Government of Tamilnadu

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

(MATHEMATICS - KANNADA)

X-STANDARD

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamil Nadu
First Edition - 2011
Revised Edition - 2015
(Published under Uniform System of School Education scheme)

Textbook Preparation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Price : Rs.

Printed by Web Offset at :

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ಮುನ್ನುಡಿ

ತಮಿಳುನಾಡು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತಂದಿದ್ದು, ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಕಾರಗಳಿಗೆ **ಏಕರೂಪ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ**ವನ್ನು ಜಾರಿಗೊಳಿಸಿರುವುದು ಸಂತೋಷದಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಇದು ತಮಿಳುನಾಡು ಸರ್ಕಾರವು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಸುವರ್ಣಾವಕಾಶವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣದ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಿದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಅರಸಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಉತ್ತಮ ಆಕರ್ಷಣೆಯೊಂದಿಗೆ ತನ್ನದೇ ಆದ ನೈಜ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಒಂದು ವಿಷಯವಾಗಿ ವಿಶಾಲವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಇದು ವಿಜ್ಞಾನಗಳು, ಇಂಜಿನೀಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತನ್ನ ಆಯ್ಕೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಶೋಭಿಸಲು ಗಣಿತೀಯ ಜ್ಞಾನವು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ, ಗಣಿತೀಯ ತರಬೇತಿಯು ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನೀಡುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ಶಿಸ್ತಿನ ಚಿಂತನೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು, ಅಂದರೆ, ಜಟಿಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕೂಡ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಕಾಲಜ್ಞಾನಿಗಳಾದ ತಮಿಳು ಕವಿ, **ತಿರುವಳ್ಳುವರ್**ರವರು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ,

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಕ್ಷರಗಳು ಎರಡೂ
ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಜನರ ಕಣ್ಣುಗಳು

– ಕುರಳ್ (392)

ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಗಣಿತೀಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಧಿಸುವ ಯಾವಾಗಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು ಮತ್ತು ಪರಿಹರಿಸಲು ನಮಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಎದೆಗಾರಿಕೆಯು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಾಧನವು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಇದು ಪ್ರಧಾನ ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ಬಲವಾಗಿದೆ. ಈ ಸತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಅಪಾರ ತೃಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗಗಳಿಗಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಕಲಿಯಬೇಕು.

ಮೇಲಾಗಿ, ದೇಶದ ಮುಂದಿನ ಪೀಳಿಗೆಯನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಉತ್ತಮ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ತರಬೇತಿಯು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳು ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗಕ್ಕೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಇತರೆ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತಳಹದಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸದೇ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೂಲ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಕಲಿಕೆಯ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ಅಂಗಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಒಂದು ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಹೇಗೆ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಯಿತು ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ತಿಳಿಯಪಡಿಸಿದ ಜಾಗೃತಿಯನ್ನೂ ಸಹ ಇದು ಪೋಷಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಉತ್ತಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಮತ್ತು ತಾರ್ಕಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪೂರ್ಣ ಅರ್ಥೈಸುವಿಕೆಗೆ ಪ್ರೇರೇಪಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಾಗುವಷ್ಟು ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒದಗಿಸುವಂತೆ ಅಧ್ಯಾಯದ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೋಗುವ ಮೊದಲು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದೊಂದಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಾವುಗಳೇ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಸಲಹೆ ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಶಿಕ್ಷಕರು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಅವರ ಸಹಾಯ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆಧಾರ ಗಣಿತದಿಂದ ಉನ್ನತ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಶಿಕ್ಷಕರು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಉದ್ದೇಶವನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಕ್ರಿಯಾಕಾರಿಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಂಬುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಶಿಕ್ಷಕರು ದ್ವಿ–ಮಾರ್ಗ ಸಂವಹನಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಯತ್ನವು ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ–ಕೇಂದ್ರಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ, ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡುವ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವ ಗುರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು, ಸ್ವತಃ ತಾವೇ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಂಬಂಧಿತ ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವತಃ ತಾವೇ ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಬ್ಬರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿವೆ.

"ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನಾವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ"

("We Learn Mathematics by doing Mathematics")

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಸುಧಾರಣೆಗಾಗಿ ಮೇಧಾವಿಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಬರುವ ಸಲಹೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಮರ್ಶೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

–Textbook team

ಪಠ್ಯವಸ್ತು (SYLLABUS)

ಅಧ್ಯಾಯ	ವಿಷಯ	ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಕಲಿಕಾ ಫಲಗಳು	ವಿನಿಮಯ ಬೋಧನಾ ಕೌಶಲ	ಅವಧಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
I. ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು • ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು– ಉದಾಹರಣೆ, ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಶೀಲನೆ • n(AUBUC) ಗೆ ಸೂತ್ರ • ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	• ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು. • ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು – ಗಣಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಗಣಗಳ ಪೂರಕತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆ ನೀಡುವುದು. • ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ವಿಧಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅರ್ಥೈಸುವುದು.	• ಎಲ್ಲಾ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಣಗಳಿಗೆ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ಔಷಧ ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.	26
II. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಶ್ರೇಢಿಗಳು • ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (A.P) • ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (G.P) • ಶ್ರೇಣಿಗಳು	• ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಕೆಲವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ನಮೂನೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಚುಕ್ಕೆ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣವಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.	27
III. ಬೀಜಗಣಿತ	• ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು • ಬಹುಪದಗಳು • ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ • ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.) • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು • ವರ್ಗಮೂಲ • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	• ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಬಗೆಗಿನ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಹುಪದದ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	• ದೃಷ್ಟಾಂತೀಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು – • ಚಿತ್ರಪಟಗಳನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣಗಳಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	

