अध्याय

3

बहुपदी
(Polynomials)

3.1 प्रस्तावना

बहुपदीयों के बारे में हमने नवी कक्षा में पढा था। अब हम उनके बारे में अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे। हम दो स्थितियों का निरीक्षण करते हैं।

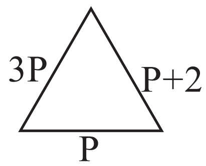
1. एक बगीचे में फूलों की क्यारी त्रिभुज के आकार में है। सबसे बड़ी भुजा, सबसे छोटी भुजा के तीन गुणा है और सबसे छोटी भुजा, तीसरी भुजा से दो इकाई कम है। माना कि सबसे छोटी भुजा की लम्बाई **P** से निरूपित होती है तो **P** के पदों में त्रिभुज का परिमाप क्या होगा?

ऊपर की स्थितियों में, प्रत्येक कथन में कुछ अज्ञात है। प्रथम स्थिति में, मध्य भुजा '**P**' इकाइयाँ दी गई है।

क्योंकि, त्रिभुज का परिमाप = सभी भुजाओं का योग

परिमाप = $P + 3P + P + 2$

$= 5P + 2$



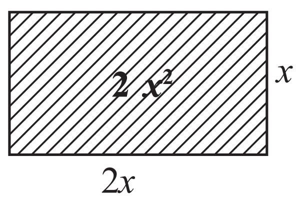
2. एक आयाताकार भोजन कक्ष की लम्बाई, उसकी चौड़ाई का दुगुना है। माना कि कक्ष की चौड़ाई x है। x के पदों में कक्ष के फर्श का क्षेत्रफल क्या होगा? इस स्थिति में लम्बाई उसके चौड़ाई की दुगुनी दी है।

अतः यदि चौड़ाई $= x$ हो तो लम्बाई $= 2x$ होगी

आयत का क्षेत्रफल $= lb$

$= (2x)\,(x)$

क्षेत्रफल $= 2\,x^2$



जैसे कि आप जानते हैं, त्रिभुज का परिमाप $5P + 2$ और आयत का क्षेत्रफल $2x^2$ यह भिन्न घातांक के बहुपदी के रूप में है।

3.2 बहुपदी क्या है?

बहुपदी एक बीजगणितीय व्यंजक है जो स्थिरांक और चर राशियों से बनता है। गुणांकों की संक्रिया चारों पर होती है जो अऋणात्मक पूर्णांकों के घातांक के विविध घातांकों में बढ़ा सकते है। उदाहरण के लिए, $2x + 5, 3x^2 + 5x + 6, - 5y, x^3$ ये कुछ बहुपदी हैं।

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{1}{y-1}, \sqrt{3x^3}$ आदि, ये बहुपदी नहीं हैं।

यह कीजिए।

निम्न में से कौनसी बहुपदी है और कौनसी नहीं है, निश्चित कीजिए। कारणों को बताइए।

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2 + \frac{1}{7}$ (iv) $m^2 - \sqrt{2}m + 2$ (v) $P^{-2} + 1$

3.2.1 बहुपदी का घातांक (Degree of a Polynomial)

स्मरण कीजिए, यदि p(x), x में बहुपदी है, तब x के उच्चतम घातांक को बहुपदी p(x) का घातांक कहते हैं। उदाहरण के लिए, चर x में बहुपदी $3x + 5$ है। इसका घातांक 1 है और इसे रैखिक बहुपदी कहते हैं। $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ आदि, ये कुछ रैखिक बहुपदी द्विघातीय बहुपदी हैं।

घातांक 2 की बहुपदी द्विघातीय बहुपदी कहलाती है। जैसे $x^2 + 5x +4$ यह चर x में द्विघातीय बहुपदी है। $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}, p^2 -1, 3 - z - z^2, y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ ये कुछ द्विघातीय बहुपदी के उदाहरण हैं।

व्यंजक $5x^3 - 4x^2 + x - 1$ यह x चर में तृतीय घातांक की बहुपदी है। और इसे घनीय बहुपदी कहते हैं। घनीय बहुपदी के कुछ उदाहरण $2 - x^3, p^3, \ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ हैं।

प्रयत्न कीजिए।

पदों की विभिन्न संख्याओं के साथ 3 द्विघातीय, घनीय और 2 रैखिक बहुपदी लिखिए।

हम किसी भी घातांक की बहुपदी लिख सकते हैं। $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ यह 6 घातांक की और $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 - 1$ यह 10 घातांक की बहुपदी है।

हम x चर में n घातांक की बहुपदी लिख सकते है जहाँ n एक प्राकृतिक संख्या है।

सामान्यतः, हम कहते हैं

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ यह n^{th} घातांक की बहुपदी है जहाँ $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ वास्तविक गुणांक है और $a_0 \neq 0$

उदाहरण के लिए, प्रथम घातांक की एक चर x में बहुपदी का सामान्य रूप $ax+b$ रहता है जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

प्रयत्न कीजिए।

1. सामान्य रूप में x चर में घनीय और द्विघातीय बहुपदी लिखिये।
2. n घातांक की सामान्य बहुपदी $q(z)$ लिखिए जिसके गुणांक $b_0 \ldots b_n$ है। $b_0 \ldots b_n$ पर प्रतिबंध क्या है?

3.2.2 बहुपदी का मान (Value of a Polynomial)

अब मान लीजिये, बहुपदी $p(x) = x^2 - 2x - 3$; किसी भी बिन्दु (point) के लिए उसका मान क्या है? जैसे, $x = 1$ के लिए क्या मान है? बहुपदी में $x = 1$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है, $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. अतः, दिये गये बहुपदी x के स्थान पर 1 रखने पर मान -4 प्राप्त हुआ। यही मान, बहुपदी $x^2 - 2x - 3$ का $x = 1$ के लिए है।

इसी प्रकार $p(0) = 3$ यह $x = 0$ के लिए $p(x)$ का मान है।

तब $p(x)$ में x के स्थान पर k रखने पर प्राप्त हुआ मान, $x = k$ के लिए $p(x)$ का मान रहता है और इसे $p(k)$ द्वारा निर्देशित करते हैं।

यह कीजिए।

(i) यदि $p(x) = x^2 - 5x - 6$, $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ के मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $p(m) = m^2 - 3m + 1$, $p(1)$ और $p(-1)$ के मान ज्ञात कीजिए।

3.2.3 बहुपदी के शून्य (Zeroes of a Polynomial)

$x = 3, -1$ और 2 के लिए $p(x) = x^2 - 2x - 3$ के मान क्या है?

$$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

और $$p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

हम देखते हैं कि $p(3) = 0$ और $p(-1) = 0$. यह बिन्दु $x = 3$ और $x = -1$, यहाँ 3 तथा -1 बहुपदी $p(x) = x^2 - 2x - 3$ के शून्य कहलाते हैं।

$p(x)$ का शून्य, 2 नहीं है । क्योंकि $p(2) \neq 0$

प्रायः, वास्तविक संख्या k, बहुपदी $p(x)$ का शून्य कहलाती है यदि $p(k) = 0$.

यह कीजिए।

(i) माना कि $p(x) = x^2 - 4x + 3$, $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ के मान ज्ञात कीजिए और बहुपदी $p(x)$ के शून्यों को प्राप्त कीजिए।

(ii) बहुपदी $x^2 - 9$ के शून्य -3 और 3 है या नहीं की जाँच कीजिए।

अभ्यास - 3.1

1. यदि $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$, ज्ञात कीजिए

   (i) x^5 का गुणांक (ii) $p(x)$ का घातांक (iii) स्थिर पद

2. निम्न कथनों में से कौनसे सही है और कौनसे गलत है, स्पष्ट कीजिए। आपके चयन के लिए कारण बताइए।

   (i) बहुपदी $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ का घातांक $\sqrt{2}$ है।

   (ii) बहुपदी $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ में x^2 का गुणांक 2 है।

   (iii) स्थिर पद का घातांक बहुपदी है।

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ द्विघातीय बहुपदी है।

   (v) बहुपदी का घातांक, इसके पदों की संख्या से एक अधिक रहता है।

3. यदि $p(t) = t^3 - 1$, तो $p(1)$, $p(-1)$, $p(0)$, $p(2)$, $p(-2)$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. बहुपदी $x^4 - 16$ के शून्य -2 और 2 है या नहीं की जाँच कीजिए।

5. बहुपदी $p(x)$ के शून्य 3 और -2 है या नहीं की जाँच कीजिए। जब $p(x) = x^2 - x - 6$.

