02

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

LFRU23

2.01 प्रस्तावना (Introduction)

LG1Q3Q

अब तक पूर्व कक्षाओं में हमने प्राकृत संख्याओं (Natural Numbers), पूर्णांकों (Integers), परिमेय एवं अपरिमेय (Rational and Irrational) संख्याओं पर संक्रियाओं के प्रयोग के बारे में प्रारंभिक अध्ययन किया है। यहाँ हम वास्तविक संख्याओं एवं उनसे सम्बन्धित गणित के मूल भूत सिद्धान्तों तथा परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के प्रमाण, सांत (Terminating), अवसानी (असांत) आवृति (Non-terminating repeating) प्रकृति के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे।

हम जानते है कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक (positive Integer) को दो या दो से अधिक संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। हम संख्याओं के भागफल के बारे में भी जानते हैं कि किन्हीं दो धनात्मक संख्याओं के भागफल के रूप में जो शेषफल (Remainder) आता है वह हर संख्या (Denominator) से कम होता है। यही महत्वपूर्ण तथ्य अंक गणित का आधार भूत प्रमेय है। इस अध्याय में हम हन्हीं गणितीय अवधारणाओं का उपयोग कर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ आदि संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण स्थापित करेंगे तथा परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के बारे में पढ़ेंगे।

2.02 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

LGAL5D

यूक्लिड ग्रीक गणितज्ञ थे, ये ज्यामिति एवं संख्या सिद्धान्त पर किये कार्य के लिए जाने जाते हैं। इन्होंने वास्तविक संख्याओं के भागफल सम्बन्धित सिद्धान्त भी प्रतिपादित किये। संख्या गणित में यूक्लिड विभाजन विधि (कलन विधि) (Euclid's Division Algorithm), इनके द्वारा प्रतिपादित विभाजन प्रमेयिका पर आधारित है।

माना a कोई अशून्य पूर्णांक है $(a \neq 0)$ तथा b एवं c दो पूर्णांक निम्न प्रकार परिभाषित है कि $b/a = c$ तब संख्या b भाज्य, संख्या a भाजक एवं संख्या c भागफल कहलाता है। भाजकता के लिए निम्न गुणधर्म ध्यान रखने योग्य है कि

(i) ± 1 से किसी भी अशून्य पूर्णांक संख्या में भाग लगाया जा सकता है।
(ii) 0 में किसी भी संख्या का भाग लगाया जा सकता है।
(iii) 0 से किसी संख्या को भाजित नहीं किया जा सकता।
(iv) यदि a एवं b में से कोई भी शून्य नहीं है तो इन पर भाग संक्रिया (भाजकता) लागू की जा सकती है।
(v) यदि a एवं b अशून्य पूर्णांक है तथा q एवं r अन्य पूर्णांक इस प्रकार है कि

$$a = bq + r$$

हमने पिछली कक्षाओं में भाग संक्रिया का अध्ययन किया है। हम जानते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक (माना a) को दूसरे धनात्मक पूर्णांक (माना b) से विभाजित करने पर भागफल (माना q) और शेषफल (माना r) प्राप्त होता है। हम पूर्णांको के निम्न युग्मों पर विचार करते हैं:

(i) 56, 16 (ii) 10, 2 (iii) 5, 7

यहाँ हम इन युग्मों के लिए निम्न प्रकार संबंध लिख सकते हैं।

(i) $56 = 16 \times 3 + 8$ (56 में 16 से भाग देने पर तीन बार जाता है और शेष 8 रहता है)
(ii) $10 = 5 \times 2 + 0$ (10 में 2 से भाग देने पर पाँच बार जाता है और शेष कुछ नहीं रहता है)
(iii) $5 = 7 \times 0 + 5$ (यह संबंध भी सही है क्योंकि 7, 5 से बड़ा है)

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो धनात्मक पूर्णांक a और b के प्रत्येक युग्म के लिए a को b से भाग देने पर शेष r बचता है तथा शेषफल r या तो शून्य होता है या भाजक b से छोटा (कम) होता है। अर्थात्

$$a = bq + r$$

जहाँ, $0 \leq r < b$

इस परिणाम को अंक गणित में युक्लिड विभाजन प्रमेयिका के नाम से जाना जाता है एवं औपचारिक रूप से निम्नप्रकार व्यक्त किया जाता है।

प्रमेय–2.1 (यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका):

यदि a और b दो धनात्मक पूर्णांक है, तो दो ऐसी अद्वितीय पूर्णांक q एवं r इस प्रकार विद्यमान होते हैं कि

$a = bq + r$, जहाँ $0 \le r < b$ है।

नोटः उपर्युक्त प्रमेयिका सभी पूर्णांको (शून्य को छोड़कर) पर प्रयुक्त हो सकती है तथा यह भी ध्यान रहे कि q या r शून्य भी हो सकते हैं।

उपर्युक्त यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के अनुप्रयोगों को यहाँ निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q$ या $3q+1$ या, $3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 3$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 3q + r$, जहाँ $0 \le r < 3$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0, 1, 2$ रखने पर

$a = 3q + 0$, जहाँ $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः $a = 3q$, या $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q, 3q+1, 3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2: दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक समपूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 2$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 2q + r$, जहाँ $0 \le r < 2$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0, 1$ रखने पर

$a = 2q + 0$, या $a = 2q + 1$ ($\because$ r एक पूर्णांक है)

$a = 2q$, या $a = 2q + 1$

चूंकि q एक पूर्णांक है तथा $a = 2q$ है तो a एक सम पूर्णांक है।

हम जानते है कि कोई पूर्णांक या तो सम होगा या फिर विषम हो सकता है, अतः यदि a सम पूर्णांक है तो $a+1$ अर्थात् $2a+1$ कोई भी विषम पूर्णांक का रूप होगा।

उदाहरण 3: यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कर दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $3\,\mathrm{m}$ या $3\,\mathrm{m}+1$ के रूप का होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

हलः माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है। हम जातने है कि यह धनात्मक पूर्णांक $a = 3q$ या, $a = 3q+1$ या, $a = 3q+2$ के रूप का होगा।

(i) यदि $a = 3q$ है तब, $a^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3(3q) = 3m$ जहाँ, $m = 3q$ है।

