अध्याय 14

गणितीय कथनों की जाँच

[PROOF OF MATHEMATICAL STATEMENTS]

परिचय (Introduction)

हम अपने जीवन में अक्सर रोजाना के कथनों या दावों को ऐसे ही मान लेने के बजाय तर्कों से तौलने की कोशिश करते हैं। जैसे– आपने विज्ञापनों में देखा, सुना होगा कि– "आप इस पेंसिल से लिखेंगे तो तेज लिख पाएँगे।" या "आप अपने बच्चे को यह टॉनिक पिलाएँगे तो वह तेज दौड़ेगा।" यानी अगर आपको तेज लिखना है तो उसी पेंसिल से लिखें और टॉनिक पीने से तेज दौड़ेंगे नहीं तो पीछे रह जाएँगे। अब बात आती है कि इन दावों और कथनों को जो हम सुनते रहते हैं उन्हें कैसे जाँचा जाए? या उनकी सत्यता कैसे पता की जाए?

एक तरीका तो है कि बार–बार अवलोकन (Empirical Observation) करके पता करें कि टॉनिक पीने से कितने बच्चे दौड़ में अव्वल आए या कितने बच्चों का कद बढ़ा अथवा उसी पेंसिल से लिखने वाले कितने बच्चों की लिखने की गति तेज हो गई । फिर इन अवलोकनों के आधार पर आगे सोचा जा सकता है। पर क्या यह तरीका हर स्थिति में कारगर होगा? क्या यह गणितीय कथनों पर भी लागू हो सकता है?

जैसे इन कथनों को पढ़िए –

1. किसी संख्या का गुणज उस संख्या के सभी गुणनखण्डों का भी गुणज होता है।
2. जो संख्या 8 से विभाजित होगी वह 4 से भी विभाजित होगी।
3. संख्या 0.000001, संख्या 10^{-20} से बड़ी है।
4. दो विषम संख्याओं का जोड़ हमेशा सम संख्या होती है।
5. दो संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा होता है।

ऐसे कथनों को जाँचने के लिए क्या पहले वाला तरीका उपयोग कर सकते हैं? यानी क्या हम कथन (1) को जाँचने के लिए हर संख्या के सभी गुणज और गुणनखण्ड निकालेंगे? या फिर कथन (2) में 8 से विभाजित होने वाली अनंत संख्याओं को 4 से विभाजित करके देखेंगे?

यह स्पष्ट है कि इस प्रकार के कथनों को जाँचने के लिए यह तरीका संभव नहीं है। कुछ व्यापक तरीके या आधार जरूरी हैं जिससे यह पता लगाया जा सके कि 0.000001, 10^{-20} से बड़ा है या छोटा। इसी तरह कोई ऐसा नियम चाहिए जिनके आधार पर विषम संख्याओं का जोड़ सम संख्या दिखाया जा सके या फिर संख्याओं के गुणनफल का परीक्षण हो सके।

आइए गणितीय कथनों को जाँचने का तरीका पता करते हैं।

गणितीय कथनों को सिद्ध करना

इसके लिए हम कुछ कथनों का उदाहरण ले कर देखते हैं।

संख्याओं के कथन

कथन 1 : एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या होती है।

उपपत्ति : किसी भी सम पूर्णांक b को हम $b = 2k$ लिख सकते हैं, जहां k कोई पूर्णांक है।

(सम पूर्णांक की परिभाषा से, चूंकि b, 2 से विभाजित है) -------------- (1)

किसी भी विषम पूर्णांक a को हम $a = 2k_1 + 1$ लिख सकते हैं ,जहाँ k_1 भी पूर्णांक है।

(किसी भी सम संख्या में 1 जोड़ने पर विषम संख्या प्राप्त होती है) ------- (2)

अब (1) व (2) को जोड़ने पर

$a + b = 2k_1 + 1 + 2k \quad = 2(k + k_1) + 1$

$= 2m + 1$ जहाँ $m = k + k_1$ है और m एक पूर्णांक है। (क्यों?)

चूँकि $2m$ एक सम संख्या है।

अतः $2m + 1$ एक विषम संख्या है।

यानी एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या ही होगी।

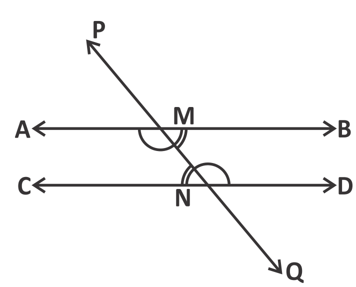
आपने देखा कि यहाँ हमने सम और विषम पूर्णांक की परिभाषा के आधार पर इस कथन को सिद्ध किया है ।

ज्यामितीय कथन

आपने कक्षा 9 में ज्यामिति के कथनों को सिद्ध करना सीखा है । जैसे – "चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 360^0 होता है।" या "यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो एकान्तर अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।"

यहाँ हम दूसरे कथन की उपपत्ति करेंगे और उसके मुख्य पहलुओं को ढूँढ़ेंगे।

कथन 2 : यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो एकांतर अंतःकोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।



उपपत्ति : माना AB और CD समांतर रेखाओं को PQ तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करती है ।

यहाँ $\angle MND$ व $\angle AMN$ एकांतर अन्तःकोणों का एक युग्म है ।

तथा $\angle MNC$ व $\angle BMN$ एकांतर अन्तःकोणों का दूसरा युग्म है ।

हमें यह देखना है कि क्या $\angle MND = \angle AMN$ व

$\angle MNC = \angle BMN$

चूँकि $\angle PMB$ व $\angle MND$ संगत कोण हैं

$\therefore \angle PMB = \angle MND$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ....(1)

तथा $\angle PMB = \angle AMN$ (शीर्षाभिमुख कोण प्रमेय से) ....(2)

(1) और (2) से,

$\angle MND = \angle AMN$ ....(3)

इसी प्रकार

$\angle MNC = \angle BMN$ ....(4)

अतः यहाँ एकांतर अंतःकोणों के दोनों युग्म बराबर है।

उपपत्ति के मुख्य पहलू

ऊपर की दोनों उपपत्तियों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और बताइए कि इन कथनों को सिद्ध करने में कौन–कौन से मुख्य पहलुओं का उपयोग हुआ है ?