3.3 बहुपदों की उपयोगिता :

रैखिक बहुपदी के शून्य कैसे ज्ञात करते हैं, यह आपने पहले ही पढ़ा है।

जैसे - यदि $p(x) = 2x + 5$ का शून्य k हो तब $p(k) = 0$ अर्थात $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \frac{-5}{2}$

सामान्यतः, यदि $p(x) = ax+b, a \neq 0$ का शून्य k है

तब $p(k) = ak + b = 0,$

i.e., $k = \frac{-b}{a}$, अथवा रैखिक बहुपदी $ax + b$ का शून्य $\frac{-b}{a}$ है।

इसतरह, रैखिक बहुपदी के शून्यांकों का संबंध उसके गुणांकों के साथ है जिसमें स्थिर पद सम्मिलित है।

3.4 बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial):

हम जानते है कि वास्तविक संख्या k, बहुपदी $p(x)$ का शून्य रहती है, $p(k) = 0$ । अब हम रैखिक और द्विघातीय बहुपदियों का आलेखीय **(graphical)** चित्रण और उनके शून्यों का ज्यामितीय अर्थ देखते है।

3.4.1. रैखिक बहुपदी का आलेखीय चित्रण (Graphical Representation of a Linear Polynomial)

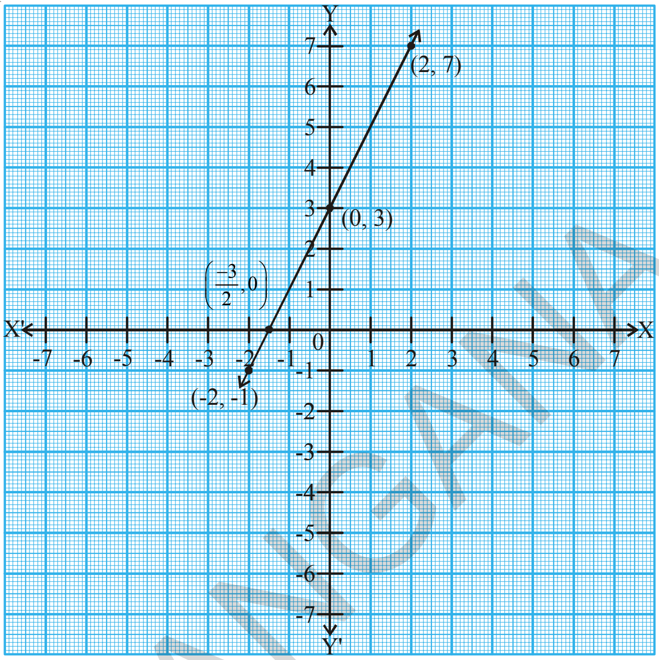
सर्वप्रथम रैखिक बहुपदी $ax + b, a \neq 0$ के बारे में सोचते हैं। आपने नौवीं कक्षा में पढ़ा है कि $y = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा रहती है। जैसे, $y = 2x + 3$ का आलेख एक सरल रेखा रहती है जो Y-अक्ष को $(0, 3)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। यह इन बिंदुओं $(-2, -1)$ और $(2, 7)$ से भी गुजरती हैं।

सारणी 3.1

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

आलेख में आप देख सकते हैं कि $y = 2x+3$ का आलेख X-अक्ष को $x = -1$ और $x = -2$, के बीच में प्रतिच्छेद करता है, अर्थात बिन्दु $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ पर।

परन्तु $x = \frac{-3}{2}$ यह बहुपदी $2x + 3$. का शून्य भी है । इस तरह, बहुपदी $2x + 3$ का शून्य, उस बिन्दु का x-निर्देशांक रहता है जहाँ $y = 2x + 3$ का आलेख X-अक्ष को काटता है।



यह कीजिए।

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ के आलेख बनाइए और x- अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। क्या इन बिन्दुओं के x- निर्देशांक, उस बहुपदी के शून्य भी है?

सामान्यतः, रैखिक बहुपदी $ax + b$, $a \neq 0$, के लिए, $y = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा रहता है जो X- अक्ष को केवल एक बिन्दु, $\left(\frac{-b}{a}, \right)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

इसलिए रैखिक बहुपदी $ax + b$, $a \neq 0$, को वास्तव में एक शून्य रहता है और वह, उस बिन्दु का x- निर्देशांक रहता है जहाँ $y = ax + b$ का आलेख X-अक्ष को काटता है। यह कटान बिन्दु जो सरल रेखा X - अक्ष का बिन्दु $\frac{-b}{a}$, होगा

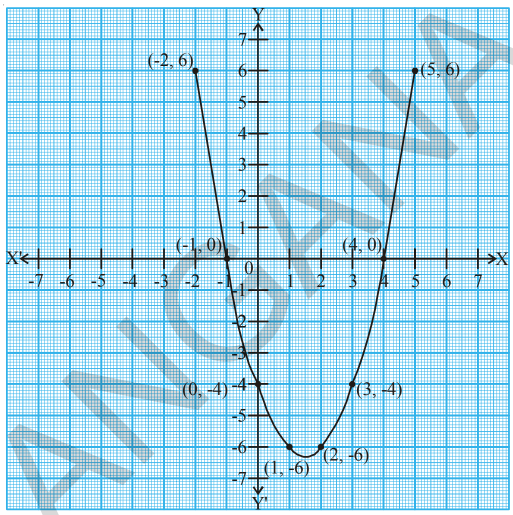
3.4.2. द्विघातीय बहुपदी का आलेखीय चित्रण (Graphical Representation of a Quadratic Polynomial):

अब, हम द्विघातीय बहुपदी के शून्य का ज्यामितीय अर्थ देखते है। माना कि द्विघातीय बहुपदी $x^2 - 3x - 4$ है। अब हम देखते हैं कि $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख कैसा रहता हैं। सारणी 3.2 मे दिये गये, कुछ x के मानों के अनुसार $y = x^2 - 3x - 4$ के लिए कुछ y के मानों की सूची लिखते है।

सारणी 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, -4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$

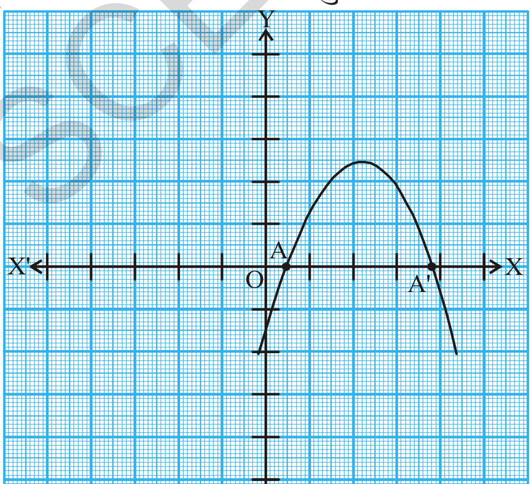
ऊपर की सूची के अनुसार हम आलेख पत्र पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारित करते हैं और आलेख बनाते है । क्या इस द्विघातीय बहुपदी $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख सरल रेखा है? अतः किसी भी द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ का आलेख । यह ∪ आकार का वक्र है। यह X- अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है अथवा नीचे की ओर ∩ जैसे खुलता है। यह, $a > 0$ अथवा $a < 0$ पर निर्भर रहता है। (ऐसे आकार के वक्रों को परवलय (parabola) कहते हैं।