(ii) यदि $a = 3q + 1$ है तब, $a^2 = (3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1$

$= 3q(3q+2) + 1$

$= 3m + 1$

जहाँ, $m = q(3q+2)$ है

(iii) यदि $a = 3q + 2$ है तब

$a^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4$

$= 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$

$\Rightarrow$ $= 3m + 1$

जहाँ $m=\left(3q^2+4q+1\right)$ है।

अतः उपर्युक्त (i), (ii) एवं (iii) स्थिति से स्पष्ट है कि पूर्णांक a का वर्ग, $3m$ या $3m+1$ के रूप का होता है।

2.03 यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (विधि)

यहाँ हम यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका पर आधारित एक अन्य अनुप्रयोग युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि) का अध्ययन करेंगे। एल्गोरिथ्म शब्द 9 वीं शताब्दी के एक फारसी गणितज्ञ 'अल–ख्वारिज़मी' के नाम से लिया गया है। यह 'एल्गोरिथ्म' सुपरिभाषित चरणों की एक श्रृंखला होती है जो विशेष प्रकार की समस्या को हल करने की एक प्रक्रिया या विधि प्रदान करती है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्यम दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करने की विधि है। किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a एवं b का महत्तम समापवर्तक वह सबसे बड़ा पूर्णांक d है जो a तथा b दोनों को पूर्णतया विभाजित करता है।

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा महत्तम समापवर्तक (Highest common factor) ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों में यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग किया जाता है।

माना a और b (जहाँ $a>b$) दो धनात्मक पूर्णांक है तब

चरण–1: a और b के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग किजिए तथा पूर्णांक q एवं r इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि–

$$a=bq+r,\ 0\le r<b \text{ हो।}$$

चरण–2: यदि $r=0$, तो a और b का महत्तम समापवर्तक b है। यदि $r\neq 0$ है तो b तथा r के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कर पूर्णांक q_1 एवं r_1 इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $b=rq_1+r_1$ हो।

चरण–3: अब यदि $r_1=0$, तो a और b का महत्तम समापवर्तक (HCF) r होगा। यदि $r_1\neq 0$ है तो r एवं r_1 के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए।

चरण–4: उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराते रहिये जब तक शेषफल 0 (शून्य) प्राप्त नही हो जाये। शेषफल 0 प्राप्त होने की स्थिति में प्राप्त भाजक ही वांछित महत्तम समापवर्तक (HCF) होगा।

यह विधि निम्न उदाहरणों द्वारा आसानी से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1: 81 और 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

हल: चरण–1: यहाँ दिये गये पूर्णांक 81 एवं 237 इस प्रकार है कि $237>81$, अतः इन पूर्णांको पर युक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करने पर निम्न प्राप्त होता है–

$$237=81\times 2+75 \quad \text{. . . (i)}$$

चरण–2: यहाँ शेषफल $75\neq 0$ है। अतः भाजक 81 एवं शेषफल 75 पर यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम (विधि) का प्रयोग करने पर,

$$81=75\times 1+6 \quad \text{. . . (ii)}$$

चरण–3: समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि यहाँ भी शेषफल $6\neq 0$ है। अतः पुन भाजक 75 एवं शेषफल 6 पर यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग करेंगे अर्थात्

$$75=6\times 12+3 \quad \text{. . . (iii)}$$

चरण–4: यह प्रक्रिया हमें तब तक जारी रखनी है, जबतक कि शेषफल शून्य नहीं हो जावे। यहाँ भी शेषफल $3\neq 0$ है। अतः युक्लिड विभाजन विधि के भाजक 6 एवं शेषफल 3 पर प्रयोग से हम लिख सकते है कि

$$6=3\times 2+0 \quad \text{. . . (iv)}$$

समीकरण (iv) से स्पष्ट है कि इस स्थिति में शेषफल0 (शून्य) प्राप्त हो गया है। अतः अन्तिम भाजक3 ही 81 एवं 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है। संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

81 | 237 | 2
162
75 | 81 | 1
75
6 | 75 | 12
72

$$HCF = 3 \mid 6 \mid 2$$
$$\underline{6}$$
$$0 = \text{शेषफल}$$

उदाहरण 2: किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: परेड में सेना की टुकड़ी एवं आर्मी बैंड के सदस्यों को समान संख्या वाले स्तंभो में मार्च करना है। अतजिन स्तभों में दोनों समुह मार्च करेंगे उनकी अधिकतम संख्या 616 और 32 के महत्तम समापवर्तक (HCF) के बराबर होगी। अतः 616 एवं 32 का यूक्लिड विभाजन विधि से (HCF) ज्ञात करने के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करते है। अतः

$$616 = 32 \times 19 + 8 \qquad \ldots(i)$$

यहाँ शेषफल $8 \neq 0$ । अतः भाजक 32 एवं शेषफल 8 के लिए पुनः युक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से निम्न प्राप्त करते है।

$$32 = 8 \times 4 + 0 \qquad \ldots(ii)$$

अब यहाँ शेषफल 0 (शून्य) प्राप्त हो गया है अतः 616 एवं 32 का महतम समापवर्तक (HCF) भाजक 8 प्राप्त हुआ। इस प्रकार सेना टुकडी एवं बैंड के सदस्यों का समुह अधिकतम 8 स्तम्भों में मार्च करेंगे।

संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

$$32 \mid 616 \mid 19$$
$$\underline{608}$$
$$HCF = 8 \mid 32 \mid 4$$
$$\underline{32}$$
$$0 = \text{शेषफल}$$

उदाहरण 3: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 245 और 2053 को इस प्रकार विभाजित करती है कि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त हो।

हल: दिया गया है कि 245 और 2053 को अभीष्ट संख्या से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त होता है। अतः $245 - 5 = 240$ एवं $2053 - 5 = 2048$ अर्थात् 240 और 2048 को अभीष्ट संख्या द्वारा पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है यह तभी संभव है जबकि अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो। यह भी ज्ञात है कि अभीष्ट संख्या इस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड में सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का महत्तम समापर्वक (HCF) होगी। अतः यूक्लिड विभाजन विधि का चरण बद्ध प्रयोग करने पर,

$$2048 = 240 \times 8 + 128$$
$$240 = 128 \times 1 + 112$$
$$128 = 112 \times 1 + 16$$
$$112 = 16 \times 7 + 0$$