III. ಬೀಜಗಣಿತ		• ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು (ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ, ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು (ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಮಾತ್ರ) ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಆಧಾರಿತವಾದ ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಶೋಧಕ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವದ ನಡುವಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. • ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. • ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಕಾಣಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿರಿ.	40
IV. ಮಾತೃಕೆಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು • ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ • ಗುಣಾಕಾರ • ಮಾತೃಕೆಯ ಸಮೀಕರಣ	• ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಮತ್ತು ಕಳೆಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ (2x2; 2x3; 3x2) ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು. • ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಹರಿಸುವುದು.	• ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾ–ಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಅಂಕಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.	16

V. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಪುನರಾವರ್ತನೆ : ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ • ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ, ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಸೂತ್ರ, ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಸೂತ್ರ • ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ • ಸರಳರೇಖೆ	• ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು. • ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ವಿಭಜನೆಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯೊಂದಿಗೆ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಪ್ರವಣತೆ – ಛೇದಕ ರೂಪ, ಬಿಂದು – ಪ್ರವಣತೆ ರೂಪ, ಎರಡು ಬಿಂದು ರೂಪ, ಛೇದಕ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ (ii) ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ಅನ್ವಯಗಳಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶ • $y = mx + c$ ರೂಪವನ್ನು ಆರಂಭವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.	25
VI. ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ) • ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ) • ಕೋನಾರ್ಥಕ ಪ್ರಮೇಯ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ – ಆಂತರಿಕ ಸಂಗತಿ ಮಾತ್ರ) • ಕೋನಾರ್ಥಕ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ – ಆಂತರಿಕ ಸಂಗತಿ ಮಾತ್ರ) • ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (ಸಾಧನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳು) • ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ (ಸಾಧನೆರಹಿತವಾಗಿ)	• ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಹರಿಸಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.	• ಕಾಗದ ಮಡಚುವಿಕೆಯ ಸಮರೂಪತೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾವಣಾ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಔಪಚಾರಿಕ (ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ) ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದು. • ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆ • ಚಿತ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸುವುದು.	20
VII. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	• ಪೀಠಿಕೆ • ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು • ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು	• ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. (ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಮೀರದಂತೆ)	• ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು • ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು • ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು	21

VIII. ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳ, ಅರ್ಧ ಗೋಳ, ಛಿನ್ನಕಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ • ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ • ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಘನಫಲ	• ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳ, ಅರ್ಧ ಗೋಳ, ಛಿನ್ನಕಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ (ಎರಡು ಮಾತ್ರ) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ. • ಸ್ಥಿರವಾದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.	• ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು 3–ಆಯಾಮ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣಗಳಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿರಿ.	24
IX. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು • ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆ	• ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಪಾದ, ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿರುವ ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು (a) ಮಧ್ಯ ರೇಖೆ (b) ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದದ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು. • ರಚಿಸುವ ಮೊದಲು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧಿತ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ. • ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಂಬಂಧಿತ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	15
X. ನಕ್ಷೆಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು • ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು	• ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತಿಸಿರುವ ಕೌಶಲಗಳ ಮೇಲೆ ಗಮನವಿಡುವುದು. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು.	10
XI. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	• ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳ ಸ್ಮರಣೆ • ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು • ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ	• ವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸ್ಮರಿಸುವುದು. • ಹರವಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಪ್ತಿ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಪರೀಕ್ಷೆ, ಕ್ರೀಡೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಗಳಂತಹ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.	16
XII. ಸಂಭವನೀಯತೆ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಸಂಭವನೀಯತೆ – ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಮಾರ್ಗ • ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ	• ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳು, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಹಾಗೂ ಘಟನೆಗಳು – ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ, ಪೂರಕ, ಖಚಿತ ಮತ್ತು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.	• ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ತನಿಖೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.	15

ಪರಿವಿಡಿ

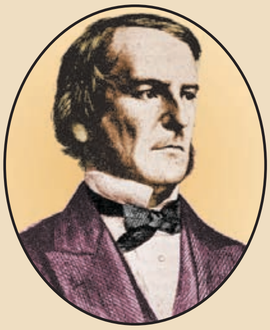
1.	**ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು**		**1 - 33**
	1.1	ಪೀಠಿಕೆ	1
	1.2	ಗಣಗಳು	1
	1.3	ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು	3
	1.4	ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು	5
	1.5	ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು	12
	1.6	ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆ	16
	1.7	ಸಂಬಂಧಗಳು	19
	1.8	ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	20
2.	**ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು**		**34 - 67**
	2.1	ಪೀಠಿಕೆ	34
	2.2	ಶ್ರೇಢಿಗಳು	35
	2.3	ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ	38
	2.4	ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ	43
	2.5	ಶ್ರೇಣಿಗಳು	49
3.	**ಬೀಜಗಣಿತ**		**68 - 117**
	3.1	ಪೀಠಿಕೆ	68
	3.2	ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ	69
	3.3	ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳು	80
	3.4	ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ	82
	3.5	ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ	86
	3.6	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು	93
	3.7	ವರ್ಗಮೂಲ	97
	3.8	ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	101
4.	**ಮಾತೃಕೆಗಳು**		**118 - 139**
	4.1	ಪೀಠಿಕೆ	118
	4.2	ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಚನೆ	119
	4.3	ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು	121
	4.4	ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು	125
	4.5	ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು	128
	4.6	ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ	130
	4.7	ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು	132
5.	**ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ**		**140 - 170**
	5.1	ಪೀಠಿಕೆ	140
	5.2	ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ	140
	5.3	ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	147
	5.4	ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಏಕರೇಖಾಗತೆ	148