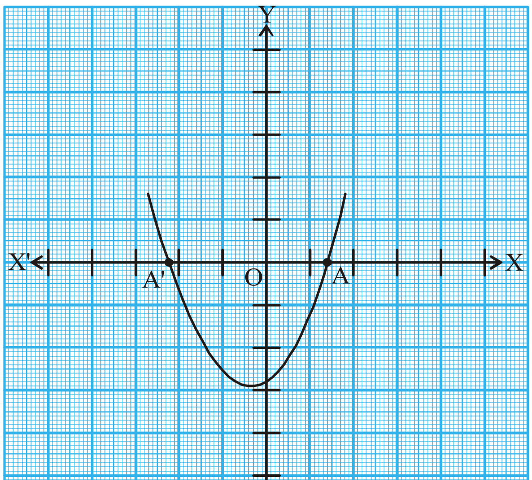
उपरोक्त तालिका से हम यह देखते है कि -1 और 4, द्विघातीय बहुपदी के शून्य है । आलेख से यह सिध्द होता है की, –1 और 4 X- अक्ष के प्रतिच्छेदक बिन्दु परवलय को X- अक्ष पर काटता है। द्विघातीय बहुपदी $x^2 - 3x - 4$ के शून्य, उस बिन्दुओं के x-निर्देशांक रहते है जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का आलेख X-अक्ष को काटता है। बहुपदी $P(x) = y = 3x^2 - 4$, $P(-1)= 0$ इसका आलेख X-अक्ष को बिन्दु को बिन्दु $(-1,0)$ पर काटता है चुंकी $P(4) = 0$ वक्र X- अक्ष को बिन्दु $(4,0)$ पर काटता है। सामान्यत: बहुपदी $P(x)$ यदी $P(a)= 0$ हो तो आलेख X- अक्ष को $(a\ ,0)$ बिन्दु पर काटता है।

यह किसी भी द्विघातीय बहुपदी के लिए सही है, अर्थात द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ के शून्य, यथार्थ रूप से उन बिन्दुओं के x-निर्देशांक रहते है जहाँ परवलय $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ X-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

स्थिति (i) : यहाँ, वक्र X- अक्ष को दो भिन्न बिंदु A और A′ पर काटता है। इस स्थिति में, A और A′ x-निर्देशांक, द्विघातीय बहुपदी ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ के दो शून्य रहते हैं। परवलय या तो ऊपर की ओर या नीचे की ओर खुलता है।

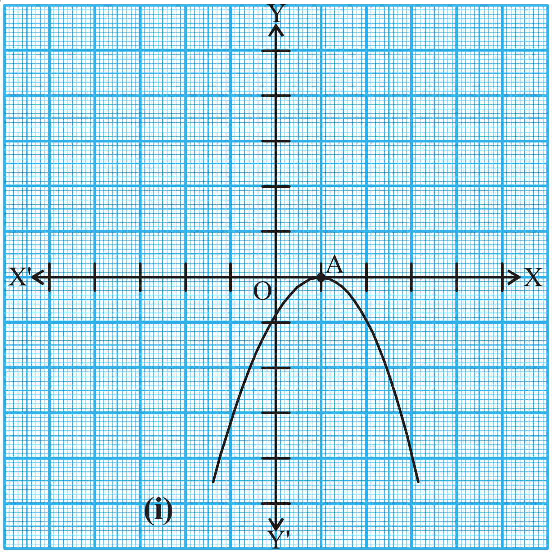


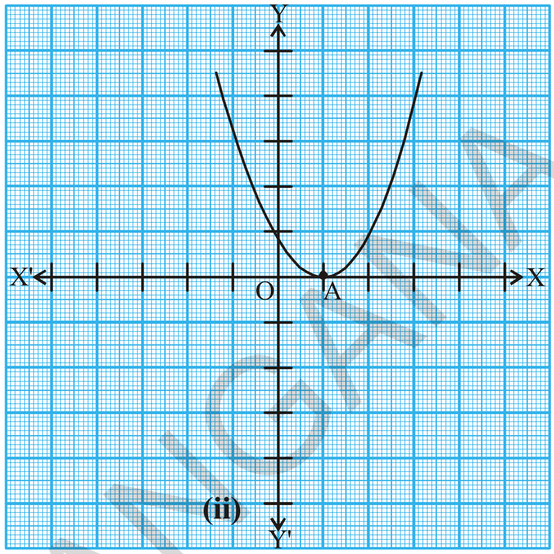
(i)



(ii)

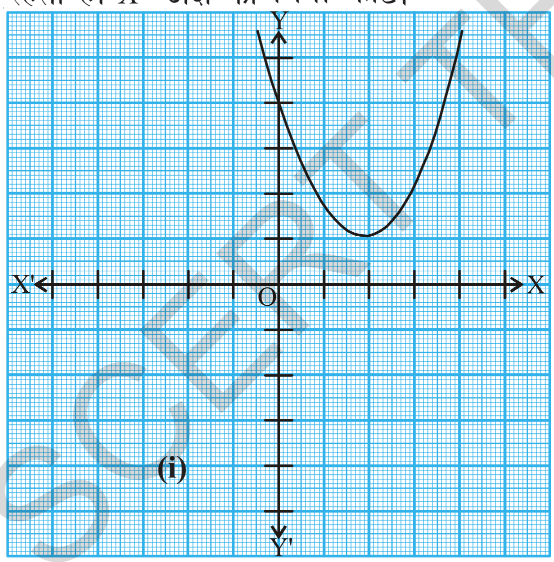
स्थिति (ii) : यहाँ आलेख x- अक्ष को केवल एक बिन्दु पर, अर्थात दो संपाती (coincident) बिंदुओं पर स्पर्श करता है। अतः स्थिति (i) के दो बिंदु A और A' यहाँ एक बिन्दु A होने के लिए संपाती होते है।

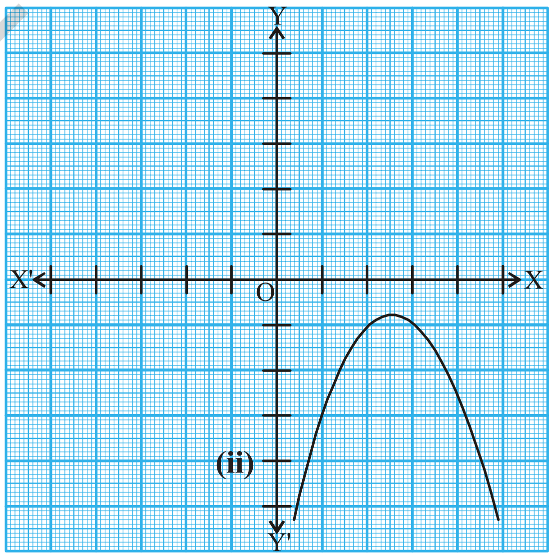




इस स्थिति में द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के लिए A का x - निर्देशांक ही केवल शून्य रहता है।

स्थिति (iii) : यहाँ, आलेख या तो पूर्णतः X- अक्ष से ऊपर रहता है। अथवा पूर्णतः X- अक्ष से नीचे रहता है। X- अक्ष को बिना काटे।





इसलिए, इस स्थिति में द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्य नहीं रहते है।

