



संख्याओं के पैटर्न

नीचे दी गई संख्याओं को देखिए—

2, 4, 6, 8, 10,

क्या आपको इसमें कुछ निश्चित क्रम अथवा पैटर्न दिखाई देता है?

सलमा — इसमें प्रत्येक संख्या अपने से बाद की संख्या से 2 कम है।

मोहन — इसमें प्रत्येक संख्या 2 की क्रमवार गुणज है। 2 को 1 से गुणा करने पर 2, 2 को 2 से गुणा करने पर 4, 2 को 3 से गुणा करने पर 6 और इसी तरह आगे

जॉन — इसमें पहली संख्या 2 को दो गुना करने पर दूसरी संख्या 4, दूसरी संख्या 4 का डेढ़ गुना करने पर तीसरी संख्या 6 मिलती है।

आप देख सकते हैं कि जॉन के पैटर्न में प्रत्येक संख्या के लिए अलग-अलग नियम होगा जबकि सलमा और मोहन के पैटर्न में एक ही नियम से सभी संख्याएँ बनेंगी।

अब आप नीचे दी गई संख्याओं को देखिए—

6, 11, 16, 21,

आप कह सकते हैं कि इसमें पहली संख्या को छोड़कर प्रत्येक संख्या अपनी पिछली संख्या में 5 जोड़ने पर मिलती है।

क्या इनमें कोई और भी पैटर्न मिल सकता है? (चर्चा करें)।

नीचे संख्याओं के कुछ और उदाहरण दिए जा रहे हैं—

1. -5, -7, -9, -11, -13,

2. 4, 9, 14, 19,

3. 3, 7, 11, 15,

श्रेढी क्या है?

इनमें आप देख सकते हैं कि प्रत्येक श्रृंखला की संख्याएँ अपने से पिछली संख्या से एक निश्चित मात्रा में घटती या बढ़ती है, पहली श्रृंखला में संख्या दो-दो से कम हो रही है जबकि

दूसरी में 5 से और तीसरी में 4 से बढ़ रही है। ऐसी संख्या श्रृंखलाएँ जिनमें क्रमिक संख्याओं के बीच एक निश्चित संबंध हो श्रेढ़ी कहलाती है।

करके देखें

नीचे दी गई संख्याओं की प्रत्येक श्रेढ़ी में क्या पैटर्न है? पहचान कीजिए—

- (1) 4, 10, 16, 22,
- (2) 0, 3, 6, 9,
- (3) -1, -3, -5, -7,

समांतर श्रेढ़ी

आपने देखा कि ऊपर दी गई श्रेढ़ी में पहले पद के बाद प्रत्येक पद, अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression या A.P.) कहलाती है और यह निश्चित संख्या समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर (common difference) कहलाती है। सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

आइए इस समांतर श्रेढ़ी पर विचार करें—

8, 13, 18, 23,

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद 8 और दूसरा पद 13 है, तीसरा पद 18 और चौथा पद 23 है। प्रत्येक पद में 5 जोड़ने पर अगला पद मिलता है, इसलिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर 5 है।

उदाहरण:-1. समांतर श्रेढ़ी -7, -11, -15, -19, के लिए

प्रथम पद, चौथा पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल:-

प्रथम पद = -7, चौथा पद = -19

सार्व अंतर = द्वितीय पद - प्रथम पद

$$= -11 - (-7)$$

$$= -4$$

करके देखें

1. नीचे दी हुई संख्याओं की श्रृंखला में से समांतर श्रेढ़ी छाँटिए

- (i) 9, 16, 23, 30, -----
- (ii) 11, 15, 18, 20, -----
- (iii) 4, 13, 19, 28, -----
- (iv) 0, -3, -6, -9, -----
- (v) 2, 2, 2, 2, -----
- (vi) $9\frac{1}{7}, 7\frac{7}{7}, 9\frac{9}{7}, 13\frac{13}{7}, \dots$

2. दी हुई समांतर श्रेढी के लिए प्रथम पद और सार्व अंतर लिखिए—

- (i) 9, 12, 15, 18, -----
 (ii) 2, 8, 14, 20, -----
 (iii) 3, -2, -7, -12, -----
 (iv) -5, 2, 9, 16, -----
 (v) 0.4, 0.9, 1.4, 1.9, -----
 (vi) 5, 5, 5, 5, -----
 (vii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

आगे के पद ज्ञात करना

नीचे एक समांतर श्रेढी दी गई है—

3, 10, 17,

क्या हम इसके आगे के पद पता कर सकते हैं? सोचें इस समांतर श्रेढी का अगला यानी चौथा पद कैसे ज्ञात करें।

अजीता — तीसरे पद यानी 17 में 7 सार्व अंतर जोड़ने पर 24 मिलता है, यही इस श्रेढी का चौथा पद है।

अब आप इस श्रेढी के अगले चार पद यानी पाँचवे, छठे, सातवें, आठवें पद लिखिए—

पाँचवाँ पद		सातवाँ पद	
छठवाँ पद		आठवाँ पद	

करके देखें

1. नीचे दी गई समांतर श्रेढियों के अगले तीन पद ज्ञात कीजिए।

- (i) 5, 11, 17, 23, -----
 (ii) -11, -8, -5, -2, -----
 (iii) $\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}, \frac{13}{9}, \dots$
 (iv) 0, 9, 18, 27, -----

