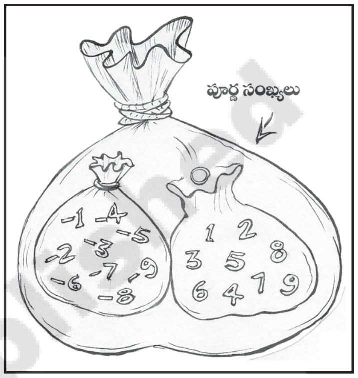
# పూర్ణ సంఖ్యలు

# 1

## 1.0 పరిచయం




మన చుట్టూ ఉండే పరిసరాలలోని వస్తువులను 1,2,3 ... అంటూ లెక్కిస్తాం కదా! అలా లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను "సహజ సంఖ్యలు" లేదా లెక్కించే సంఖ్యలు అంటారు.

(i) కనిష్ఠ సహజ సంఖ్య ఎంత?

(ii) 100, 10000 ల మధ్య ఏవైనా ఐదు సహజ సంఖ్యలను తెలపండి.

(iii) సహజ సంఖ్యల వరుసలో చివరి సంఖ్యను చెప్పగలరా?

(iv) ఏవైనా రెండు వరుస సహజ సంఖ్యల మధ్య భేదమెంత?

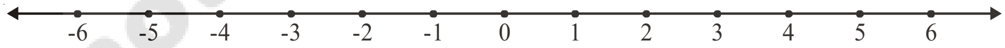
లేని పరిమాణానికి ప్రాతినిధ్యం వహించేది. దీన్ని '0' తో సూచిస్తాం.

సహజ సంఖ్యలకు '0' (పూర్ణము లేదా సున్నా) ను చేరిస్తే ఏర్పడే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాల సంఖ్యలు అవుతాయి.

వాటిని **పూర్ణాంకాలు** అంటారు. అవి 0, 1, 2, 3, 4, ...

6వ తరగతిలో ఋణ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకొని ఉన్నాం. ఈ ఋణ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలను కలుపగా ఏర్పడే సంఖ్యలను 'పూర్ణసంఖ్యలు' అంటారు. ఈ అధ్యాయంలో మనమిప్పుడు పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను, పూర్ణసంఖ్యలతో వివిధ ప్రక్రియలను గురించి చర్చిద్దాం.

మొదటగా పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా చూపవచ్చో పరిశీలిద్దాం.




(i) పై సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలలో గరిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

(ii) పై సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలలో కనిష్ఠ సంఖ్య ఏది?

(iii) –3 కన్నా 1 పెద్దదేనా? ఎందుకు?

(iv) –3 కన్నా –6 పెద్దదేనా? ఎందుకు?

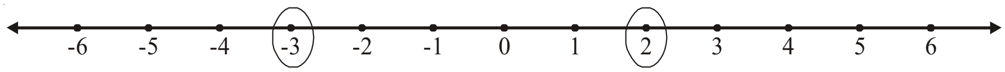
(v) 4, 6, –2, 0, –5 లను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

(vi) 0, 1 మరియు 0, -1,ల మధ్య భేదమెంతో సంఖ్యారేఖను పరిశీలించి పోల్చండి.

© SCERT not to be republished

## అభ్యాసం - 1

1. కింది సంఖ్యారేఖపై గుర్తించబడిన సంఖ్యలలో పెద్ద, చిన్న సంఖ్యలను రాయండి.




2. కింది ఇచ్చిన పూర్ణసంఖ్యల జతల మధ్యగల అన్ని పూర్ణసంఖ్యలను రాసి, వాటిలో కనిష్ట, గరిష్ట సంఖ్యలను తెల్పండి.

   (i) –5, –10 (ii) 3, –2 (iii) –8, 5

3. కింది పూర్ణసంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి. (చిన్న సంఖ్య నుండి పెద్ద సంఖ్యకు)

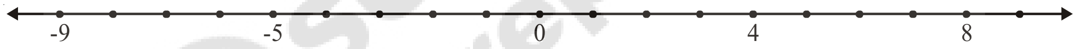
   (i) –5, 2, 1, –8 (ii) –4, –3, –5, 2 (iii) –10, –15, –7

4. కింది పూర్ణసంఖ్యలను అవరోహణ క్రమములో రాయండి. (పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యకు)

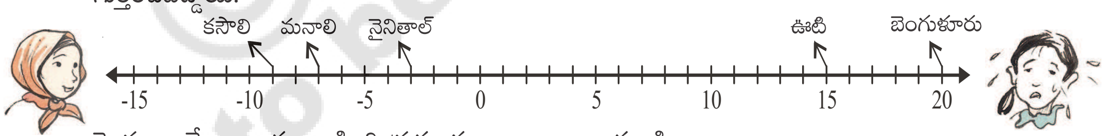
   (i) –2, –3, –5 (ii) –8, –2, –1 (iii) 5, 8, –2

5. 6, –4, 0 మరియు 4 లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

6. కింది సంఖ్యారేఖపై లోపించిన పూర్ణ సంఖ్యలను రాయండి.




7. కింది సంఖ్యా రేఖను చూడండి. భారతదేశం లోని వివిధ ప్రాంతాలలోని ఐదు నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు ఒకరోజువి గుర్తించబడ్డాయి.




పై సంఖ్యారేఖ ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

   (i) గుర్తించబడిన నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు తెల్పండి?

   (ii) ఏ నగరం యొక్క ఉష్ణోగ్రత గరిష్టంగా ఉంది?

   (iii) ఏ నగరం యొక్క ఉష్ణోగ్రత కనిష్టంగా ఉంది?

   (iv) ఏయే నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు $0^{o}C$ కన్నా తక్కువగా ఉన్నాయి?

   (v) ఏయే నగరాల ఉష్ణోగ్రతలు $0^{o}C$ కన్నా ఎక్కువగా ఉన్నాయి?

### 1.1 పూర్ణసంఖ్యలు - చతుర్విధ ప్రక్రియలు

కింది తరగతిలో పూర్ణసంఖ్యలతో సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియల గురించి తెలుసుకొన్నాం. పూర్ణసంఖ్యలతో గుణకార, భాగాహారాల గురించి తెలుసుకోబోయే ముందు మరొకసారి సంకలన, వ్యవకలనాల ప్రక్రియలను పరిశీలిద్దాం.