प्रयत्न कीजिए।

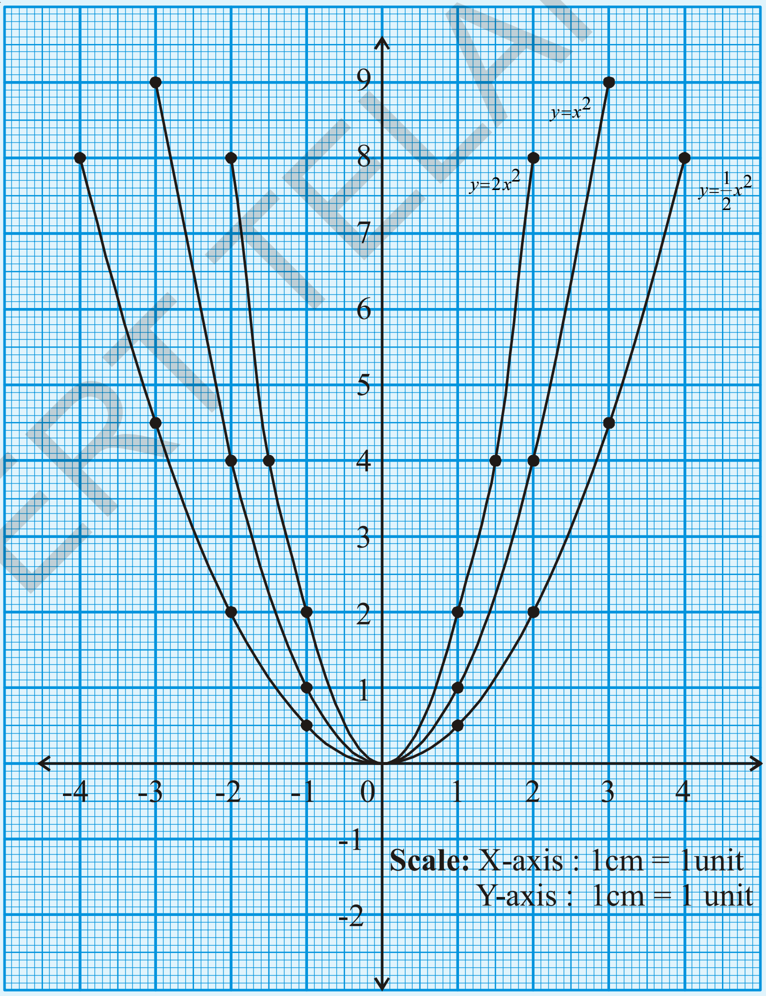
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ के आलेख बनाइए और प्रत्येक स्थिति में शून्यों को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

प्रयत्न कीजिए।

1. तीन बहुपदी लिखिए जिसमें प्रत्येक के 2 शून्य हो।
2. एक द्विघातीय बहुपदी लिखिए जिसका एक शून्य हो।
3. आप इसकी कैसे जाँच करेंगे यदि किसी द्विघातीय बहुपद में केवल एक शून्य हो।
4. तीन द्विघातीय बहुपदी लिखिए जिसमें x की वास्तविक संख्याओं के लिए शून्य न हो।

विचार - विमर्श किजिए:

m $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$ and $y=2x^2$. Try to plot some more graphs for $y=x^2+1$, $y=2x^2+1$. Comment on your observations.



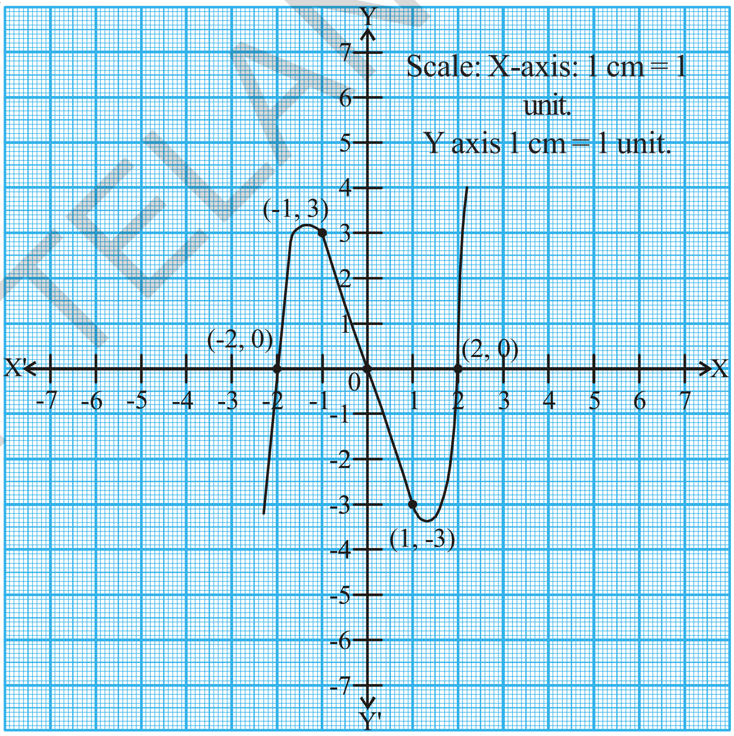
3.4.3 घनीय बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Zeroes of a Cubic Polynomial)

घनीय बहुपदी के शून्यों का ज्यामितीय अर्थ से आप क्या समझते हैं? इसे हम ज्ञात करेंगे। घनीय बहुपदी $x^3 - 4x$ लीजिए। $y = x^3 - 4x$ का आलेख कैसे दिखता है यह जानने के लिए, सारणी 3.3 में x के कुछ मानों के अनुसार y के कुछ मानों की सूची तैयार करते है।

सारणी 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$

आलेख खींचने पर, हम देखते हैं कि $y = x^3 - 4x$ का आलेख आकृति में दिये जैसा दिखता है।



ऊपर की सारणी द्वारा हम देखते है कि घनीय बहुपदी $x^3 - 4x$ के शून्य -2, 0 और 2 हैं। -2, 0, 2 x - के निर्देशांक हैं जहाँ $y = x^3 - 4x$ का आलेख x-अक्ष को काटता है। अतः इस बहुपदी के तीन शून्य हैं।

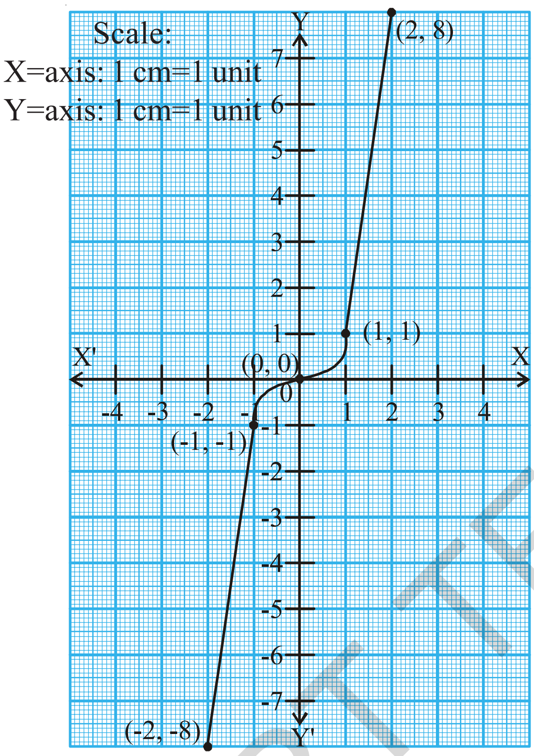
हम और कुछ उदाहरण लेंगे। घनीय बहुपदी x^3 और $x^3 - x^2$ क्रमशः लीजिए। सारणी 3.4 और 3.5 देखिए।

