अध्याय

6 घातांक एवं करणी

Indices and Surds

किसी संख्या (a) का 'घातांक' वह मूल्य है जो यह प्रदर्शित करता है कि उस संख्या (a) की परस्पर कितनी बार गुणा की गई है? यदि $a \times a \times a \times \ldots \times m$ बार को a^m लिखा जाए, तो इसे a की घात m पढ़ा जाएगा, जहाँ a आधार तथा m इसका 'घातांक' है। जबकि 'करणी' वह अपरिमेय संख्या है, जो किसी धन परिमेय संख्या (a) की n वीं घात के रूप में प्रकट नहीं की जा सकती है।

जैसे $5\times5\times5\times5=5^4$ *अर्थात् '5 की घात 4'* तथा $\sqrt[4]{81}=(81)^{1/4}$ *अर्थात् '81 का 4वाँ मूल'।*

घातांक के नियम Rules of Indices

माना a तथा b दो वास्तविक संख्याएँ हैं तथा m और n दो धन पूर्णांक हैं, तब

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $a^0 = 1$

करणी के नियम Rules of Surds

माना a एक परिमेय संख्या है तथा m और n दो धन पूर्णांक हैं, तब

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$
- $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
- $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

महत्त्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- असमान घात की करणियों की गुणा तथा भाग करते समय उनकी घात समान बनाई जाती हैं।
- यदि $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ हो, तब $a=c$ तथा $b=d$ होता है।
- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$
- $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}$ n पदों तक $= a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$, जहाँ $n = a$ के वर्गमूलों की संख्या
- $\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a\ldots}}}\ \infty = a$
- यदि a को $m(m+1)$ के रूप में विघटित किया जा सके, तो वैसी स्थिति में
  (i) करणी वाला प्रश्न $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}\ \infty$ तक हो, तो इसका मान $(m+1)$ होगा।
  (ii) करणी वाला प्रश्न $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\ldots}}}\ \infty$ तक हो, तो इसका मान m होगा।
- यदि a को $m(m+1)$ के रूप में विघटित न किया जा सके, तो वैसी स्थिति में $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}\ \infty$ तक $= \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$

www.classroomnotes.in

साधित उदाहरण

1. यदि $(64)^{2x-5} = 4 \times 8^{(x-4)}$ हो, तो x का मान है

(1) 2 (2) 11 (3) $\frac{10}{7}$ (4) $\frac{20}{9}$

(5) 9

हल (4) $(64)^{2x-5} = 4 \times 8^{(x-4)}$

$\Rightarrow (2^6)^{2x-5} = 2^2 \times 2^{3(x-4)}$

$\Rightarrow 2^{12x-30} = 2^{3x-10}$

$\Rightarrow 12x - 30 = 3x - 10$

$\Rightarrow 9x = 20$

$\therefore x = \frac{20}{9}$

2. निम्न में से सबसे बड़ी संख्या है

(1) $\sqrt[4]{3}$ (2) $\sqrt[6]{10}$ (3) $\sqrt[12]{25}$ (4) $\sqrt[3]{19}$

(5) $\sqrt[3]{9}$

हल (5) यहाँ करणियों की घात 4, 6, 12 एवं 3 हैं।

4, 6, 12 एवं 3 का ल.स. = 12

अत: $\sqrt[4]{3} = (3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4\times3}} = 3^{\frac{3}{12}} = (3^3)^{\frac{1}{12}}$

$= \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

इसी प्रकार,

$\sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$

$\sqrt[12]{25} = \sqrt[12]{25}$

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{6561}$

अब अवरोही क्रम में, $\sqrt[12]{6561} > \sqrt[12]{100} > \sqrt[12]{27} > \sqrt[12]{25}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{9} > \sqrt[6]{10} > \sqrt[4]{3} > \sqrt[12]{25}$

अत: उपरोक्त से स्पष्ट है कि $\sqrt[3]{9}$ सबसे बड़ी संख्या है।

3. यदि $5^a \cdot 7^b = 875$ हो, तो $(a+b)$ का मान क्या होगा?

(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

(5) 8

5	875
5	175
5	35
7	7
	1

हल (2) $\because 5 \times 5 \times 5 \times 7 = 875$

$\Rightarrow 5^3 \times 7^1 = 5^a \times 7^b$

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

4. यदि $a + b\sqrt{7} = 5 + 9\sqrt{7}$ हो, तो $(a+b)$ का मान क्या होगा?