समांतर श्रेढी को व्यापक रूप में व्यक्त करना

हमने यहाँ कई समांतर श्रेढियाँ देखीं। प्रत्येक में प्रथम पद और एक सार्व अंतर है। यदि हम समांतर श्रेढी के पहले पद या प्रथम पद को a और सार्व अंतर को d से व्यक्त करें, तो हम आगे के सभी पद a और d के आधार पर बता सकते हैं। समांतर श्रेढी का दूसरा पद, पहले पद में सार्व अंतर d जोड़ने पर मिलेगा यानी दूसरा पद $a+d$ होगा। इसी तरह दूसरे पद $a+d$ में d जोड़ने पर तीसरा पद $a+d+d$ प्राप्त होगा। आप समांतर श्रेढी को इस तरह लिख सकते हैं—

$$a, a + d, a + d + d, a + d + d + d, \dots$$

या

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

इसे समांतर श्रेढी का व्यापक रूप कहते हैं। पदों की संख्या परिमित होने पर इसे परिमित समांतर श्रेढी कहते हैं और पदों की संख्या अपरिमित होने पर यह अपरिमित समांतर श्रेढी कहलाती है।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण (1) में दी गई समांतर श्रेढी 7, 11, 15, 19, में पदों की संख्या अपरिमित है, इसलिए यह अपरिमित समांतर श्रेढी है।

करके देखें

1. एक अपरिमित समांतर श्रेढी बनाइए, जिसका प्रथम पद 5 और सार्व अंतर 3 हो।
2. 5 पदों वाली दो परिमित समांतर श्रेढियाँ बनाइए।
3. 10 पदों वाली किसी परिमित समांतर श्रेढी की सबसे बड़ी सदस्य संख्या कौनसी होगी यदि $a=11$ और $d=6$?

नोट :- सार्व अंतर का हमेशा प्राकृत संख्या होना आवश्यक नहीं है। सार्व अंतर कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरण:-2. किसी समांतर श्रेढी का प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=-3$ हो, तो श्रेढी के प्रथम तीन पद लिखिए।

हल:-

प्रथम पद	$a=10$
सार्व अंतर	$d=-3$
द्वितीय पद	$= a+d$
	$= 10 + (-3)$
	$= 7$
तृतीय पद	$= a+2d$
	$= 10+2(-3)$

$$= 10 - 6$$

$$= 4$$

अतः श्रेढी के प्रथम तीन पद 10, 7, 4 है।

समांतर श्रेढी के पहले पद या प्रथम पद को a_1 से, द्वितीय पद को a_2 से, तृतीय पद को a_3 से,....., n वें पद को a_n से तथा सार्व अंतर (common difference) को d से व्यक्त करें, तो समांतर श्रेढी को $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ से व्यक्त कर सकते हैं

इस स्थिति में सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$ ।

उदाहरण:-3. संख्याओं की निम्नलिखित श्रृंखलाओं में से कौन-कौन सी समांतर श्रेढी में है? समांतर श्रेढी के अगले दो पद लिखिए।

- (i) 9, 27, 81,
- (ii) $4, 4 + \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{3}, \dots$
- (iii) 1, -1, -3, -5,
- (iv) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222,

हल:-

- (i) $a_1 = 9, a_2 = 27, a_3 = 81$
 $a_2 - a_1 = 27 - 9 = 18$
 $a_3 - a_2 = 81 - 27 = 54$

चूँकि, $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढी नहीं है।

- (ii) $a_1 = 4, a_2 = 4 + \sqrt{3}, a_3 = 4 + 2\sqrt{3}, a_4 = 4 + 3\sqrt{3},$
 $a_2 - a_1 = 4 + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{3}$
 $a_3 - a_2 = 4 + 2\sqrt{3} - (4 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$
 $a_4 - a_3 = 4 + 3\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ $k=1, 2, 3, \dots$) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढी है, जिसका सार्व अंतर $d = \sqrt{3}$ है। इस श्रेढी के अगले दो पद

$$(4 + 3\sqrt{3}) + (\sqrt{3}) = 4 + 4\sqrt{3} \text{ और}$$

$$(4 + 4\sqrt{3}) + (\sqrt{3}) = 4 + 5\sqrt{3} \text{ हैं।}$$

- (iii) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -3, a_4 = -5$
 $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -2$$

$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -2$$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ $k=1,2,3,\dots$) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर $d=-2$ है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$$-5 + (-2) = -7 \text{ और } -7 + (-2) = -9 \text{ हैं।}$$

$$(iv) \quad a_1 = 0.2, a_2 = 0.22, a_3 = 0.222, a_4 = 0.2222$$

$$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$$

$$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$$

चूँकि $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$ इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद

मान लीजिए कि $a_1, a_2, a_3, \dots$ एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है, तब

$$\text{प्रथम पद} \quad a_1 = a$$

$$\text{द्वितीय पद} \quad a_2 = a + d = a + (2-1)d$$

$$\text{तृतीय पद} \quad a_3 = a + 2d = a + (3-1)d$$

$$\text{चौथा पद} \quad a_4 = a + 3d = a + (4-1)d$$

$$\text{पाँचवाँ पद} \quad a_5 = a + 4d = a + (5-1)d$$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि

$$n \text{ वाँ पद } a_n = a + (n-1)d$$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को व्यक्त करता है। अंतिम पद को l से भी व्यक्त किया जाता है।

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें—

उदाहरण:-4. समांतर श्रेढ़ी 4,7,10,13 का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए—