5.5	ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	148
5.6	ಸರಳರೇಖೆಗಳು	151
5.7	ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ	164
6.	**ರೇಖಾಗಣಿತ**	**171 - 195**
6.1	ಪೀಠಿಕೆ	171
6.2	ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಮತ್ತು ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು	172
6.3	ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು	182
6.4	ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು	189
7.	**ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ**	**196 - 218**
7.1	ಪೀಠಿಕೆ	196
7.2	ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು	196
7.3	ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು	205
8.	**ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ**	**219 - 248**
8.1	ಪೀಠಿಕೆ	219
8.2	ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	219
8.3	ಘನಫಲ	230
8.4	ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆ	239
9.	**ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ**	**249 - 266**
9.1	ಪೀಠಿಕೆ	249
9.2	ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು	250
9.3	ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ	254
9.4	ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆ	259
10.	**ನಕ್ಷೆಗಳು**	**267 - 278**
10.1	ಪೀಠಿಕೆ	267
10.2	ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು	267
10.3	ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು	275
11.	**ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ**	**279 - 298**
11.1	ಪೀಠಿಕೆ	279
11.2	ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು	280
12.	**ಸಂಭವನೀಯತೆ**	**299 - 316**
12.1	ಪೀಠಿಕೆ	299
12.2	ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	302
12.3	ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ	309
•	**ಉತ್ತರಗಳು**	**317 - 327**
•	**ಇನ್ನಿತರೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು**	**328 - 329**
•	**ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು**	**330**
•	**ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ವಿನ್ಯಾಸ**	**331 - 334**

1 ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

A set is Many that allows itself to be thought of as a One
- Georg Cantor

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಗಣಗಳು
- ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು
- ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
- ಉತ್ಪನ್ನಗಳು



ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲೆ (1815-1864)
ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಬೂಲೆರವರು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಂಕೇತಗಳು ಮತ್ತು ತರ್ಕಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಂಕೇತಗಳ ನಡುವೆ ಸಾಮೀಪ್ಯ ಹೋಲಿಕೆಯಿರುವುದನ್ನು ನಂಬಿದ್ದರು.

ಇವರು ಗಣಿತದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತರ್ಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇವರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಸಹ, ಬೂಲಿಯನ್ ಬೀಜಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಕಗಳ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಉತ್ಸುಕರಾಗಿದ್ದರು.

ಆಧುನಿಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಗಣಕಯಂತ್ರ ತರ್ಕದ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಬೂಲಿಯನ್ ತರ್ಕವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಬೂಲೆರವರನ್ನು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸ್ಥಾಪಕರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದೆ. ಸಂಕೇತ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಗಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಭಾಷೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ವಿಷಯವು 19 ನೇ ಶತಮಾನದ ಉತ್ತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲೆ (1815-1864) ಮತ್ತು ಜಾರ್ಜ್ ಕ್ಯಾಂಟರ್ (1845-1918) ರವರ ಕಾರ್ಯದಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಯಿತು. ಇವರ ಅಗಾಧವಾದ ಪ್ರಭಾವವು 20 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಯಿತು. ಇದು ಹಲವಾರು ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಏಕೀಕರಿಸಲು ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಗಣಗಳ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಾವು ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸ್ಮರಿಸಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು (ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) $\mathbb{N}$ ನಿಂದ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\mathbb{R}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.2 ಗಣಗಳು (Sets)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮೂಹವೇ **ಗಣ**. ಗಣದಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು **ಧಾತುಗಳು** ಅಥವಾ **ಗಣಾಂಶಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, "ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ" ಎಂದರೆ ವಸ್ತುವು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಮಾನದಂಡ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗೊಂದಲವಿಲ್ಲದೇ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ "ಎತ್ತರವಾದ ಜನರ" ಸಂಗ್ರಹ ಎಂಬುದು ಗಣವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮಾನದಂಡವಾದ "ಎತ್ತರವಾದ ಜನರು" ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಂಗ್ರಹವು ಗಣವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಕೇತ

ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಗಳನ್ನು A, B, X ಗಳಂತಹ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣದ ಧಾತುಗಳನ್ನು x, y ಗಳಂತಹ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. x ಎಂಬುದು Y ಗಣದ ಧಾತು ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $x \in Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. t ಎಂಬುದು Y ಗಣದ ಧಾತುವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $t \notin Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

(ii) ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಅಥವಾ ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

(iii) ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಸರಿ (ಸಮ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

(iv) ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

(v) ಚಂದ್ರನಲ್ಲಿ ಪಾದಾರ್ಪಣೆ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಜನರ ಗಣ.