(1) 4 (2) 9 (3) 14 (4) 45

(5) 59

हल (3) $a + b\sqrt{7} = 5 + 9\sqrt{7}$

तुलना करने पर, $a = 5$ तथा $b = 9$ $\therefore a + b = 5 + 9 = 14$

5. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$ का मान होगा

(1) 2 (2) 1 (3) $2^{31/32}$ (4) $2^{32/31}$

(5) $2^{1/7}$

हल (3) $\because \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...}}}\, n = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

$\therefore \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} = 2^{\frac{2^5-1}{2^5}} = 2^{\frac{32-1}{32}} = 2^{\frac{31}{32}}$

6. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}\,\infty$ का मान क्या होगा?

(1) 2 (2) 5 (3) 6 (4) $\sqrt{6}$

(5) 3

हल (5) $\because 6 = 2 \times 3$ $\therefore \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}\,\infty = 3$

अभ्यास प्रश्न

1. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-2/3}$ का मान है

(1) $-\frac{1}{49}$ (2) $\frac{1}{49}$ (3) -49

(4) 49 (5) 94

2. यदि $(27)^{2/3} \times (81)^{-1/2} = 3^n$ हो, तो n का मान है

(1) 1 (2) 0 (3) 27

(4) 81 (5) 3

3. यदि $\frac{(x^3)^2 \times x^4}{x^{10}} = x^p$ हो, तो p का मान है

(1) 26 (2) 2 (3) 1

(4) 6 (5) 0

4. यदि $[3^{m^2} \div (3^m)^2]^{1/m} = 81$ हो, तो m का मान है

(1) 3 (2) 6 (3) -3

(4) -6 (5) 1/3

5. यदि $5\sqrt{5} \times 5^3 \div 5^{-3/2} = 5^{a+2}$ हो, तो a का मान है

(1) 4 (2) 5 (3) 6

(4) 8 (5) 7

6. $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} + 2^{-3}$ का मान है

(1) 2^{n+1} (2) $-2^{n+1} + \frac{1}{8}$ (3) $\frac{9}{8} - 2^n$

(4) 1 (5) 2^n

7. यदि $\frac{9^n \times 3^5 \times (27)^3}{3 \times (81)^4} = 27$ हो, तो n बराबर है

(1) 0 (2) 1 (3) 1

(4) 4 (5) 3

8. यदि $(\sqrt{3})^5 \times 9^2 = 3^x \times 3\sqrt{3}$ हो, तब x बराबर है

(1) 2 (2) 3 (3) 4

(4) 5 (5) 6

9. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = 3$ हो, तो x का मान है

(1) 125 (2) 46 (3) 27

(4) 9 (5) 64

10. यदि $a^x = b^y = c^z$ तथा $b^2 = ac$ हो, तो y बराबर है

(1) $\frac{xz}{x+z}$ (2) $\frac{xz}{2(x-z)}$ (3) $\frac{xz}{2(z-x)}$

(4) $\frac{2xz}{x+z}$ (5) $\frac{2xz}{x-z}$

11. $\frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+1}+3^n}$ का मान, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है, है

(1) 2 (2) 3 (3) 4
(4) 0 (5) 5

12. $\sqrt{2^4}+\sqrt[3]{64}+\sqrt[4]{2^8}$ का मान है

(1) 24 (2) 12 (3) 16
(4) 18 (5) 20

13. $(900)^{1/2}\times(0.027)^{1/3}-(0.0081)^{1/4}\times 3^0+(5/4)^{-1}$ का मान है

(1) 12 (2) 9.50 (3) 8.75
(4) 9.05 (5) 8.50

14. यदि $4^x-4^{x-1}=24$ हो, तो $(2x)^x$ का मान है

(1) 25 (2) 125 (3) $\sqrt{5}$
(4) $25\sqrt{5}$ (5) $125\sqrt{3}$

15. $(x^n\ y^{-m})^3\times(x^3y^2)^{-n}$ का मान है

(1) yx^{3m+2n} (2) y^{3m+2n} (3) y^{-3m+2n}
(4) $y^{-(3m+2n)}$ (5) y^{3m-2n}

16. $(x^5)^{-3/5}\times(b^{5/3})^{-3/4}\times(c^0)^{3/16}$ का मान होगा

(1) 0 (2) 1 (3) $x^{-3}\ b^{-5/4}$
(4) $x^3b^{5/4}$ (5) इनमें से कोई नहीं

17. $\left\{\left(\sqrt[3]{(81)^2}\right)^{3/2}\right\}^{1/4}$ का मान है

(1) 81 (2) 27 (3) 9
(4) 3 (5) 15

18. 166375 का घनमूल 55 है, तो
$\sqrt[3]{166.375}+\sqrt[3]{0.166375}+\sqrt[3]{0.000166375}$ का मान होगा

(1) 6.051 (2) 6.105 (3) 6.501
(4) 6.015 (5) 6.510

19. यदि $\frac{3^5\times 9^6\times 81^{x+1}}{3\times 3\sqrt{3}}=9\sqrt{3}$ हो, तो x का मान है

