{1}{5}=10$ सेमी. , $20\times\frac{1}{5}=4$ सेमी.। यानी स्केलिंग करने पर रेखाखण्ड 2 गुना (बड़ा) हो जाएगा और नक्शा $\frac{1}{5}$ या 0.2 गुना (छोटा) हो जाएगा। हम देख सकते हैं कि जिस अनुपात में नक्शे की एक भुजा कम हुई है उसी अनुपात में उसकी दूसरी भुजा भी कम हुई है। स्केल गुणक यदि 1 से अधिक है तो नई आकृति बड़ी होगी और यदि स्केल गुणक 1 से कम है तो नई आकृति छोटी होगी।

अब आकृति– 4 को देखिए रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को बड़ा करने पर $\overline{PQ}$ और छोटा करने पर $\overline{RS}$ मिलता है। माना स्केल गुणक x है।

(i) बढ़ाना (Dilation/Enlargement)

$PQ = x\,(AB)$ (चूँकि x स्केल गुणक है)

$$\frac{PQ}{AB} = x$$



आकृति–4

क्योंकि $PQ > AB$ है, इसलिए $x>1$

अतः आकृति को बड़ा करने (dilation) के लिए स्केल गुणक '1' से बड़ा होना चाहिए।

(ii) घटाना (Reduction)

$RS = x(AB)$ (चूँकि x स्केल गुणक है)

$$\frac{RS}{AB} = x$$

क्योंकि $RS < AB$ है, इसलिए यहाँ $x<1$

स्पष्टतः आकृति को छोटा करने (reduce) के लिए स्केल गुणक '1' से छोटा होना चाहिए।

करके देखें

1. 12 सेमी. लंबे एक रेखाखण्ड को 36 सेमी. लंबा रेखाखण्ड बनाने के लिए स्केल गुणक क्या होगा? इसी तरह 12 सेमी. के रेखाखण्ड की लंबाई को 6 सेमी. करना हो तो स्केल गुणक क्या होना चाहिए?

नक्शा और पैमाना

गाँव, जिला, राज्य और राष्ट्र के नक्शों को बनाते समय एक बड़े क्षेत्र को कागज पर दिखाना होता है। इसमें अलग–अलग माप के पैमाने लिए जाते हैं। यदि छत्तीसगढ़ के नक्शे में पैमाना 1 सेमी. : 50,00,000 सेमी. या 1 सेमी. : 50 किमी. लिखा है तो इससे क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

रोहित कहता है कि 1 सेमी. : 50 किमी. का मतलब नक्शे पर 1सेमी., वास्तव में 50 किमी. को दर्शाता है। अतः 2 सेमी., $50\times2=100$ किमी. को तथा 4 सेमी., $50\times4=200$ किमी. को दर्शाएगा।

क्या आपको रोहित की बात ठीक लगी? यहाँ स्केल गुणक कितना है? दोस्तों से चर्चा करें।

सोचें एवं चर्चा करें

(1) आप अपने गाँव का नक्शा बनाने के लिए क्या पैमाना लेना चाहेंगे? क्यों?

(2) (i) आपको अपनी किताब में बने भारत के नक्शे (20सेमी.×20सेमी.) को दीवार (3मी.×2मी) पर बनाना है। क्या आप स्केल गुणक 1मी.=12सेमी. लेकर यह बना सकते हैं?

(ii) यदि नहीं तो क्यों?

(iii) स्केल गुणक अधिकतम कितना लिया जाए ताकि नक्शा 6मी.×4मी. दीवार पर बनाया जा सके?

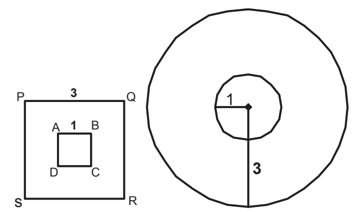
(3) अपनी तहसील व जिले के नक्शों को बनाने में आप कौनसा स्केल लेंगे और क्यों?

प्रश्नावली–1

1. खेत के नक्शे को 1 सेमी. : 10 मी. स्केल किया गया है। नक्शे में खेत का माप 3 सेमी.× 4 सेमी. है। खेत का वास्तविक क्षेत्रफल वर्गमी. में ज्ञात कीजिए?
2. आपके पास 3600 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल की वर्गाकार पेंटिंग है। स्केल गुणक 0.1 लेते हुए पेंटिंग को स्केल करें। स्केलिंग करने के बाद भुजा की माप ज्ञात कीजिए?
3. किसी शहर के नक्शे में रेलवे स्टेशन से एयरपोर्ट (हवाई अड्डा) की दूरी 3 सेमी. है। यदि नक्शे का पैमाना 2 सेमी. : 7 किमी. है तो रेलवे स्टेशन से एयरपोर्ट की वास्तविक दूरी किमी. में क्या होगी?

वर्ग एवं वृत्त की समरूपता

इस भाग में हम वर्ग, वृत्त, समांतर चतुर्भुज और त्रिभुज जैसी आकृतियों में समरूपता पर चर्चा करेंगे। यहाँ आकृति– 4 में दो वर्ग दिए गए हैं जिनकी भुजाएँ क्रमशः 1 सेमी. और 3 सेमी. हैं। क्या दोनों वर्ग समरूप हैं?



आकृति–5 आकृति–6

चूँकि वर्ग के प्रत्येक कोण का माप 90° होता है और इनके कोण बराबर एवं हरेक की चारों भुजाएँ समान होती हैं, अतः दोनों वर्गों की सभी भुजाएँ समानुपातिक भी होंगी। अतः दोनों वर्ग समरूप हैं। अब हम देखते हैं कि वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा को तीन गुना बढ़ाने पर वर्ग PQRS मिलता है। यानी स्केल गुणक 3 है।

अब आकृति– 5 में दो वृत्त हैं। एक वृत्त की त्रिज्या 1 सेमी. और दूसरे वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी. है। क्या दोनों वृत्त समरुप हैं?

हम 1 सेमी. त्रिज्या के वृत्त को बड़ा करके 3 सेमी. का वृत्त बना सकते हैं। या 3 सेमी. त्रिज्या के वृत्त के आकार (साइज) को घटाकर 1 सेमी. त्रिज्या का वृत्त बना सकते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि दोनों वृत्त समरूप हैं।

कॉपी में अलग–अलग त्रिज्या के वृत्त बनाइए और पता कीजिए कि वे समरुप हैं या नहीं।

सोचें एवं चर्चा करें

- क्या सभी वर्ग समरुप होते हैं?
- क्या सभी वृत्त समरुप होते हैं?