स्पष्ट है कि अन्तिम शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस प्रकार अभीष्ट महत्तम समापवर्तक भाजक 16 प्राप्त हुआ, जो कि अभीष्ट संख्या है।

संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

$$240 \mid 2048 \mid 8$$
$$1920$$
$$128 \mid 240 \mid 1$$
$$128$$
$$112 \mid 128 \mid 1$$
$$112$$
$$16 \mid 112 \mid 7$$
$$HCF = 112$$
$$0 = \text{शेषफल}$$

प्रश्नमाला 2.1

1. दर्शाइए कि एक विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या का वर्ग $8q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q एक धनात्मक पूर्णांक है।

2. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक संख्या का घन $9q$ या, $9q+1$ या, $9q+8$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक संख्या है।

3. दर्शाइए कि किसी भी धनात्मक विषम पूर्णांक संख्या को $6q+1$ या, $6q+3$ या, $6q+5$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ q एक धनात्मक पूर्णांक है।

4. निम्नलिखित संख्या–युग्मों का यूक्लिड विभाजन विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए:
   (i) 210, 55 (ii) 420, 130 (iii) 75, 243
   (iv) 135, 225 (v) 196, 38220 (vi) 867, 255

5. यदि संख्या 408 तथा 1032 के महत्तम समापवर्तक (HCF) को $1032x-408\times5$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

2.04 अंकगणित की मूलभूत प्रमेय:

पूर्व में हम प्राइमरी कक्षाओं में भाज्य एवं अभाज्य संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं। हम जानते हैं कि कोई धनात्मक अभाज्य संख्या केवल 1 या फिर स्वयं से ही भाजक है। अर्थात् किसी भी अभाज्य संख्या के गुणन खण्ड केवल $1\times p$ के रूप में ही होंगे।

अब हम किसी धनात्मक पूर्णांक के बारे में विचार करते हैं एवं उसे गुणनखण्ड रूप में व्यक्त करते है, उदाहरणार्थ

$$5313=3\times7\times11\times23$$

या $$140=4\times5\times7$$

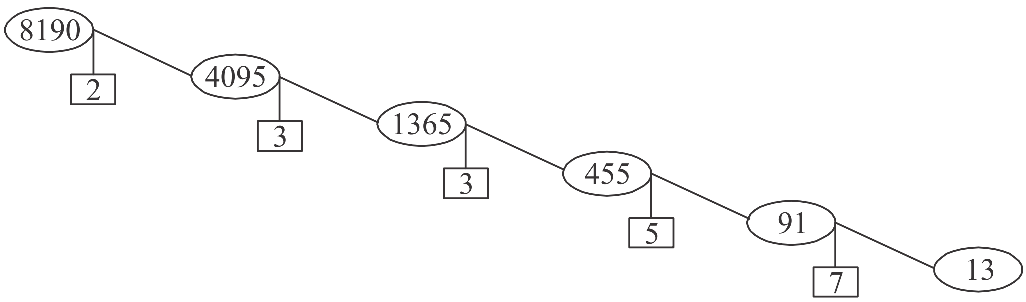
इत्यादि।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि प्रत्येक गुणपखण्ड या तो एक अभाज्य पूर्णांक होगा या एक भाज्य पूर्णांक होगा। यदि कोई गुणनखण्ड भाज्य पूर्णांक है तो इसे आगे भी गुणनखण्ड कर सकते हैं जब तक कि सभी गुणन खण्ड अभाज्य प्राप्त नहीं हो जाते। उदाहरणार्थ 140 के अन्ततः गुणन खण्ड इस प्रकार होंगे।

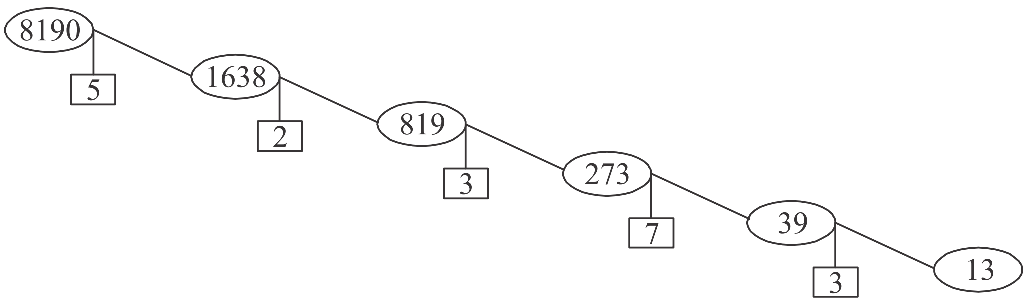
$$140=2\times2\times5\times7$$

या $$140=2^2\times5\times7$$

अब हम किसी धनात्मक पूर्णांक संख्या के निम्न गुणनखण्ड क्रमों (factor tree) पर ध्यान केन्द्रित करते हैं। माना हम पूर्णांक संख्या 8190 के गुणनखण्ड नीचे दर्शाये अनुसार करते है।



अर्थात् $8190=2\times3\times3\times5\times7\times13$ . . . (i)



अर्थात् $8190=5\times2\times3\times7\times3\times13$ . . . (ii)

अर्थात् उदाहरण में पूर्णांक8190 के गुणन खण्ड बिना यह ध्यान दिये कि अभाज्य संख्याऐं किस क्रम में आ रही है, किये गये हैं। अतः स्पष्ट है कि एक धनात्मक पूर्णांक का अभाज्य गुणनखण्ड, उसके गुणन खण्डों के क्रम पर निर्भर नहीं है अतः किसी भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के अद्वितिय प्रकार से गुणनखण्डन रूप में लिखा जा सकता है अर्थात् अभाज्य गुणन खण्डन अद्वितिय (unique) होता है।

यदि हम गुणन खण्डों को आरोही क्रम में लिखे एवं समान अभाज्य संख्याओं को एक साथ घात रूप में लिखे तब उपर्युक्त संख्या 8190 के लिए निम्न अनुसार या कन्जक्चसर (conjecture) प्राप्त होता है,

$8190 = 2\times 3^2\times 5\times 7\times 13$

अंक गणित की यही अवधारणा आधार भूत प्रमेय या मूलभूत प्रमेय कहलाती है। इस तथ्य को औपचारिक रूप से निम्न कथन द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–2.2: (अंकगणित की मूलभूत प्रमेय)

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणन फलन के रूप में व्यक्त (गुणन खंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणन खण्डन अभाज्य गुणन खण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

अंक गणित की इस मूलभूत प्रमेय 2.2 को हम निम्न उदाहरणों द्वारा समझ सकते हैं।

उदाहरण 1: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है?