(i), (ii), (iii), (iv) ಮತ್ತು (v) ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C, D ಮತ್ತು E ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, D ಗಣವು ಯಾವುದೇ ಧಾತುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿಯ ಯಾವುದೇ ಗಣವನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. **ಶೂನ್ಯ ಗಣ**ವನ್ನು ϕ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) ಒಂದು ಗಣವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಪರಿಮಿತ ಗಣ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಗಣವು ಪರಿಮಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಗಣವು ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಮತ್ತು C ಗಣವು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ತನ್ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ಕೂಡ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) X ಗಣವು ಪರಿಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, Xನ **ಪ್ರಧಾನತೆ**ಯನ್ನು X ನಲ್ಲಿರುವ ಧಾತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು $n(X)$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) X ಗಣವು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, X ನ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ನಾವು ∞ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ A, B ಗಣಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು B ನ ಧಾತುವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ A ಯು B ನ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಕೆಲವು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉಪಗಣ X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. Xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು Y ನ ಧಾತುವಾಗಿದ್ದರೆ, X ಗಣವು Yನ **ಉಪಗಣ**ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $z \in X$ ಎಂಬುದು $z \in Y$ ಎಂದಾದರೆ, X ಗಣವು Yನ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣವು ತನ್ನದರ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

X ಎಂಬುದು Yನ ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು $X \subseteq Y$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಗಣದ ಸಮಾನತೆ X ಮತ್ತು Y ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಗಣಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $X=Y$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $X=Y$ ಆದರೆ, $X \subseteq Y$ ಮತ್ತು $Y \subseteq X$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಸಮಾನ ಗಣಗಳು $n(X)=n(Y)$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಗಣಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $P=\{x \mid x^2-x-6=0\}$ ಮತ್ತು $Q=\{3,-2\}$ ಆಗಿರಲಿ. P, Q ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $P=Q$. $F=\{3, 2\}$ ಆದರೆ, F, Qಗಳು ಸಮಾನ ಗಣಗಳು ಆದರೆ $Q \neq F$. ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಎರಡು ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾನ ಗಣಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

ಘಾತ ಗಣ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣ A. $P(A)$ ಎಂಬುದು A ನ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. $P(A)$ ಗಣವನ್ನು A ನ ಘಾತ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$n(A)=m$ ಆದರೆ, $P(A)$ ನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $n(P(A))=2^m$ ಆಗಿದೆ.

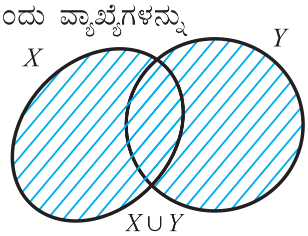
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A=\{a,b,c\}$ ಆದರೆ, $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\}.\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $n(P(A))=8$.

ಈಗ, ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ಹೊಸ ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯೆಂದರೆ ಎರಡೂ ಗಣಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಹಾಕುವುದು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯೆಂದರೆ ಎರಡೂ ಗಣಗಳಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮಂಜಸವಾದ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.3 ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Operations on sets)

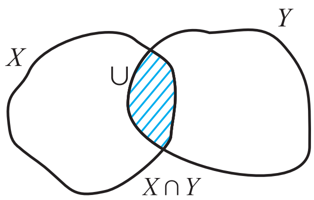
X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನ ಹೊಸ ಗಣಗಳನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.1

(i) **ಸಂಯೋಗ** $X \cup Y=\{z \mid z \in X$ ಅಥವಾ $z \in Y\}$

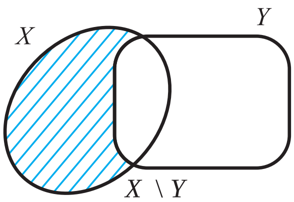
$X \cup Y$ ("X ಸಂಯೋಗ Y") ಎಂಬುದು X ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.1 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $X \subseteq X \cup Y$ ಮತ್ತು $Y \subseteq X \cup Y$.



ಚಿತ್ರ 1.2

(ii) **ಛೇದನ** $X \cup Y=\{z \mid z \in X$ ಮತ್ತು $z \in Y\}$

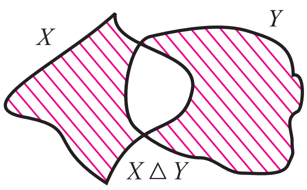
$X \cap Y$ ("X ಛೇದನ Y") ಎಂಬುದು X ಮತ್ತು Y ಗಳೆರಡರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.2 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $X \cap Y \subseteq X$ ಮತ್ತು $X \cap Y \subseteq Y$.



ಚಿತ್ರ 1.3

(iii) **ಗಣದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** $X \setminus Y=\{z \mid z \in X$ ಆದರೆ $z \notin Y\}$

$X \setminus Y$ ("X ವ್ಯತ್ಯಾಸ Y") ಎಂಬುದು X ನಲ್ಲಿರುವ Y ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.3 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಲೇಖಕರು $A\setminus B$ ಗೆ $A-B$ ನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಳಸುವ $A\setminus B$ ಸಂಕೇತವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸೋಣ.

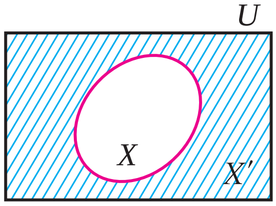


ಚಿತ್ರ 1.4

(iv) **ಸಮಮಿತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** $X \triangle Y=(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

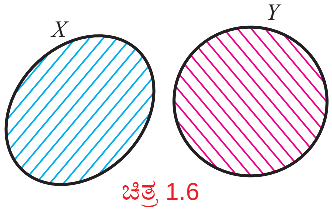
$X \triangle Y$ ("X ಸಮಮಿತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ Y") ಎಂಬುದು $X \cup Y$ ನಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ $X \cap Y$ ನಲ್ಲಿರದ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(v) **ಪೂರಕ** $X \subseteq U$ ಆದರೆ, $U \setminus X$ ಎಂಬುದನ್ನು U ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ X ನ ಪೂರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ U ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವ ಗಣ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಶ್ವ ಗಣವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದರೆ, $U \setminus X$ ನ್ನು X' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು X ನ ಪೂರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗಣ $A\setminus B$ ನ್ನು A ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ B ನ ಪೂರಕ ಎಂದೂ ಸಹ ಕಾಣಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.5

(vi) **ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳು** X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು (ಪ್ರತ್ಯೇಕ) ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಅವೆರಡು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಾರದು. ಅಂದರೆ, $X \cap Y = \phi$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳಾದರೆ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.6

ಗಮನಿಸಿ

ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಆವೃತ ವಕ್ರವನ್ನು ಸಹ ಬಳಸಬಹುದು. ಗಣಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ನಾವು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ನಾವು ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$A = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 12 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$ ಮತ್ತು $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B\}$

$= \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 12 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಅಥವಾ $x = 12$ ಅಥವಾ $15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ ಮತ್ತು $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ ಆದರೆ $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$ ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗಿರಲಿ.