माधवी कहती है कि उपपत्ति के तीन मुख्य पहलू दिखे–

1. दोनों कथनों को सिद्ध करने के लिए पहले से सिद्ध प्रमेय, परिभाषा या अभिगृहीतों का उपयोग किया गया है।
2. उपपत्ति का प्रत्येक कथन, ठीक पहले वाले कथन से तार्किक रूप से जुड़ा है।
3. कथनों को लिखते समय विशेष प्रकार के प्रतीकों व चिह्नों का उपयोग किया है और बड़े वाक्यों को इनका उपयोग करके संक्षिप्त में लिखा है।

क्या आप माधवी की बात से सहमत हैं?

करके देखें

1. "चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 360^0 होता है।"

   इस कथन को सिद्ध करें और उसमें उपपत्ति के तीनों मुख्य पहलू ढूँढ़ें।

सोचें एवं चर्चा करें

जिन दो कथनों को ऊपर हमने सिद्ध किया है उनकी उपपत्ति पढ़ें और निम्नलिखित प्रश्नों पर कक्षा में चर्चा करें।

1. कौन–कौनसी परिभाषा, प्रमेयों या अभिगृहीतों का उपयोग किया गया है?
2. उन चिह्नों, प्रतीकों की सूची बनाइए जो इन उपपत्तियों में इस्तेमाल किए गए हैं।

उपपत्ति समझना व करना

आइए देखते हैं कि ऊपर लिखे तीनों पहलू किस प्रकार उपपत्ति पढ़ने, समझने और लिखने में मदद करते हैं।

1. "परिभाषाओं, पूर्व ज्ञात प्रमेय, स्वयं सिद्ध का प्रयोग

यदि आपको एक कथन सिद्ध करने के लिए दिया जाए तो आप कैसे शुरू करेंगे?

ज़ाहिर है इसके लिए आपको उन सभी ज्ञात जानकारियों की आवश्यकता होगी जिनके आधार पर कथन को सिद्ध किया जा सके। ये जानकारियाँ अभिगृहीत, परिभाषा, पूर्व सिद्ध कथन हो सकती हैं। इसलिए किसी कथन को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले यह सोच लें कि क्या–क्या पता है? ताकि इन जानकारियों का इस्तेमाल सही जगह पर हो सके।

हमने समरूपता के अध्याय में दो त्रिभुजों में SAS और SSS समरूपता प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए AA समरूपता कसौटी का उपयोग किया है। इसी तरह कक्षा 9 में $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या सिद्ध करने हेतु परिमेय संख्या की परिभाषा का उपयोग किया गया व किसी समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं को बराबर सिद्ध करने के लिए "एकांतर कोणों का युग्म" प्रमेय का उपयोग किया गया।

करके देखें

अब तक की उपपत्तियों में उपयोग की गई परिभाषाएँ छाँटिए।

2. निगमनिक तर्कण द्वारा उपपत्ति (Deductive Reasoning)

किसी उपपत्ति में एक कथन के बाद अगला कथन किस आधार पर लिखें यह सोचना महत्वपूर्ण है। इसके लिए पहले से ज्ञात परिभाषा, अभिगृहीत व पूर्व सिद्ध प्रमेय की जानकारी होना आवश्यक है

1. निम्नलिखित कथन का निष्कर्ष कथन लिखिए ।

"l और m समांतर रेखाएँ हैं।"

समांतर रेखा की परिभाषा से हमें पता है कि समांतर रेखाओं में उभयनिष्ठ बिंदु नहीं होता है। (तर्क)

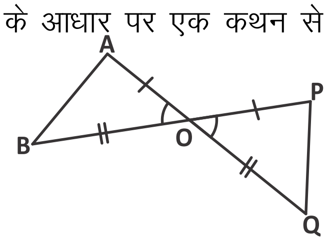
इसलिए हम कह सकते हैं यदि "l और m कोई दो समांतर रेखाएँ हैं तो उनमें कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं होगा।"(निष्कर्ष कथन)

एक अन्य उदाहरण देखते हैं–

2. यदि $a+5=b$ और $c=b$ है तो

$a+5=c$ होगा। याने $a=c-5$

3. ऊपर लिखे दोनों उदाहरणों में परिभाषा और अभिगृहीत के आधार पर एक कथन से अगला कथन लिखा गया है। इसी तरह पूर्व सिद्ध कथन या प्रमेयों के आधार पर भी निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। आइए एक उदाहरण देखते हैं–



ΔAOB और ΔPOQ में $\angle AOB = \angle POQ$,

$OA = OP$ और $OB = OQ$ है।

SAS सर्वांगसमता प्रमेय के आधार पर हम कह सकते हैं कि $\Delta AOB \cong \Delta POQ$

4. निगमनिक तर्क हमें एक व्यापक सत्य कथन से विशिष्ट सत्य कथन तक पहुँचने में भी मदद करता है। उदाहरण के लिए यदि एक बार यह सिद्ध कर दें कि किन्हीं दो विषम

संख्याओं का गुणनफल एक विषम संख्या होती है तो बिना गुणा किए ही हम विषम संख्याओं को पहचान कर गुणनफल के विषम होने को जान सकते हैं।