सारणी 3.4

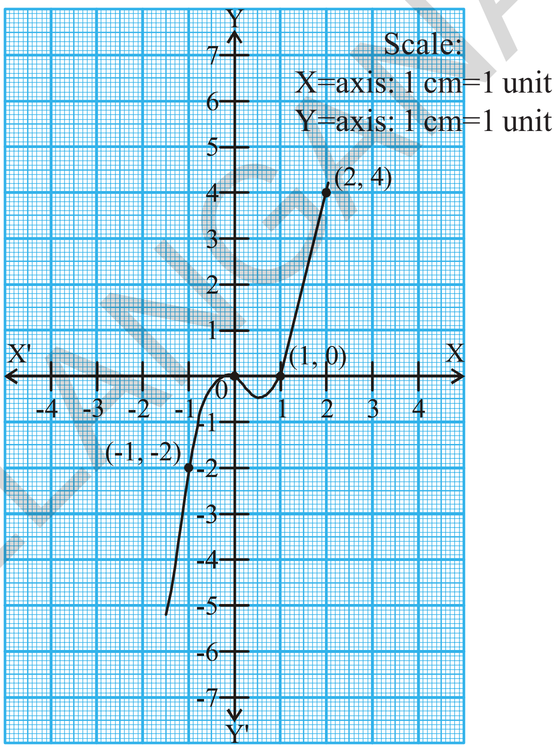
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$

सारणी 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ में, आप देख सकते है कि केवल एक बिन्दु का x-निर्देशांक 0 है जहाँ $y = x^3$ का आलेख X- अक्ष को काटता है। इसलिए बहुपदी केवल एक ही शून्य है। इसी प्रकार, $y = x^3 - x^2$ का आलेख X-अक्ष को काटने वाले बिन्दुओं के x - निर्देशांक केवल 0 और 1 है। इसलिए इस घनीय बहुपदी के दो भिन्न शून्य हैं।

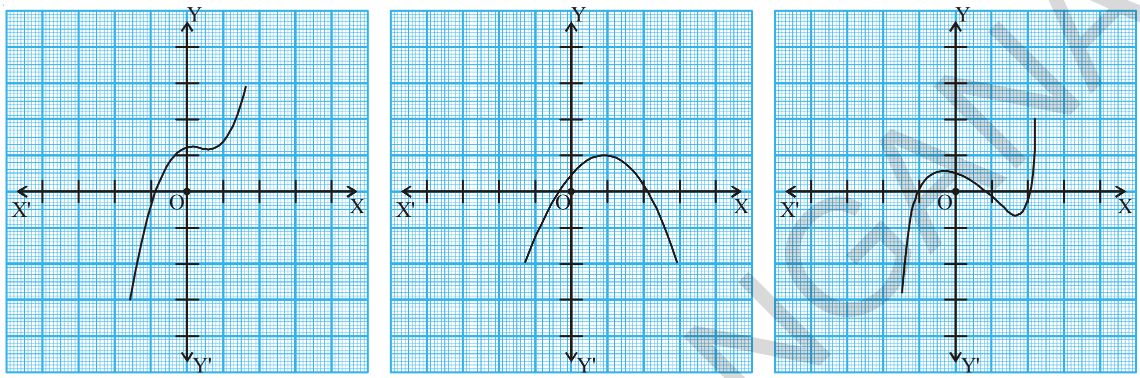
ऊपर दिये गये उदाहरण से हम देखते हैं कि किसी भी घनीय बहुपदी के लिए अधिकतम 3 शून्य रहते हैं। अन्य शब्दों में, 3 घातांकों की किसी भी बहुपदी के अधिकतम 3 शून्य हो सकते है।

प्रयत्न कीजिए।

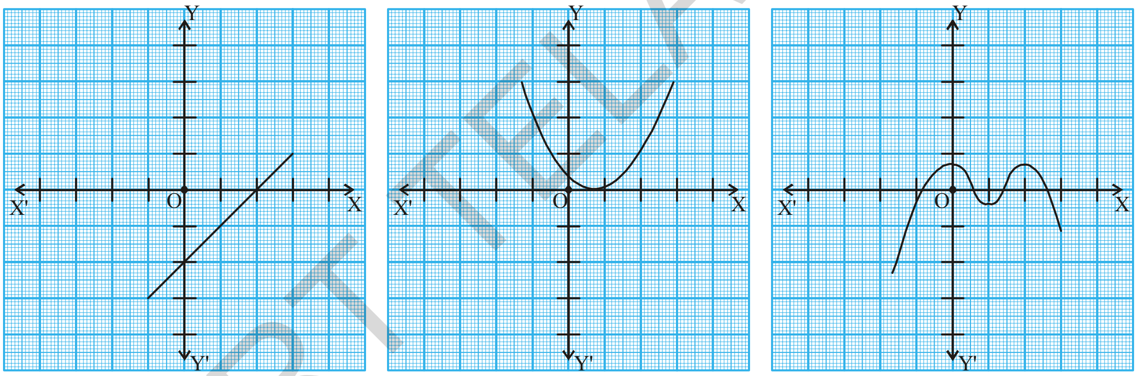
(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$ घनीय बहुपदियों के, आलेख न खींचते हुए, शून्य ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी : सामान्यतः, दिये गये n घातांक के बहुपदी $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का आलेख x- अक्ष को अधिकतम n बिन्दुओं पर काटता है। इसलिए n घातांक की बहुपदी $p(x)$ के अधिकतम n शून्य रहते हैं।

उदाहरण -1. नीचे दिये गये आलेखों को देखिए। हर आकृति $y = p(x)$ का आलेख है, जहाँ $p(x)$ बहुपदी है। प्रत्येक आलेख में x के दिये गये परिसर (range) में $p(x)$ के शून्यों की संख्या बताइए।



(i) (ii) (iii)



(iv) (v) (vi)

हल : दिये गये आलेख में x के परिसर में :

(i) क्योंकि आलेख X- अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटने के कारण शून्यों की संख्या 1 है।

(ii) क्योंकि आलेख X- अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटने के कारण शून्यों की संख्या 2 है।

(iii) शून्यों की संख्या 3 है। (क्यों?)

(iv) शून्यों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(v) शून्यों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(vi) शून्यों की संख्या 4 है। (क्यों?)

उदाहरण -2. दिये गये बहुपदियों के लिए शून्यों की संख्या बताइए और इनके मान भी बताइए।

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

हल : हम यह आलेख न बताते हुए करेंगे।

(i) $p(x) = 2x + 1$ रैखिक बहुपदी है। इसका केवल एक शून्य रहता है।

शून्य ज्ञात करने के लिए,

माना कि $p(x) = 0$

इसलिए, $2x+1=0$

$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$

दिये गए बहुपदी का शून्य $\frac{-1}{2}$ है।

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ द्विघातीय बहुपदी है।

इसके अधिकतम दो शून्य रहते हैं।

शून्य ज्ञात करने के लिए, माना कि $q(y) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ अथवा $y = 1$

इसलिए बहुपदी के शून्य -1 और 1 है।

(iii) $r(z) = z^3$ घनीय बहुपदी है। इसके अधिकतम तीन शून्य रहते हैं।

माना कि $r(z) = 0$

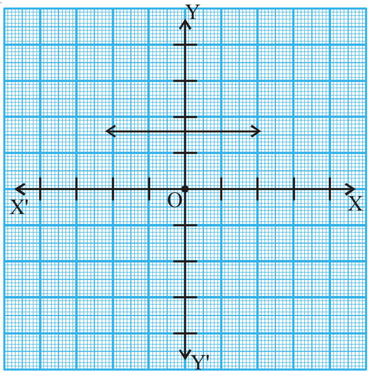
$\Rightarrow z^3 = 0$

$\Rightarrow z = 0$

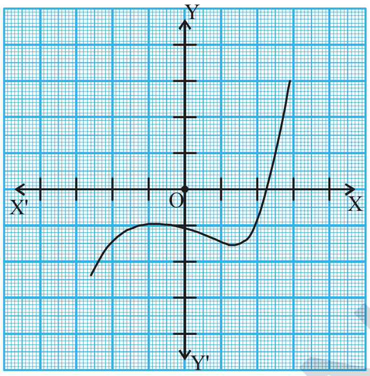
इसलिए बहुपदी शून्य है।

अभ्यास – 3.2

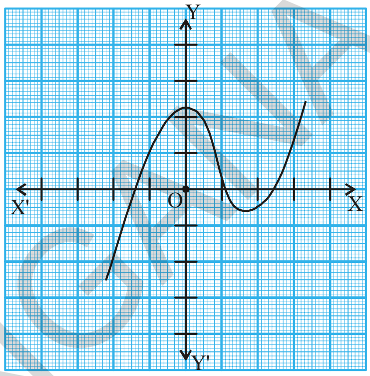
1. निम्न आकृति में, कोई बहुपदी $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ के आलेख दिए गये है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यों की संख्या बताइए।