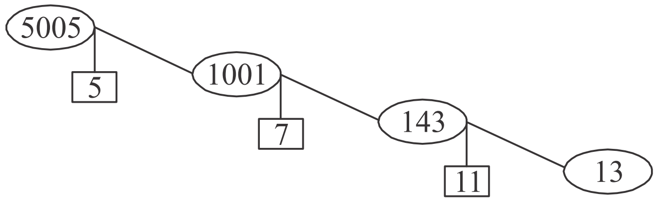
हल: हम जानते है कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक जो शून्य पर समाप्त होता है वह अंक 5 से भाज्य होता है अर्थात् उस धनात्मक पूर्णांक का एक गुणन खण्ड 5 होना चाहिये। यहाँ किसी n के लिए संख्या 6^n धनात्मक पूर्णांक हैं जो शून्य पर समाप्त होता है अतः गुणनखण्डन करने पर $6^n = (2\times 3)^n = 2^n\times 3^n$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार 6^n के गुणनखण्ड में 2 एवं 3 के अतिरिक्त अभाज्य गुणन खण्ड नहीं है अर्थात् गुणनखण्ड में अंक 5 नहीं है अतः 6^n किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए 0 अंक पर समाप्त नहीं होगा।

उदाहरण 2: निम्नलिखित धनात्मक पूर्णांको को अभाज्य गुणनखण्डो के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

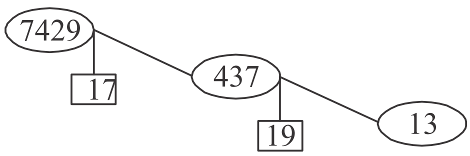
(i) 5005 (ii) 7429

हल: (i) संख्या 5005 का गुणनखण्ड वृक्ष है



अतः $5005 = 5\times 7\times 11\times 13$ अभाज्य गुणनखण्ड है

(ii) संख्या 7429 का गुणनखण्ड वृक्ष निम्न प्रकार होगा



अतः $7429 = 17\times 19\times 13$ अभाज्य गुणन खण्ड है।

पिछली कक्षाओं में हमने अभाज्य गुणन खण्ड विधि द्वारा धनात्मक पूर्णाकों के महत्तम समापवर्तक(HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात किये हैं। यहाँ हम अंक गणित की मूलभूत प्रमेय 2.2 के प्रयोग द्वारा महत्तम समापवर्तक एवं लघुतम समापवर्तक ज्ञात करेंगें। इसे निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है। हम पूर्णांको के युग्म (26 और 91) पर विचार करते हैं।

यहाँ $26 = 2^1\times 13^1$

तथा $91 = 7^1\times 13^1$ अभाज्य गुणनखण्ड है

अतः $\text{HCF}(26, 91) = 13^1$

गुणन खण्डन से प्राप्त संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल

तथा $\text{LCM}(26, 91) = 2^1 \times 7^1 \times 13^1$

= गुणन खण्डन से प्राप्त संख्याओं में संबंद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल

इस उदाहरण में ध्यान से देखने पर हम निम्न तथ्य पाते हैं कि

$$\text{HCF}(26, 91) \times \text{LCM}(26, 91) = 26 \times 91$$

अतः अंक गणित की मूल भूत प्रमेय के आधार पर हम यह परिणाम निकालते है कि किन्ही दो धनात्मक पूर्णांको a तथा b के लिए

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

अर्थात् यदि हम पहले ही HCF ज्ञात कर चुके हैं तो उपर्युक्त परिणाम का उपयोग कर LCM ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3: अभाज्य गुणन खण्डन विधि द्वारा 144, 180 और 192 के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए।

हल: अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा हम निम्न गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$$

तथा $$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3^1$$

अब महत्तम समापवर्तक (HCI) ज्ञात करने के लिए हम उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात ज्ञात करते हैं। यहाँ, पहले इन्हें इस प्रकार लिख लेते हैं,

उभयनिष्ठ गुणन खण्ड	न्यूनतम घातांक
2	2
3	1

अतः $\text{HCF} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

अब लघुत्तम समापवर्तक LCM ज्ञात करने के लिए हम संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डो की अधिकतम घातांको को इस प्रकार लिख लेते हैं,

अभाज्य गुणन खण्ड	अधिकतम घातांक
2	6
3	2
5	1

अतः $\text{LCM} = 2^6 \times 3^2 \times 5^1 = 64 \times 9 \times 5 = 2880$

उदाहरण 4: पूर्णांको के युग्म (510, 92) के HCF एवं LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि युग्म की दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल: अभाज्य गुणन खण्डन विधि द्वारा हम युग्म की संख्याओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं,

$$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$$

$$92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23^1$$

अब HCF ज्ञात करने हेतु हम इस प्रकार लिख सकते है

उभयनिष्ठ गुणन खण्ड	न्यूनतम घातंक
2	1

अतः $\text{HCF} = 2^1 = 2$

अब LCM ज्ञात करने हेतु निम्न प्रकार लिख लेते हैं

अभाज्य गुणन खण्ड	अधिकतम घातांक
2	2
3	1
5	1
17	1
23	1

अतः $LCM = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1 = 23460$

अब हम परिणाम की जाँच हेतु निम्न प्राप्त करते हैं,

युग्म की दोनो संख्याओं का गुणनफल $= 510 \times 92 = 46920$ . . . (i)

तथा $HCF \times LCM = 2 \times 23460 = 46920$ . . . (ii)