उदाहरणार्थ 7428391 × 607349 का गुणनफल भी विषम संख्या होगी क्योंकि 7428391 और 607349 दोनों संख्याएँ ही विषम हैं।

करके देखें

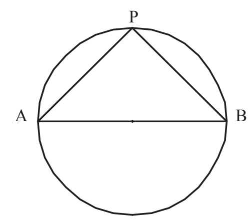
1. सिद्ध करें कि – किन्हीं भी दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग, 4 का गुणज होता है।
2. दिए गए कथनों के आधार पर निष्कर्ष कथन लिखिए।

   (i) कथन a – वर्ग एक आयत है।

   कथन b – आयत एक समांतर चतुर्भुज है।

   (ii) कथन a – जीवा AB वृत्त की परिधि पर $\angle APB$ बनाती है।

   कथन b – जीवा AB एक व्यास है।

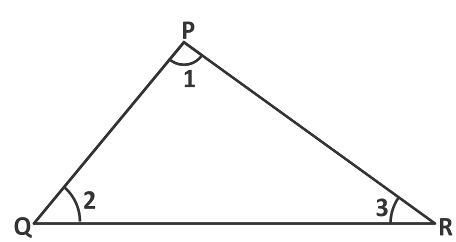


3. यदि ABCD और PQRS दो आयत हैं तो इनके कोणों, भुजाओं व विकर्णों के बारे में हम क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? क्या हम कह सकते हैं कि ये सर्वांगसम अथवा समरूप हैं?

क्या काटकर व नापकर गणितीय कथन सिद्ध कर सकते हैं ?

गणित सीखते समय हम कई बार माप कर या विशेष उदाहरण देखकर व्यापक स्तर पर कुछ बातें मान लेते हैं। त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° है, इसे भी दिखाते समय हम माप कर अथवा कोनों को काट, उन्हें एक साथ रखकर यह कहते हैं कि अंतःकोणों का योग 180° है। किन्तु यह इस कथन की उपपत्ति नहीं है। इस तरह दर्शाने से यह हर त्रिभुज के लिए मान्य है ऐसा हम नहीं कह सकते।

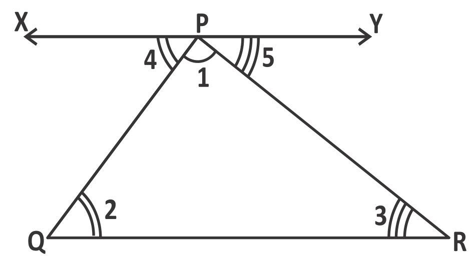
हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है, एक प्रमेय है जो कि सभी त्रिभुजों पर लागू एक व्यापक कथन है। मान लें कि आपने किसी एक त्रिभुज के कोणों को मापा यदि उनका योग 180° हो तो किसी दूसरे त्रिभुज के लिए भी ऐसा होगा हम यही बात नहीं कह सकते। इस प्रकार सभी संभव त्रिभुज के कोणों को मापना संभव नहीं है। इसके अलावा यदि योग 180° से कम या ज्यादा हो तो हम यही मानेंगे कि माप ठीक से नहीं हुआ। ऐसा इसलिए है क्योंकि हम जानते हैं कि समतल पर बने त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होगा ही और हम इसे व्यापक रूप में सिद्ध कर सकते हैं, जिससे यह हर त्रिभुज के लिए सही होगा ही।



गणित में कथन को सिद्ध करने के लिए निगमनिक तर्कण (Deductive Reasoning) का उपयोग करते हैं जिससे व्यापक रूप से किसी भी कथन की सत्यता जाँची व स्थापित की जा सकती है। व्यापकता के लिए हम यहाँ एक त्रिभुज की कल्पना करेंगे, जिसके आकार, कोणों की माप आदि के बारे में हम कुछ नहीं जानते अर्थात् वे कुछ भी हो सकते हैं। इससे हमारा निष्कर्ष हर त्रिभुज पर लागू होगा।

प्रमेय 1 : किसी त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है।

उपपत्ति : एक त्रिभुज PQR दिया है जिसके कोण $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3$ हैं।



सिद्ध करना है: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

रचना : QR के समांतर बिंदु P से होती हुई एक रेखा XPY बनाएँ, ताकि समांतर रेखाओं का गुणों का उपयोग कर सकें।

आकृति में,

$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (XPY एक रेखा है) ....(1)

$\angle 4 = \angle 2$ और $\angle 5 = \angle 3$ (एकांतर कोणों का युग्म) ....(2)

(1) में $\angle 4$ और $\angle 5$ का मान रखने पर

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$ ....(3)

यानी $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

इसमें $\angle 1, \angle 2$ का अलग–अलग मान व PQ, QR आदि की लम्बाई कुछ भी हो सकती है। शर्त यह है कि त्रिभुज बन पाए। ....(4)

ज्यामिति में कथनों को सिद्ध करते समय हम अक्सर रचना करते हैं। इस उपपत्ति में हमने एक समांतर रेखा XPY खींची जिससे हम एकांतर कोण प्रमेय का उपयोग कर पाए।

करके देखें

सिद्ध करें कि –

1. किसी त्रिभुज का बहिष्कोण दूरस्थ अन्तःकोणों के योगफल के बराबर होता है।
2. किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।
3. किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
4. दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

3. गणितीय भाषा का उपयोग करके सटीक, संक्षिप्त एवं स्पष्ट भाषा में लिखना

प्राकृत संख्या के इस गुणधर्म को पढ़ें

$$n_1 + n_2 = n_2 + n_1 \qquad \forall\, n_1, n_2 \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

क्या आप बता सकते हैं कि यह प्राकृत संख्या का कौन सा गुणधर्म है?