©SCERT not to be republished

## 1.1.1 పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

$4 + 3 = 7$

$4 + 2 = 6$

$4 + 1 = 5$

$4 + 0 = 4$

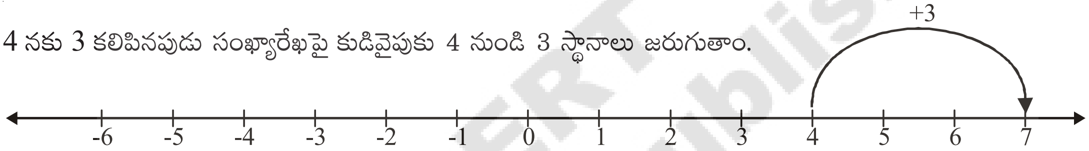
$4 + (-1) = 3$

$4 + (-2) = 2$

$4 + (-3) = 1$

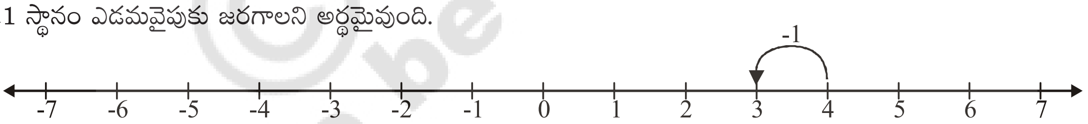
పై సంకలనాల అమరికలో ఉన్న ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 4 తో కూడే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు (3, 2, 1, 0, –1, –2, –3) ఫలితం కూడా క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గడం గమనించండి. దానిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలిద్దాం.

4 నకు 3 కలిపినపుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపుకు 4 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.




ఇదేవిధంగా 4 నకు 2, 1 లను కలిపినపుడు ఏమిజరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

ఇప్పుడు 4 కి –1 కలిపితే ఏమౌతుంది? పై సంకలనాల అమరిక నుండి 4+(–1) = 3 అని తెలుసు కావున సంఖ్యారేఖపై 1 స్థానం ఎడమవైపుకు జరగాలని అర్థమైవుంది.




ఇదేవిధంగా 4 నకు –2, –3 లను కలిపినపుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

**ఒక సంఖ్యకు ధన పూర్ణసంఖ్యను కలిపినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను కలిపినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు జరుగుతాము.**

**ప్రయత్నించండి.**

1. $9 + 7 = 16$    $9 + 1 =$
   $9 + 6 = 15$    $9 + 0 =$
   $9 + 5 =$    $9 + (-1) =$
   $9 + 4 =$    $9 + (-2) =$
   $9 + 3 =$    $9 + (-3) =$
   $9 + 2 =$

© SCERT not to be republished

(i) 9 + 2, 9 + (–1), 9 + (–3) సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

(ii) ఒక సంఖ్యకు ధనపూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?

(iii) ఒక సంఖ్యకు ఋణపూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?

2. 'ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తమైనా ఆ సంఖ్యలకన్నా ఎక్కువ' అని సంగీత భావించింది. ఆమె భావన సత్యమేనా? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించు కారణాలు రాయండి.

## అభ్యాసం - 2

1. కింది సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

(i) 5 + 7 (ii) 5 + 2 (iii) 5 + (–2) (iv) 5 + (–7)

2. కింది వానిని గణించండి.

(i) 7 + 4 (ii) 8 + (–3) (iii) 11 + 3

(iv) 14 + (–6) (v) 9 + (–7) (vi) 14 + (–10)

(vii) 13 + (–15) (viii) 4 + (–4) (ix) 10 + (–2)

(x) 100 + (–80) (xi) 225 + (–145)

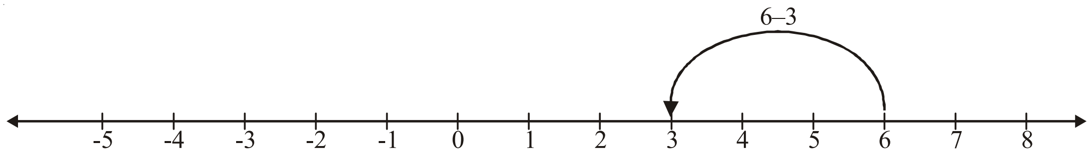
### 1.1.2. పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనం

కింది వ్యవకలనాలను పరిశీలించండి.

6 – 3 = 3
6 – 2 = 4
6 – 1 = 5
6 – 0 = 6
6 – (–1) = 7
6 – (–2) = 8
6 – (–3) = 9
6 – (–4) = 10

పై వ్యవకలనాల అమరికలో ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 6 నుంచి వ్యవకలనం చేయబడు సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు ఫలితం క్రమంగా 1 చొప్పున పెరగడం గమనించండి. దీనిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలిద్దాం.

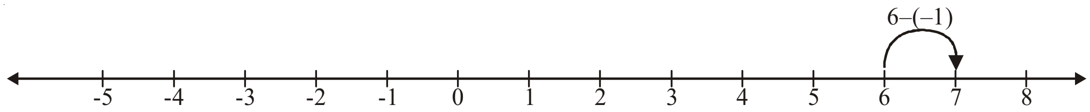
6 నుండి 3 ను తీసివేయునపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమ వైపునకు 6 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.




© SCERT not to be republished

ఇదే విధంగా 6 నుండి 2, 1 లను వ్యవకలనం చేయడాన్ని సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి. ప్రతిసారి ఎడమవైపు జరగడాన్ని గమనించవచ్చు.

సంఖ్యారేఖపై 6 నుంచి –1 ని వ్యవకలనం చేయగా ఏమిజరుగుతుంది? పై వ్యవకలనాల అమరికల నుండి 6– (–1) = 7 అని తెలుస్తుంది. అందువల్ల సంఖ్యారేఖపై ఒకస్థానం కుడివైపుకు జరగాలని అర్థమైతుంది.




ఇదేవిధంగా 6 నుండి –2, –3, –4 లను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం గమనించవచ్చు.

**ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యరేఖపై కుడివైపునకు జరుగుతాం.**

**ప్రయత్నించండి.**

1. 8 – 6 = 2

   8 – 5 = 3

   8 – 4 =

   8 – 3 =

   8 – 2 =

   8 – 1 =

   8 – 0 =

   8 – (–1) =

   8 – (–2) =

   8 – (–3) =

   8 – (–4) =

   (i) 8 –6, 8–1, 8–0, 8–(–2), 8–(–4) లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

   (ii) ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీరైతే ఎటువైపు జరుగుతారు?

   (iii) ఒక సంఖ్యనుండి ఋణపూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీరైతే ఎటువైపు జరగుతారు?

2. 'ఒక పూర్ణసంఖ్యనుండి మరొక పూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు ఫలితం ఆ సంఖ్యలకన్నా చిన్నది' అని రిచా భావించింది. ఆమె భావనతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్ధించు కారణాలు రాయండి.

© SCERT not to be republished

## అభ్యాసం - 3

1. కింది వ్యవకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి. ఫలితాన్ని రాయండి.

   (i) $7 - 2$ (ii) $8 - (-7)$ (iii) $3 - 7$

   (iv) $15 - 14$ (v) $5 - (-8)$ (vi) $(-2) - (-1)$

2. కింది వానిని గణించండి.