इस प्रकार (i) एवं (ii) तथ्यों से हम कह सकते हैं कि दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF X LCM

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणन खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 468 (ii) 945 (iii) 140
   (iv) 3825 (v) 20570
2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों का महत्तम समापवर्तक (HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि HCF × LCM = पूर्णांको का गुणनफल
   (i) 96 और 404 (ii) 336 और 54 (iii) 90 और 144
3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए:
   (i) 12, 15 और 21 (ii) 24, 15 और 36 (iii) 17, 23 और 29 (iv) 6, 72 और 120
   (v) 40, 36 और 126 (vi) 8, 9 और 25
4. किस खेल के मैदान के वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में रमन को 18 मिनिट लगते हैं, जबकि उसी वृत्ताकार पथ पर मैदान का एक चक्कर पूरा करने में अनुप्रिया को 12 मिनिट का समय लगता है। माना कि दोनों एक ही स्थानसे एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करते हैं तथा एक ही दिशा में चलते है तो बताइये कितने समय बाद दोनों पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?
5. एक संगोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वाले प्रतिभागियों की संख्या क्रमशः60, 84 और 108 है। यदि प्रत्येक कमरे में बराबर संख्या में एक ही विषय के प्रतिभागी बैठाये जाते है तो आवश्यक कमरों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

LGJH71

2.05 संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण

पिछली कक्षा में हमने अपरिमेय संख्याओं के बारे में संक्षेप में अध्ययन किया हैं। इनके अस्तित्व (existance) एवं संख्या रेखा पर इनके स्थान निर्धारण के बारे में भी पढ़ा है। अपरिमेय संख्यायें व्यापक रूप में $\sqrt{p}$ द्वारा व्यक्त की जाती है, जहाँ p एक धनात्मक अभाज्य संख्या है। हम जानते है कि किसी अपरिमेय संख्याआ को p/q रूप में नहीं लिखा जा सकता। यहाँ p एवं q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

उदाहरणार्थः $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 7\sqrt{5}$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएँ है।

पिछली कक्षा में अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्मों के बारे में भी पढ़ा है कि अपरिमेय संख्या का किसी परिमेय संख्या के साथ योग या अन्तर भी एक अपरिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। यह भी सत्य है कि एक अशून्य परिमेय संख्या एवं अपरिमेय संख्या के गुणनफल एवं भागफल भी एक अपरिमेय संख्या ही प्राप्त होती है।

यहाँ हम $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ एवं $\sqrt{5}$ संख्याओं की अपरिमेयता के प्रमाण स्थापित करेंगे अर्थात् इन संख्याओं को अपरिमेय संख्या सिद्ध करेंगे। हम विरोधामास विधि (proof by contradiction) एवं निम्नलिखित प्रमेय का उपयोग इन संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे।

प्रमेय–2.3: मान लिजिए p एक अभाज्य संख्या है तथा a एक घनात्मक पूर्णांक है। यदि p, a^2 को विभाजित करता है, तो p, a को भी विभाजित करेगा।

उपपत्तिः यह प्रमेय पिछले अनुच्छेद में पढ़ी अंक गणित की मूलभूत प्रमेय का सीधा परिणाम है। इस मूलभूत प्रमेय से, धनात्मर्क पूर्णांक a को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने पर,

$$a = p_1 p_2 p_3 ... p_n \text{ (माना)}$$

जहाँ $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ अभाज्य संख्याएँ है, परन्तु आवश्यक नहीं कि ये भिन्न–भिन्न हो।

अब $a^2 = (p_1 p_2 p_3 ... p_n)(p_1 p_2 p_3 ... p_n)$

$= p_1^2 p_2^2 p_3^2 ... p_n^2$

यहाँ यह दिया हुआ है कि p कोई अभाज्य संख्या है जो a^2 को विभाजित करती है।

अतः अंकगणित की मूलभूत प्रमेय के कथन से स्पष्ट है कि p, a^2 का एक अभाज्य गुणन खण्ड होगा। इस मूलभूत प्रमेय की अद्वितियता के गुण के उपयोग द्वारा हम कह सकते है कि a^2 के अभाज्य गुणन खण्ड केवल $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ है। इसलिए अभाज्य संख्या p संख्या, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ में से ही एक होगी।

चूँकि $a = p_1 p_2 p_3 ... p_n$ एवं p, संख्या $p_1 p_2 p_3 ... p_n$ में से एक है। अतः p धनात्मक पूर्णांक a को विभाजित करेगा।

प्रमेय–2.4 प्रमाणित कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \ b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (Co-prime) संख्याऐं हैं अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणन खण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{2}b = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$2b^2 = a^2 \quad \text{. . . (i)}$$

चूँकि $2b^2$, 2 से विभाजित होता है, अतः हम कह सकते हें कि 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय–2.3 से यह स्पष्ट है कि 2, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, a को विभाजित करता है।

अतः हम पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$a = 2c$ जहाँ c एक पूर्णांक है

अतः $a^2 = 4c^2$ . . . (ii)

समीकरण (i) से समीकरण (ii) में a^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$2b^2 = 4c^2$$

अर्थात् $b^2 = 2c^2$

यहाँ चूँकि $2c^2$, 2 से विभाजित होता है अतः b^2 भी 2 से विभाजित होगा।

अतः प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 2, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 2, b को भी विभाजित करता है।

प्रथम एवं द्वितीय परिणामों से स्पष्ट है कि 2, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह प्रमाणित हुआ कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय–2.5: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांक a एवं b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि,

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (co-prime) संख्याऐं है। अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{3}b = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$3b^2 = a^2 \quad \ldots(i)$$

चूँकि $3b^2$, 3 से विभाजित होता है। अतः हम कह सकते हैं कि 3, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय–2.3 से यह स्पष्ट है कि 3, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 3, a को विभाजित करता है।

अतः हम पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते हैं

$a = 3c$ जहाँ c एक पूर्णांक है

अतः $a^2 = 9c^2 \quad \ldots(ii)$

समीकरण (i) से समीकरण (ii) में a^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$3b^2 = 9c^2$$

अर्थात् $b^2 = 3c^2$

यहाँ चूँकि $3c^2$, 3 से विभाजित होता है अतः b^2 भी 3 से विभाजित होगा।

अतः प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 3, b को विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितिय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 3, b को विभाजित करता है।