यह कथन प्राकृत संख्याओं में जोड़ के क्रम विनिमेय (Commutative Property) के गुणधर्म को बताता है। यानी शाब्दिक तौर पर कहें तो किन्हीं भी दो प्राकृत संख्याओं का जोड़, उनके क्रम बदल कर जोड़ने पर समान रहता है। कथन में इसी बात को कुछ अक्षर, प्रतीक या चिह्नों की मदद से संक्षिप्त में लिखा गया है। जैसे दो प्राकृत संख्याओं को n_1 और n_2 से दर्शाया गया है। साथ ही दो नए संकेत $\forall$ और $\in$ भी हैं।

यह छोटा सा गणितीय कथन यह बताता है कि किन्हीं भी दो प्राकृत संख्याओं का योगफल इस बात पर निर्भर नहीं करता है कि किसमें किसका योग कर रहे हैं। इसका अर्थ यह है कि हम n_1 और n_2 को मान बदल कर कोई भी प्राकृत संख्या रख सकते हैं और हर मान के $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ प्राप्त होता है ।

इसी तरह से हम गुणा के लिए क्रम विनिमेय के नियम को भी लिख सकते हैं।

अब परिमेय संख्या की निम्नलिखित परिभाषा को पढ़ें जिसे अक्षर–प्रतीकों की मदद से लिखा गया है।

$$\mathrm{Q} = \frac{p}{q} \qquad \text{जहाँ } p, q \in \mathrm{I}\ \&\ q \neq 0$$

''किसी परिमेय संख्या Q को $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखते हैं जहाँ p, q कोई दो पूर्णांक हैं और q का मान 0 नहीं हो सकता।''

करके देखें

निम्नलिखित गणितीय कथनों को शब्दों में लिखिए ।

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a,m,n \in \mathrm{N}$

(ii) $p(x + y) = px + py \quad \forall p,x,y \in \mathrm{R}$

(ii) प्राकृतिक संख्याओं के सभी गुणधर्मों को प्रतीक भाषा में लिखें।

गणित में प्रतीक व गणितीय कथन

गणित में परिभाषाएँ, गुण, नियम इस तरीके से संक्षिप्त में लिखे जाते हैं। ऐसा न हो तो कथनों व उपपत्तियों को लिखने में जाने कितना लिखना पड़े। गणितीय भाषा सही चिह्नों के उपयोग से किसी बात को सटीकता से कहने में मदद करती है। इसलिए इसका उपयोग प्रमेय सिद्ध करते हुए करना जरूरी भी है और फायदेमंद भी।

वैसे तो गणित में अनेक चिह्न उपयोग किए जाते हैं पर यहाँ पर कुछ चिह्नों और उनके अर्थ दिए हैं। आगे हम इनका उपयोग समझेंगे और कुछ नए कथन भी लिखेंगे।

क्र.	चिह्न	अर्थ	
1.	$=$	बराबर है	(is equal to)
2.	$<$	से छोटा है	(Less than)
3.	$>$	से बड़ा है	(Greater than)
4.	$\therefore$	इसलिए	(Therefore)
5.	$\because$	चूंकि	(Since)
6.	$\neq$	बराबर नहीं है	(is not equal to)
7.	$\forall$	सभी के लिए/प्रत्येक के लिए	(For all)
8.	$\in$	का अवयव है	(Belongs to)
9.	$\notin$	का अवयव नहीं है	(does not belong to)
10.	$\sim$	समरूप है	(is similar to)
11.	$\cong$	सर्वांगसम है	(is congruent to)
12.	$\Rightarrow$	अंतर्भाव/इंगित करता है	(implies to)
13.	$\parallel$	समांतर है	(is parallel to)

उदाहरणः–1. निम्न शाब्दिक कथनों को गणितीय कथनों में लिखें–

(अ) पूर्णांक संख्याओं में व्यवकलन करते समय क्रम विनिमेय नियम लागू नहीं होता है।

(ब) किसी भी प्राकृत संख्या का वर्ग, उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।

हलः– (अ) $a-b \neq b-a \quad \forall\ a, b \in \mathrm{I}$

गणितीय कथन लिखने के लिए हमने दो चरों a और b का उपयोग किया है और चिह्नों $\neq, \forall, \in$ का उपयोग किया है।

(ब) $x^2 \geq x \qquad \forall x \in N$

यहाँ x किसी प्राकृत संख्या को निरूपित करता है।

करके देखें

इन सभी के लिए गणितीय कथन लिखें....

(i) किसी पूर्णांक संख्या को 1 से गुणा करने पर वही पूर्णांक संख्या प्राप्त होती है।

(ii) किसी भी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से अधिक होता है।

(iii) दो भिन्नात्मक संख्याओं का योग एक भिन्नात्मक संख्या ही होती है।

प्रश्नावली 1

1. बताइए कि निम्नलिखित गणितीय कथन सही हैं या गलत? उत्तर का कारण भी लिखिए।

   (i) चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग $350°$ होता है।

   (ii) किसी वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq 0$

   (iii) दो सम संख्याओं का जोड़ सम संख्या होता है ।

   (iv) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती है।

   (v) $3n + 1 > 4$, जहाँ n प्राकृत संख्या है।

   (vi) $x^2 > 0$, जहाँ x वास्तविक संख्या है।

   (vii) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall\, a, b, c \in N$

   (viii) $(p - q) + r = p - (q + r) \quad \forall\, p, q, r \in Q$

   (ix) $(x + y) - z = x + (y - z) \quad \forall\, x, y, z \in R$

2. नीचे की सूची में कुछ अभिगृहीत, प्रमेय एवं परिभाषाएँ दी गई हैं। इन्हें ध्यान से पढ़ें।