अन्य आकृतियों में समरूपता :

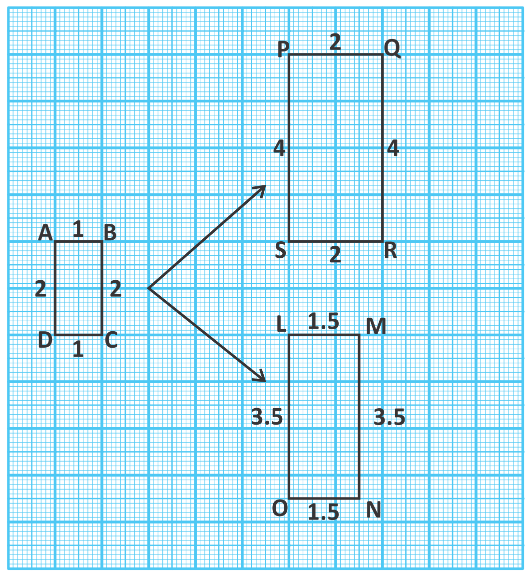
वृत्त व वर्ग विशेष तरह की आकृतियाँ हैं, इन्हें केवल एक अवयव भुजा, त्रिज्या द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। स्केलिंग करते समय आकृति के रूप को बरकरार रखना होता है। जहाँ इनके लिए समरूपता के गुण मौजूद हैं। अन्य आकृतियों में ऐसा नहीं है। अलग–अलग प्रकार

की आकृतियों के लिए समरूपता जाँचने के मापदण्ड अलग–अलग होंगे। तो फिर हमें कैसे पता चले कि कोई दो आकृतियाँ समरूप हैं अथवा नहीं। इसी के लिए समरूप आकृतियों की कुछ विशेषताएँ निर्धारित करना उपयोगी है।

बहुभुजों में समरूपता :

दो बहुभुजों के समरूप होने का अर्थ है कि यदि उन्हें एक निश्चित स्केल गुणक से बड़ा अथवा छोटा किया जाए, जिससे उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में बड़ी अथवा छोटी (स्केल) हों, तो वे दोनों समरूप होंगे। अतः **बहुभुजों में समरूपता के लिए सभी संगत कोणों का बराबर होना तथा सभी संगत भुजाओं का एक ही अनुपात में होना आवश्यक है ।**

अब हम आयत और त्रिभुज में समरूपता को समझेंगे और समरूपता जाँचने के तरीके पर बात करेंगे।



आकृति–7

आयत में समरूपता कैसे जाँचे ?

ग्राफ पर बने आयत के चित्रों को देखिए(आकृति–7)। यदि आयत ABCD मूल आकृति है तो क्या आयत PQRS और आयत LMNO, मूल आकृति के समरूप है? देखने पर तो यह आकृतियाँ समरूप दिखती हैं परन्तु वास्तव में यह समरूप हैं या नहीं, हमें पता करना होगा।

आयत के प्रत्येक कोण का माप 90^0 होता है । अर्थात सभी आयतों के कोण बराबर होंगे। चूँकि आयत में आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। अतः आयत में समरूपता जाँचने के लिए हमें चारों भुजाओं की नहीं बल्कि दो संलग्न भुजाओं के अनुपात पता करने की जरूरत होती है । आकृति–7 देखकर नीचे बनी तालिका पूरी कीजिए

तालिका–1

भुजाओं की माप		संगत भुजाओं का अनुपात
आयत **ABCD**	आयत **PQRS**	
$AB = 1$	$PQ = 2$	$\frac{PQ}{AB} = \frac{2}{1}$
$BC = 2$	$QR = 4$	$\frac{QR}{BC} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

आयत PQRS और आयत ABCD की संगत भुजाओं का अनुपात समान है। यह अनुपात

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=2$$

$$\therefore \frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{RS}{CD}=\frac{SP}{DA}=2$$

चूँकि आयत PQRS और ABCD के सभी संगत भुजाओं का अनुपात बराबर है। यहाँ स्केल गुणक '2' है। भुजा PQ, भुजा AB की दुगुनी है । दोनों आयत समरूप हैं। इसे गणितीय रूप में इस तरह लिखेंगे– आयत ABCD ~ आयत PQRS, जहाँ '~' समरूपता का चिह्न है।

तालिका–2

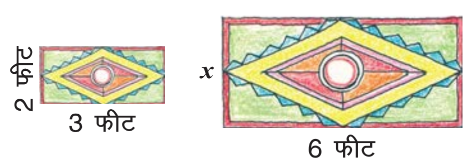
भुजाओं की माप		संगत भुजाओं का अनुपात
आयत **ABCD**	आयत **LMNO**	
AB= 1	LM = 1.5	$\frac{LM}{AB}=\frac{1.5}{1}$
BC = 2	MN = 3.5	$\frac{MN}{BC}=\frac{3.5}{2}=\frac{1.75}{1}$

अब तालिका–2 को देखकर आयत ABCD और LMNO के बीच तुलना कीजिए । क्या आयत ABCD और आयत LMNO समरूप हैं?

यहाँ एक संगत भुजा का अनुपात 1.5 है और दूसरी संगत भुजा का अनुपात 1.75 है। चूँकि संगत भुजाएँ समानुपातिक नहीं हैं। इसलिए आयत ABCD और आयत LMNO समरूप नहीं हैं ।

करके देखें

चित्र में दोनों चादरें समरूप हैं, तो–

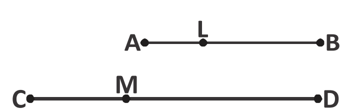


(i) स्केल गुणक कितना होगा?

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए ।

(iii) चादरों के परिमाप और क्षेत्रफल का अनुपात कितना है?

रेखाखण्डों का समानुपातिक विभाजन

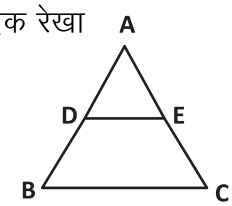


बिन्दु L और M, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ पर स्थित हैं।

यदि $\frac{AL}{LB}=\frac{CM}{MD}$ है तो हम कहते हैं कि $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ L और M द्वारा समानुपातिक रूप से विभाजित हैं। इस नियम का उपयोग हम त्रिभुजों की समरूपता को परखने के लिए करेंगे।

प्रमेय 1 :– यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर बाकी दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती हुई एक रेखा खींची जाए, तो यह रेखा उन दोनों भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।

उपपत्ति : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है, जिसमें भुजा BC के समांतर खींची गई एक रेखा अन्य दो भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती है।



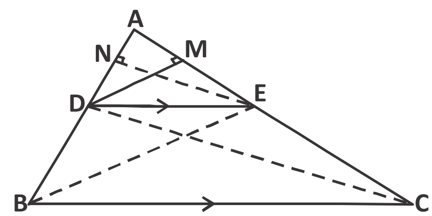
आकृति–8 (i)

हमें सिद्ध करना है कि $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

B को E से तथा C को D से मिलाइए तथा $DM \perp AC$ एवं $EN \perp AB$ खींचिए ।

चूँकि ΔADE का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$$



आकृति–8 (ii)

ΔADE के क्षेत्रफल को ar (ADE) से भी व्यक्त किया जाता है।

अतः $ar\,(ADE) = \dfrac{1}{2} \times AD \times EN$

तथा $ar\,(BDE) = \dfrac{1}{2} \times DB \times EN$

इसी प्रकार $ar\,(ADE) = \dfrac{1}{2} \times AE \times DM$ तथा $ar\,(DEC) = \dfrac{1}{2} \times EC \times DM$

अतः $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad \text{.............. (1)}$$

तथा $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad \text{.............. (2)}$$

ध्यान दीजिए कि ΔBDE और ΔDEC एक ही आधार DE तथा समांतर रेखाओं BC और DE के बीच बने दो त्रिभुज हैं।

अतः $ar(BDE) = ar(DEC)$ .... (3)

इसलिए (1), (2) और (3), से

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ (यह आधारभूत समानुपातिक प्रमेय है)

इस प्रमेय का विलोम भी सिद्ध किया जा सकता है । आइए देखें–

प्रमेय 2 :– यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।

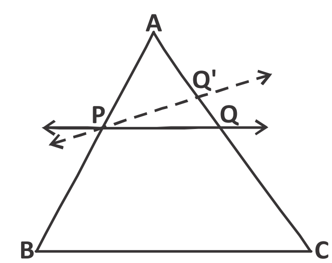
उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम एक रेखा PQ, इस प्रकार लें कि $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ और इसके विपरीत यह बात माने कि PQ, भुजा BC के समांतर नहीं है।