0 ಯು ಧನಾತ್ಮಕವೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣಾತ್ಮಕವೂ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $0 \notin A$.

ಈಗ, $A' = U \setminus A = \{x : x$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದರೆ ಇದು A ನಲ್ಲಿರಬಾರದು$\}$

$= \{x \mid x$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

U ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವಗಣ ಮತ್ತು A, B ಗಳು U ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$ (ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ (iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$ (vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

1.4 ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of set operations)

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

(i) ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ (Commutative property)

(a) $A \cup B = B \cup A$ (ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(ii) ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮ (Associative property)

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(iii) ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ (Distributive property)

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ಛೇದನವು ಸಂಯೋಗದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ಸಂಯೋಗವು ಛೇದನದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ)

ನಾವು ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಉತ್ತಮವಾದುದು. ಆದರೆ ಇದು ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಹೊರತಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಕಠಿಣವಾದ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಮತ್ತು ಮೆಚ್ಚುಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ನೀಡೋಣ.

(i) ಸಂಯೋಗದ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ (Commutative property of union)

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ $A \cup B$ ಮತ್ತು $B \cup A$ ಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಗಣಗಳ ಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಹೇಳುವಂತೆ ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಅವೆರಡು ಗಣಗಳು ಒಂದೇ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ನಾವು ಮೊದಲು $A \cup B$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $B \cup A$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸೋಣ. $z \in A \cup B$ ಯು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಧಾತುವಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಸಂಯೋಗದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $z \in A$ ಅಥವಾ $z \in B$. ಅಂದರೆ,

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $z \in A \cup B \implies z \in A$ ಅಥವಾ $z \in B$

$\implies z \in B$ ಅಥವಾ $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$. $B \cup A$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ (1)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $z \in A \cup B$ ಗೆ ಸಮೀಕರಣ (1) ನಿಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು $A \cup B$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $B \cup A$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, ಉಪಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ ಆಗಿದೆ.

ನಂತರ, ನಾವು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ $y \in B \cup A$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು y ಎಂಬುದು $A \cup B$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $y \in B \cup A \implies y \in B$ ಅಥವಾ $y \in A$

$\implies y \in A$ ಅಥವಾ $y \in B$

$\implies y \in A \cup B$. $A \cup B$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ (2)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $y \in B \cup A$ ಗೆ ಸಮೀಕರಣ (2) ನಿಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು $B \cup A$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $A \cup B$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, ಉಪಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ ಮತ್ತು $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದು $(A \cup B) = (B \cup A)$ ಎಂದಾಗ ಮಾತ್ರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (About proofs in Mathematics)

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು **ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗಿಯೇ ಇರಬೇಕು. ಹೇಳಿಕೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ನಿಜವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, ಆ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು **ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

(iv) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ, $A \setminus B = B \setminus A$.

ಬಹಳಷ್ಟು ಬೆಸ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ ಹೇಳಿಕೆ (i) ತಪ್ಪು. ಏಕೆಂದರೆ, $9, 15, 21, 45$ ಇತ್ಯಾದಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

ಹೇಳಿಕೆ (ii) ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ನೀವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೀರಿ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (iii) ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, 2 ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಸರಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. 2 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿಕೆ (iii) ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಇದು ಎಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ತಿಳಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (iv) ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸೋಣ. ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ, ನಾವು $A\setminus B$ ನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ A ನಿಂದ B ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೊರತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ, $B \setminus A$ ನಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ತಪ್ಪು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $A = \{2, 5, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{5, 7, -1\}$. ಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A \setminus B = \{2, 8\}$ ಮತ್ತು $B \setminus A = \{7, -1\}$ ಹಾಗೂ $A \setminus B \neq B \setminus A$. ಆದ್ದರಿಂದ, (iv) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.1

ಕೊಟ್ಟಿರುವ $A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$ ಮತ್ತು $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$ ಗಣಗಳಿಗೆ

(i) ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(ii) ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

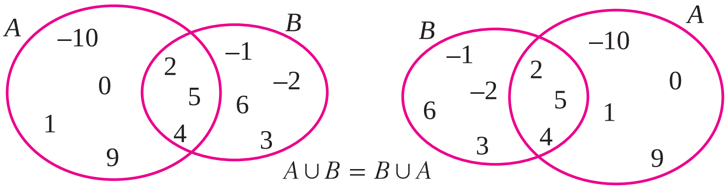
ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ,
$$A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$$
$$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} \quad (1)$$

ಹಾಗೂ,
$$B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$$
$$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup B = B \cup A$ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



$A \cup B = B \cup A$

ಚಿತ್ರ 1.7

ಇದರಿಂದ, ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದೆ.