कथन 1.	पूर्ण, हिस्से से बड़ा होता है। (अभिगृहीत)
कथन 2.	यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप अलग–अलग हो तो वह त्रिभुज विषमबाहु त्रिभुज होता है। (परिभाषा)
कथन 3.	यदि n विषम पूर्णांक है तो $n = 2k + 1$ लिखा जा सकता है, जहां k कोई पूर्णांक है। (परिभाषा)
कथन 4.	दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (प्रमेय)
कथन 5.	यदि कोई दो वस्तुएँ क्रमशः तीसरी वस्तु के बराबर हैं, तो पहली दोनों वस्तुएँ एक–दूसरे के बराबर होती हैं। (अभिगृहीत)

ऊपर दिए कथनों के आधार पर नीचे दी गई जानकारियों के लिए संभव निष्कर्ष कथन लिखें।

(i) त्रिभुज RST और त्रिभुज XYZ में $RS = XY$, $ST = YZ$ और $TR = ZX$ है।

(जैसे यहाँ कथन–4 के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta RST \cong \Delta XYZ$)

(ii) $\frac{AB}{2} = AC$

(iii) $l = \frac{k+5}{2}$ और $2m = k + 5$ है। जहाँ k, l और $m \in R$

(iv) ΔDEF में $DE \neq EF \neq FD$ है।

(v) 141 एक विषम पूर्णांक है।

3. यदि n_1 और n_2 दो सम पूर्णांक हैं तथा k_1 और k_2 कोई दो पूर्णांक हैं तब,

(i) सम पूर्णांक की परिभाषा का उपयोग करके n_1 और n_2 को क्रमशः k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(ii) गुणा $n_1 n_2$ को k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(iii) अब $n_1 + n_2$ को k_1 और k_2 के रूप में लिखिए ।

(iv) $n_1 \times n_2$ सम संख्या है या विषम? क्यों?

(v) $n_1 + n_2$ सम संख्या है या विषम? क्यों?

4. यदि $ax^2 + bx + c = 0$ एक द्विघाती समीकरण है जहाँ $a, b, c \in R$ और $a \neq 0$ तो इनमें से कौन–कौन से समीकरण द्विघाती समीकरण हो सकते हैं और कारण लिखिए।

(i) $ax^2 - bx + c = 0$ (ii) $bx + c = 0$ (iii) $ax^2 + c = 0$

(iv) $ax^2 = 0$ (v) $bx = 0$

5. नीचे परिमेय संख्या (Q) की परिभाषा है–

$Q = \frac{p}{q}$ जहाँ $\forall\, p, q \in I$ और $q \neq 0$

(i) परिमेय संख्या की परिभाषा शब्दों में लिखिए।

(ii) क्या $\frac{6}{0}$ परिमेय संख्या है?

(iii) क्या $\frac{81}{1}$ परिमेय संख्या है? परिभाषा के आधार पर कारण बताइए।

(iv) यदि $\frac{b+9}{a-5}$ एक परिमेय व्यंजक है, जहाँ $a, b \in N$ (प्राकृत संख्या) है, तो a का कौन सा मान यहाँ मान्य नहीं है? और क्यों?

(v) यदि $\frac{p^2+7}{q^2-25}$ परिमेय व्यंजक है। यहाँ q का मान 5 और –5 क्यों नहीं हो सकता? (परिभाषा का उपयोग करें।)

गणितीय कथनों को सिद्ध करने के ढंग

अभी तक हमने गणितीय कथनों को सामान्यतः सीधे–सीधे निगमन तर्क से सिद्ध किया है। इसके कुछ और उदाहरण देखते हैं –

''यदि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है तो वह समद्विबाहु त्रिभुज भी है।''

यदि कोई त्रिभुज समबाहु है तो उसकी तीनों भुजाएँ बराबर हैं। यानी उसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं तो उसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर होंगी ही। अतः वह समद्विबाहु भी होगा।

आइए अब इन्हीं तथ्यों को हम प्रतीकों की सहायता से लिखकर प्रदर्शित करना सीखते हैं।

$A : \Delta ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

$B : \Delta ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

अब यदि कथन A सही है तो कथन B भी सही है। अतः इसे निम्नलिखित तरीके से दर्शाएँगे।

$A \Rightarrow B$ हम इसे ऐसे पढ़ते हैं ''यदि A तो B'' या 'A अंतर्भाव B'

यहाँ $\Rightarrow$ अंतर्भाव (इंगित करता है) का चिह्न है।

करके देखें

1. इस प्रकार के कुछ और कथन सोचकर लिखें जिन्हे सीधे–सीधे निगमन तर्क पर सिद्ध किया जा सकता है।
2. क्या $A \Rightarrow B$ यह दिखाता है कि $B \Rightarrow A$? कारण बताएँ।

अंतर्भाव का उपयोग

आइए कुछ उदाहरण देखते हैं

कथन 1 :– यदि $x^2 = 4$ है तो $x = 2, -2$ होगा।

$A : x^2 = 4$

$B : x = \pm 2$

हमें पता है कि यदि $x^2 = 4$ हो तो x का मान 2 और –2 होगा। अतः $A \Rightarrow B$ है।

कथन 2 :– यदि m , 9 का गुणज है तो m , 3 का भी गुणज है।

$A : m, 9$ का गुणज है।

$B : m, 3$ का गुणज है।

हम जानते हैं कि यदि कोई संख्या 9 का गुणज हो तो वह 3 की भी गुणज होगी। अतः $A \Rightarrow B$

करके देखें

इन कथनों में सही तार्किक संबंध पता करें और चिह्न ($\Rightarrow$) का उपयोग करके दर्शाएँ।