हल:-

$$\text{यहाँ } a = 4, \quad d = 7 - 4 = 3 \text{ और } n = 10$$

$$\therefore a_{10} = a + (10-1)d \quad [\because n \text{ वाँ पद } a_n = a + (n-1)d]$$

$$= 4 + 9 \times 3$$

$$= 4 + 27$$

$$= 31$$

उदाहरण:-5. समांतर श्रेढी 2,6,10,..... में m पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

हल:- यहाँ प्रथम पद $a=2$, सार्व अंतर $d=6-2=4$ और पदों की संख्या m है। इसलिए अंतिम पद m होगा। अतः $n=m$

$$m \text{ वाँ पद } a_m = a + (m-1)d \quad [\because n \text{ वाँ पद } a_n = a + (n-1)d]$$

$$a_m = 2 + (m-1)4$$

$$= 2 + 4m - 4$$

$$= 4m - 2$$

करके देखें

1. समांतर श्रेढी 3,5,7,..... में 15 पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
2. समांतर श्रेढी $-9, -5, -1, \dots$ का अंतिम पद 67 है तो श्रेढी में कितने पद हैं?
3. समांतर श्रेढी 10, 15, 20, का m वाँ और p वाँ पद ज्ञात कीजिए।
आइए, ऐसे कुछ और उदाहरणों को समझें—

उदाहरण:-6. क्या समांतर श्रेढी 5,11,17,23,..... का कोई पद 301 है? कारण सहित लिखिए।

हल:-

$$\text{यहाँ } a=5, \quad d=11-5=6,$$

$$\text{माना } n \text{ वाँ पद } 301 \text{ है अर्थात् } a_n = 301$$

हमें n का मान ज्ञात करना है।

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$301 = 5 + (n-1)6$$

$$301 = 5 + 6n - 6$$

$$301 = 6n - 1$$

$$6n = 302$$

$$n = \frac{302}{6}$$

$$n = \frac{151}{3}$$

चूँकि n पदों की संख्या है, अतः एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। इसलिए 301 दी गई समांतर श्रेढी का कोई पद नहीं है।

उदाहरण:-7. एक समांतर श्रेणी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल:-

माना समांतर श्रेणी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

$$\text{तीसरा पद} = 12$$

$$a_3 = 12$$

$$\text{या, } a + (3-1)d = 12$$

$$\text{या, } a + 2d = 12 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{और अंतिम पचासवाँ पद} = 106$$

$$50 \text{ वाँ पद} = 106$$

$$a_{50} = 106$$

$$a + (50-1)d = 106$$

$$a + 49d = 106 \dots\dots\dots (2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$$a + 49d = 106$$

$$a + 2d = 12$$

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ \hline 47d = 94 \end{array}$$

$$d = \frac{94}{47}$$

$$d = 2 \dots\dots\dots (3)$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$a + 2(2) = 12$$

$$a + 4 = 12$$

$$a = 12 - 4$$

$$a = 8 \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \text{समांतर श्रेणी का 29 वाँ पद} &= a + (29-1)d \\ &= 8 + (28)(2) \\ &= 8 + 56 \\ &= 64 \end{aligned}$$

इसलिए समांतर श्रेणी का 29वाँ पद 64 है।

करके देखें

1. एक समांतर श्रेढी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इस श्रेढी का 21 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर श्रेढी का प्रथम पद 10 और सार्व अंतर -3 है। 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए। समांतर श्रेढियाँ कई तरह के सवाल हल करने में भी मदद कर सकती हैं। आइए, इसे भी कुछ उदाहरणों से समझें—

उदाहरण:—8. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं?

हल:—

5 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की श्रृंखला निम्नानुसार है—

10, 15, 20,, 95

यह एक समांतर श्रेढी है, जिसका प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=5$ और n वाँ पद $a_n=95$

चूँकि n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

$$95 = 10 + (n-1) \times 5$$

$$95 = 10 + 5n - 5$$

$$95 = 5 + 5n$$

$$5n = 95 - 5$$

$$n = \frac{90}{5}$$

$$n = 18$$

इसलिए 5 से विभाज्य दो अंकों वाली 18 संख्याएँ हैं।

उदाहरण:—9. ज्योति ने 1997 में 5000 रुपये के मासिक वेतन वाले पद पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रुपये की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रुपये हो गया?

हल:—

वर्ष 1997, 1998, 1999, 2000, में मासिक वेतन (रुपये में) है

5000, 5200, 5400, 5600

यह एक समांतर श्रेढी है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 200 है, इसलिए सार्व अंतर $d=200$ और प्रथम पद $a=5000$

माना n वर्षों में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

तब

$$\begin{aligned}
 a_n &= 7000 \\
 a + (n-1)d &= 7000 \\
 5000 + (n-1)200 &= 7000 \\
 (n-1)200 &= 7000 - 5000 \\
 (n-1)200 &= 2000 \\
 n-1 &= \frac{2000}{200} \\
 n-1 &= 10 \\
 n &= 11
 \end{aligned}$$

इसलिए ग्यारहवें वर्ष में अर्थात् 2007 में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

अभी तक आपने ऐसे उदाहरण हल किए जिनमें संख्याओं से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। अब कुछ ऐसे उदाहरण हल करेंगे जिनमें अक्षर संख्याओं (जैसे p, q, r इत्यादि) से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं।

उदाहरण:-10. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q और q वाँ पद p है, तो श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल:-