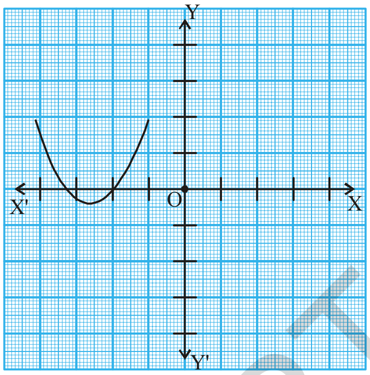
(i)



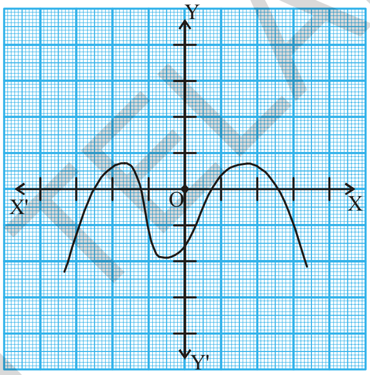
(ii)



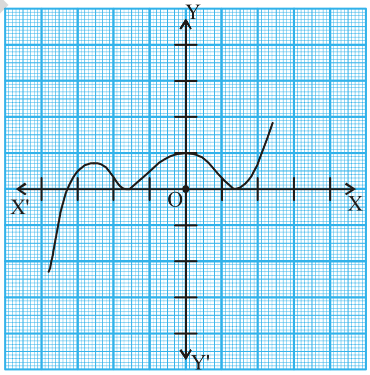
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

2. दिए गये बहुपदियों के शून्यों को ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

   (iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. दिये गये बहुपदियों के आलेख बनाइए और शून्यों को ज्ञात कीजिए। उत्तर की जाँच कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

   (iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

   (v) $p(x) = x^2 - 1$

4. बहुपदी $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ के शून्य $\frac{1}{4}$ और -1 क्यों है?

3.5 बहुपदी के गुणांक और शून्यों के बीच संबंध

आपने पहले देखा है कि रैखिक बहुपदी $ax + b$ का शून्य $-\frac{b}{a}$ रहता है। क्या उच्च घातांक वाले बहुपदीयों के शुन्य उनके गुणक से संबंधीत होते है। इसके बारे में विचार कर अपने मित्रों के साथ चर्चा किजिए। अब हम द्विघातीय बहुपदी के गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध का अन्वेषण करने का प्रयत्न करेंगे। इसलिए, हम द्विघातीय बहुपदी $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लेते हैं।

नौवीं कक्षा में, हमने द्विघातीय बहुपदी के मध्य-पद को विभाजन द्वारा गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखा है। इसलिए, यहाँ हम मध्य पद '$-8x$' को दो पदों के योग के रूप में जिसका गुणनफल $6 \times 2x^2 = 12\,x^2$, विभाजन करते है। इसलिए, हम लिखते हैं -

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ शून्य रहता है जब $x - 1 = 0$ अथवा $x - 3 = 0$, अर्थात $x = 1$ अथवा $x = 3$ । इसलिए, $2x^2 - 8x + 6$ के शून्य 1 और 3 हैं। अब हम प्रयत्न करते हैं और देखते हैं कि बहुपदी में पदों के गुणांक और शून्यों के बीच क्या संबंध है। x^2 का गुणांक 2 है। x का -8 है और स्थिरांक 6 है जो x^0 का गुणांक है। (अर्थात $6x^0 = 6$)

हम देखते हैं कि शून्यों का योग $= 1 + 3 = 4 = \dfrac{-(-8)}{2} = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= 1 \times 3 = 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

हम एक अन्य द्विघातीय बहुपदी लेते हैं :

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$

मध्य-पद का विभाजन करने पर हम देखते हैं,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ का मान शून्य रहता है जब या तो $3x - 1 = 0$ अथवा $x + 2 = 0$

अर्थात, जब $x = \frac{1}{3}$ अथवा $x = -2$.

$3x^2 + 5x - 2$ के शून्य $\frac{1}{3}$ और -2 हैं।

हम देख सकते हैं कि

शून्यों का योग $= \dfrac{1}{3} + (-2) = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= \dfrac{1}{3} \times (-2) = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

यह कीजिए।

नीचे दी गई द्विघातीय बहुपदियों के शून्यों को ज्ञात कीजिए। शून्यों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए और बहुपदी में पदों के गुणांको के साथ संबंध की जाँच कीजिए।

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

सामान्यतः, यदि द्विघातीय बहुपदी $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ के शून्य α और β हो तो $p(x)$ के गुणनखण्ड $(x - \alpha)$ और $(x - \beta)$ रहते है। इसलिए,

$ax^2 + bx + c = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$, जहाँ k स्थिरांक है।

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k\,(\alpha + \beta)\, x + k\alpha\beta$$

दोनों ओर, x^2, x के गुणांक और स्थिरांक की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta) \text{ और } c = k\alpha\beta.$$

इससे प्राप्त होता है, $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

सूचना : ग्रीक अक्षर α, β का उच्चारण क्रमशः 'अल्फा' और 'बीटा' पढते हैं। तत् पश्चात हम अक्षर 'γ', जिसका उच्चारण 'गामा' है, उसका उपयोग करेंगे।

इसलिए, द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्यों का योग $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$ के शून्यों का गुणनफल $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अब हम कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण-3. द्विघातीय बहुपदी $x^2 + 7x + 10$, के शून्यों को ज्ञात कीजिए और गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की जाँच कीजिए।

हल : हमें मालूम है,

$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\ (x + 5)$

इस प्रकार, $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य होता है जब $x + 2 = 0$ अथवा $x + 5 = 0$,

अर्थात जब $x = -2$ अथवा $x = -5$.

इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्य -2 और -5 हैं।

अब, शून्यों का योग $= -2 + (-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= -2 \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

उदाहरण-4. बहुपदी $x^2 - 3$ के शून्यों को ज्ञात कीजिए और गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की जाँच कीजिए।

हल : स्मरण कीजिए, सर्वसमिका(identity) $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$.

इसका उपयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं :

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})\ (x + \sqrt{3})$$

इस प्रकार, $x^2 - 3$ का मान शून्य होता है जब $x = \sqrt{3}$ अथवा $x = -\sqrt{3}$.

इसलिए, $x^2 - 3$ के शून्य $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं।

शून्यों का योग $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यों का गुणनफल $= (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

उदाहरण-5. द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए जिसका योग और गुणा क्रमशः -3 और 2 है।

हल : माना कि द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c$, है और इसके शून्य α और β है। हमें पता है,

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

और $\alpha\beta = 2 = \dfrac{c}{a}$.