   (i) $17 - (-14)$ (ii) $13 - (-8)$ (iii) $19 - (-5)$

   (iv) $15 - 28$ (v) $25 - 33$ (vi) $80 - (-50)$

   (vii) $150 - 75$ (viii) $32 - (-18)$

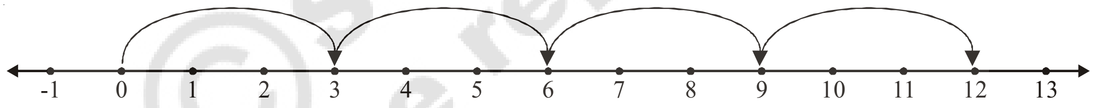
3. '–6' ను ఋణపూర్ణసంఖ్య, పూర్ణాంకాల భేదంగా రాయండి.

### 1.1.3 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం గురించి తెలుసుకొందాం!

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$ (4 మార్లు 3) అని మనకు తెలుసు.

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా సూచించవచ్చు.

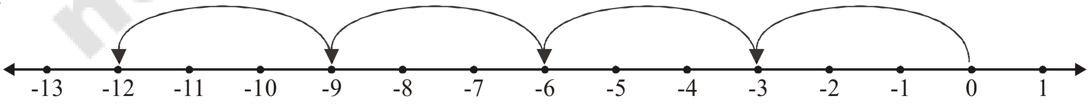



$4 \times 3$ అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి ఒక్కొక్క సారికి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపుకు జరుగగా $4 \times 3 = 12$ అవుతుంది.

మనమిప్పుడు $4 \times (-3)$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎట్లు సూచించవచ్చో పరిశీలిద్దాం.

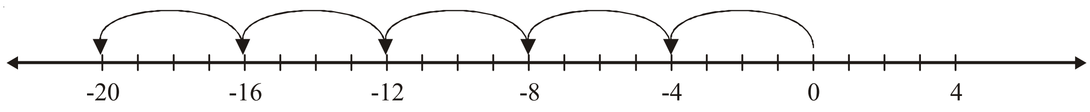
$4 \times -3 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా సూచిస్తాం.




$4 \times (-3)$ అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకి జరుగగా $4 \times (-3) = -12$ అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా $5 \times -4 = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$ దీనిని కింది విధంగా సూచిస్తాం.




©SCERT not to be republished

$5 \times (-4)$ అనగా 4 చొప్పున 5 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరుగగా $5 \times (-4) = -20$ అవుతుంది.

అట్లే $2 \times -5 = (-5) + (-5) = -10$

$3 \times -6 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$

$4 \times -8 = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$

**ఇవి చేయండి**

1. కింది వానిని గణించండి.

(i) $2 \times -6$ (ii) $5 \times -4$ (iii) $9 \times -4$

**$-4 \times 3$ ను గుణిద్దాం!**

కింది అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలించండి.

$4 \times 3 = 12$

$3 \times 3 = 9$

$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$

$0 \times 3 = 0$

$-1 \times 3 = -3$

$-2 \times 3 = -6$

$-3 \times 3 = -9$

$-4 \times 3 = -12$

© SCERT not to be republished

పై గుణకారాల అమరికలో గుణకము క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గేకొలది $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)$ లబ్ధం క్రమంగా 3 చొప్పున తగ్గుతుందని గమనించవచ్చు.

ఈ క్రమంను అనుసరించి $-4 \times 3 = -12$ అని తెలుస్తుంది. కానీ $= 4 \times (-3) = -12$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $-3 \times 4 = 3 \times -4 = -12$

పై గుణకారాలలో ఋణ గుర్తు మారుతున్నప్పుడు ఫలితాన్ని గమనించండి. పై అమరికను ఉపయోగించి

$4 \times (-5) = (-5) \times 4 = -20$

$2 \times (-5) = (-5) \times 2 = -10$ అని రాయవచ్చు

$3 \times (-2) =$

$8 \times (-4) =$

$6 \times (-5) =$

**ఈ గుణకారాలను గమనించినపుడు 'ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య, ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఎల్లప్పుడు ఋణపూర్ణసంఖ్య' అవుతుంది.**

### 1.1.3 (అ) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యలతో గుణకారం

−3, −4 లను గుణిస్తే లబ్ధం ఏమొస్తుందో చూద్దాం!

కింది గుణకారాల అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9$

$-3 \times 2 = -6$

$-3 \times 1 = -3$

$-3 \times 0 = 0$

$-3 \times -1 = 3$

$-3 \times -2 = 6$

$-3 \times -3 = 9$

$-3 \times -4 = 12$

పై గుణకారాల్లో అమరికను గుర్తించారా గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది (4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4) లబ్ధం క్రమంగా 3 చొప్పున పెరుగుతున్నట్లుగా గమనించవచ్చును.

ఇప్పుడు $-4 \times (-3)$ ను గుణిద్దాం.

కింది గుణకారాల లబ్ధాల అమరికను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12$

$-4 \times 2 = -8$

$-4 \times 1 = -4$

$-4 \times 0 = 0$

$-4 \times -1 =$ ______

$-4 \times -2 =$ ______

$-4 \times -3 =$ ______

పైగుణకారాల అమరికలో గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది లబ్ధం క్రమంగా 4 చొప్పున పెరుగుతుంది.

పై రెండు గుణకార అమరికల నుండి $-3 \times (-4) = -4 \times (-3) = 12$

© SCERT not to be republished

ఇదే విధంగా

$-3 \times (-1) = 3 \qquad -4 \times (-1) = 4$

$-3 \times (-2) = 6 \qquad -4 \times (-2) = 8$

$-3 \times (-3) = 9 \qquad -4 \times (-3) = 12$

**అందుచేత, ప్రతి సందర్భంలో కూడా రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.**

**కృత్యం 1**

కింది పట్టికలో మొదటి నిలువు వరుసలో ప్రతి సంఖ్యను, మొదటి అడ్డువరుసలోని ప్రతి సంఖ్యచే గుణిస్తూ పట్టికను పూరించండి.

| × | 3 | 2 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 6 | 3 | 0 | –3 | –6 | –9 |
| 2 | 6 | 4 | 2 | 0 | | | |
| 1 | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | |
| –1 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| –2 | | | | | | | |
| –3 | | | | | | | |

© SCERT not to be republished

(i) రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లపుడు ధనపూర్ణ సంఖ్యేనా?

(ii) రెండు ఋణ పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లపుడు ధనపూర్ణ సంఖ్యేనా?

(iii) ఒక ఋణ పూర్ణసంఖ్య, ఒక ధన పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడు ఋణ సంఖ్యయేనా?