1. P: चतुर्भुज ABCD एक आयत है।
   Q: चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है ।
2. A: बिंदु P_1 रेखा l और m पर स्थित है।
   B: रेखा l और m असमांतर रेखाएँ हैं।

कुछ और कथनों को सिद्ध करना

अब हम कुछ ऐसे कथनों को परखेंगे अथवा उपपत्ति करेंगे जिनमें सीधे निगमन द्वारा हम कथन की उपपत्ति तक नहीं पहुंच सकते।

कथन 3 :– विषम संख्या का वर्ग विषम संख्या होती है।

उपपत्ति :– माना n एक विषम संख्या है तब

$$n = 2k + 1$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$n^2 = (2k + 1)^2$

$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$=2(2k^2+2k)+1$ (चूँकि $2k^2 + 2k$ भी पूर्णांक है, इसलिए इसे कोई पूर्णांक

$=2b + 1$ $\quad$ b के बराबर मान सकते हैं यानी $b = 2k^2 + 2k$)

यानी $n^2 = 2b + 1$

चूंकि $2b$ एक सम संख्या है अतः $2b + 1$ एक विषम संख्या है ।

स्पष्टतः विषम संख्या का वर्ग एक विषम संख्या होती है।

कथन 4 :– सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इस कथन को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम यह मानेंगे कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है यानि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अब यदि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है तो परिमेय संख्या के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए हम ऐसे निष्कर्ष तक पहुँचेंगे जो $\sqrt{2}$ के परिमेय संख्या होने के विपरीत हो। इस तरह $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या सिद्ध हो जाएगी।

आइए इस कथन की उपपत्ति देखते हैं–

उपपत्ति :– दिए गए कथन के विपरीत को सत्य मानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। तब परिमेय संख्या की परिभाषा से,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{जहाँ } a, b \in I,\ b \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

साथ ही a और b सहअभाज्य है।

(1) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2b^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2m = a^2 \quad \text{जहाँ } m = b^2,\ m \in I$$

$2m = (2n)^2$ जहाँ $a = 2n, n \in I$ (यदि a^2 एक सम संख्या है तो a भी जो कि पूर्णांक है, एक सम संख्या होगी)

अब समीकरण (2) में a का मान रखने पर

$2b^2 = (2n)^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2$ (यदि मानें कि $n^2 = p$ कोई पूर्णांक है)

$\therefore b^2 = 2p$ जहाँ $p \in I$

(अतः b^2 एक सम संख्या है और इसलिए b जो कि पूर्णांक है, भी एक सम संख्या होगी।)

$\Rightarrow b = 2q$ जहाँ $q \in I$

यानी अब a और b का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2 है अर्थात a और b सहअभाज्य नहीं है। यह माने गए कथन से विपरित है, जिसमें a, b सहअभाज्य थे। अतः इसको गलत सिद्ध करता है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इस प्रकार सत्यापन के तरीके को विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (proof by contradiction) कहते हैं। जैसा कि हमने ऊपर किया। इस तरीके में हम यह मान लेते हैं कि दिया गया कथन सत्य नहीं है और उस कथन का उल्टा (निषेधन) सही है। फिर तार्किक ढंग से आगे बढ़कर माने गए कथन को गलत साबित करते हैं। परिणाम स्वरूप वास्तविक कथन सत्य सिद्ध हो जाता है। इस प्रकार कई बार कथनों को सिद्ध करने के लिए इस विधि का उपयोग करते हैं। जैसा कि आपने देखा इसमें सबसे पहले कथन का निषेधन को सही मानते हैं।

किसी कथन को नकारना उस कथन का निषेधन कहलाता है। इसके लिए हम विशेष चिह्न का इस्तेमाल करते हैं। कथन P का निषेध कथन ~P याने टिल्ड P लिखा जाता है।

आइए कुछ उदाहरण देखते हैं–

1. $P : x$ पूर्णांक है।

   $\sim P : x$ पूर्णांक नहीं है।

2. B: रेखाखण्ड AB, रेखाखण्ड PT पर लंब है।

   $\sim B$: रेखाखण्ड AB, रेखाखण्ड PT पर लंब नहीं है।

करके देखें

निम्न कथनों का निषेधन कथन लिखिए–

1. C : स्पर्श रेखा वृत्त को सिर्फ एक बिंदु पर स्पर्श करती है।
2. D : समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य से बड़ा होता है।
3. R : $b^2 - a^2$ एक ऋणात्मक संख्या है।

कथनों की जाँच : कई बार कथनों की जाँच करने में सीधे–सीधे तर्क ढूँढ़ना आसान नहीं होता। उन्हें सिद्ध करना आसान नहीं होता और कई बार तो वह सही भी नहीं होते और उन्हें गलत सिद्ध करना होता है। गणितीय कथन को गलत सिद्ध करने के लिए कैसे बढ़ें?