यदि हम $a = 1$, लेते हैं, तब $b = 3$ और $c = 2$

इस प्रकार, एक द्विघातीय बहुपदी $x^2 + 3x + 2$ है जो दिये हुए प्रतिबंधो के सही है।

इसी प्रकार, हम कोई भी वास्तविक संख्या 'a' के लिए ले सकते हैं। माना कि, यह k है। इससे हमें प्राप्त होता है, $\frac{-b}{k} = -3$ अथवा $b = 3k$ और $\frac{c}{k} = 2$ अथवा $c = 2k$ । a, b और c, के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त हुई बहुपदी $kx^2 + 3kx + 2k$ है।

उदाहरण-6. द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए और इसके शून्य क्रमशः 2 और $\frac{-1}{3}$ है।

हल : माना कि द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ है और इसके शून्य α और β हैं।

यहाँ $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

शून्यों का योग $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

शून्यों का गुणनफल$= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

इसलिए द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c =$

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$, जहाँ k स्थिरांक है।

अर्थात् $k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$

हम k के अलग-अलग मान ले सकते हैं।

जब $k = 3$, द्विघातीय बहुपदी $3x^2 - 5x - 2$ होगी।

जब $k = 6$, द्विघातीय बहुपदी $6x^2 - 10x - 4$ होगी।

प्रयत्न कीजिए।

(i) द्विघातीय बहुपदी क्या होगी जिसके शून्यों का योग -2 और $\frac{1}{3}$ है।

(ii) द्विघातीय बहुपदी क्या होगी जिसके शून्यों का योग $\frac{-3}{2}$ और शून्यों का गुणनफल -1 है।

3.6 घनीय बहुपदियाँ (Cubic Polynomials) :

अब हम घनीय बहुपदियों को देखते हैं। क्या आप सोचते हैं कि घनीय बहुपदी के शून्य और इसके गुणांकों के बीच कुछ संबंध होगा?

मान लीजिए $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$.

हम देखते हैं कि $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ के लिए $p(x) = 0$

क्योंकि $p(x)$ के अधिकतम शून्य 3 रहते हैं, $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ के शून्य यही है।

इसके शून्यों का योग $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

इसके शून्यों का गुणा $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{स्थिरांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

तथापि, यहाँ एक अन्य संबंध है। शून्यों के गुणनफल के योग को एक समय में 2 बार लेने पर हमें प्राप्त होता है,

$$= \{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

सामान्यतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि घनीय बहुपदी $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ के शून्य α, β, γ हो तो,

> $ax^3 + bx^2 + cx + d$ बहुपदी α, β, γ शून्यों के साथ है। हम α, β, γ का संबंध a, b, c, d के साथ देखेंगे। क्योंकि α, β, γ शून्य हो, बहुपदी को $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ की तरह लिखा जाता है।
>
> $= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$
>
> बहुपदी के साथ तुलना करने के लिये, हम 'a' से गुणा करते हैं और हमें प्राप्त होता है,
>
> $ax^3 - x^2 a(\alpha+\beta+\gamma) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$.
>
> $$\therefore \quad b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$$
>
> $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}.$$

यह कीजिए :

यदि दिये गये घनीय बहुपदी के शून्य α, β, γ हो तो सारणी में दिये गये मान ज्ञात कीजिए।

क्र.स.	घनीय बहुपदी	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

एक उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण-7. जाँच कीजिए कि घनीय बहुपदी के शून्य $3, -1, -\frac{1}{3}$ हैं जहाँ $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, एक बहुपदी है उसके गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध की जाँच कीजिए।

हल: $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ दिया गया बहुपद है।

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

इसलिए, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्य $3, -1, -\frac{1}{3}$ हैं।

अतः, हम $\alpha = 3, \beta = -1$ और $\gamma = -\frac{1}{3}$ लेते हैं।

दी गई बहुपदी की $ax^3 + bx^2 + cx + d$, के साथ तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$. इससे आगे,

अब, $\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

अभ्यास – 3.3

1. निम्न द्विघातीय बहुपदी के शून्यों को ज्ञात कीजिए और इनके गुणांक और शून्यों के बीच संबंधो की जाँच कीजिए।

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$
   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. प्रत्येक स्थिति में द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए, जहाँ उसके शून्यों का योग और गुणनफल क्रमशः संख्याओं में दिया है।

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. प्रत्येक स्थिति में, α, β शून्यों के लिये द्विघातीय बहुपदी ज्ञात कीजिए।

   (i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. घनीय बहुपदी $x^3 + 3x^2 - x - 3$ के शून्य $1, -1$ और -3 रहते है, जाँच कीजिए और इसके गुणांक और शून्यों के बीच के संबंध की जाँच कीजिए।

3.7 बहुपदी के लिए भागकलनविधि (Division Alogorithm)

हम जानते हैं कि घनीय बहुपदी के अधिकतम 3 शून्य रहते हैं। तथापि, यदि आपको केवल एक शून्य दिया जाय तो, क्या आप अन्य दो शून्यों को ज्ञात कर सकते हैं? इसके लिए, घनीय बहुपदी $x^3 + 3x^2 - x - 3$ लेते है। यदि आप इसके शून्यों में से एक शून्य बताते हैं, तब आप जानते होंगे कि यह बहुपदी $x - 1$ से विभाजित है। अतः $x - 1$ से भाग देने पर भागफल $x^2 - 2x - 3$ हमें प्राप्त होता है।

$x^2 - 2x - 3$ के गुणनखण्ड हमें इसके मध्य - पद को विभाजित करने पर प्राप्त होते हैं। इसके गुणनखण्ड $(x + 1)$ और $(x - 3)$ है। इससे हमें पता चलता है,

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

इसलिए, घनीय बहुपदी के तीन शून्य $1, -1, 3$ है।

अब हम एक बहुपदी को दूसरे से भाग देने की विधि को विस्तृत रूप से चर्चा करेंगे। औपचारिक ढंग से कुछ सोपानों को करने से पहले, एक विशेष उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-8. $2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल : ध्यान में रखिए कि जब हम भाग प्रक्रिया को रोकते है तब या तो शेषफल 0 रहता है अथवा इसका घातांक, भाजक के घातांक से कम रहता है। अतः, यहाँ भागफल $2x - 1$ है और शेष 3 है। साथ ही,

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x - 1 \\
x+2 \big) & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & - \quad - \\
\hline
 & -x + 1 \\
 & -x - 2 \\
 & + \quad + \\
\hline
 & 3
\end{array}
$$

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$$

इसलिए, भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

अब हम बहुपदी को द्विघातीय बहुपदी से भाग देने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढायेंगे।

उदाहरण-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

हल: सर्वप्रथम हम भाज्य और भाजक के पदों को उनके घातांकों के अवरोहण क्रम में व्यवस्थित करते हैं। इसी क्रम में पदों को व्यवस्थित करते हैं। (इस क्रम में पदों को व्यवस्थित करने के लिए इसके मानक रूप में बहुपदी को लिखने का ढंग कहते है।) इस उदाहरण में, पहले से ही भाज्य, उसके मानक रूप में हैं, और भाजक भी उसके मानक रूप में है। $x^2 + 2x + 1$.

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x - 5 \\
x^2 + 2x + 1 \big) & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & -5x^2 - x + 5 \\
 & -5x^2 - 10x - 5 \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & 9x + 10
\end{array}
$$

सोपान 1 : भागफल का प्रथम पद मालूम करने के लिए, भाज्य के उच्चतम घातांक के पद को (i.e., $3x^2$), भाजक के उच्चतम घातांक के पद (x^2) से भाग देते है। यह भाग $3x$ है। तत्पश्चात भाग प्रक्रिया चालू रखते है। शेषफल $5x^2 - x + 5$ आता है।

सोपान 2 : अब भागफल का द्वितीय पद ज्ञात करने के लिए, नये भाज्य का उच्चतम घातांक के पद $(-5x^2)$ को भाजक के उच्चतम घातांक के पद (x^2) से भाग देते है। यह भाग -5 आता है।

सोपान 3 : शेषफल $9x + 10$ रहता है। अब $9x + 10$ का घातांक, भाजक $x^2 + 2x + 1$ के घातांक से कम है। अतः, इससे आगे हम भाग नही कर सकते है। क्यों?