## 1.1.3 (అ) రెండుకన్నా ఎక్కువ ఋణపూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య అని తెలుసుకొన్నాం. ఇప్పుడు మూడు, ఋణ పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధాలు ఏమౌతాయి. అలాగే నాలుగు ...

కింది వాటిని గమనించండి.

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3) \times (-4)] \times (-5) = (-24) \times (-5) = 120$

(iv) $[(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)] \times (-6) = 120 \times (-6) = -720$

పై లబ్ధాల నుండి ఏఏ అంశాలను మనం గమనించవచ్చు.

(i) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య

(ii) మూడు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య.

(iii) నాలుగు ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య.

(iv) ఐదు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య

ఇలాగే ఆరు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్యనా? లేక ఋణపూర్ణ సంఖ్యనా? కారణం తెల్పండి.

**ప్రయత్నించండి.**

$(-1) \times (-1) =$ ——

$(-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

పై వాటిని పరిశీలిస్తే (అ) మరియు (ఇ) గుణకారాలలో ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య 'సరిసంఖ్య' 2, 4 గుణించాల్సిన ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య సరిసంఖ్యలో ఉంటే వాటి లబ్ధం ధనపూర్ణ సంఖ్య. ఋణపూర్ణ సంఖ్యలు వాని లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య. (ఆ) మరియు (ఈ) గుణకారాలలో ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య 'బేసి సంఖ్య' గుణించాల్సిన ఋణపూర్ణ సంఖ్యల మధ్య బేసిసంఖ్యలో ఉంటే వాటి లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య వాని లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య అయినది.

**కాబట్టి, గుణకారాలలో ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య 'సరిసంఖ్య' ఐతే లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య బేసి సంఖ్య ఐతే లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య.**

## అభ్యాసం - 4

1. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $-100 \times -6 =$ ....................

(ii) $-3 \times$ ........ $= 3$

(iii) $100 \times (-6) =$ ....................

(iv) $-20 \times (-10) =$ ..................

(v) $15 \times (-3) =$ ....................

© SCERT not to be republished

2. కింది వాటికి లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $3 \times (-1)$ (ii) $(-1) \times 225$

(iii) $(-21) \times (-30)$ (iv) $(-316) \times (-1)$

(v) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (vi) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(vii) $9 \times (-3) \times (-6)$ (viii) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(ix) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (x) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

3. శీతలీకరణ ద్వారా 40°C వద్ద గల గది ఉష్ణోగ్రతను ప్రతి గంటకు 5°C చొప్పున చల్లబరచ (తగ్గించ) బడుతుంది. శీతలీకరణం ప్రారంభించిన 10 గంటల తరువాత గది ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

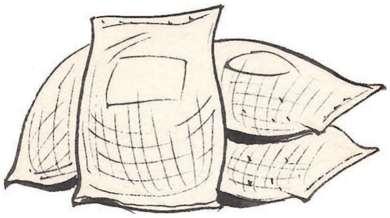
4. ఒక తరగతికి పరీక్షలో 10 ప్రశ్నలు ఇవ్వబడినవి. పరీక్షలో రాయబడిన సరైన జవాబుకు '3' మార్కులు, సరిగాని జవాబుకు (–1) మార్కు. జవాబు రాయనిచో '0' మార్కులు కేటాయించడం జరిగినది.

(i) గోపి రాసిన జవాబులలో 5 సరైనవి, 5 తప్పయిన, అతనికి వచ్చిన మొత్తం మార్కులెన్ని?

(ii) రేష్మ రాసిన 10 జవాబులలో 7 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులెన్ని?

(iii) రశ్మి రాసిన 7 జవాబులలో 4 తప్పు 3 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులెన్ని?

5. ఒక వర్తకుడు బియ్యం అమ్మడం ద్వారా ప్రతి బస్తా బాసుమతి బియ్యం పై ₹ 10 లాభం. బాసుమతి కాని బియ్యంపై ₹ 5 నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.



(i) ఒక నెలలో వర్తకుడు 3,000 బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం, 5,000 బస్తాలు బాసుమతి కాని బియ్యం అమ్మాడు. లాభమా? నష్టమా? ఎంతో తెలుపండి.

(ii) బాసుమతి కాని బియ్యం 6,400 బస్తాలు అమ్మినపుడు లాభంకానీ, నష్టం కానీ రాకుండా ఉండాలంటే ఎన్ని బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం అమ్మాలి?

6. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $(-3) \times$ ____________ $= 27$ (ii) $5 \times$ ____________ $= -35$

(iii) ____________ $\times (-8) = -56$ (iv) ____________ $\times (-12) = 132$

### 1.1.4 పూర్ణసంఖ్యల భాగాహారం

భాగాహారం, గుణకారంనకు విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు. సహజ సంఖ్యలలో భాగాహార ప్రక్రియకు చెందిన మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

© SCERT not to be republished

3 × 5 = 15 అని మనకు తెలుసు.

కావున 15 ÷ 5 = 3 లేక 15 ÷ 3 = 5

ఇదే విధంగా 4 × 3 = 12

కావున 12 ÷ 4 = 3, 12 ÷ 3 = 4 అవుతుంది.

అంటే సహజ సంఖ్యలలో ప్రతి గుణకారానికి రెండు భాగాహార వాక్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

పూర్ణసంఖ్యలలో కూడా ప్రతి గుణకార వాక్యానికి రెండు భాగాహార వాక్యాలు రాయవచ్చు.

కింది పట్టికలో ఉన్న గుణకార, భాగాహారాలను పరిశీలించి మిగిలిన ఖాళీలను పూరించండి.

| గుణకార వాక్యాలు | భాగాహార వాక్యాలు | | |
|---|---|---|---|
| 2 × (–6) = (–12) | (–12) ÷ (–6) = 2 | , | (–12) ÷ 2 = (–6) |
| (–4) × 5 = (–20) | (–20) ÷ (5) = (–4) | , | (–20) ÷ (–4) = 5 |
| (–8) × (–9) = 72 | 72 ÷ (–8) = (–9) | , | 72 ÷ (–9) = (–8) |
| (–3) × (–7) = ________ | ________ ÷ (–3) = ______ | , | ____________________ |
| (–8) × 4 = __________ | ____________________ | , | ____________________ |
| 5 × (–9) = __________ | ____________________ | , | ____________________ |
| (–10) × (–5) = | ____________________ | , | ____________________ |

పై పట్టిక నుండి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఒక ధనపూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణసంఖ్యచేగాని, ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణసంఖ్యచే గాని భాగించినపుడు భాగఫలం ఒక ఋణసంఖ్య పూర్ణాంకాలను భాగించునట్లే భాగించి, ఋణ గుర్తు నుంచుతాము అలా భాగఫలం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. ఇంకా ఏమి గమనించావు?

**ఇవి చేయండి**

1. కింది వాటిని చేయండి.