अब यदि PQ, भुजा BC के समांतर नहीं है, तो BC के समांतर कोई दूसरी रेखा होगी। मान लें रेखा PQ' वह रेखा है जो BC के समांतर है।

अतः $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ'}{Q'C}$ होगा (आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

पर, $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ है।

इसलिए $\frac{AQ}{QC}=\frac{AQ'}{Q'C}$



आकृति–9

दोनो पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$\frac{AQ}{QC}+1=\frac{AQ'}{Q'C}+1$$

$$\frac{AQ+QC}{QC}=\frac{AQ'+Q'C}{Q'C}$$

$$\therefore \frac{AC}{QC}=\frac{AC}{Q'C} \quad \text{अतः } QC=Q'C$$

लेकिन ऐसा तभी संभव होगा जब Q एवं Q' एक ही बिंदु हो

इसलिए $PQ \parallel BC$ है।

आइए, इन प्रमेयों पर आधारित कुछ उदाहरण देखते हैं–

उदाहरणः–1. यदि कोई रेखा ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समांतर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ ।

हलः– $DE \parallel BC$ (दिया है)

अतः $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

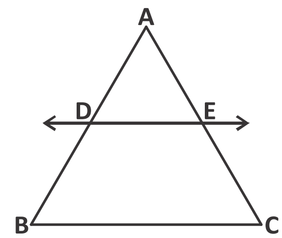
अर्थात् $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$

या $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$

या $\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$

या $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

अतः $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



आकृति–10

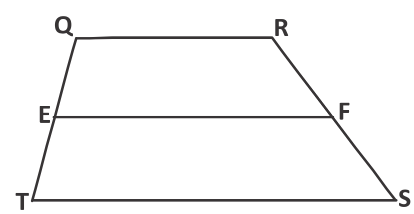
उदाहरणः–2. QRST एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें QR || TS है। असमांतर भुजाओं QT और RS पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा QR के समांतर है। दर्शाइए कि $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$ है।

हलः– Q को S से मिलाइए जो EF को बिंदु G पर प्रतिच्छेद करे।

QR || TS और EF || QR (दिया है) आकृति–10 (ii)

इसलिए EF || TS (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं)।

अब ΔQTS में EG || TS (क्योंकि EF || TS)



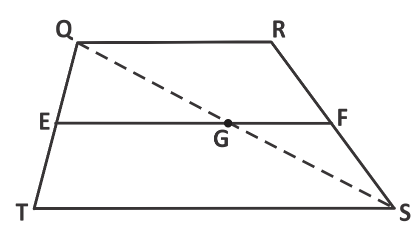
आकृति–11 (i)

अतः $\frac{QE}{ET}=\frac{QG}{GS}$ ...... (1)

इसी प्रकार ΔSQR में

$\frac{GS}{QG}=\frac{FS}{RF}$ अर्थात् $\frac{QG}{GS}=\frac{RF}{FS}$ ...... (2)

समी. (1) और (2) से $\frac{QE}{ET}=\frac{RF}{FS}$



आकृति–11 (ii)

प्रश्नावली–2

1. एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या 52 मीटर है। इस मैदान का नक्शा कागज पर बनाइए जिसमें पैमाना 13 मीटर : 1 सेमी. हो। नक्शे में मैदान की त्रिज्या क्या होगी?

2. किसी आयत की दो आसन्न भुजाओं की माप क्रमशः 5 सेमी. और 7.5 सेमी. है। निम्न स्केल गुणक मानते हुए नए आयतों की भुजाओं की माप और क्षेत्रफल पता कीजिए–

   (i) 0.8

   (ii) 1.2

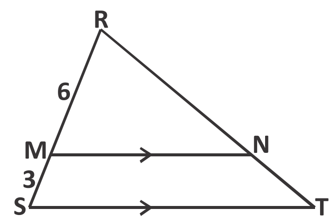
   (iii) 1.0

   स्केल गुणक '1' मानने पर मिला आयत क्या वास्तविक आयत के सर्वांगसम है?

3. आकृति–12 (i) में $MN \parallel ST$ तब निम्नलिखित का मान पता कीजिए।

   (i) $\dfrac{TN}{NR}$ (ii) $\dfrac{TR}{NR}$

   (iii) $\dfrac{TN}{RT}$

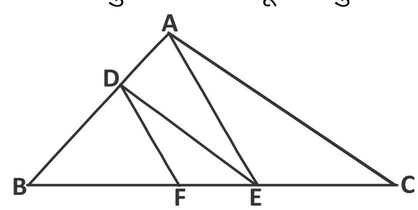


आकृति–12 (i)

4. आधारभूत समानुपातिक प्रमेय (Basic proportionality theorem) का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

5. आकृति में $DF \parallel AE$ और $DE \parallel AC$ है।

   सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$ है। आकृति–12 (ii)



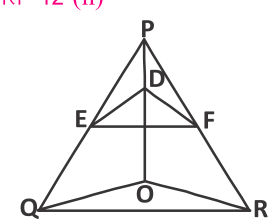
आकृति–12 (ii)

6. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है:

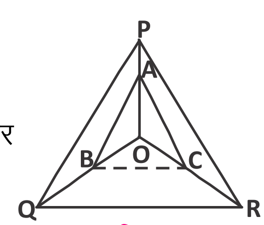
   (i) PE = 3.9 सेमी., EQ = 3 सेमी., PF = 3.6सेमी. और FR = 2.4 सेमी.

   (ii) PE = 4 सेमी., QE = 4.5 सेमी., PF = 8 सेमी. और RF = 9 सेमी.

   (iii) PQ = 1.28 सेमी., PR = 2.56 सेमी., PE = 0.18 सेमी. और PF = 0.36 सेमी.



आकृति–12 (iii)



आकृति–12 (iv)

7. आकृति–12 (iii) में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।

8. आकृति–12 (iv) में OP, OQ और OR पर क्रमशः तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार स्थित हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।

संकेत :– जिन सवालों में आवश्यकता हो चित्र बनाकर हल करें। इससे आसानी होगी।

समांतर चतुर्भुज में समरूपता :–

F1EI6Q

क्या आयतों की समरूपता की कसौटियाँ समांतर चतुर्भुजों में समरूपता जाँचने के लिए पर्याप्त होंगी? जाहिर है कि यह पर्याप्त नहीं है क्योंकि समांतर चतुर्भुजों के कोण बराबर नहीं होते। अतः हम एक और प्रमेय तक पहुँचते हैं।

प्रमेय 3 :– यदि दो समांतर चतुर्भुज में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं, अतः ऐसे समांतर चतुर्भुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति :– प्रमेय के कथनानुसार ऐसे दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PQRS लें

जहाँ, $\angle A=\angle P, \angle B=\angle Q$

और $\angle C=\angle R, \angle D=\angle S$ (आकृति–13 (i), (ii))

समांतर चतुर्भुज PQRS में S को Q से मिलाइए तथा PS और SR पर दो बिंदु क्रमशः A' तथा C' इस प्रकार लीजिए कि

$AD=A'S, \quad DC=SC'$

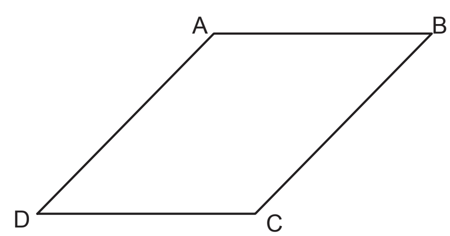
तथा $\angle DAB=\angle SA'B'$ फिर B' को C' से मिलाइए।

अब $\triangle PSQ$ और $\triangle A'SB'$ में $\angle SPQ=\angle SA'B'$ (दिया है)

$\therefore$ $A'B' \parallel PQ$ (PQ और A'B' को तिर्यक रेखा PS प्रतिच्छेद करती है एवं इससे बने संगत कोण बराबर हैं।)

अब $\triangle PSQ$ में $A'B' \parallel PQ \parallel SR$, तो आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

$\frac{PS}{A'S}=\frac{PQ}{A'B'}=\frac{QS}{B'S}$ होगा (क्यों?)