प्रथम एवं द्वितिय परिणामों से स्पष्ट है कि 3, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह सिद्ध हुआ कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय–2.5: दर्शाइए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाणः माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। तब दो पूर्णांकों a और b के लिए निम्न कथन लिखा जा सकता है कि

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \; b \neq 0$$

जहाँ a और b सह अभाज्य (co-prime) संख्याऐं है अर्थात् a, b में कोई उभयनिष्ठ गुणन खण्ड नहीं है।

अतः $\sqrt{5}\,b = a$

$\Rightarrow \quad 5b^2 = a^2 \quad \ldots(i)$

चूँकि $5b^2$, 5 से विभाजित होता है अतः a^2 भी 5 से विभाजित किया जा सकता है।

प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते है कि 5, a को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार प्रथम परिणाम यह प्राप्त हुआ है कि 5, a को विभाजित करता है।

अतः पूर्णांक a को निम्न रूप में लिख सकते है

$a = 5c$, जहाँ c एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow \quad a^2 = 25c^2 \quad \ldots(ii)$

समीकरण (i) एवं (ii) से हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$5b^2 = 25c^2$$

$\Rightarrow \quad b^2 = 5c^2$

यहाँ स्पष्ट है कि b^2, 5 से विभाजित किया जा सकता है।

प्रमेय–2.3 के उपयोग से हम कह सकते हैं कि 5, b को भी विभाजित करेगा। इस प्रकार द्वितीय परिणाम यह प्राप्त हुआ कि 5, b को विभाजित करता है।

प्रथम एंव द्वितीय परिणामों से स्पष्ट है कि 5, पूर्णांक a और b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह कथन प्रारंभ में प्राप्त तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

अतः निष्कर्ष निकलता है कि हमारी प्रारंभिक कल्पना, कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः यह प्रमाणित होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

निम्न उदाहरणों द्वारा हम एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग, अनतर, गुणनफल एवं भागफल पर आधारित विशिष्ट स्थितियों को समझ सकेंगे।

उदाहरण 1: सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हलः माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 7\sqrt{5} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$, जहाँ a, b सह अभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है।

या $$\sqrt{5} = \frac{a}{7b} \quad \ldots(i)$$

चूंकि a, b पूर्णांक है, अतः $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। अतः समीकरण (i) से स्पष्ट है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी जो कि विरोधाभासी कथन है क्योंकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या होती हैं। अतः हमारी परिकल्पना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है। इससे सिद्ध होता है कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 2: सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या हैं।

हलः माना $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore \quad 3+2\sqrt{5} = \frac{a}{b},\ b \neq 0 \quad \ldots(i)$$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याऐं है। समीकरण (i) से हम लिख सकते है कि

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

या $$\sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b} \quad \ldots(ii)$$

चूँकि a, b पूर्णांक संख्याऐं है, अतः $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते है कि $\sqrt{5}$ तो अपरिमेय संख्या है अतः यह परिणाम विरोधाभासी है। अतः हमारी परिकल्पना कि $3+2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है, गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 3: दर्शाइए कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हलः माना $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore \qquad \sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b},\ b\neq 0 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ a, b पूर्णांक सह अभाज्य संख्याऐं है।
समीकरण (i) को निम्न प्रकार लिख सकते है,

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}-\sqrt{2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$5=\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad 5=\frac{a^2}{b^2}+2-2\sqrt{2}\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\sqrt{2}\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}-3$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{2}=\frac{a^2-3b^2}{2ab} \qquad \ldots(ii)$$

चूँकि a, b पूर्णांक है, अतः $\frac{a^2-3b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या होगी। अतः समीकरण (ii) से परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। जबकि हम जानते है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः यह परिणाम विरोधाभासी है इसलिए हमारी परिकल्पना कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।

इससे सिद्ध होता है कि $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नमाला 2.3

1. प्रमाणित कीजिए कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं है।

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $6+\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{2}$
3. यदि p और q अभाज्य धनात्मक पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2.06 परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार

हम जानते है कि $\frac{p}{q}, q\neq 0$ एक परिमेय संख्या हैं, जहाँ p और q सह अभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है। पिछली कक्षा में हमने इन संख्याओं के दशमलव प्रसार के बारे में पढ़ा है। हम जानते हैं कि परिमये संख्याओं के दशमलव प्रसार दो प्रकार के होते है। एक सांत दशमलव प्रसार (terminating decimal expansion) तथा दूसरा असांत या अनवसानी आवर्ती (non terminating repeating) दशमलव प्रसार। इस अनुच्छेद में हम एक परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार की प्रकृति जानेंगे कि कब यह सांत होगा और कब असांत या अनवसानी आवर्ती होगा।

आइये दशमलव प्रसार की प्रकृति को समझने के लिए हम यहां निम्नलिखित परिमेय संख्याओं पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं

(i) 0.375 (ii) 1.512 (iii) 0.01764 (iv) 23.3408

उपर्युक्त दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में परिवर्तित करने पर,

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$

(ii) $1.512 = \frac{1512}{1000} = \frac{1512}{10^3}$

(iii) $0.01764 = \frac{1764}{100000} = \frac{1764}{10^5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

इन सभी संख्याओं के हर, 10 की कोई घात के रूप में है। अतः ये दशमलव प्रसार सांत प्रकृति के है।

हम जानते है कि, 10 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 एवं 5 होते हैं। अतः 10 की धनात्मक घात को 2 और 5 की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ परिमेय संख्याऐं (i) से (iv) के भिन्न रूपों में अंश एवं हर के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को आपस में काटने पर इनके निम्न रूप प्राप्त होते हैं।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^3\times5^0}$

(ii) $1.512 = \frac{1512}{10^3} = \frac{2^3\times3^3\times7}{2^3\times5^3} = \frac{3^3\times7}{5^3} = \frac{189}{2^0\times5^3}$

(iii) $0.01764 = \frac{1764}{10^5} = \frac{2^2\times3^2\times7^2}{2^5\times5^5} = \frac{3^2\times7^2}{2^3\times5^5} = \frac{441}{2^3\times5^5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4} = \frac{14588}{2^0\times5^4}$

उपर्युक्त परिमेय संख्या प्रतिरूप से स्पष्ट है कि जिन परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत होता है, उनके हर $2^m\times5^n$ के रूप में लिखे जा सकते हैं, जहाँ m और n कोई ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है।

इस परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–4: मान लीजिए x एक ऐसी परिमेय संख्या हैं जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब x को $p/q,\ q\neq0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q सहअभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है तथा q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^m\times5^n$ के रूप का है, जहाँ m, n ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है। आइये विचार करते है कि क्या इस प्रमेय का विलोम कथन भी सत्य होगा?