(ii) ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಈಗ, $A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

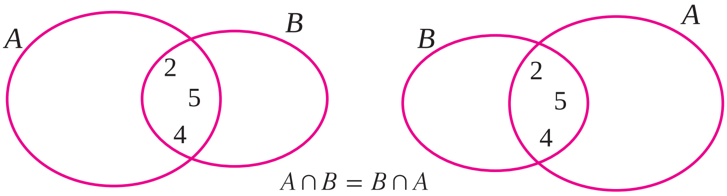
$= \{2, 4, 5\}$. (1)

ಹಾಗೂ, $B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}$. (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳಿಗೆ $A \cap B = B \cap A$.

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.8

ಇದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{5, 6, 7, 8\}$ ಗಣಗಳಿಗೆ,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

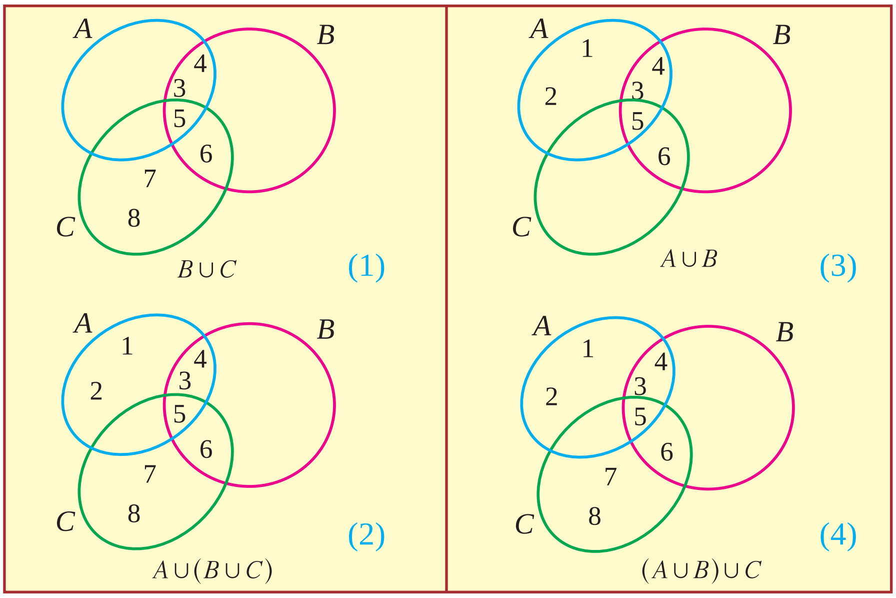
$\therefore \ A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

ಈಗ, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \ (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.9

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.3

$A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}$ ಮತ್ತು $C = \{a,e\}$ ಆಗಿರಲಿ.

(i) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}$ ಮತ್ತು $C = \{a,e\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು $A\cap(B\cap C)$ ನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ, $B\cap C = \{a,c,e\}\cap\{a,e\} = \{a,e\}$; ಆದ್ದರಿಂದ,

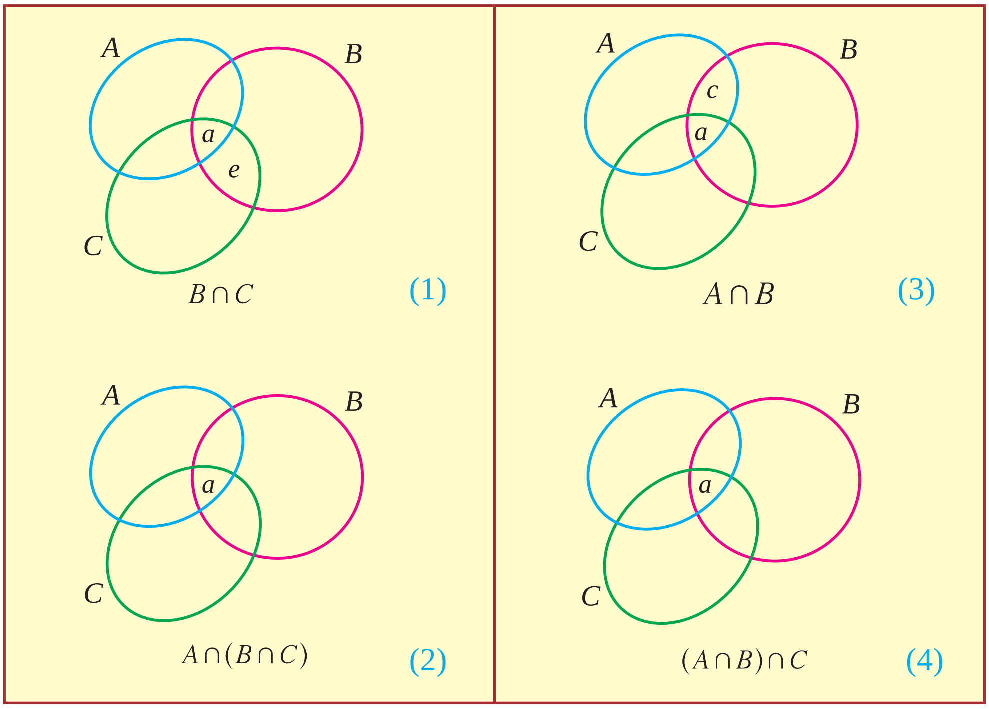
$A\cap(B\cap C) = \{a,b,c,d\}\cap\{a,e\} = \{a\}$. (1)

ನಂತರ, $A\cap B = \{a,b,c,d.\}\cap\{a,c,e\} = \{a,c\}$. ಇದರಿಂದ,

$(A\cap B)\cap C = \{a,c\}\cap\{a,e\} = \{a\}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.10