आकृति–13 (i)

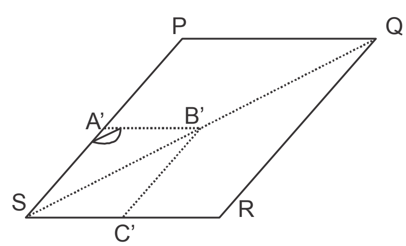
$\frac{PS}{AD}=\frac{PQ}{AB}=\frac{QS}{B'S}$ होगा (क्यों?) ....(1)

इसी प्रकार $\triangle SQR$ में भी $\frac{SR}{SC'}=\frac{QR}{B'C'}=\frac{QS}{B'S}$

या $\frac{SR}{CD}=\frac{QR}{BC}=\frac{QS}{B'S}$ (क्यों?) ....(2)

(1) और (2) से

$\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{SR}{CD}=\frac{PS}{AD}$ (क्यों?)



आकृति–13 (ii)

अतः यदि हम मानें कि दो समांतर चतुर्भुज के संगत कोण बराबर हैं, तो हम पाते हैं कि उनकी चारों संगत भुजाएँ समानुपातिक होंगी।

क्या इसका विलोम भी सत्य होगा?

प्रमेय 4 :– यदि दो समांतर चतुर्भुज में संगत भुजाएँ समानुपातिक तथा उनके संगत कोण बराबर हों तो वे समांतर चतुर्भुज समरूप होंगे ।

उपपत्तिः– यह कथन स्वयं सिद्ध कीजिए।

निष्कर्ष :–

ऊपर लिखे गए दोनों प्रमेयों से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दोनों कसौटियाँ अर्थात (i) संगत कोण बराबर हों (ii) संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, में से केवल किसी एक का संतुष्ट होना पर्याप्त है। समांतर चतुर्भुज में समरूपता के लिए दोनों कसौटियों की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि एक से स्वतः दूसरी कसौटी प्राप्त हो जाती है।

इसी तरह अन्य बहुभुजों के जोड़ों (समलम्ब चतुर्भुज, सम चतुर्भुज, पंचभुज आदि) में समरूपता को जाँचा जा सकता है ।

करके देखें

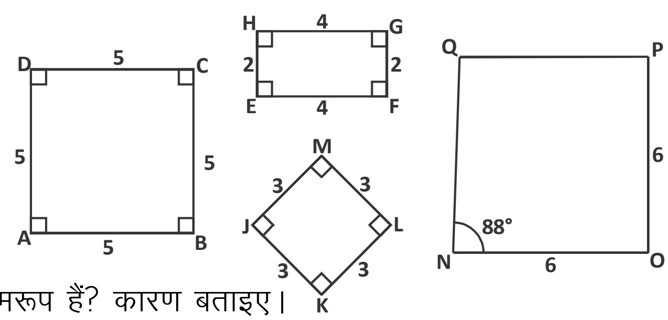
1. क्या दिए गए चतुर्भुज समरूप हैं? कारण सहित लिखिए–

   (i) ABCD और EFGH

   (ii) ABCD और JKLM

   (iii) ABCD और NOPQ

   (iv) JKLM और NOPQ



2. क्या EFGH और JKLM समरूप हैं? कारण बताइए।

3. EFGH के समरूप एक चतुर्भुज बनाइए।

क्या सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप भी होती हैं ?

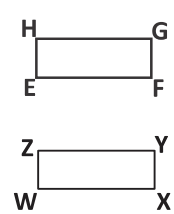
आइए, समरूपता और सर्वांगसमता में संबंध समझते हैं।

दो चतुर्भुज EFGH व WXYZ सर्वांगसम हैं अर्थात EFGH ≅ WXYZ, इसलिए इनकी संगत आसन्न भुजाओं की माप व संगत कोण बराबर होंगे ।

$\therefore$ EF = WX, FG = XY, GH = YZ और HE = ZW

या $\frac{EF}{WX} = 1, \frac{FG}{XY} = 1, \frac{GH}{YZ} = 1$ और $\frac{HE}{ZW} = 1$

$$\therefore \frac{EF}{WX} = \frac{FG}{XY} = \frac{GH}{YZ} = \frac{HF}{ZW} = 1$$



आकृति–14

स्पष्टतः दोनों चतुर्भुजों की भुजाएँ समानुपातिक हैं इसलिए ये चतुर्भुज समरूप होंगे। अर्थात सर्वांगसमता में समरूपता की दोनों जरूरतें पूरी होती हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या सभी समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम भी होती हैं। कारण सहित समझाएँ।

समरूप आकृतियों के परिमाप में संबंध

यदि दो आकृतियाँ समरूप हों, तो क्या हम उन आकृतियों के परिमाप में संबंध बता सकते हैं? माना हमें दो समरूप बहुभुज दिए हैं, जिनके स्केल गुणक m है। समरूपता की कसौटी के अनुसार–

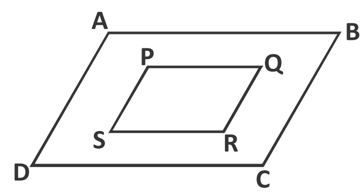
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = m$$ (संगत भुजाएँ समानुपातिक हैं) ....(1)

$AB = mPQ$ .... (2)

$BC = mQR$ .... (3)

$CD = mRS$ .... (4)

और $DA = mSP$ ....(5)



आइए इनके परिमाप पता करते हैं–

बहुभुज ABCD का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ .... (6)

तथा बहुभुज PQRS का परिमाप $= PQ + QR + RS + SP$ .... (7)

(6) व (7) से

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}} = \frac{AB + BC + CD + DA}{PQ + QR + RS + SP}$$

(2), (3), (4) और (5) से–

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}} = \frac{m(PQ + QR + RS + SP)}{(PQ + QR + RS + SP)}$$

$$\frac{\text{बहुभुज ABCD का परिमाप}}{\text{बहुभुज PQRS का परिमाप}} = m = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$ (1) से

अर्थात् किन्हीं दो समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के अनुपात और स्केल गुणक के बराबर होता है।

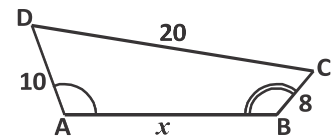
उदाहरणः–3. दी गई आकृति में यदि चतुर्भुज ABCD ~ चतुर्भुज PQRS है तो–

(i) स्केल गुणक क्या होगा? (चतुर्भुज ABCD का चतुर्भुज PQRS से)

(ii) x, y और z का मान ज्ञात कीजिए ।

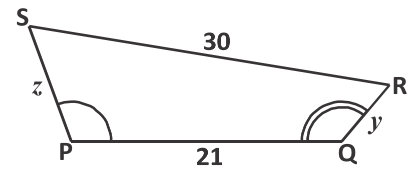
(iii) चतुर्भुज ABCD का परिमाप कितना है?

(iv) दोनों चतुर्भुजों के परिमापों का अनुपात क्या होगा?