हम जानते है कि, $a/b,\ b\neq0$, जहाँ a, b सहअभायज्य पूर्णांक है, रूप की किसी भी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत होगा, यदि b, 10 की कोई घात है।

उदाहरणार्थ–

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = \frac{375}{10^3} \Rightarrow \frac{3}{8} = 0.375$

(ii) $\frac{189}{125} = \frac{3^3\times7\times2^3}{5^3\times2^3} = \frac{1512}{10^3} \Rightarrow \frac{189}{125} = 1.512$

(iii) $\frac{441}{25000}=\frac{3^2\times7^2\times2^2}{2^3\times5^5\times2^2}=\frac{1764}{10^5}\Rightarrow\frac{441}{25000}=0.01764$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि $p/q, q\neq0$ के रूप की एक परिमेय संख्या का हर $2^m\times5^n$ के रूप का है (जहां m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है) को $a/b, b\neq0$ के तुल्य परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ b, 10 की कोई घात है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि परिमेय संख्या $p/q, q\neq0$ का दशमलव प्रसार सांत होगा। इस परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय–5: माना $x=\frac{p}{q}$, $q\neq0$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि, q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^m\times5^n$ के रूप का है, जहां m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है तब x का दशमलव प्रसार सांत होता है।

आइये अब हम ऐसी परिमेय संख्याओं के बारे में जानते है जिनके दशमलव प्रसार सांत नहीं है।

उदाहरणार्थ

हम निम्न परिमेय संख्याओं पर विचार करते है।

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{29}{343}$ (iii) $\frac{77}{210}$

(i) $\frac{5}{3}=1.6666...$ (ii) $\frac{29}{343}=0.0845481...$ (iii) $\frac{77}{210}=0.36666...$

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं में हर $2^m\times5^n$ के रूप का नहीं है तथा यहाँ हर से अंश में भाग लगाने पर शेषफल कभी 0 प्राप्त नहीं होगा एवं एक स्थिति के बाद भागफल की पुनरावृत्ति होती रहेगी। अर्थात् इस प्रकार की परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होते है।

इस कथन को प्रमेय रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमेय–6: माना $x=\frac{p}{q}, q\neq0$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार की है कि q के अभाज्य गुणनखण्डन $2^m\times5^n$ के रूप के नहीं है, जहाँ m, n ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है तब x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती (non terminating repeating) या अवसानी आवर्ती होता है।

उदाहरण 1: लम्बी विभाजन विधि के बिना बताइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है–

(i) $\frac{17}{8}$ (ii) $\frac{64}{455}$ (iii) $\frac{125}{441}$

हल: (i) यहाँ, $\frac{17}{8}=\frac{17}{2^3\times5^0}$

यहाँ परिमेय संख्या का हर 8, $2^3\times5^0$ है जो $2^m\times5^n$ के रूप का है? अतः $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

(ii) यहाँ, $\frac{64}{455}=\frac{64}{5\times7\times13}$

स्पष्ट है कि, हर 455, $2^m\times5^n$ के रूप का नहीं है, अतः $\frac{64}{455}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

(iii) यहाँ $\frac{125}{441} = \frac{5^3}{3^2 \times 7^2}$

स्पष्ट है कि हर 441, $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है। अतः $\frac{125}{441}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

प्रश्नमाला 2.4

2. लम्बी विभाजन प्रक्रिया का उपयोग न करते हुए बताइए कि निम्नलिखित परिमये संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है :

(i) $\frac{15}{1600}$ (ii) $\frac{13}{3125}$ (iii) $\frac{23}{2^3 \times 5^2}$ (iv) $\frac{17}{6}$

(v) $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$ (vi) $\frac{35}{50}$ (vii) $\frac{7}{80}$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार लिखिये एवं बताइये कि ये सांत है।

(i) $\frac{13}{125}$ (ii) $\frac{14588}{625}$ (iii) $\frac{49}{500}$

3. नीचे दर्शाये दशमलव प्रसार के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं यदि यह परिमेय संख्या है, तो इसके हर के अभाज्य गुणन खण्डन के बारे में अपनी टिप्पणी लिखिए।

(i) 0.120120012000120000 . . . (ii) 43.123456789 (iii) $27.\overline{142857}$

विविध प्रश्नमाला–2

2. 196 के अभाज्य गुणन खण्डों की घातों का योगफल है:

(क) 1 (ख) 2 (ग) 4 (घ) 6

2. दो संख्याओं को $m = pq^3$ तथा $n = p^3q^2$ के रूप में लिखा जाये तब m, n का महत्तम समापवर्तक बताइये जबकि p, q अभाज्य संख्याऐं है

(क) pq (ख) pq^2 (ग) p^2q^2 (घ) p^3q^3

3. 95 तथा 152 का महत्तम समापवर्तक (HCF) है

(क) 1 (ख) 19 (ग) 57 (घ) 38

4. दो संख्याओं का गुणनफल 1080 है उनका महत्तम समापवर्तक 30 है तो उनका लघुत्तम समापवर्तक है

(क) 5 (ख) 16 (ग) 36 (घ) 108

5. संख्या $\frac{441}{2^2 \times 5^7 \times 7^2}$ का दशमलव प्रसार होगा

(क) सांत (ख) असांत आवर्ती
(ग) सांत एवं असांत दोनो (घ) संख्या, परिमेय संख्या नहीं है

6. परिमेय संख्या $\frac{43}{2^2 \times 5^3}$ के दशमलव प्रसार का दशमलव के कितने अंकों के पश्चात अंत होगा?