(1) -3 (2) -2 (3) -4
(4) -1 (5) 4

20. $(243)^{0.16}\times(243)^{0.04}$ का मान है

(1) 30 (2) 9 (3) 48.3
(4) 243.2 (5) 3

21. $[1-2(1-2)^{-1}]^{-1}$ का मान बराबर है

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$
(3) -1 (4) $\frac{1}{2}$
(5) $-\frac{1}{2}$

22. यदि $2^{x-1}+2^{x+1}=320$ हो, तो x का मान है

(1) 6 (2) 8 (3) 5
(4) 7 (5) 9

23. यदि $2^x=4^y=8^z$ तथा $\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{6z}\right)=\frac{24}{7}$ हो, तो z का मान है

(1) $\frac{7}{16}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{7}{48}$
(4) $\frac{7}{64}$ (5) $\frac{7}{18}$

24. $(64)^{-2/3}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान है

(1) 1 (2) 2 (3) 1/2
(4) 1/16 (5) 0

25. $\sqrt[3]{\frac{72.9}{0.4096}}$ का मान है

(1) $\frac{45}{8}$ (2) $\frac{8}{45}$ (3) $\frac{16}{45}$
(4) $\frac{45}{16}$ (5) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $5^{2x+3}\times 25^{x-5}=5^{3x+6}$ हो, तो x का मान है

(1) 2 (2) 6 (3) 7
(4) 8 (5) इनमें से कोई नहीं

27. $\frac{4^{n+2}-4^{n+1}}{5\times 4^{n-1}-4^{n-1}}$ का मान है

(1) 0 (2) 12 (3) 8
(4) 14 (5) 8

28. $\frac{a^{-7}\ b^{14}}{a^{14}\ b^{28}}\times\frac{a^{10}b^{-15}}{a^{-15}\ b^{-25}}$ का मान है

(1) $a^7\ b^8$ (2) a^8b^{10} (3) a^4b^{-4}
(4) a^5b^{14} (5) a^8b^9

29. यदि $3^{5x}\cdot 9^{4x-2}=\frac{27^{3x-8}}{81^{-3x}}$ हो, तो x का मान है

(1) 2 (2) 5/2 (3) 3
(4) 1 (5) 8

30. $\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^{\frac{1}{mn}}\times\left(\frac{a^n}{a^l}\right)^{\frac{1}{nl}}\times\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^{\frac{1}{lm}}$ का मान है

(1) $\frac{a^m}{a^n}$ (2) $\frac{a^{ml}}{a^{nl}}$ (3) 1
(4) $\frac{a^{mnl}}{a^{mn}}$ (5) 0

उत्तरमाला

1. (4)	2. (2)	3. (5)	4. (2)	5. (1)	6. (4)	7. (5)	8. (4)	9. (5)	10. (4)
11. (1)	12. (2)	13. (2)	14. (4)	15. (4)	16. (3)	17. (4)	18. (2)	19. (3)	20. (5)
21. (1)	22. (4)	23. (3)	24. (1)	25. (1)	26. (5)	27. (2)	28. (3)	29. (2)	30. (3)

www.classroomnotes.in

संकेत एवं हल

1. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-2/3} = (-343)^{2/3} = (-7^3)^{2/3} = (-7)^2 = 49$

2. $(27)^{2/3} \times (81)^{-1/2} = 3^n$

$\Rightarrow (3^3)^{2/3} \times (3^4)^{-1/2} = 3^n$

$\Rightarrow 3^2 \times 3^{-2} = 3^n$

$\Rightarrow 3^0 = 3^n \Rightarrow n = 0$

3. $\frac{(x^3)^2 \times x^4}{x^{10}} = x^p \Rightarrow \frac{x^6 \times x^4}{x^{10}} = x^p \Rightarrow \frac{x^{10}}{x^{10}} = x^p$

$\Rightarrow x^p = x^0 \Rightarrow p = 0$

4. $\left[3^{m^2} \div (3^m)^2\right]^{1/m} = 81 \Rightarrow \left[\frac{3^{m^2}}{3^{2m}}\right]^{1/m} = 3^4$

$\Rightarrow 3^{m^2 - 2m} = 3^{4m} \Rightarrow m^2 - 2m = 4m$

$\Rightarrow m(m-6) = 0 \Rightarrow m = 0, 6$

5. $5\sqrt{5} \times 5^3 \div 5^{-3/2} = 5^{a+2}$

$\Rightarrow \frac{5 \cdot 5^{1/2} \cdot 5^3}{5^{-3/2}} = 5^{a+2}$

$\Rightarrow 5 \cdot 5^{1/2} \cdot 5^3 \cdot 5^{3/2} = 5^{a+2}$

$\Rightarrow 5^6 = 5^{a+2}$

$\Rightarrow 6 = a + 2 \Rightarrow a = 4$

6. $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} + 2^{-3} = \frac{2^n (16-2)}{2^n (16)} + \frac{1}{8}$