हलः– (i) संगत भुजाओं का अनुपात है–

$$\frac{CD}{RS}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3} \text{ (स्केल गुणक)}$$



(ii) चूँकि दिए गए दोनों चतुर्भुज समरूप हैं अतः उनकी संगत भुजाएँ समानुपातिक होंगी–

$$\frac{CD}{RS}=\frac{AB}{PQ}$$

$$\therefore \frac{2}{3}=\frac{x}{21}$$

$$x = 14$$

$$\text{तथा } \frac{CD}{RS}=\frac{BC}{QR}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{y}$$

$$y = 12$$

$$\frac{CD}{RS}=\frac{AD}{PS}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{10}{z}$$

$$z = 15$$

(iii) चतुर्भुज ABCD का परिमाप है :

10 + 20 + 8 + 14 = 52 इकाई

(iv) दोनों चतुर्भुजों को परिमाप का अनुपात होगा–

$$\frac{\text{चतुर्भुज ABCD का परिमाप}}{\text{चतुर्भुज PQRS का परिमाप}} = \frac{2}{3}$$ जो कि स्केल गुणक के बराबर है।

प्रश्नावली–3

1. दिए गए चित्र में बहुभुज समरूप हैं तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए।

   (i) OP

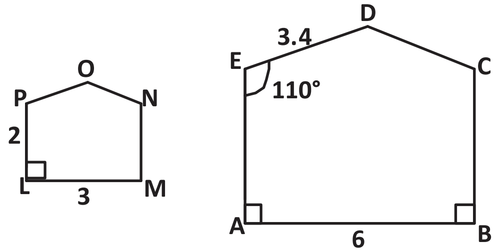
   (ii) EA

   (iii) m $\angle$OPL

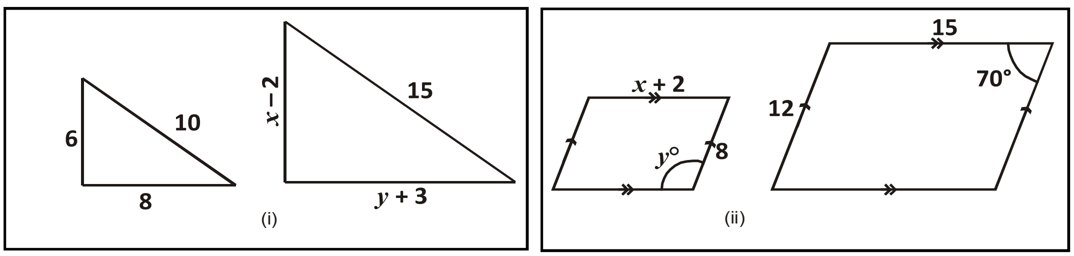
   (iv) m $\angle$LMN

   (v) बहुभुज DEABC ~ ?

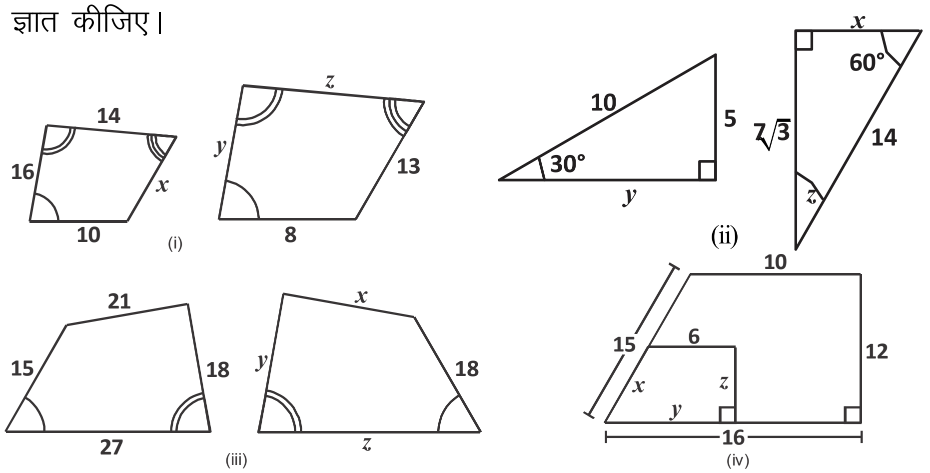
   (vi) बहुभुज BCDEA ~ बहुभुज NOPLM, कथन ठीक नहीं लिखा है। इसे ठीक करके लिखें।



2. चित्र (i) के त्रिभुज और (ii) के समांतर चतुर्भुज समरूप हैं तो x और y का मान पता कीजिए।



3. नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र के दोनों बहुभुज समरूप है तो प्रत्येक में x, y और z का मान ज्ञात कीजिए।



4. एक चतुर्भुज की भुजाओं की माप 4 सेमी., 6 सेमी., 6 सेमी. व 8 सेमी. है। दूसरा चतुर्भुज, जो पहले चतुर्भुज के समरूप है, उसकी भुजाओं की माप 6 सेमी., 9 सेमी., 9 सेमी. और 12 सेमी. है।

   (i) स्केल गुणक क्या होगा? (दूसरे चतुर्भुज का पहले चतुर्भुज से)

   (ii) दोनों चतुर्भुजों के परिमाप ज्ञात कीजिए।

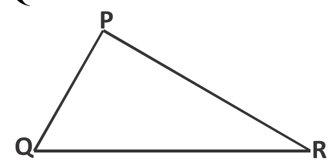
   (iii) इनके परिमापों का अनुपात क्या है?
   (दूसरे चतुर्भुज का पहले चतुर्भुज से)

5. निम्नलिखित के लिए उदाहरण दें एवं उनके कारण लिखिए ।
   (i) यदि दो बहुभुज सर्वांगसम हैं, तो वे समरूप होंगे ही।
   (ii) यदि दो बहुभुज समरूप हैं, तो जरूरी नहीं कि वे सर्वांगसम हों।
   (iii) ऐसे ही तीन और कथन सोच कर लिखें।

F1NE8D

त्रिभुजों में समरूपता कैसे जाँचें ?

अभी तक हमने देखा कि कोई भी दो त्रिभुज ΔPQR और ΔXYZ को समरूप सिद्ध करने के लिए दो कसौटियाँ हैं।



आकृति–15 (i)

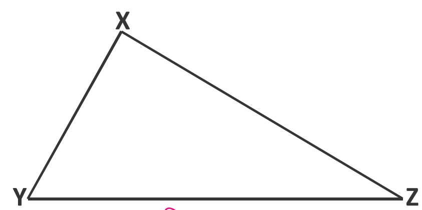
(i) संगत कोण बराबर हों

$\angle P = \angle X, \quad \angle Q = \angle Y, \quad \angle R = \angle Z$

(ii) संगत भुजाओं के अनुपात समान हों (समानुपातिक हों)

$$\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{RP}{ZX}$$

तब $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ होंगे।



आकृति–15 (ii)

इनमें से कोई भी एक पूरी होने पर हम कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज समरूप हैं।

कोण–कोण–कोण (AAA) समरूपता कसौटी –

यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसीलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं। इस कसौटी को दो त्रिभुजों की समरूपता की कोण–कोण–कोण **(AAA)** कसौटी कहा जाता है।

आइए देखें कि इन कसौटियों को पूरा करने के लिए न्यूनतम कौन सी शर्तें ढूँढ़ी जा सकती हैं। **कोण–कोण (AA) समरूपता** : यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

यह त्रिभुजों की समरूपता की कोण–कोण कसौटी है।

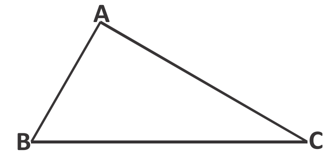
इस कसौटी का उपयोग कर हम दो अन्य कसौटियाँ SAS और SSS, को गणितीय रूप से (प्रमेय) सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 5 :– SAS (भुजा–कोण–भुजा) समरूपता प्रमेय : यदि एक त्रिभुज का एक कोण, दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम दो ऐसे त्रिभुज ABC और DEF लेंगे जिनमें

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) यानी DE बड़ा है AB से तथा $\angle A = \angle D$ हो।

ΔDEF में DE तथा DF पर क्रमशः दो बिंदु P व Q इस प्रकार लेते हैं कि $DP = AB$ और $DQ = AC$

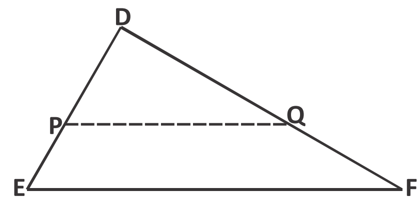


आकृति–16 (i)

अब P से Q को मिलाइए ।

$$\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \qquad \left(\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}\right)$$

$\therefore PQ \parallel EF$ (आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)



आकृति–16 (ii)

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$ (क्यों?)