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

यहाँ, समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद = q

$$\therefore a + (p-1)d = q \text{(1)}$$

समांतर श्रेढ़ी का q वाँ पद = p

$$\therefore a + (q-1)d = p \text{(2)}$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$a + (p-1)d = q$$

$$a + (q-1)d = p$$

$$\text{घटाने पर} \quad \underline{\quad - \quad - \quad - \quad}$$

$$[(p-1) - (q-1)]d = q - p$$

$$[p-1-q+1]d = q-p$$

$$(p-q)d = q-p$$

$$d = \frac{-(p-q)}{(p-q)}$$

$$d = -1 \quad \text{.....(3)}$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$a + (p-1)(-1) = q$$

$$a = q + (p-1)$$

$$a = q + p - 1 \quad \dots(4)$$

श्रेढी का m वाँ पद

$$a_m = a + (m-1)d$$

$$= (p+q-1) + (m-1)(-1)$$

$$= p + q - 1 - m + 1$$

$$= p + q - m$$

इसलिए श्रेढी का m वाँ पद $= p + q - m$

प्रश्नावली 1

1. सही विकल्प चुनकर कारण सहित लिखिए—

(i) दी गई समांतर श्रेढी का प्रथम पद और सार्व अंतर है—

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$$

(a) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}, -1$ (c) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}, -1$

(ii) किसी समांतर श्रेढी का प्रथम पद -2 और सार्व अंतर -2 है तो चौथा पद होगा—

(a) 0 (b) -2 (c) -4 (d) -8

(iii) समांतर श्रेढी 7, 13, 19, का 15 वाँ पद होगा—

(a) 91 (b) 97 (c) 112 (d) 90

(iv) किसी समांतर श्रेढी का प्रथम पद 4 और सार्व अंतर -4 है तो n वाँ पद होगा—

(a) $8 - 2n$ (b) $4 - 2n$ (c) $8 - 4n$ (d) $8 - 8n$

(v) समांतर श्रेढी 3, 8, 13, 18, का कौन-सा पद 78 है?

(a) 15 वाँ (b) 16 वाँ (c) 17 वाँ (d) 18 वाँ

2. निम्नलिखित श्रेढियों में कौन-सी समांतर श्रेढी है कारण भी बताइए—

(a) $a, a^2, a^3, a^4, \dots$

(b) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$

(c) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, \dots$

(d) $0, -4, -8, -12, \dots$

(e) $16, 18\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23, \dots$

3. समांतर श्रेणी $9, 5, 1, -3, \dots$ का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. समांतर श्रेणी $100, 70, 40, \dots$ का 40वाँ पद ज्ञात कीजिए।
5. समांतर श्रेणी $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \dots$ का n वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. समांतर श्रेणी $950, 900, 850, \dots$ का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
7. समांतर श्रेणी $8, 15, 22, \dots$ का अंतिम पद 218 है। पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. $27, 24, 21, \dots$ का कौन-सा पद शून्य है?
9. यदि दो समांतर श्रेणियों का सार्व अंतर समान है और इनके 99 वें पदों का अंतर 99 है, तो इनके 999 वें पदों का अंतर क्या होगा? कारण भी बताइए।
10. फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 पौधे हैं, इत्यादि। इस क्यारी की अंतिम पंक्ति में 5 पौधे हैं। क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?
11. संजय ने वर्ष के प्रथम सप्ताह में 5 रुपये की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत 1.75 रुपये बढ़ाता गया। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत 20.75 रुपये हो जाती है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
12. क्या समांतर श्रेणी $18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots$ का एक पद -47 है? यदि हाँ तो कौनसा पद है?
13. यदि किसी समांतर श्रेणी का 11 वाँ पद 38 और 16 वाँ पद 73 है, तो इस श्रेणी का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
14. किसी समांतर श्रेणी का 12 वाँ पद उसके 5 वें पद से 14 अधिक है और दोनों पदों का योग 36 है, तो इस श्रेणी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
15. समांतर श्रेणी $3, 15, 27, 39, \dots$ का कौनसा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा?
16. किसी समांतर श्रेणी के चौथे और आठवें पदों का योग 24 है तथा छठे और दसवें पदों का योग 44 है। इस समांतर श्रेणी के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।
17. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?
18. समांतर श्रेणी $3, 8, 13, \dots, 253$ में अंतिम से 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

19. एक समांतर श्रेढी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ और q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढी के (pq) वें पद का मान 1 है।
20. यदि किसी समांतर श्रेढी का p वाँ पद q , q वाँ पद p हो तो सिद्ध कीजिए कि $(p+q)$ वाँ पद शून्य है।
21. यदि a, b, c किसी समांतर श्रेढी के क्रमशः p वें, q वें और r वें पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$$
22. n के किस मान के लिए, समांतर श्रेढियों 63, 65, 67, और 3, 10, 17, के n वें पद बराबर होंगे?

समांतर माध्य

मान लीजिए तीन राशियाँ a, A, b समांतर श्रेढी में हैं, तो बीच की राशि A को दो राशियों a और b का समांतर माध्य (Arithmetic Mean) कहते हैं।

चूँकि a, A, b समांतर श्रेढी में हैं, इसलिए

$$A - a = b - A$$

$$A + A = b + a$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

इसलिए आप कह सकते हैं कि दो राशियों का समांतर माध्य, उन दोनों राशियों के योगफल का आधा होता है। आइए एक उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरण:-11. $\sqrt{2}+1$ और $\sqrt{2}-1$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}$$