इसलिए, भागफल $3x - 5$ है और शेषफल $9x + 10$ है। इस तरह,

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10) \\
&= 3x^3 + x^2 + 2x + 5
\end{aligned}
$$

यहाँ, हम पुनः देखते है कि भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यहाँ प्रयुक्त कलनविधि, 'युक्लिड की भाग कलन विधि' कहलाती है।

यह इस तरह है

यदि $\boldsymbol{p(x)}$ और $\boldsymbol{g(x)}$ कोई दो बहुपदी है, $\boldsymbol{g(x)} \neq \mathbf{0}$, तब हम बहुपदियाँ $\boldsymbol{q(x)}$ और $\boldsymbol{r(x)}$ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं कि

$\boldsymbol{p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)},$

जहाँ या तो $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ का घातांक $< g(x)$ का घातांक यदि $r(x) \neq 0$

यह परिणाम, बहुपदियों के लिए 'भाग कलनविधि' नाम से जाना जाता है।

अब, ऊपर की गई चर्चा द्वारा निम्न परिणाम निकलते है।

(i) यदि $q(x)$ रैखिक बहुपदी हो तो $r(x) = r$ स्थिरांक रहता है।

(ii) यदि $q(x) = 1$, का घातांक $= 1$, तब $p(x)$ का घातांक $= 1 + g(x)$ का घातांक

(iii) यदि $p(x)$ बहुपदी $(x - \text{a})$, द्वारा विभाजित है, तब शेषफल $p(a)$ रहता है।

(iv) यदि $r(x) = 0$, हम कहते हैं $p(x)$ को $q(x)$ से नि:शेष भाग किया जाता है। अथवा $p(x)$ का $q\ (x)$ गुणनखण्ड है।

उदाहरण -10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$, भाग दीजिए और भाग कलनविधि की जाँच कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दी हुई बहुपदियाँ मानक रूप में नहीं है। भाग पूरा करने के लिए सर्वप्रथम हम भाज्य और भाजक को उनके घातांक के अवरोहण क्रम में विभाजित करते हैं। अवरोही (decreasing) क्रम में लिखते है।

अत:, भाज्य $= - x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ और

भाजक $= - x^2 + x - 1.$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x-2 \\ \cline{2-2}
-x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\
 & -x^3+\ x^2-\ x \\
 & +\quad -\quad + \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2x^2-2x+5 \\
 & \qquad 2x^2-2x+2 \\
 & \qquad -\quad +\quad - \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3
\end{array}
$$

भाग प्रक्रिया दाहिनी ओर बताई गई है। हम यहाँ कह सकते हैं कि शेषफल का घातांक, भाज्य $(-x^2 + x - 1)$ के घातांक से कम है।

इसलिए, भागफल $= x - 2$, शेषफल $= 3$.

अब, भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल$+$ शेषफल

$= (-x^2 + x - 1)\ (x - 2) + 3$

$= - x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= - x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

इस प्रकार, भागकलन विधि की जाँच की गई।

उदाहरण -11. बहुपदी $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यों को ज्ञात कीजिए, यदि आप जानते है कि इसके शून्यों में से दो शून्य $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं।

हल : क्योंकि इसके दो शून्य $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ है इसलिए हम इसे $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ से भाग दे सकते है।

$$\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 + 0x - 2 \,\big) & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 \\
 & - \qquad\quad + \\ \hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 + 0x^2 + 6x \\
 & + \qquad\quad - \\ \hline
 & \qquad\quad x^2 + 0x - 2 \\
 & \qquad\quad x^2 + 0x - 2 \\
 & \qquad\quad - \qquad + \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

भागफल का प्रथम पद $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

भागफल का द्विवितीय पद $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

भागफल का तृतीय पद $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

इसलिए, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

अब, मध्यपद $-3x$, के विभाजन द्वारा हम $2x^2 - 3x + 1$ के गुणन खण्ड $(2x - 1)(x - 1)$ प्राप्त कर सकते है। अतः, इसके शून्य $x = \dfrac{1}{2}$ और $x = 1$ है। इसलिए, दिये हुए बहुपदी के शून्य $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 1 और $\dfrac{1}{2}$ हैं।

अभ्यास – 3.4

1. बहुपदी $p(x)$ को बहुपदी $q(x)$ से भाग दीजिए और निम्न में से प्रत्येक के भागफल और शेष ज्ञात कीजिए:

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

2. द्वितीय बहुपदी को प्रथम बहुपदी से भाग देकर जाँच कीजिए कि किस उदाहरण में प्रथम बहुपदी, द्वितीय बहुपदी का गुणनखण्ड है।

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यों को ज्ञात कीजिए। यदि इसके दो शून्य $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को बहुपदी $g(x)$ से भाग देने पर भागफल और शेष क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$, प्राप्त होते हैं। $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

5. बहुपदी $p(x), g(x), q(x)$ और $r(x),$ के उदाहरण दीजिए जो भाग कलनविधि को संतुष्ट करते है और

(i) $p(x)$ का घातांक $=$ $q(x)$ का घातांक (ii) $q(x)$ का घातांक $=$ $r(x)$ का घातांक

(iii) $r(x)$ का घातांक $= 0$

वैकल्पिक अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा में सम्मिलित नहीं है।]

1. जाँच कीजिए कि नीचे दिये हुए घनीय बहुपदी के आगे दी गई संख्याओं के शून्य हैं। प्रत्येक उदाहरण में, उनके गुणांक और शून्यों के बीच संबंध की भी जाँच कीजिए।

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; (\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 ; (1, 1, 1)$

2. घनीय बहुपदी ज्ञात कीजिए जिसके शून्यों का योग, दो शून्यों का गुणा एक साथ लेते हुए, इसके गुणनफल का योग, और शून्यों का गुणनफल क्रमशः $2, -7, -14$ है।

3. यदि बहुपदी $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्य $a - b, a, a + b$ है तो a और b ज्ञात कीजिए।

4. यदि बहुपदी $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्य $2 \pm \sqrt{3}$, हो तो अन्य शून्यों को ज्ञात कीजिए।

5. यदि बहुपदी $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ को दूसरी बहुपदी $x^2 - 2x + k$, से भाग देने पर शेष $x + a$, प्राप्त होता है। k और a ज्ञात कीजिए।

प्रस्तावित परियोजना

द्विघातीय बहुपदी - बहुपदी का शून्य, रेखीय प्रदर्शन

- विभिन्न स्थितियों में बहुपदी $ax^2 + bx + c$ का आरेख खींचना ।

(i) $a > 0$ (ii) $a < 0$ (iii) $a = 0$ (iv) $b > 0$ (v) $b < 0$

(vi) $b = 0$ आरेख पर टिप्पणी लिखिए ।

हमने क्या चर्चा की

इस अध्याय में आपने निम्न बातों को पढा है :

1. घातांक 1, 2 और 3 की बहुपदियाँ क्रमशः रैखिक, द्विघातीय और घनीय बहुपदियाँ कहलाती है।
2. वास्तविक गुणांको के साथ x में एक द्विघातीय बहुपदी का रूप $ax^2 + bx + c$, रहता है जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।
3. बहुपदी $p(x)$ के शून्य, उन बिन्दुओं के x- निर्देशांक रहते है जो $y = p(x)$ के आलेख में X-अक्ष को प्रतिच्छेद करते हैं।
4. द्विघातीय बहुपदी के अधिकतम शून्य 2 और घनीय बहुपदी के अधिकतम शून्य 3 रह सकते हैं।
5. यदि द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्य α और β हो तो

   $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. यदि घनीय बहुपदी $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ के शून्य α, β, γ हो तो

   $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

   $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

   और $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

7. भागकलन विधि स्पष्ट करती है कि कोई भी दी हुई बहुपदी $p(x)$ और कोई अ-शून्य बहुपदी $g(x)$ के लिए, बहुपदी $q(x)$ और $r(x)$ इस प्रकार रहती है कि

   $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$

   जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ का घात $<$ $g(x)$ का घात, यदि $r(x) \neq 0$.