यहाँ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$

$(AB = DP; AC = DQ$ और

$\angle BAC = \angle PDQ)$

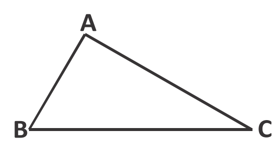
$\therefore$ $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

कोण–कोण समरूपता के अनुसार ΔABC और ΔDEF समरूप त्रिभुज हैं।

यानी $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

प्रमेय 6 :– **SSS (भुजा–भुजा–भुजा) समरूपता प्रमेय** : यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए ऐसे दो त्रिभुज ABC और DEF लेते हैं जिनमें



आकृति–17

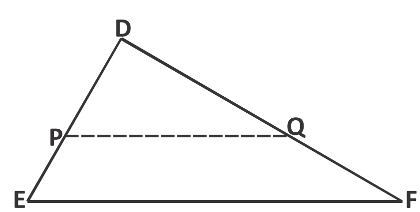
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \text{ हों।}$$

ΔDEF में DE तथा DF पर क्रमशः दो बिंदु P व Q इस प्रकार लेते हैं कि $DP = AB$ और $DQ = AC$ तथा P से Q को मिलाइए।

यहाँ $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$ $\left(\because \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD}\right.$ और $DP = AB, DQ = AC$ है)

$\therefore$ $PQ \parallel EF$ (क्यों?) (प्रमेय 2)

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$



आकृति–18

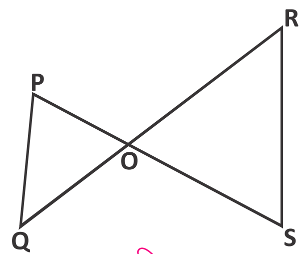
$\therefore$ $\Delta DEF \sim \Delta DPQ$ (कोण–कोण समरूपता)

हम जानते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (दिए हुए पद व रचना से)

$\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

यानि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (कोण–कोण समरूपता अभिधारणा से)

उदाहरणः–4. यदि $PQ \parallel RS$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ है। (आकृति 19)



आकृति–19

हलः– $PQ \parallel RS$ (दिया है)

$\angle P = \angle S$ (एकांतर कोण)

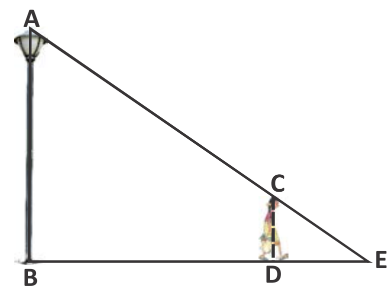
और $\angle Q = \angle R$ (एकांतर कोण)

साथ ही $\angle POQ = \angle SOR$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta POQ \sim \Delta SOR$ (कोण–कोण–कोण समरूपता कसौटी)

उदाहरणः–5. एक लड़की जिसकी ऊँचाई 90 सेमी. है, एक लैम्पपोस्ट जिस पर 3.6 मीटर ऊँचाई पर बल्ब लगा है, से 1.2 मी. प्रति सेकंड की चाल से दूर जा रही है। 4 सेकंड बाद उस लड़की की परछाई की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना लैम्पपोस्ट के बल्ब की ऊँचाई AB तथा लड़की की ऊँचाई CD है। चित्र में आप देख सकते हैं कि लड़की की परछाई DE है।



आकृति–20

माना $DE = x$ मी.

चूँकि दूरी = चाल × समय

इसलिए $BD = 1.2 \times 4 = 4.8$ मी.

ΔABE और ΔCDE में,

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90° है, लैम्पपोस्ट और लड़की भूमि से ऊर्ध्वाधर हैं)

$\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण)

अतः $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (कोण–कोण समरूपता कसौटी)

इसलिए $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\dfrac{4.8 + x}{x} = \dfrac{3.6}{0.9}$ (चूँकि 1 मी. = 100 सेमी.)

$4.8 + x = 4x$

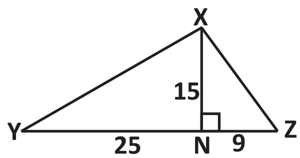
$3x = 4.8$

$x = 1.6$

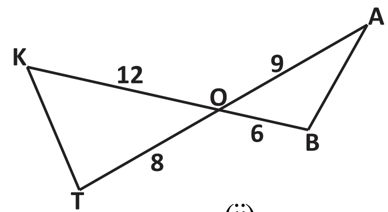
अतः 4 सेकंड चलने के बाद लड़की की परछाई की लंबाई 1.6 मी. है।

करके देखें

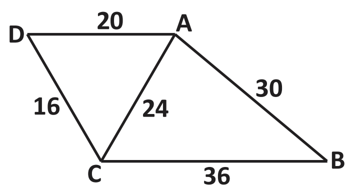
1. इन त्रिभुजों में समरूपता की जाँच कीजिए और बताइए कि कौनसी कसौटी का उपयोग हुआ।



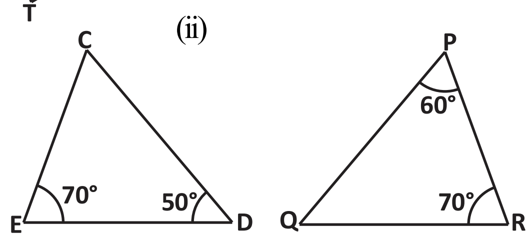
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

(i) ΔYXN और ΔXNZ (ii) ΔOAB और ΔOKT

(iii) ΔADC और ΔACB (iv) ΔCED और ΔPRQ

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में संबंध

हमने देखा कि समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के बराबर होता है। तब दो त्रिभुज ABC तथा PQR में

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

या $$\frac{AB+BC+CA}{PQ+QR+RP} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

क्या इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात और इनकी संगत भुजाओं के अनुपात में कोई संबंध है?