दो राशियों a और b के बीच समांतर श्रेढ़ी का निर्माण

हम चाहें तो किन्हीं भी दो राशियों के बीच नयी संख्याएँ डालकर समांतर श्रेढ़ी बना सकते हैं। इसके लिए हमें बीच में पदों की संख्या के हिसाब से सार्व अंतर d लेना होगा। मान लीजिए दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ प्रविष्ट करने हैं। तब $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में होंगे और इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है,

$$\text{तो अंतिम पद } b = a + (n+2-1)d \quad [\because n \text{ वॉ पद } a_n = a + (n-1)d]$$

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$\text{इसलिए } A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर कह सकते हैं कि

$$n \text{ वॉ पद } A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें।

उदाहरण:-12. 11 और -5 के बीच 3 पदों का निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

हल:-

माना 11 और -5 के बीच 3 पद A_1, A_2, A_3 हैं। इसलिए 11, A_1, A_2, A_3 , -5 समांतर श्रेढ़ी में हैं। इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=11$, 5 वॉ पद $= -5$ है। मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है।

$$5 \text{ वाँ पद} = a + 4d \quad [\because n \text{ वाँ पद } a_n = a + (n-1)d]$$

$$-5 = 11 + 4d$$

$$-5 - 11 = 4d$$

$$4d = -16$$

$$d = \frac{-16}{4}$$

$$d = -4$$

अतः

$$A_1 = a + d$$

$$= 11 + (-4)$$

$$= 7$$

$$A_2 = a + 2d$$

$$= 11 + 2(-4)$$

$$= 11 - 8$$

$$= 3$$

$$A_3 = a + 3d$$

$$= 11 + 3(-4)$$

$$= 11 - 12$$

$$= -1$$

इसलिए 11 और -5 के बीच तीन पद 7, 3, -1 हैं और जिनसे निम्नलिखित समांतर श्रेढी बनती है—

$$11, 7, 3, -1, -5$$

उदाहरण:-13. 2 और 41 के बीच n पद हैं। 2 और 41 के बीच के चौथे व $(n-1)$ वें पदों का अनुपात 2:5 है। तो n का मान बताइए।

हल:-

मान लीजिए 2 और 41 के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ हैं तब $2, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, 41$ समांतर श्रेढी में हैं, जिसका प्रथम पद $a=2$ और $(n+2)$ वाँ पद 41 है।

मान लीजिए श्रेढी का सार्व अंतर d है। तब

$$(n+2) \text{ वाँ पद} = 41$$

$$2 + (n+2-1)d = 41$$

$$2 + (n+1)d = 41$$

$$(n+1)d = 41-2$$

$$d = \frac{39}{n+1}$$

$$[\because n \text{ वाँ पद } a_n = a + (n-1)d]$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\text{श्रेढी का चौथा पद } A_4}{\text{श्रेढी का } n\text{वाँ पद } A_{n-1}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{a+4d}{a+(n-1)d} = \frac{2}{5}$$

$$5a+20d = 2a+2(n-1)d$$

$$5a-2a = 2(n-1)d-20d$$

$$3a = (2n-2)d-20d$$

$$3a = (2n-2-20)d$$

$$3a = (2n-22)d$$

$$3(2) = (2n-22) \left(\frac{39}{n+1} \right)$$

(a और d का मान रखने पर)

$$6(n+1) = 39(2n-22)$$

$$6n+6 = 78n-858$$

$$6+858 = 78n-6n$$

$$864 = 72n$$

$$n = \frac{864}{72}$$

$$n = 12$$

प्रश्नावली 2

1. $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. x^2+3xy और y^2-3xy का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का समांतर माध्य 7 और गुणनफल 45 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो संख्याओं का समांतर माध्य 6 और उनके वर्गों का योग 90 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. -4 और 10 के बीच 6 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढी का निर्माण कीजिए।
6. 11 और -7 के बीच 5 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढी का निर्माण कीजिए।

7. यदि किसी समांतर श्रेढी के p वें व q वें पदों का माध्य, r वें व s वें पदों के माध्य के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $p+q = r+s$
8. 7 और 49 के बीच n पद हैं। यदि पाँचवें और $(n-1)$ वें पदों का अनुपात 5:4 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढी का योग

समांतर श्रेढी 5,7,9,11,13,..... के प्रथम तीन पदों का योग S_3 से व्यक्त करें तो

$$S_3 = 5+7+9=21$$

इस समांतर श्रेढी के पहले चार पदों का योग पता करने के लिए आप इसके पहले चार पद यानी 5, 7, 9 और 11 का योग करेंगे। इस तरह से पहले चार पदों का योग 32 प्राप्त होगा। परन्तु यदि आपको इस श्रेढी के पहले 90 पदों का योग पता करना हो तो श्रेढी के पहले 90 पदों को जोड़ना पड़ेगा। यह बहुत लंबा होगा। किन्तु आप इस श्रेढी के प्रथम पद a , सार्व अंतर d और पदों की संख्या n पता करके पहले n पदों का योग ज्ञात कर सकते हैं—

मान लीजिए समांतर श्रेढी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

$$a, a+d, a+2d, \dots\dots\dots$$

समांतर श्रेढी है।

माना समांतर श्रेढी के प्रथम तीन पदों का योग S_3 है, तो

$$S_3 = a+(a+d)+(a+2d) \quad \dots\dots(1)$$

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$$S_3 = (a+2d)+(a+d)+a \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_3 = [a + (a + 2d)] + [(a + d) + (a + d)] + [(a + 2d) + a]$$

$$2S_3 = [2a + 2d] + [2a + 2d] + [2a + 2d]$$

$$2S_3 = 3[2a + 2d]$$

$$S_3 = \frac{3}{2}[2a + (3 - 1)d] \quad \dots\dots(3)$$

माना समांतर श्रेढी के प्रथम चार पदों का योग S_4 है, तो

$$S_4 = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d) \quad \dots\dots(4)$$