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.4

$A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{a,e,i,o,u\}$ ಮತ್ತು $C = \{c,d,e,u\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $A\setminus(B\setminus C) \neq (A\setminus B)\setminus C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲು ನಾವು $A\setminus(B\setminus C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$$(B\setminus C)=\{a,e,i,o,u\}\setminus\{c,d,e,u\}=\{a,i,o\}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,i,o\}=\{b,c,d,e\}.$ (1)

ನಂತರ, ನಾವು $(A\setminus B)\setminus C$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

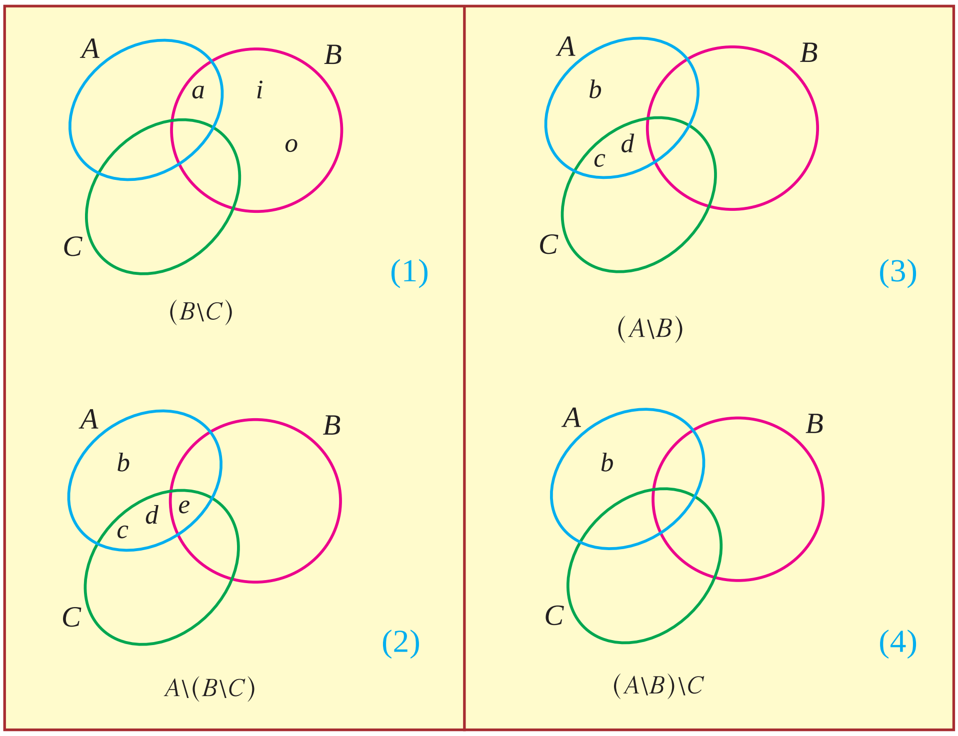
$$A\setminus B=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,e,i,o,u\}=\{b,c,d\}.$$

ಇದರಿಂದ, $(A\setminus B)\setminus C=\{b,c,d\}\setminus\{c,d,e,u\}=\{b\}.$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿಲ್ಲ.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.11

(2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, A, B ಮತ್ತು C ಗಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವುಗಳಾದರೆ, $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$. ಇದು ಸಾಧಿಸಲು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. B ಮತ್ತು C ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $B\setminus C=B$ ಆಗಿದೆ. A, B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $A\setminus B=A$. ಆದ್ದರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)=A$ ಆಗಿದೆ. $A\setminus B=A$ ಮತ್ತು A, C ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ $A\setminus C=A$. ಇದರಿಂದ, $(A\setminus B)\setminus C=A$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಂತೆ $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಿಗೆ, ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.5

$A = \{0,1,2,3,4\}, B = \{1,-2,3,4,5,6\}$ ಮತ್ತು $C = \{2,4,6,7\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲು, ನಾವು $A \cup (B \cap C)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$B \cap C = \{1,-2,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,7\} = \{4,6\};$$