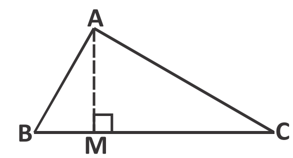
इस संबंध को अगले प्रमेय में देखेंगे।

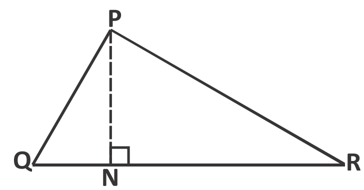
प्रमेय 7 :– दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और PQR ऐसे दिए हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

हमें सिद्ध करना है कि :

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$





दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल पता करने के लिए हम इनके शीर्षलंब क्रमशः AM और PN खींचते हैं।

अब $ar(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AM$ और

$$ar(PQR) = \frac{1}{2} \times QR \times PN$$

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad \text{............ (1)}$$

अब ΔABM और ΔPQN में,

$\angle B = \angle Q$ $(\Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M = \angle N$ (प्रत्येक कोण 90^o का है)

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (कोण–कोण समरूपता अभिधारणा)

इसलिए $\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ .... (2)

हम जानते हैं कि

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

तब $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ .... (3)

समीकरण (1) और (3) से,

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$$

समीकरण (2) से,

$$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

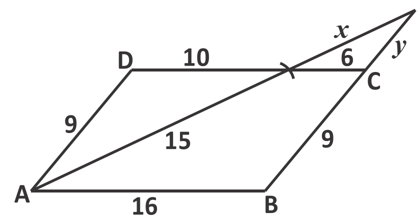
अतः समी. (3) से $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

करके देखें

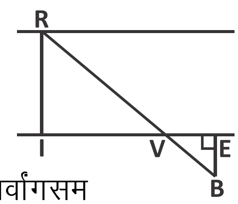
1. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात 25:9 है। तो उनके संगत भुजाओं का अनुपात क्या होगा?
2. त्रिभुज TFR और त्रिभुज SPM समरूप हैं, जिनका स्केल गुणक 7 : 4 है। इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
3. $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ है, जहाँ $PQ = 3XY$ है।
   इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

प्रश्नावली–4

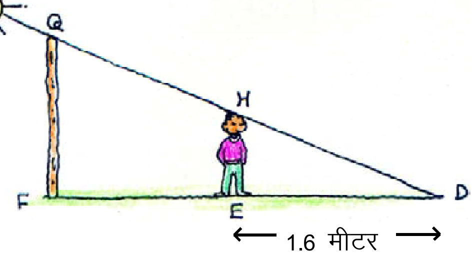
1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। x और y का मान पता कीजिए।



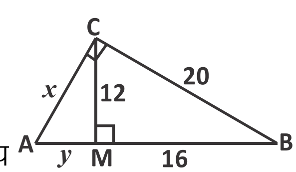
2. एक समलंब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2\,CD$ हो तो त्रिभुज AOB और COD के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. चित्र में यदि IV = 36 मीटर, VE = 20 मीटर और EB = 15 मीटर दिया है तो नदी की चौड़ाई (RI) कितनी होगी?



4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
5. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।
6. शाहिद एक खंभे की लंबाई का अनुमान लगाते समय इस प्रकार खड़ा होता है कि उसके सिर H की छाया व खंभे के शिखर Q की छाया एक ही बिंदु D पर पड़ती है। यदि DE=1.6 मीटर और DF= 4.4 मीटर हो तो खंभे की लंबाई क्या होगी, जबकि शाहिद की लंबाई 1.2 मीटर है?



7. (i) चित्र में कौन से दो त्रिभुज, ΔABC के समरूप है? नाम लिखिए।
   (ii) x और y का मान क्या होगा?



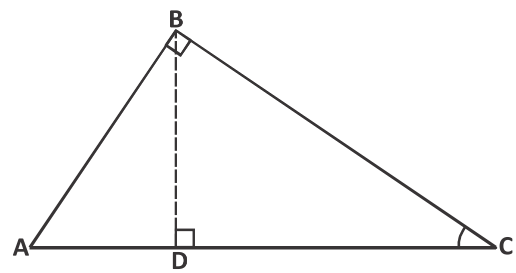
8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार है कि D भुजा BC का मध्य बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है–
   (i) 2:1 (ii) 1:2 (iii) 4:1 (iv) 1:4
9. दो समरूप त्रिभुजों में 9ar (ABC) = 16ar (PQR) है तो $\frac{AB}{PQ}$ का मान होगा–
   (i) 4:3 (ii) 16:3 (iii) 3:4 (iv) 9:4

पाइथागोरस प्रमेय

आपने पिछली कक्षाओं में पाइथागोरस प्रमेय की मदद से कई प्रश्न हल किए हैं व गतिविधियों के द्वारा इस प्रमेय का सत्यापन भी किया है। क्या त्रिभुजों में समरूपता की अवधारणा का उपयोग करके पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं ? आइए देखें।

प्रमेय 8 :– यदि किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर समरूप होते हैं।

उपपत्ति : दिया है : एक ΔABC है जिसका कोण B समकोण है तथा BD कर्ण AC पर लंब है।



हमें सिद्ध करना है कि

(i) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

(ii) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

(iii) $\Delta ABD \sim \Delta DBC$

हम देख सकते हैं कि ΔADB और ΔABC में

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADB = \angle ABC$ (दोनों 90^o के कोण है)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कैसे?) .... (1)

इसी प्रकार ΔBDC और ΔABC में

$\angle C = \angle C$ और $\angle BDC = \angle ABC$ (क्यों?)

इसलिए $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ .... (2)

(1) और (2) से हमें मिलता है–

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$ .... (3)

(यदि कोई दो त्रिभुज किसी तीसरे त्रिभुज के समरूप हो, तो वे दोनों त्रिभुज भी आपस में समरूप होंगे।)

अब हम इस प्रमेय का उपयोग करके, पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 9 :– एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उपपत्ति : हमें एक समकोण त्रिभुज ABC दिया गया है जिसका $\angle B$ समकोण है।

हमें सिद्ध करना है कि $AC^2 = AB^2 + BC^2$

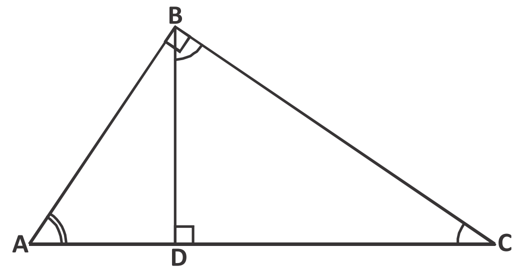
इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए रचना की आवश्यकता है इसलिए अब हम त्रिभुज के शीर्ष B से AC भुजा पर BD लंब खींचिए।

अब ΔADB व ΔABC में

$\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कोण–कोण समरूपता से)



$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (समानुपातिक भुजाएँ)

; k $AD.\,AC = AB^2$ .... (1)

इसी प्रकार $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ है।

$\therefore \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$ (समानुपातिक भुजाएँ)

या $CD.\,AC = BC^2$ .... (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर

$AD.\,AC + CD.\,AC = AB^2 + BC^2$

या $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

या $AC.AC = AB^2 + BC^2$

या $AC^2 = AB^2 + BC^2$

क्या पाइथागोरस प्रमेय के विलोम को भी सिद्ध किया जा सकता है?

प्रमेय 10 :– यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उपपत्ति : इसे आप स्वयं सिद्ध कीजिए ।

इन प्रमेयों पर आधारित कुछ सवाल करते हैं ।

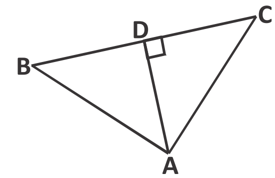
करके देखें

एक सीढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी हुई है कि निचला सिरा दीवार से 2.5 मीटर की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 मीटर की ऊँचाई पर बनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सीढ़ी की लंबाई क्या होगी?