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$$S_4 = (a+3d)+(a+2d)+(a+d)+a \quad \dots\dots(5)$$

समीकरण (4) और (5) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_4 = [a + (a + 3d)] + [(a + d) + (a + 2d)] + [(a + 2d) + (a + d)] + [(a + 3d) + a]$$

$$2S_4 = [2a + 3d] + [2a + 3d] + [2a + 3d] + [2a + 3d]$$

$$2S_4 = 4[2a + 3d]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}[2a + (4 - 1)d] \quad \text{.....(6)}$$

इसी तरह से

$$S_5 = \frac{5}{2}[2a + (5 - 1)d] \quad \text{.....(7)}$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2a + (6 - 1)d] \quad \text{.....(8)}$$

उपर्युक्त समीकरणों (3), (6), (7), (8) के पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि समांतर श्रेणी जिसका प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, के प्रथम n पदों का योग S_n हो तो

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

निगमन द्वारा श्रेणी का योग निकालना

मान लीजिए समांतर श्रेणी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

$$a, a+d, a+2d, \dots\dots\dots$$

समांतर श्रेणी है।

समांतर श्रेणी का n वाँ पद $a+(n-1)d$ है। माना S_n इस समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग है। इसलिए

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots\dots\dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d] \quad \text{.....(1)}$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर आप प्राप्त करेंगे

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \dots\dots\dots + (a+d) + a \quad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$S_n + S_n = [a + a + (n-1)d] + [(a+d) + a + (n-2)d] +$$

$$[(a+2d) + a + (n-3)d] + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + [\overline{a + (n-2)d} + (a + d)] + [\overline{a + (n-1)d} + a]$$

$$2S_n = \{2a + (n-1)d\} + [2a + (n-1)d] + \dots\dots\dots + [2a + (n-1)d]$$

उपर्युक्त समीकरण के दाहिने पक्ष में पदों की संख्या n है (क्यों?)

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

इसलिए किसी समांतर श्रेढी के पहले n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

इसे इस तरह से भी लिख सकते हैं—

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a + a_n]$$

यदि किसी समांतर श्रेढी में केवल n ही पद हों, तो n वाँ पद a_n ही अंतिम पद होगा यानी

$a_n = l$, यहाँ अंतिम पद के लिए अक्षर l उपयोग करेंगे।

इस परिस्थिति में समांतर श्रेढी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

करके देखें

1. क्या किसी समांतर श्रेढी के प्रथम n पदों के योग S_n और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग S_{n-1} का अंतर, श्रेढी के n वें पद के बराबर होता है?
2. यदि किसी समांतर श्रेढी के प्रथम n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है तो क्या इसके प्रथम पद का मान ज्ञात कर सकते हैं? क्या यह S_1 है? इस श्रेढी के प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी तरह से तीसरे, चौथे, पन्द्रहवें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

उदाहरण:-14. समांतर श्रेणी 5, 1, -3, के 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

यहाँ प्रथम पद $a=5$, सार्व अंतर $d=-4$ पदों की संख्या $n=17$ है।

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_{17} &= \frac{17}{2} [2(5) + (17-1)(-4)] \\ &= \frac{17}{2} [10 + (16)(-4)] \\ &= \frac{17}{2} (10 - 64) \\ &= \frac{17}{2} (-54) \\ &= -459 \end{aligned}$$

इसलिए दी हुई समांतर श्रेणी के 17 पदों का योग -459 है।

उदाहरण:-15. किसी समांतर श्रेणी के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल:-

यहाँ $a=10$, $n=14$, $S_{14}=1050$

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ 1050 &= \frac{14}{2} [2(10) + (14-1)d] \\ 1050 &= 7(20 + 13d) \\ 1050 &= 140 + 91d \\ 91d &= 1050 - 140 \\ 91d &= 910 \\ d &= \frac{910}{91} \end{aligned}$$

$$d = 10$$

इसलिए 20 वाँ पद $a_{20}=10+(20-1)(10)$

$$[\because n \text{ वाँ पद } a_n=a+(n-1)d]$$

$$a_{20}=10+190=200$$

इसलिए 20 वाँ पद 200 है।

उदाहरण:-16. 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

100 और 200 के बीच की विषम संख्याएँ हैं

101, 103, 105,199

संख्याओं की उपर्युक्त श्रृंखला एक समांतर श्रेढी है। (क्यों?)

इस समांतर श्रेढी का प्रथम पद $a=101$, अंतिम पद $l=199$, सार्व अंतर $d=2$

मान लीजिए इस समांतर श्रेढी के पदों की संख्या n है, तब

$$n \text{ वाँ पद} = 199$$

$$a+(n-1)d = 199$$

$$101+(n-1)(2) = 199$$

$$2n-2 = 199-101$$

$$2n-2 = 98$$

$$2n = 98+2$$

$$n = \frac{100}{2}$$

$$n = 50$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(101+199)$$

$$= 25(300)$$

$$= 7500$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल 7500 है।

उदाहरण:-17. समांतर श्रेढी 17,15,13,..... के कितने पदों का योगफल 72 होगा?