कथन 5 :– सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती है।

हम पाते हैं कि इस कथन में तार्किक संबंध ढूँढना कठिन है, क्योंकि अभाज्य संख्याएँ पता करने का कोई निश्चित पैटर्न नहीं है यह स्पष्ट है कि अनंत अभाज्य संख्याओं के विषम होने की जाँच करना संभव नहीं है। किन्तु यदि हम एक भी ऐसी अभाज्य संख्या ढूँढ लें जो विषम नहीं है, तो यह कथन असत्य सिद्ध हो जाएगा। ऐसा एक प्रत्युदाहरण है। '2' यह एक ऐसी अभाज्य संख्या है जो विषम नहीं है। अतः दिया गया कथन असत्य है ।

अब इस कथन के लिए प्रत्युदाहरण ढूँढ़ें।

कथन 6 :– $\forall x \in R$ यदि x^2 परिमेय संख्या है तो x भी परिमेय संख्या है।

इस कथन में भी अगर $x^2 = 2$ है, जो एक परिमेय संख्या है तो $x = \sqrt{2}$ मिलेगा जो परिमेय संख्या नहीं है। अतः इस एक उदाहरण से दिए गए कथन को असत्य सिद्ध कर दिया। इसके लिए और भी कई उदाहरण मिल सकते है।

यह ध्यान रहे कि सिर्फ एक प्रत्युदाहरण से कोई व्यापक कथन असत्य सिद्ध हो जाता है क्योंकि गणित में किसी कथन के व्यापक रूप से सत्य होने के लिए उसका हर स्थिति में वैध होना जरुरी है। इसलिए यदि कथन एक भी स्थिति में गलत साबित हो जाता है तो वह असत्य है। इसे प्रत्युदाहरण द्वारा (Disproof by counter example) कथन को असत्य सिद्ध करना कहते हैं।

करके देखें

इन कथनों का एक प्रत्युदाहरण ढूंढ़ें और असत्य सिद्ध करें।

a. सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का गुणा दोनों परिमेय संख्याओं से बड़ा होता है।

b. सभी समरूप आकृतियाँ, सर्वांगसम भी होती हैं।

उदाहरणः–2. सिद्ध कीजिए कि $2k+7$ एक विषम पूर्णांक है जहाँ k एक पूर्णांक है।

हलः– यदि n विषम पूर्णांक है, तो $n = 2k+1$ लिख सकते हैं जहाँ k कोई पूर्णांक है।

हमें सिद्ध करना है कि $n = 2k+7$ विषम पूर्णांक है $\forall\, k \in \mathrm{I}$

$n = 2k + 7$

$= 2k + 6 + 1$

$= 2(k+3) + 1$ ----------(1)

माना $k + 3 = m \quad \forall\, m \in \mathrm{I}$ ----------(2)

(1) व (2) से $n = 2m + 1$

$n = 2m + 1$ एक विषम पूर्णांक हैं $\forall\, m \in \mathrm{I}$ (विषम संख्या की परिभाषा के अनुसार)

स्पष्टतः $2k + 7$ एक विषम पूर्णांक है।

प्रश्नावली 2

1. इन कथनों को गणितीय रूप में लिखिए ।
   (i) पूर्णांक, गुणन संक्रिया के सापेक्ष संवृत है।
   (ii) परिमेय संख्याओं में घटाने में क्रम विनिमेय लागू नहीं होता है।
2. निम्न गणितीय कथनों को पढ़कर उनपर आधारित उत्तर दें।
   अ. कथन : $n^3 \geq n \qquad \forall\, n \in Q$
   (i) इस कथन को शब्दों में लिखें।
   (ii) क्या यह कथन सही है?
   (iii) यह कथन किन संख्याओं के लिए सही है?
   (iv) क्या इस कथन में $n = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ रखा जा सकता है?
   (v) क्या कथन $p^3 \geq p \;\; \forall p \in I$ सही है? कारण बताएँ।
   ब. $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
   (i) इस कथन को 'यदि–तो' के रूप में लिखें।
   (ii) क्या यह कथन सही है?
   (iii) यदि $x \notin N$ क्या यह कथन सही है?
3. बताइए कि निम्न कथन सत्य है या असत्य। उत्तर का कारण लिखें।
   (i) सभी बहुभुज पंचभुज होते हैं।
   (ii) सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।
   (iii) सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।
   (iv) कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।
   (v) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय होती हैं।
4. दिया हुआ है कि ABCD समांतर चतुर्भुज है और $\angle B = 80°$ तब समांतर चतुर्भुज के अन्य कोणों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
5. सिद्ध करें कि 4m+9 एक विषम पूर्णांक है जहाँ m एक पूर्णांक है।
6. उपयुक्त चिह्न का उपयोग करते हुए निम्न कथनों का निषेधन कथन लिखिए–
   (i) M: $\sqrt{7}$ अपरिमेय संख्या है।
   (ii) $A : 6 + 3 = 9$
   (iii) D : कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।
   (iv) P : त्रिभुज PQR समबाहु है।
7. निम्न कथनों में तार्किक संबंध पता करें और अंतर्भाव ($\Rightarrow$) चिह्न का उपयोग करके दर्शाएँ–
   (i) A : ΔABC के सभी अंतःकोण बराबर हैं।
   B : ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।
   (ii) $T : P(a) = 0$
   S : $(x$-a$)$ बहुपद $P(x)$ का एक गुणनखंड है।
   (iii) P : x और y दो विषम संख्याएँ हैं।
   Q : $x + y$ एक सम संख्या है।

प्रतिधनात्मक (Contrapositive)

कुछ कथनों को दिए गए रूप में सिद्ध करना मुश्किल होता है, जैसे यह कथन देखें :–

A_1 : यदि दो त्रिभुज समरूप नहीं है तो वे त्रिभुज सर्वांगसम भी नहीं है।

इस कथन को ऐसे भी लिखा जा सकता है :–

A_2 : यदि दो त्रिभुज समरूप हैं तो वे सर्वांगसम भी हैं।

A_3 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं तो वे समरूप भी नहीं हैं।

A_4 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो वे त्रिभुज समरूप भी हैं।

अब बताएँ कि ऊपर लिखे चारों कथनों में से कौन–से कथन तुल्य है? जाहिर है कथन A_1 और A_4 तुल्य कथन है, क्योंकि यह दोनों तार्किक रूप से एक ही बात कहते हैं और वही उसका प्रतिधनात्मक रूप है।