(i) (–100) ÷ 5 (ii) (–81) ÷ 9 (iii) (–75) ÷ 5 (iv) (–32) ÷ 2

(v) 125 ÷ (–25) (vi) 80 ÷ (–5) (vii) 64 ÷ (–16)

**ప్రయత్నించండి.**

(–48) ÷ 8 = 48 ÷ (–8) అవుతుందా?

ఈ కింద నీయబడినవి సత్యమేనా? తెలుపండి.

(i) 90 ÷ (–45) = (–90) ÷ 45 (ii) (–136) ÷ 4 = 136 ÷ (–4)

కింది భాగాహారాలను కూడా గమనించండి

(–12) ÷ (–6) = 2; (–20) ÷ (–4) = 5; (–32) ÷ (–8) = 4; (–45) ÷ (–9) = 5

**కావున ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను మరొక ఋణపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ఒక ధన సంఖ్య వస్తుందని చెప్పవచ్చు.**

© SCERT not to be republished

**ఇవి చేయండి.**

1. కింది భాగాహారాలను చేయండి.

(i) $-36 \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-325) \div (-13)$

## 1.2 పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు

6వ తరగతిలో పూర్ణాంకాల $\{0, 1, 2, 3 ......\}$ ధర్మాలు గురించి నేర్చుకొన్నాం. ఈ తరగతిలో $\{0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ పూర్ణసంఖ్యల యొక్క ధర్మాల గురించి చర్చిద్దాం.

### 1.2.1 పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ధర్మాలు

(i) **సంవృత ధర్మం**

కింది పట్టికలో సంకలనాలను పరిశీలించి పూరించండి.

| ప్రవచనం | సారాంశం |
|---|---|
| $5 + 8 = 13$ | మొత్తం ఒక పూర్ణాంకం |
| $6 + 3 =$ | |
| $13 + 0 =$ | |
| $10 + 2 =$ | |
| $0 + 6 = 6$ | మొత్తం ఒక పూర్ణాంకము |

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం ఎల్లపుడు పూర్ణాంకమే అవుతుందా? ఇది సత్యమని మీరు గ్రహించగలరు. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనంకు సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

అయితే పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంనకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుందా లేదా? కింది పట్టికలో సంకలనాలు పరిశీలించి పూరించండి.

| ప్రవచనం | సారాంశం |
|---|---|
| $6 + 3 = 9$ | మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య |
| $-10 + 2 =$ | |
| $-3 + 0 =$ | |
| $-6 + 6 = 0$ | |
| $(-2) + (-3) = -5$ | |
| $7 + (-6) =$ | మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య |

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణ సంఖ్యే అవుతుందా?

రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం పూర్ణసంఖ్య కాని ఉదాహరణ చెప్పగలవా? ఇది అసాధ్యం. కావున పూర్ణసంఖ్య సంకలనాలకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

**a మరియు b, లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన a + b కూడా పూర్ణసంఖ్య.**

©SCERT not to be republished

**(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం (వినిమయన్యాయం)**

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

| ప్రవచనం 1 | ప్రవచనం 2 | సారాంశం |
|---|---|---|
| 4 + 3 = 7 | 3 + 4 = 7 | 4 + 3 = 3 + 4 = 7 |
| 3 + 5 = | 5 + 3 = | |
| 3 + 0 = | 0 + 3 = | |

రెండు పూర్ణాంకాలను కూడే క్రమంలో సంఖ్యలను పరస్పరం మార్చినపుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణాంకాల కూడిక జతలను రాయలేము. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

| ప్రవచనం 1 | ప్రవచనం 2 | సారాంశం |
|---|---|---|
| 5 + (–6) = –1 | (–6) + 5 = –1 | 5 + (–6) = (–6) + 5 = –1 |
| –9 + 2 = | 2 + (–9) = | |
| –4 + (–5) = | (–5) + (–4) = | |

రెండు పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో వాటి క్రమంను పరస్పరం మార్చినప్పుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయలేము. **కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

**a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన a + b = b + a**

**(iii) సహచర ధర్మం**

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)
5 + 4 = 2 + 7
9 = 9

(ii) (–2 + 3) + 5 = –2 + (3 + 5)
1 + 5 = –2 + 8
6 = 6

(iii) (–2 + 3) + (–5) = (–2) + [3 + (–5)]
1 + (–5) = (–2) + (-2)
–4 = –4

(iv) [(–2) + (–3)] + (-5) = –2 + [(–3) + (–5)]
–5 + (–5) = –2 + (–8)
–10 = –10

© SCERT not to be republished

ప్రతి సందర్భంలో సంకలనాల మొత్తాలు సమానమేనా? ఇది సత్యమని గ్రహిస్తాం. **కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనాలకు సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

**a, b మరియు c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలైన (a + b) + c = a + (b + c)**

**ప్రయత్నించండి.**

1. కింది వాటిని సత్యాలో, కాదో పరీక్షించండి.

   (i) (2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)

   (ii) (2 + 0) + 4 = 2 + (0 + 4)

2. పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరో రెండు ఉదాహరణలతో వివరించండి.

### (iv) సంకలన తత్సమాంశం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

–2 + 0 = –2

5 + 0 = 5

8 + 0 =

–10 + 0 =

పూర్ణసంఖ్యకు **'0'** ను కూడితే అదే పూర్ణ సంఖ్య వస్తుందా? ఫలితం అదే పూర్ణ సంఖ్య.

**కావున '0' ను పూర్ణసంఖ్యలకు సంకలన తత్సమాంశం అంటారు.**

**a ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య ఐన a+0 = 0 + a= a**

**ప్రయత్నించండి.**

1. కింది గణనలను చేయండి.

   (i) 2 + 0 =

   (ii) 0 + 3 =

   (iii) 5 + 0 =

2. పై ఉదాహరణలలో మాదిరి మరిన్ని పూర్ణాంకాలకు '0' ను కూడండి.

   పూర్ణాంకాలకు కూడా '0' సంకలన తత్సమాంశమేనా?

©SCERT not to be republished

**(v) సంకలన విలోమం**

3 నకు ఏ పూర్ణసంఖ్యను కూడగా ఫలితం సంకలన తత్సమాంశం '0' అవుతుంది?

కింది వాటిని పరిశీలిద్దాం.

$3 + (-3) = 0$

$7 + (-7) = 0$

$(-10) + 10 = 0$

పై విధంగా అన్నిపూర్ణసంఖ్యలకు ఇలాంటి జతలను ఏర్పరచగలమా?

పై జతలలో ప్రతీ సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యకు సంకలన విలోమం అంటారు.