हल:-

यहाँ प्रथम पद $a=17$, सार्व अंतर $d=15-17=-2$

मान लीजिए n पदों का योगफल 72 है, तब $S_n=72$

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$72 = \frac{n}{2}[2(17) + (n-1)(-2)]$$

$$72 = \frac{n}{2}(34 - 2n + 2)$$

$$72 \times 2 = n(36 - 2n)$$

$$144 = 36n - 2n^2$$

$$2n^2 - 36n + 144 = 0$$

$$n^2 - 18n + 72 = 0$$

$$n^2 - 6n - 12n + 72 = 0$$

$$n(n-6) - 12(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n-12) = 0$$

$$n=6, n=12,$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं, अतः पदों की संख्या या तो 6 है या 12

टिप्पणी:-

(i) इस स्थिति में पहले 6 पदों का योग = पहले 12 पदों का योग = 72

(ii) इस दोहरे उत्तर का कारण यह है कि सातवें से बारहवें पदों का योग शून्य है।

उदाहरण:-18. विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए विद्यालय परिसर के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक वर्ग (Section) अपनी कक्षा के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरण के लिए कक्षा I का एक वर्ग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक वर्ग 2 पेड़ लगाएगा इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं। इस विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

हल:-

चूँकि प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं, अतः कक्षा I, कक्षा II, कक्षा III, कक्षा XII, द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या क्रमशः होगी—

$$1 \times 3, 2 \times 3, 3 \times 3, \dots, 12 \times 3$$

या

$$3, 6, 9, \dots, 36$$

यह एक समांतर श्रेणी है, (क्यों?)

इस समांतर श्रेढी का प्रथम पद $a=3$, सार्व अंतर $d=6-3=3$, पदों की संख्या $n=12$, अंतिम पद $l=36$

इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या, समांतर श्रेढी के सभी पदों के योगफल के बराबर होगी अर्थात्

विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2}(3+36) \\ &= 6 \times 39 \\ &= 234 \end{aligned}$$

इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा कुल 234 पेड़ लगाए गए।

उदाहरण:-19. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 सेमी., 1.0 सेमी., 1.5 सेमी., 2.0 सेमी., वाले उत्तरोत्तर अर्द्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (Spiral) आकृति बनाई गई है, (देखिए आकृति) तेरह क्रमागत

अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई कितनी है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल:-

हम जानते हैं कि r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त की लंबाई πr होती है।

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने सर्पिल की कुल लंबाई

$$= \pi(0.5) + \pi(1.0) + \pi(1.5) + \pi(2.0) + \dots + \pi(6.5)$$

$$= \pi(0.5)[1+2+3+\dots+13]$$

$$= \pi(0.5)\left[\frac{13}{2}\{2(1) + (13-1) \cdot 1\}\right]$$

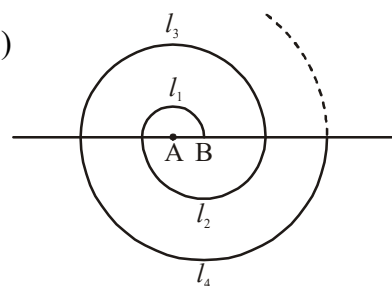
$$= \pi(0.5)\left[\frac{13}{2}(2+12)\right]$$

$$= \pi(0.5)\left(\frac{13}{2} \times 14\right)$$

$$= \pi(0.5)(91)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{5}{10} \times 91$$

$$= 143 \text{ सेमी.}$$



$\therefore 1+2+3+\dots+13$ एक समांतर श्रेढी है, जिसका प्रथम पद 1, सार्व अंतर 1 और पदों की संख्या 13 है और

$$n \text{ पदों का योग} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई 143 सेमी. है।



प्रश्नावली 3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए—
 - (i) 9, 12, 15, 16 पदों तक
 - (ii) 8, 3, -2, 22 पदों तक
 - (iii) 0.6, 1.7, 2.8, 100 पदों तक
 - (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots\dots\dots 11$ पदों तक
 - (v) $\frac{n^2 + 1}{n}, n, \frac{n^2 - 1}{n}, \dots\dots\dots 20$ पदों तक
 - (vi) $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots\dots\dots n$ पदों तक
2. 1046.5 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेढ़ी 7, $10\frac{1}{2}$, 14, के कितने पद लेने होंगे।
3. समांतर श्रेढ़ी 24, 21, 18, के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो।
4. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1, अंतिम पद 11 और योग 36 है, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
5. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 17 और अंतिम पद 350 है। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं? इस श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिए।
6. 1 और 100 के बीच सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जो 3 के गुणज हों।
7. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
8. उस समांतर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका दूसरा पद 14 और तीसरा पद 18 है।
9. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम, द्वितीय और अंतिम पद क्रमशः a, b , और $2a$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी का योगफल $\frac{3ab}{2(b-a)}$ होगा।
11. एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योग $n^2 + 4n$ है। श्रेढ़ी का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. संख्याओं की उस श्रृंखला के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