उदाहरण:–6. चित्र में $AD \perp BC$ है।

सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

हल:– ΔADC में



$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय) .... (1)

अब ΔADB में

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (2)

(2) में से (1) को घटाने पर

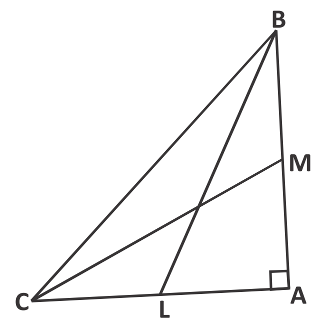
$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

या $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

उदाहरणः–7. BL और CM एक समकोण त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ है तथा त्रिभुज में कोण A समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$

हलः– ΔABC में $\angle A = 90^o$ है तथा BL और CM उसकी माध्यिकाएँ हैं।

ΔABC में, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (क्यों?)



ΔABL में, $BL^2 = AL^2 + AB^2$

$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$

(AC का मध्य बिंदु L है)

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \quad \text{............} \quad (2)$$

ΔCMA में, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

(AB का मध्य बिंदु M है)

$$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \quad \text{............} \quad (3)$$

(2) और (3) को जोड़ने पर

$$4BL^2 + 4CM^2 = AC^2 + 4AB^2 + 4AC^2 + AB^2$$

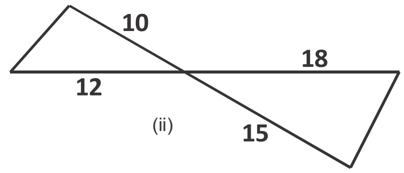
$$4\left(BL^2 + CM^2\right) = 5AC^2 + 5AB^2$$

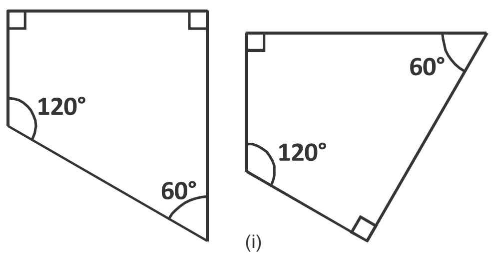
$$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,(AC^2 + AB^2)$$

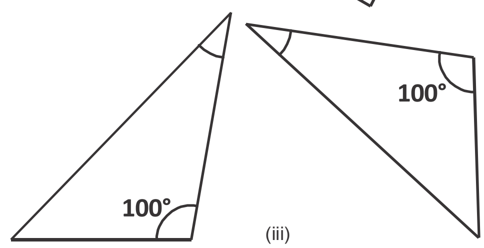
$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ (1) से

प्रश्नावली– 5

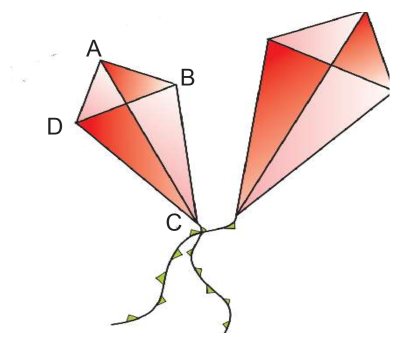
1. निम्नलिखित आकृतियों का कौन सा युग्म समरूप नहीं है और क्यों?







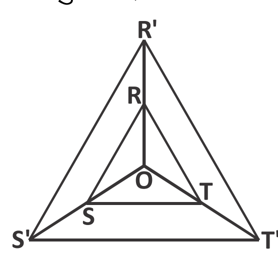
2. मेघा ने दो समरूप पतंगें बनाई। बड़ी पतंग का विकर्ण, छोटी पतंग के विकर्ण का 1.5 गुना है तब



(i) स्केल गुणक क्या होगा?

(ii) बड़ी पतंग के विकर्णों की माप ज्ञात कीजिए। जबकि BD = 40 सेमी. और AC = 68 सेमी.

3. एक समकोण ΔPQR में कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ पर दर्शाइए कि $PM^2 = QM.MR$

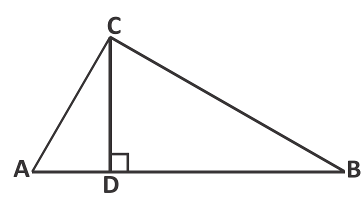


4. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

5. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90^o$ है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।

6. यदि दिए गए चित्र में $OR' = 2.OR$
$OS' = 2.OS$
$OT' = 2.OT$

सिद्ध कीजिए कि $\Delta RST \sim \Delta R'S'T'$



7. एक त्रिभुज ABC जिसमें $\angle C$ समकोण है। भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

8. ΔACB में $\angle ACB = 90^o$ तथा $CD \perp AB$ है। सिद्धकीजिए कि $\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$

9. यदि पृथ्वी का व्यास लगभग 8000 मील है, सूर्य का व्यास लगभग 864000 मील है। पृथ्वी और सूर्य की दूरी लगभग 92 मिलियन मील है।

   यदि कागज पर पृथ्वी को 1 इंच व्यास के वृत्त से दर्शाएँ तो सूर्य का व्यास और पृथ्वी से सूर्य की दूरी कागज पर कितनी होगी? (1मिलियन $= 10^6$)

10. यदि दो समषट्भुजों के परिमाप का अनुपात 5:4 है तो उनकी भुजाओं का अनुपात क्या होगा?

हमने सीखा

1. दो समरूप आकृतियों की माप में विशेष अनुपात होता है, जिसे स्केल गुणक (scale factor) कहते हैं।
2. दो बहुभुज जिनकी भुजाओं की संख्या समान हों, समरूप होते हैं, यदि
   (i) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।
   (ii) उनके संगत कोण बराबर हों।
3. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो यह रेखा अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।
4. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
5. सभी सर्वांगसम बहुभुज समरूप भी होते हैं।
6. किन्हीं दो समरूप बहुभुजों के परिमाप का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के अनुपात या स्केल गुणक के समान होता है।
7. यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।
8. यदि एक त्रिभुज का एक कोण, दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SAS समरूपता कसौटी)
9. यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

11. यदि किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज, मूल त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर भी समरूप होते हैं।

12. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

13. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उत्तरमाला–1

1. 1200 वर्गमीटर 2. 6 सेमी. 3. 10.5 किमी.

उत्तरमाला–2

1. 4 सेमी.

2. (i) 4 सेमी., 6 सेमी., 24 सेमी. (ii) 6 सेमी., 9 सेमी., 54 सेमी.
(iii) 5 सेमी., 7.5 सेमी., 37.5 सेमी. ,हाँ

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$

6. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

उत्तरमाला–3

1. (i) 1.7 (ii) 4 (iii) $110°$ (iv) $90°$ (v) बहुभुज OPLMN
(vi) बहुभुज BCDEA समरूप है बहुभुज MNOPL के

2. (i) $x = 11, \quad y = 9$
(ii) $x = 8, \quad y = 110°$

3. (i) $x = 16.25, \quad y = 20, \quad z = 17.5$
(ii) $x = 7, \quad y = 5\sqrt{3}, \quad z = 30°$
(iii) $x = 25.2, y = 21.6, z = 32.4$ (iv) $x = 9, y = 9.6, z = 7.2$

4. (i) 1.5 (ii) 24 सेमी., 36 सेमी. (iii) 1.5

उत्तरमाला–4

1. $x = 9, y = \frac{27}{5}$ 2. 4:1 3. 27 मीटर 6. 3.3 मीटर

7. (i) त्रिभुज ACM व त्रिभुज CBM (ii) $x = 15, y = 9$

8. (iii) 4:1 9. (i) 4:3

उत्तरमाला–5

1. (i) एक समलंब चतुर्भुज है दूसरा नहीं।

   (iii) एक ही कोण का मान ज्ञात है। अतः अन्य कोणों की समानता के बारे में कुछ नहीं कह सकते।

2. (i) 1.5 (ii) 102 सेमी. व 60 सेमी.

4. $\sqrt{3}a$ 9. 108 इंच, 11500 इंच 10. 5:4