$= \frac{14}{16} + \frac{1}{8} = \frac{14+2}{16} = \frac{16}{16} = 1$

9. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = 3 \Rightarrow 5 + \sqrt[3]{x} = 9 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow x = 64$

10. माना $a^x = b^y = c^z = k$

$\Rightarrow a = k^{1/x}, b = k^{1/y}$ तथा $c = k^{1/z}$

तब, $b^2 = ac$

$\Rightarrow k^{2/y} = k^{1/x} \cdot k^{1/z}$

$\Rightarrow k^{2/y} = k^{1/x + 1/z}$

$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{z+x}{xz}$

$\Rightarrow y = \frac{2xz}{x+z}$

12. $\sqrt{2^4} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{2^8} = 2^2 + 4 + 2^2 = 4 + 4 + 4 = 12$

14. $4^x - 4^{x-1} = 24 \Rightarrow 4^x - 4^x \cdot 4^{-1} = 24$

$\Rightarrow 4^x \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 24$

$\Rightarrow 4^x \left(\frac{3}{4}\right) = 24$

$\Rightarrow 4^x = \frac{24 \times 4}{3}$

$\Rightarrow 4^x = 2^5$

$\Rightarrow 2^{2x} = 2^5$

$\Rightarrow 2x = 5$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$ अब, $(2x)^x = (5)^{5/2}$

$= 25\sqrt{5}$

15. $(x^n y^{-m})^3 \times (x^3 y^2)^{-n} = x^{3n} \cdot y^{-3m} \cdot x^{-3n} \cdot y^{-2n}$

$= x^{3n-3n} \cdot y^{-3m-2n} = y^{-(3m+2n)}$

19. $\frac{3^5 \times 9^6 \times 81^{x+1}}{3 \times 3\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{3^5 \times 3^{12} \times 3^{4x+4}}{3 \times 3 \times 3^{1/2}} = 3^2 \times 3^{1/2}$

$\Rightarrow 3^{5+12+4x+4-2-\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{37}{2} + 4x = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 4x = \frac{5}{2} - \frac{37}{2} = -\frac{32}{2}$

$\Rightarrow x = -4$

20. $(243)^{0.16} \times (243)^{0.04} = (243)^{0.16+0.04} = (243)^{0.20}$

$= (3^5)^{1/5} = 3$

21. $[1 - 2(1-2)^{-1}]^{-1} = \left[1 - \frac{2}{-1}\right]^{-1} = [1+2]^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

22. $2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$

$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2^x = 320 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} = 320$

$\Rightarrow 2^x = \frac{320 \times 2}{5} \Rightarrow 2^x = 128$

$\Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$

23. $2^x = 4^y = 8^z$ माना $2^x = 2^{2y} = 2^{3z} = 2^k$

$\Rightarrow x = k, y = \frac{k}{2}, z = \frac{k}{3}$

$\therefore \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{6z}\right) = \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{4k/2} + \frac{1}{6k/3}\right)$

$= \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{3}{2k}$

परन्तु $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{6z} = \frac{24}{7}$

$\therefore \frac{3}{2k} = \frac{24}{7} \Rightarrow k = \frac{3 \times 7}{2 \times 24} = \frac{7}{2 \times 8} = \frac{7}{16}$

$\therefore z = \frac{k}{3} = \frac{7}{16 \times 3} = \frac{7}{48}$

26. $5^{2x+3} \times 25^{x-5} = 5^{3x+6}$

$\Rightarrow 5^{2x+3} \times 5^{2x-10} = 5^{3x+6}$

$\Rightarrow 5^{2x+3+2x-10} = 5^{3x+6}$

$\Rightarrow 4x - 7 = 3x + 6$

$\Rightarrow x = 13$

27. $\frac{4^n (16-4)}{4^n \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right)} = 12$

28. $a^{-7-14+10+15} \cdot b^{14-28-15+25} = a^4 \cdot b^{-4}$

29. $3^{5x} \cdot 9^{4x-2} = \frac{27^{3x-8}}{81^{-3x}} \Rightarrow 3^{5x} \cdot 3^{8x-4} = \frac{3^{9x-24}}{3^{-12x}}$

$\Rightarrow 3^{13x-4} = 3^{21x-24} \Rightarrow 13x - 4 = 21x - 24$

$\Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

30. $(a^{m-n})^{\frac{1}{mn}} \times (a^{n-l})^{\frac{1}{nl}} \times (a^{l-m})^{\frac{1}{lm}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{l} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{l}}$

$= a^0 = 1$

www.classroommaterial.com