(क) एक (ख) दो (ग) तीन (घ) चार

7. सबसे न्यूनतम संख्या जिससे $\sqrt{27}$ को गुणा करने पर एक प्राकृत संख्या प्राप्त होती है, होगी

(क) 3 (ख) $\sqrt{3}$ (ग) 9 (घ) $3\sqrt{3}$

8. यदि दो परिमेय संख्याओं के लिए HCF = LCM, तो संख्याऐं होनी चाहिये:

(क) भाज्य (ख) समान (ग) अभाज्य (घ) सहअभाज्य

9. यदि a तथा 18 का LCM 36 है तथा a तथा 18 का HCF 2 है, तो a का मान होगा

(क) 1 (ख) 2 (ग) 5 (घ) 4

10. यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो $6^n - 5^n$ में इकाई का अंक है।

(क) 1 (ख) 6 (ग) 5 (घ) 9

12. यदि $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ एक परिमेय संख्या है, तो q पर क्या प्रतिबन्ध होगा जबकि $\frac{p}{q}$ एक सांत दशमलव हो।

12. सरल कर बताइए कि संख्या $\frac{2\sqrt{45}+3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या?

13. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

14. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांको का गुणनफल 2 से भाज्य है।

15. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2053 और 967 को विभाजित करने पर शेषफल क्रमशः 5 तथा 7 प्राप्त होते हैं।

16. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याऐं क्यों है?

17. यदि दो संख्याओं 306 और 657 का महत्तम समापवर्तक 9 हो, तो इनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

18. एक आयताकार बरामदा 18 मी. 72 सेमी लम्बा तथा 13 मी. 20 सेमी चौड़ा है। इसमें समान विमाओं वाली वर्गाकार टाइलें लगानी हैं। इस प्रकार की टाइसों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

19. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं है।

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ (iv) $4+\sqrt{2}$

20. निम्न परिमेय संख्याओं के हर के अभाज्य गुणनखण्डन के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 34.12345 (ii) $43.\overline{123456789}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

2. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका: दो धनात्मक पूर्णांक a, b के लिए $a = bq + r$, जहाँ $0 \le r < b$ को संतुष्ट करने वाली, अद्वितिय पूर्णांक q एवं r विद्यमान होती है। यह कथन q एवं r के शून्य होने पर भी सत्य है।
2. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम: इस विधि से दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात किया जा सकता है। इसकके लिए निम्न चरणों का उपयोग करते हैं।

   चरण–1: a, b दोनो पूर्णांकों पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का उपयोग कीजिए तथा q पूर्णांक q_1 तथा r_1 ज्ञात कीजिए, जबकि $a = bq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b$

   चरण–2: यदि $r_1 = 0$, है, तो a तथा b का HCF b है।

   चरण–3: यदि $r_1 \ne 0$, तो b तथा r_1 के लिए युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का उपयोग कर पूर्णांक q_2 तथा r_2 प्राप्त कीजिए, जबकि $b = q_2 r_1 + r_2$ है।

   चरण–4: यदि $r_2 = 0$ है, तो a, b का HCF r_1 है

   चरण–5: यदि $r_2 \ne 0$, तो उपर्युक्त प्रक्रिया को चरण बद्ध तब तक दोहराते रहिये जबतक की शेषफल r_n शून्य न प्राप्त हो जावे। इस स्थिति वाला अन्तिम भाजक r_{n-1} ही a और b का HCF होगा।
3. अंक गणित की आधार भूतप्रमेय: प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है तथा गुणनखण्डन अद्वितीय होता है, इस पर बिना ध्यान दिये कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे है।
4. प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य गुणन खण्डों की घातों के आरोही अथवा अवरोही क्रम में अद्वितीय रूप से व्यक्तकी जा सकती है।
5. किसी धनात्मक पूर्णांक a के लिए p अभाज्य संख्या इस प्रकार है कि p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा।
6. यदि p धनात्मक अभाज्य संख्या है, तो $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या होती है।
7. किसी परिमेय संख्या p/q, का दशमलव प्रसार सांत होगा यदि हर q को $2^m \times 5^n$, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है, के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ p, q सहअभाज्य पूर्णांक संख्याऐं है। यदि q को $2^m \times 5^n$, के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है तो दशमलव प्रसार असांत आवर्ती पा अवसानी आवर्ती होगा।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

4. (i) 5 (ii) 10 (iii) 3 (iv) 45 (v) 196 (vi) 51 5. 2

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) $2^2 \times 3^2 \times 13$ (ii) $3^3 \times 5 \times 7$ (iii) $2^2 \times 5 \times 7$ (iv) $3^2 \times 5^2 \times 17$ (v) $2 \times 5 \times 11^2 \times 17$
2. (i) HCF = 4, LCM = 9696 (ii) HCF = 6, LCM = 3024 (iii) HCF = 18, LCM = 720
3. (i) HCF = 3, LCM = 420 (ii) HCF = 3, LCM = 360 (iii) HCF = 1, LCM = 11339
   (iv) HCF = 6, LCM = 360 (v) HCF = 2, LCM = 2520 (vi) HCF = 1, LCM = 1800
4. 36 मिनट 5. 21

प्रश्नमाला 2.4

1. (i) सांत (ii) सांत (iii) सांत (iv) असांत आवर्ती (v) असांत आवर्ती
   (vi) सांत (vii) सांत
2. (i) 0.104 (ii) 23.3408 (iii) 0.098
3. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय, हर के अभाज्य गुणन खण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप में है, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।

विविध प्रश्नमाला–2

1. (ग) 2. (ख) 3. (ख) 4. (ग) 5. (क) 6. (घ)
7. (ख) 8. (ख) 9. (घ) 10. (क)
11. हर q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप के होंगे, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।
12. परिमेय संख्या है।
15. 64 17. 22338 18. 4290
20. (i) चूँकि इसका दशमलव प्रसार सांत है तथा इसका हर $2^m \times 5^n$ के रूप का है, जहाँ m, n ऋणेत्तर पूर्णांक है।
(ii) चूँकि इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है। अतः इसके हर का अभाज्य गुणन खण्डन $2^m \times 5^n$ के रूप का नहीं है