**'a' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన a + (–a) = 0. అగునట్లుగా (–a) అను పూర్ణసంఖ్య ఉంటుంది. 'a' మరియు (–a) లు ఒకదానికొకటి సంకలన విలోమాలు.**

## 1.2.2 పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారధర్మాలు

**(i) సంవృత ధర్మం**

కింది గుణకారాలను పరిశీలించి పూరించండి.

| ప్రవచనం | సారాంశం |
|---|---|
| $9 \times 8 = 72$ | లబ్ధం ఒక పూర్ణసంఖ్యయే |
| $10 \times 0 =$ | |
| $-15 \times 2 =$ | |
| $-15 \times 3 = -45$ | |
| $-11 \times (-8) =$ | |
| $10 \times 10 =$ | |
| $5 \times (-3) =$ | |

రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం పూర్ణసంఖ్య కానటువంటి పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయగలవా? వీటిని రాయడం సాధ్యం కాదు. **కావున పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారాలకు సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.**

**a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన a × b కూడా పూర్ణసంఖ్యయే.**

© SCERT not to be republished

ప్రయత్నించండి.

1. (i) $2 \times 3$ = ________

(ii) $5 \times 4$ = ________

(iii) $3 \times 6$ = ________

(iv) అదే విధంగా ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణాంకమేనా?

### (ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుందని తెలుసుకదా. పూర్ణసంఖ్యలకు కూడా ఈ ధర్మం ఉందా?

| ప్రవచనం 1 | ప్రవచనం 2 | సారాంశం |
|---|---|---|
| $5 \times (-2) = -10$ | $(-2) \times 5 = -10$ | $5 \times (-2) = (-2) \times 5 = -10$ |
| $(-3) \times 6 =$ | $6 \times (-3) =$ | |
| $-20 \times 10 =$ | $10 \times (-20) =$ | |

పై సందర్భాలన్నింటిలో ఇది సత్యం. రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం పూర్ణ సంఖ్య కాకుండా ఉండే ఉదాహరణ చెప్పండి. సాధ్యం కాదు. కావున పూర్ణసంఖ్యల గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

**a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన $a \times b = b \times a$**

### (iii) సహచర ధర్మం

2, –3, –4 లతో గుణకారాలను చేద్దాం.

వీటిని కింది విధాలుగా గుణిద్దాం.

$[2 \times (-3)] \times (-4)$ లేక $2 \times [(-3) \times (-4)]$

$= (-6) \times (-4)$ $\quad$ $= 2 \times 12$

$= 24$ $\quad$ $= 24$

మొదటి సందర్భంలో మొదటి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధంను మూడవ సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది, రెండవ సందర్భంలో చివరి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధంను మొదటి సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో కూడా చివరగా లబ్ధం సమానమే.

అందుచేత $[2 \times (-3)] \times [(-4)] = 2 \times [(-3) \times (-4)]$

పై రెండు సందర్భాలలో పూర్ణ సంఖ్యలు గ్రూపుగా చేసి గుణించినపుడు లబ్ధపూర్ణ సంఖ్యలపై ఏలాంటి ప్రభావం చూపదు. కావున పూర్ణసంఖ్యలలో సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది. మూడు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం అనునది పూర్ణ సంఖ్యలు గ్రూపుగా చేసి గుణించడంపై ఆధారపడదు.

**a, b, c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$**

© SCERT not to be republished

## ఇవి చేయండి.

1. $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [2 \times 3]$ అవుతుందా?

2. $[(-2) \times 6] \times (-4) = (-2 \times [6 \times 4]$ అవుతుందా?

**ప్రయత్నించండి.**

1. $(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$

2. పూర్ణాంకాలలో గుణకారానికి సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

**(iv) విభాగ న్యాయం**

$9 \times (10 + 2) = (9 \times 10) + (9 \times 2)$ అని మనకు తెలుసు.

అందుచే, పూర్ణాంకాలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుందనడం సత్యం.

కావున పూర్ణసంఖ్యలకు కూడ ఈ ధర్మం ఉందా పరిశీలిద్దాం.

(i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \text{ x } 1] + [(-2) \times 3]$

$-2 \times 4 = -2 + (-6)$

$-8 = -8$

(ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$

$2 = 2$

$-3 \times (-4+2) = [(-3) \times (-4)] + [-3 \times (2)]$ ను సరిచూడండి.

పై రెండు సందర్భాలలో ఎడమవైపు ఉన్న విలువ. కుడివైపు ఉన్న విలువకు సమానం.

కావున పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుంది.

**a, b మరియు c, లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు ఐన $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$**

**(v) గుణకార తత్సమాంశం**

కింది గుణకారంలను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$2 \times 1 = 2$

$-5 \times 1 = -5$

$-3 \times 1 =$ ______

$-8 \times 1 =$ ______

$1 \times -5 =$ ______

పూర్ణ సంఖ్యలలో సంకలన తత్సమాంశము ‘0’

పై ఉదాహరణలను బట్టి పూర్ణసంఖ్యను 1తో గుణించినపుడు పూర్ణసంఖ్యలో ఎటువంటి మార్పులేదు. కావున 1 ని పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకార తత్సమాంశం అంటారు.

**‘a’ ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \times 1 = 1 \times a = a$**

© SCERT not to be republished

**(vi) 0 (సున్న) తో గుణకారం**

ఏ పూర్ణాంకాన్నైనా '0' తో గుణించినపుడు, వాని లబ్ధం కూడా సున్న అవుతుంది.

అయితే పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో ఇది సత్యమా? పరిశీలించండి.

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-8) =$ ____

$9 \times 0 =$ ____

**పై వాటిని పరిశీలించినపుడు పూర్ణసంఖ్య, సున్నాల లబ్ధం సున్నాయే.**

**a, ఏదయిన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \times 0 = 0 \times a = 0$**

## అభ్యాసం - 5

1. కింది వానిని సరిచూడండి.

   (i) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

   (ii) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

2. (i) a, ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $(-1) \times a$ యొక్క విలువ ఎంతవుతుంది?

   (ii) $(-1)$ తో ఏ పూర్ణసంఖ్యయొక్క లబ్ధము 5 అగును.

3. సరైన ధర్మాలను ఉపయోగించి కింది వానిని గణన చేయండి.

   (i) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (ii) $8 \times 53 \times (-125)$

   (iii) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (iv) $(-41) \times 102$

   (v) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (vi) $7 \times (50 - 2)$

   (vii) $(-17) \times (-29)$ (viii) $(-57) \times (-19) + 57$

### 1.2.3 పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలన ధర్మాలు

**(i) సంవృత ధర్మం**

కింది ఒక పూర్ణ సంఖ్య నుండి మరొక పూర్ణ సంఖ్యను తీసివేసిన ఎల్లపుడు పూర్ణసంఖ్యనే వస్తుందా? వీటిని చేయండి.