हालाकि कथन A_1 और A_4 तार्किक रूप से एक ही बात को कहते हैं पर कथन A_1 की अपेक्षा A_4 में तर्क ढूँढना और उसे उपयोग करना ज्यादा आसान है। कथन A_4 कथन A_1 का प्रतिधनात्मक रूप है। इसलिए कुछ कथनों को सिद्ध करने के लिए उन्हें प्रतिधनात्मक रूप में लिखकर सिद्ध करते हैं।

उदाहरणः–3. निम्न कथन का प्रतिधनात्मक रूप में लिखें –

यदि एक संख्या 25 से भाज्य है तो वह 5 से भी भाज्य होगी।

हलः– यदि एक संख्या 5 से भाज्य नहीं है तो वह 25 से भी भाज्य नहीं है।

उदाहरणः–4. यदि $x^2 - 6x + 5$ सम है, तो x विषम है। जहाँ $\forall\, x \in I$

हलः– इस कथन को प्रतिधनात्मक रूप में लिखकर देखते हैं।

यदि x विषम नहीं है, तो $x^2 - 6x + 5$ सम नहीं है। $\forall\, x \in I$

अब x विषम नहीं है $\Rightarrow x$ सम है

$x = 2k,\ k \in I$ (सम पूर्णांक की परिभाषा से)

$x^2 - 6x + 5 \quad \Rightarrow (2k)^2 - 6(2k) + 5$

$\Rightarrow 4k^2 - 12k + 4 + 1 \quad \Rightarrow 2\,(2k^2 - 6k + 2) + 1$

$\Rightarrow 2b + 1$ जहाँ $b = 2k^2 - 6k + 2$ और b एक पूर्णांक है $(b \in I)$

विषम पूर्णांक की परिभाषा से हम यह जानते हैं कि $2b + 1$ एक विषम पूर्णांक है।

अर्थात् यदि x विषम नहीं है, तो $x^2 - 6x + 5$ सम नहीं है।

प्रश्नावली 3

1. सिद्ध करें कि n बहुभुज जहाँ $n \geq 3$, और जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं, के अंतः कोणों का योग $n\left[180-\dfrac{360}{n}\right]^{\circ}$ होता है।
2. किसी समांतर श्रेणी का n वां पद 6n+1 है। सिद्ध करें कि उस श्रेणी के p पदों का योग $3p^2 + 4p$ है।
3. सिद्ध करें कि किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग हमेशा 6 का गुणज होता है।
4. सिद्ध करें कि $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ का एक गुणनखण्ड 8 है यहाँ n एक प्राकृत संख्या है।
5. सिद्ध करें कि दो क्रमागत पूर्णांक संख्याओं के वर्गों के योग को 4 से विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 प्राप्त होता है ।

हमने सीखा

1. कथनों को सिद्ध करने के लिए –
   (i) पहले से सिद्ध प्रमेय, परिभाषा या अभिगृहीत का उपयोग किया जाता है।
   (ii) उपपत्ति का प्रत्येक कथन, ठीक पहले वाले कथन से तार्किक रूप से जुड़ा होता है।
   (iii) कथनों को लिखते समय विशेष प्रकार के प्रतीकों चिह्नों का प्रयोग किया जाता है ताकि बड़े वाक्यों को संक्षिप्त में लिखा जा सके।
2. गणितीय भाषा का प्रयोग करके कथनों को सटीक, संक्षेप व स्पष्ट भाषा में लिखा जा सकता है।
   जैसे– $\forall, \in, \cong$ आदि।
3. गणितीय कथनों को सिद्ध करने के ढंग
   (i) निगमन तर्क
   (ii) प्रत्युदाहरण द्वारा

उत्तरमाला–1

1. (i) गलत (ii) सही (iii) सही (iv) गलत (v) गलत
   (vi) गलत (vii) सही (viii) गलत (ix) सही
2. (i) $\Delta RST \cong \Delta XYZ$ (कथन–4 से)
   (ii) $AB \rangle AC$ (कथन–1 से)
   (iii) $l = m$ (कथन–5 से)
   (iv) ΔDEF विषमबाहु त्रिभुज है।(कथन–2 से)

(v) $141 = 2 \times 70 + 1$ (कथन–3 से)

3. (i) $n_1 = 2k_1, n_2 = 2k_2$

(ii) $n_1 \times n_2 = 4(k_1 \times k_2)$

(iii) $n_1 + n_2 = 2(k_1 + k_2)$

(iv) $n_1 \times n_2 = 2(k_1 \times k_2) = 2k$, सम संख्या की परिभाषा से।

(v) सम संख्या।

4. (i), (iii), (iv) सभी में $a \neq 0$ है।

5. (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) $a = 5$ मान्य नहीं है।

उत्तरमाला–2

1. (i) $a.b = c \forall a, b, c \in I$ (ii) $p - q \neq q - p \forall p, q \in Q$

2. अ. (i) किसी परिमेय संख्या का घन उस संख्या से बड़ा होता है।

(ii) नहीं (iii) $n \in N$ के लिए सही है। (iv) नहीं

(v) नहीं, ऋणात्मक संख्या का घन उस संख्या से छोटा होता है।

ब. (i) यदि किसी संख्या का वर्ग 1 है तो उस संख्या का मान 1 होगा।

(ii) हाँ (iii) नहीं

3. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य

4. $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 80°$

6. (i) $\sim M : \sqrt{7}$ अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) $\sim A : 6 + 3 \neq 9$

(iii) $\sim D :$ कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।

(iv) $\sim P :$ त्रिभुज PQR समबाहु नहीं है।

7. (i) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ (ii) $S \Rightarrow T, T \Rightarrow S$ (iii) $P \Rightarrow Q$