कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15
[Total No. of Printed Pages : 15

C-232204/804-A

विषय : गणित
Subject : Mathematics

समय : 3 घंटे]
Time : 3 Hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश :

(1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(2) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं।

(3) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions :

(i) All questions are compulsory.

(ii) Total number of questions in this question paper is 29.

(iii) Use of calculator is not permitted.

निर्देश :

(अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अति लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction :

(A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carry 1 mark.

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Very Short Answer Type Questions)

प्रश्न–1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

है तो A + B का मान ज्ञात कीजिए। 1

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

then find A + B.

प्रश्न–2. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$

परस्पर लम्ब हैं तो λ का मान ज्ञात कीजिए। 1

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$

are mutually perpendicular, then find the value of λ.

प्रश्न–3. अवकल समीकरण : 1

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए।

Find order and degree of differential equation :

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

प्रश्न–4. मान ज्ञात कीजिए : 1

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$$

निर्देश :

(ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction :

(B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions)

प्रश्न–5.

$$\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए। 2

Find the value of :

$$\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$$

प्रश्न–6. $\cos\left(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x\right)$

का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of :

$\cos\left(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x\right)$

प्रश्न–7. दर्शाइए कि फलन :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3 & \text{यदि } x\neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x=0 \end{cases}$$

x = 0 पर संतत नहीं है।

Show that the function :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3 & \text{if } x\neq 0 \\ 1 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

is not continuous at x = 0.

प्रश्न–8. यदि $P(A)=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{1}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएं हैं,

तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If A and B are independent event and $P(A)=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{1}{5}$,

then find $P(A \cap B)$.

प्रश्न–9. अवकल समीकरण :

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find general solution of the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

प्रश्न–10. $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। **2**

Find the derivative of the function $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

प्रश्न–11. एक रेखा की दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है। **2**

Find the direction cosine of a line which makes equal angles with the co-ordinate axis.

प्रश्न–12. मान ज्ञात कीजिए : **2**

$$\int \frac{dx}{1-\tan x}$$

Evaluate :

$$\int \frac{dx}{1-\tan x}$$

निर्देश :

(स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 14, 15 एवं 21 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित है।

Instruction :

(C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 14, 15 and 21 have internal choice. Each question carries 4 marks.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न–13. यदि $y = e^{m\cos^{-1}x}$ तो सिद्ध कीजिये : **4**

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$$

If $y = e^{m\cos^{-1}x}$ prove that :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$$

प्रश्न–14. वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f **4**

(अ) निरंतर वर्द्धमान है

(ब) निरंतर ह्रासमान है

Find the intervals in which the function f given by $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is :

(a) Strictly increasing

(b) Strictly decreasing

अथवा OR

एक घन का आयतन 9 सेमी^{3}/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबाई 10 सेमी. है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ?

The volume of a cube is increasing at the rate of 9 cm^3/sec. If its core is 10 cm at what rate the surface area is increasing ?

प्रश्न–15. यदि $f(x)=\frac{4x+3}{6x-4}, x\neq\frac{2}{3}$,

तो सिद्ध कीजिये कि सभी $x\neq\frac{2}{3}$ के लिये fof(x) = x है। f का प्रतिलोम फलन क्या है ? **4**

If $f(x)=\frac{4x+3}{6x-4}, x\neq\frac{2}{3}$,

Prove that for every $x\neq\frac{2}{3}$, fof(x) = x. Find inverse function of f.

अथवा OR

तीन फलन $f : N \to N$, $g : N \to N$ तथा $h : N \to R$ पर विचार कीजिए जहाँ :

$f(x) = 2x,$

$g(y) = 3y + 4,$

$h(z) = \sin z \quad \forall\, x, y, z \in N$

सिद्ध कीजिए कि

$ho(gof) = (hog)of$

Consider $f : N \to N$, $g : N \to N$ and $h : N \to R$ defined as :

$f(x) = 2x,$

$g(y) = 3y + 4,$

$h(z) = \sin z \quad \forall\, x, y \text{ and } z \in N$

Show that

$ho(gof) = (hog)of$

प्रश्न-16. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों (doublets) की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिये। **4**

A pair of dice is thrown three times. Find the probability distribution of getting doublets.

प्रश्न-17. सिद्ध कीजिए कि : **4**

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

Prove that :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

प्रश्न–18. अवकल समीकरण

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$$ को हल कीजिये

जहाँ y = 0 तब x = 1 **4**

Solve the differential equation

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$$

where y = 0 and x = 1.

प्रश्न–19. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बताता है कि इस पर आने वाली संख्या 6 है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या 6 है। **4**

A man is known to speak truth 3 out of 4 times. He throws a dice and reports that it is a six. Find the probability it is actually a six.

प्रश्न–20. मान लीजिए $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$ और $|\vec{c}|=5$ तथा इनमें से प्रत्येक अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं,

तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए। **4**

Let $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ be three vectors such that $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ and $|\vec{c}| = 5$ and each one of them being perpendicular to the sum of the other two.

Find $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$.

प्रश्न–21. सिद्ध कीजिये : **4**

$$\tan\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Prove that :

$$\tan\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिये :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Prove that :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न–22. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा दी गयी हैं। **4**

Find the area of parallelogram whose adjacent sides are

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ and

$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$.

प्रश्न-23. $$\int \frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)} dx$$

का मान ज्ञात कीजिये। 4

Evaluate :

$$\int \frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)} dx$$

निर्देश :

(द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 26 एवं 27 में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction :

(D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 26 and 27 have internal choice. Each question carries 6 marks.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

प्रश्न-24. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिये : 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}.$$

If $x^y = e^{x-y}$, prove that :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

प्रश्न–25. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

का मान ज्ञात कीजिये। 6

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

प्रश्न–26. यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिये। 6

If the area bounded by the curve $x = y^2$ and line $x = 4$ is equally divided into two parts by $x = a$. Find the value of a.

अथवा OR

x अक्ष के ऊपर तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ एवं परवलय $y^2 = 4x$ में मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area lying above x axis and included between the circle $x^2 + y^2 = 8x$ and inside of the parabola $y^2 = 4x$.

प्रश्न–27. समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (1, 1, 1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 6

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the plane $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ and $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ and the point (1, 1, 1).

अथवा OR

रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$

और

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines :

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$$

and

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

प्रश्न–28. आलेखीय विधि से फलन $z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए : 6

$x + 3y \le 60$

$x + y \ge 10$

$x \le y$

$x \ge 0,\ y \ge 0$

Solve the following linear programming graphically :

Minimize

$z = 3x + 9y$

subject to the following constraints :

$x + 3y \le 60$

$x + y \ge 10$

$x \le y$

$x \ge 0,\ y \ge 0$

प्रश्न–29. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को सममित और विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिये। 6