$9 - 7 =$ ____

$7 - 10 =$ ____

$2 - 3 =$ ____

$-2 - 3 =$ ____

$-2 - (-5) =$ ____

$0 - 4 =$ ____

ఏమి గమనించారు? పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి సంవృతధర్మం వర్తిస్తుందని చెప్పవచ్చు?

**a మరియు b, లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలైన a – b కూడా పూర్ణసంఖ్యయే.**

© SCERT not to be republished

### (ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం!

6, –4 పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకుందాం.

$6 -(-4) = 6 + 4 = 10$ మరియు

$-4 -(6) = -4 - 6 = -10$

అనగా $6 - (-4) \neq -4 - (6)$

**పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.**

**ప్రయత్నించండి.**

ఏవైనా ఐదు జతల పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొని స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

## 1.2.4 పూర్ణసంఖ్యల భాగాహార ధర్మాలు

### (i) సంవృత ధర్మం

కింది పట్టికను పరిశీలించి, పూరించండి.

| ప్రవచనం | సారాంశం | ప్రవచనం | సారాంశం |
|---|---|---|---|
| $(-8) \div (-4) = 2$ | ఫలితం పూర్ణసంఖ్య | $(-8) \div 4 = \frac{-8}{4} = -2$ | |
| $(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$ | ఫలితం పూర్ణసంఖ్య కాదు | $4 \div (-8) = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$ | |

పట్టిక నుంచి ఏమి గమనించారు? పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహారానికి సంవృత ధర్మం వర్తించదు.

**ప్రయత్నించండి.**

ఏవైనా ఐదు పూర్ణసంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగాహారాలలో సంవృత ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

### (ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో భాగహారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం లేదు. పూర్ణసంఖ్యలలో ఈ ధర్మాన్ని పరిశీలిద్దాం. పట్టికలోని ఉదాహరణ ఆధారంగా $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ అని తెలియుచున్నది.

ఇంకనూ $(-9) \div 3$, $3 \div (-9)$ లు సమానమేనా?

$(-30) \div (-6)$, $(-6) \div (-30)$ లు సమానమేనా?

అందుచే, పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహారంనకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.

**ప్రయత్నించండి.**

ఏవైనా ఐదు పూర్ణ సంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగాహారంలో స్థిత్యంతర ధర్మంను సరిచూడండి.

© SCERT not to be republished

### (iii) సున్నతో భాగాహారం

ఒక దానిని రెండు భాగములు, మూడు భాగములు... చేయవచ్చును. కానీ సున్న భాగములుగా విభజించడం అనేది అర్థం లేనిది. సున్నను శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం '0' అవుతుంది.

**a, ఒక పూర్ణసంఖ్య ఐన $a \div 0$ నిర్వచింపబడదు. a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య ఐన $0 \div a = 0$**

### (iv) –1 తో భాగాహారం

క్రింది భాగాహారాలను పరిశీలించి, పూరించండి.

$(-8) \div 1 = -8$ $(-11) \div 1 = -11$ $(-13) \div 1 =$ _____ $(-25) \div 1 =$ _______

పై ఉదాహరణలనుండి ఒక ధన లేద ఋణ పూర్ణసంఖ్యను 1 చే భాగించగా ఫలితం అదే పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది. కానీ -1 చే భాగించగా ధనపూర్ణసంఖ్య ఋణపూర్ణసంఖ్యగా, ఋణపూర్ణసంఖ్య ధనపూర్ణసంఖ్యగా మారుతుంది.

1 ని పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహారానికి తత్సమాంశం అంటాం.

**a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \div 1 = a$.**

ఏవైన ఒకపూర్ణసంఖ్యను (–1) చే భాగిస్తే ఏమొస్తుంది. క్రింది వాటిని చేసి తెల్పండి.

$(-8) \div (-1) = 8$ $11 \div (-1) = -11$ $13 \div (-1) =$ _____ $(-25) \div (-1) =$ _____

ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్యను (–1) చే భాగించునపుడు ఫలితం అదే పూర్ణసంఖ్య కాదు. అని తెలుస్తుంది.

**ప్రయత్నించండి**

1. a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన

 (i) $a \div 1 = 1$?

 (ii) $a \div (-1) = -a$?

 'a'కు వేరువేరు విలువలు చేసుకొని సరిచూడండి.

### (v) సహచర ధర్మం

–16, 4, –2 పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొంటే

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-16) \div [4 \div (-2)]$ అగునా?

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

$(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

అందుకే $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

కనుక పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహారానికి సహచర ధర్మం వర్తించదు.

**ప్రయత్నించండి.**

ఏవైనా ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకొని పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహారానికి సహచర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

© SCERT not to be republished

## అభ్యాసం - 6

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) $-25 \div$ ........ $= 25$

   (ii) ........ $\div 1 = -49$

   (iii) $50 \div 0 =$ .....................

   (iv) $0 \div 1 =$ .....................

## 1.3 ఋణ పూర్ణసంఖ్యలపై కొన్ని సమస్యలు

**ఉదాహరణ 1 :** ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+5) మార్కులు. తప్పు జవాబుకు (–2) ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) రాధిక అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా 10 సరైనవి. 30 మార్కులు పొందింది.

(ii) జయ కూడా అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా, 4 సరైనవి కానీ, (–12) మార్కులు పొందినది. ఐన పరీక్షలలో రాధిక, జయలు ఎన్ని ప్రశ్నలకు తప్పు జవాబులు రాసారు?

**సాధన :** (i) ఒక్కొక్క సరైన జవాబుకు మార్కులు $= 5$

10 సరైన జవాబులకు మొత్తం మార్కులు $= 5 \times 10 = 50$

రాధికకు వచ్చిన మార్కులు $= 30$

తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు $= 30 - 50 = -20$

ఒక్కొక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు $= (-2)$

కాబట్టి రాధిక తప్పు జవాబుల సంఖ్య $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) 4 సరైన జవాబులకు మార్కులు $= 5 \times 4 = 20$

జయకు వచ్చిన మార్కులు $= -12$

తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు $= -12 - 20 = -32$

ఒక్కొక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు $= (-2)$

కాబట్టి జయ తప్పు జవాబుల సంఖ్య $= (-32) \div (-2) = 16$

**ఉదాహరణ 2 :** ఒక దుకాణాదారుడు ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మడం వలన ₹ 1 లాభాన్ని ఒక్కొక్క పాత పెన్సిలు అమ్మడం వలన 40 పైసల నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.

(i) ₹ 5. నష్టం పొందిన నెలలో అమ్మిన పెన్నుల సంఖ్య 45 ఐన ఎన్ని పెన్సిళ్లు అమ్మినాడు?

(ii) తరువాత నెలలో ఎటువంటి లాభం గాని నష్టం గాని లేదు. 70 పెన్నులను అమ్మిఉంటే, ఎన్ని పెన్సిళ్లు అమ్మినాడు?