13. किसी समांतर श्रेढी के p वें, q वें, r वें पदों का योगफल क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$
14. तीन समान्तर श्रेढियों के n पदों के योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 हैं, यदि प्रत्येक श्रेढी का प्रथम पद 1 तथा सार्व अंतर क्रमशः 1, 2, 3 हो तो सिद्ध कीजिए कि $S_1 + S_3 = 2S_2$
15. यदि किसी समांतर श्रेढी के $n, 2n, 3n$ पदों के योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$
16. टेलीविजन बनाने वाली एक कंपनी तीसरे वर्ष में 600 टेलीविजन तथा सातवें वर्ष में 700 टेलीविजन बनाती है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष बनने वाले टेलीविजनों में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए—
 (i) प्रथम वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
 (ii) 9वें वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
 (iii) प्रथम 7 वर्षों में बनाये गये कुल टेलीविजनों की संख्या
17. एक निर्माण कार्य ठेके में कराया जा रहा है, जिसे एक निश्चित तिथि तक पूरा करना है। निश्चित तिथि से विलंब होने पर जुर्माने का प्रावधान इस तरह है : पहले दिन के लिए 200 रु., दूसरे दिन के लिए 250 रु., तीसरे दिन के लिए 300 रु. इत्यादि, अर्थात् पहले दिन का जुर्माना 200 रु. है और इसके बाद प्रत्येक दिन का जुर्माना 50 रु. बढ़ जाएगा। ठेकेदार ने कार्य में 30 दिन का विलंब किया तो उसे कुल कितना जुर्माना देना होगा और 30 वें दिन के लिए कितना जुर्माना होगा?
18. विद्यालय में विद्यार्थियों के समग्र शैक्षिक प्रदर्शन पर 7 नकद पुरस्कार देने के लिए 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले वाले पुरस्कार से 10 रु. कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि कितनी है?
19. 200 लट्ठों (logs) को इस तरह जमाया गया कि सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 18 लट्ठे रखे गए हैं। यह क्रम सभी लट्ठों के रखे जाने तक चला।



ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं और सबसे ऊपर की पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

20. एक आलू दौड़ (potato race) प्रतियोगिता में प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी है। इस बाल्टी से 5 मीटर की दूरी पर पहला आलू रखा है तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 मीटर की दूरी पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं। (देखिए आकृति)



प्रत्येक प्रतियोगी बालिका बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है और उसे लेकर वापस दौड़कर बाल्टी में डालती है। ऐसा वह तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रत्येक प्रतियोगी बालिका को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

(संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी = $2 \times 5 + 2(5 + 3)$ है।)

हमने सीखा

- संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी कहलाती है, जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। इस निश्चित संख्या d को इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहते हैं। यदि प्रथम पद a है, तो समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप है—
 $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$
- संख्याओं की एक दी गई श्रृंखला $a_1, a_2, a_3, \dots$ समांतर श्रेढ़ी होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ से एक ही (बराबर) मान प्राप्त हो, अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ का मान एक ही हो, जहाँ $k = 1, 2, 3, \dots$
- समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d हो, तो इस समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद होगा
$$a_n = a + (n-1)d$$

इस n वें पद को ही समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General Term) कहते हैं।
- यदि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, तब $A = \frac{a+b}{2}$ और A, a तथा b का समांतर माध्य कहलाता है।
- दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ इस प्रकार लें कि $a, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में हो तो श्रेढ़ी का प्रथम पद a , अंतिम पद b और पदों की संख्या $(n+2)$ होगी।

6. किसी समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है :-

$$(i) \quad S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$(ii) \quad S_n = \frac{n}{2} [a + l]$$

जहाँ समांतर श्रेणी का प्रथम पद a , सार्व अंतर d , पदों की संख्या n और अंतिम पद l है।

उत्तरमाला-1

- | | | | | |
|------|---------------|------------------|--------------|----------------------|
| (1) | (i) (b) | (ii) (d) | (iii) (a) | (iv) (c) |
| | (v) (b) | | | |
| (2) | (b), (d) | (3) -27 | (4) -1070 | (5) $\frac{3n-2}{9}$ |
| (6) | $1000 - 50m$ | (7) 31 | (8) 10वाँ पद | |
| (9) | 99 | (10) 10 | (11) 10 | |
| (12) | हाँ, 27वाँ पद | (13) 178 | (14) $2m+1$ | |
| (15) | 65वाँ पद | (16) -13, -8, -3 | (17) 300 | |
| (18) | 208 | (22) 13 | | |

उत्तरमाला-2

- | | | |
|-------------|---------------------------|---------------------|
| (1) 0 | (2) $\frac{x^2 + y^2}{2}$ | (3) 5 और 9 |
| (4) 3, 9 | (5) -2, 0, 2, 4, 6, 8 | (6) 8, 5, 2, -1, -4 |
| (8) $n = 5$ | | |

उत्तरमाला-3

- | | | | | |
|--------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------|----------------------|
| (1) | (i) 504 | (ii) -979 | (iii) 5505 | (iv) $\frac{33}{20}$ |
| | (v) $\frac{10(2n^2 - 17)}{n}$ | | (vi) $\frac{1}{2}(n-1)$ | |
| (2) 23 | (3) 4 या 13 | (4) $n = 6, d = 2$ | | |
| (5) 38, 6973 | (6) 1683 | (7) 625 | | |

- | | | |
|---|---|--------------------------|
| (8) 5610 | (9) n^2 | (11) 33 |
| (12) 672 | (16) (i) 550 | (ii) 750 (iii) 4375 |
| (17) 27750 रु. | (18) पुरस्कारों की राशि (रु. में), 130,120,110,100,90,80,70 | |
| (19) 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं। | | |

संकेत : $S = 200$, $a = 20$, $d = -1$, सूत्र $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ में रखने पर n के दो मान 16 और 25 प्राप्त होते हैं। अब $a_{25} = a + 24d = -4$ अर्थात् 25वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या ऋणात्मक है, जो संभव नहीं है। अतः $n = 25$ स्वीकार नहीं कर सकते। $n = 16$ के लिए $a_{16} = a + 15d = 5$, अतः 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।

(20) 370 मीटर