**సాధన :** (i) ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మకం వలన లాభం ₹ 1

45 పెన్నుల అమ్మకం వలన లాభం = $1 \times 45$, అనగా ₹ 45

మొత్తం నష్టము = ₹ 5, అనగా –5.

© SCERT not to be republished

పెన్నులపై లాభం + పెన్సిళ్లపై నష్టం = మొత్తం నష్టం (ఈ సమస్యలో)

కాబట్టి పెన్సిళ్లపై నష్టం = మొత్తం నష్టం - పెన్నులపై లాభం

$= -5 - (45) = (-50) = -$ ₹ 50 $= -$ 5000 పైసలు

ఒక్కొక్క పెన్సిలుపై నష్టము $= 40$ పై. అనగా $-40$ పైసలు

కాబట్టి అమ్మిన పెన్సిళ్ల సంఖ్య $= (-5000) \div (-40) = 125$ పెన్సిళ్లు

(ii) తరువాత నెలలో 70 పెన్నులపై పొందిన లాభం = $1 \times 70$ = ₹ 70 అనగా +70

పొందిన మొత్తం లాభం $= 0$

పెన్నులపై లాభం + పెన్సిళ్లపై నష్టం $= 0$.

70 పెన్నుల అమ్మకం పై వచ్చిన లాభం = ₹ 70

పెన్సిళ్లపై నష్టం = $-$ 70 అనగా $-7000$ పైసలు

అమ్మిన పెన్సిళ్ల సంఖ్య $= (-7000) \div (-40)$

$= 175$ పెన్సిళ్లు.

## అభ్యాసం - 7

1. ఒక తరగతికి ఇవ్వబడ్డ ప్రశ్నాపత్రంలో 15 ప్రశ్నలున్నవి. ప్రతి సరైన జవాబుకు 4 మార్కులు, ప్రతి తప్పు జవాబుకు (–2) మార్కులు కేటాయిస్తారు. (i) భారతి అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాస్తే 9 మాత్రమే సరైనవి. (ii) ఆమె స్నేహితురాలు 5 ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా అన్ని సరైనవి. వారికి వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని?

2. ఒక సిమెంటు కంపెనీ ఒక్కొక్క బస్తా తెల్ల సిమెంటు పై ₹ 9 లాభం, బూడిదరంగు సిమెంటుపై ₹ 5 నష్టం చొప్పున అమ్మింది.

    (i) ఒక నెలలో 7000 బస్తాల తెల్ల సిమెంటు, 6000 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మినట్లయిన ఆ నెలలో పొందిన లాభమా లేదా నష్టమా ఎంత?

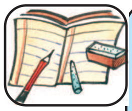
    (ii) 5400 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మిన నెలలో ఎటువంటి లాభం కానీ నష్టం కానీ రాని పక్షంలో ఎన్ని బస్తాల తెల్ల సిమెంటు అమ్మి ఉండాలి.

3. శ్రీనగర్ నందు మధ్యాహ్నం 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత $10^{\circ}$ C అని గుర్తించబడినది. ప్రతి గంటకు $2^{\circ}$C చొప్పున ఉష్ణోగ్రత తగ్గుతూ ఉంటే (i) ఎన్ని గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత $0^{\circ}$ C కన్నా $8^{\circ}$C తక్కువగా ఉంటుంది? (ii) అర్ధరాత్రి 12 గంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

4. ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+3) మార్కులు, తప్పు జవాబుకు (–2) మార్కులు, జవాబు రాయకపోతే 0 మార్కులు కేటాయించబడ్డాయి. (i) రాధిక రాసిన జవాబులలో 12 సరైనవి అప్పుడు ఆమె మార్కులు 20 ఐన ఆమె రాసిన తప్పు జవాబులెన్ని? (ii) మోహినికి (–5) మార్కులు వచ్చినవి. ఆమె రాసిన జవాబులలో 7 ఒప్పు జవాబులు ఐన సరికాని జవాబులెన్ని?

5. ఒక గనిలో ఏర్పాటు చేయబడిన ఎలివేటరు నిమిషానికి 6 మీ. వేగంతో కిందికి దిగుతుంది. భూమట్టం కన్నా 10 మీ. ఎత్తునుండి బయలు దేరిన ఎలివేటరు –350 మీ. వరకు ప్రయాణించుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది.

© SCERT not to be republished



**మనం నేర్చుకున్నవి**

1. సహజ సంఖ్యలు N = {1, 2, 3, 4, 5 ...}

పూర్ణాంకములు W = {0, 1, 2, 3, 4, 5 ...}

పూర్ణసంఖ్యలు Z = {...... –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 ....}

Z = {0, ±1, ±2, ±3 .....} అని కూడా రాస్తారు.

2 (i) సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యకు ధనపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు కుడివైపుకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు ఎడమ వైపుకు జరుగుతారు.

3 సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే ఎడమ వైపుకు, ఋణపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే కుడివైపునకు జరుగుతారు.

4 (i) ధనపూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణసంఖ్యచే లేక ఋణపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గుణించగా లబ్ధం ఋణపూర్ణసంఖ్య.

(ii) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధము ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య.

(iii) ఒక గుణకారం నందలి ఋణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయిన లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే ఋణపూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసిసంఖ్య అయిన లబ్ధం ఋణపూర్ణ సంఖ్య అగును.

5 (i) ధనపూర్ణసంఖ్య ఋణపూర్ణసంఖ్యచే గానీ లేక ఋణపూర్ణ సంఖ్య ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గాని భాగింపబడినపుడు భాగఫలం ఋణసంఖ్య.

(ii) ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్యను మరొక ఋణపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ధనసంఖ్య.

(iii) ఒకే గుర్తు గల రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను గుణించినా లేదా భాగించినా ఫలితం ధన సంఖ్య. వేర్వేరు గుర్తులైతే ఋణ సంఖ్య.

6. పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు

| ధర్మం | సంకలనం(+) | వ్యవకలనం(–) | గుణకారం(×) | భాగహారం (÷) |
|---|---|---|---|---|
| సంవృతధర్మం | ✓ | ✓ | ✓ | × |
| స్థిత్యంతర ధర్మం | ✓ | × | ✓ | × |
| సహచరధర్మం | ✓ | × | ✓ | × |
| తత్సమాంశం | ✓ | – | ✓ | – |
| విలోమం | ✓ | – | × | – |

7. పూర్ణసంఖ్యలందు గుణకారం సంకలనం పై విభాగిస్తుంది. a, b, పూర్ణ సంఖ్యలు ఐన

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

8. (i) a ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \div 0$ నిర్వచింపబడదు.

(ii) a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయిన $0 \div a = 0$

(iii) $a \div 1 = a$

©SCERT not to be republished