$$A \cup (B \cap C) = \{0,1,2,3,4\} \cup \{4,6\} = \{0,1,2,3,4,6\}. \quad (1)$$

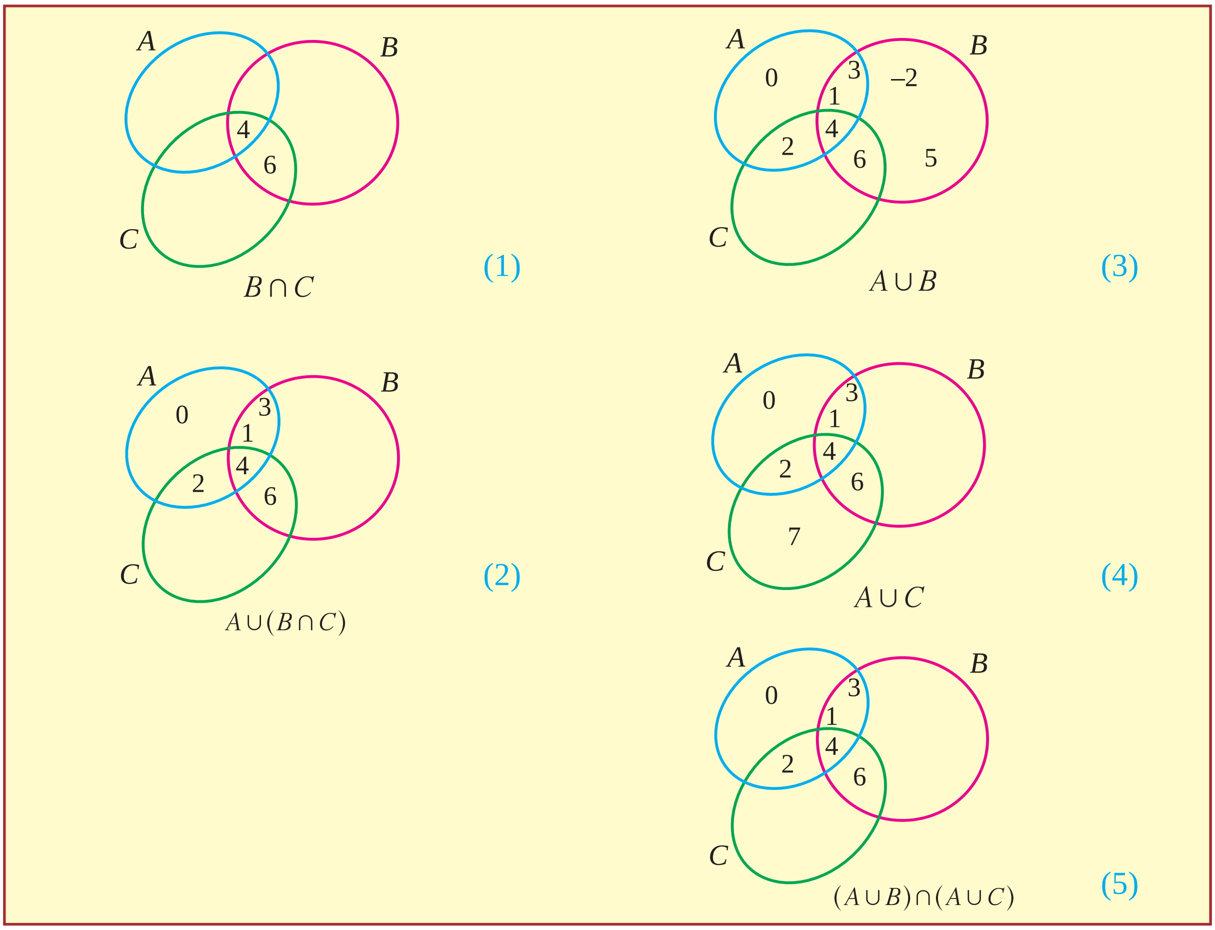
ನಂತರ, $$A \cup B = \{0,1,2,3,4\} \cup \{1,-2,3,4,5,6\}$$
$$= \{-2,0,1,2,3,4,5,6\},$$

$$A \cup C = \{0,1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,7\} = \{0,1,2,3,4,6,7\}.$$

ಆಗ, $$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\} \cap \{0,1,2,3,4,6,7\}$$
$$= \{0,1,2,3,4,6\}. \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.12

(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.6

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}, B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ ಮತ್ತು

$C = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$ ಗಳಿಗೆ, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು A ಗಣವು -3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುವ ಮತ್ತು 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ಕೇವಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲ) ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ B ಗಣವು 5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$; ಅಂದರೆ, A ಗಣವು -3 ರಿಂದ 4 ರವರೆಗೆ ಆದರೆ 4 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ, $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

ಈಗ, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$; ಆದ್ದರಿಂದ,

$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1)

ನಂತರ, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$A \cap B = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$;

ಮತ್ತು $A \cap C = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

ಇದರಿಂದ, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3,\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cup B = B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ (ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ).
2. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cap B$ ಮತ್ತು $A \setminus B$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ).
3. $P = \{a, b, c\}, Q = \{g, h, x, y\}$ ಮತ್ತು $R = \{a, e, f, s\}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. $A = \{4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$
5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ ಆದರೆ, ಗಣ ಸಂಯೋಗದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

6. $A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}$ ಮತ್ತು $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$ ಗಳಿಗೆ ಗಣ ಛೇದನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

7. $A = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 42 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$ ಮತ್ತು $C = \{1, 4, 5, 6\}$ ಗಳಿಗೆ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

8. $P = \{a, b, c, d, e\}, Q = \{a, e, i, o, u\}$ ಮತ್ತು $R = \{a, c, e, g\}$ ಆದರೆ, ಗಣ ಛೇದನದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. $A = \{5, 10, 15, 20\}$; $B = \{6, 10, 12, 18, 24\}$ ಮತ್ತು $C = \{7, 10, 12, 14, 21, 28\}$ ಗಳಿಗೆ $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ಆಗುವುದೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

10. $A = \{-5, -3, -2, -1\}, B = \{-2, -1, 0\}$ ಮತ್ತು $C = \{-6, -4, -2\}$ ಆಗಿರಲಿ. $A \setminus (B \setminus C)$ ಮತ್ತು $(A \setminus B) \setminus C$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು?

11. $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}, B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ಗಳಿಗೆ (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (iii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. (iv) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (ii) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

1.5 ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws)

ಡಿ ಮಾರ್ಗನರ ತಂದೆ (ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಪ್ರಜೆ) ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಈಸ್ಟ್ ಇಂಡಿಯಾ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ಸೇವೆಯಲ್ಲಿದ್ದರು. ಅಗಸ್ತಸ್ ಡಿ ಮಾರ್ಗನ್ (1806-1871) ಭಾರತದ ತಮಿಳುನಾಡು ರಾಜ್ಯದ ಮಧುರೈನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದರು. ಇವರು ಏಳು ತಿಂಗಳ ಮಗುವಾಗಿದ್ದಾಗ ಇವರ ಕುಟುಂಬವರ್ಗವು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿಗೆ ತೆರಳಿತು. ಇವರು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್‌ನ ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಡೆದರು. ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು ಗಣದ ಮೂರು ಆಧಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಪೂರಕತೆಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸುತ್ತವೆ.

ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws for set difference)

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ,

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ಪೂರಕತೆಗೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws for complementation)

U ಎಂಬುದು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

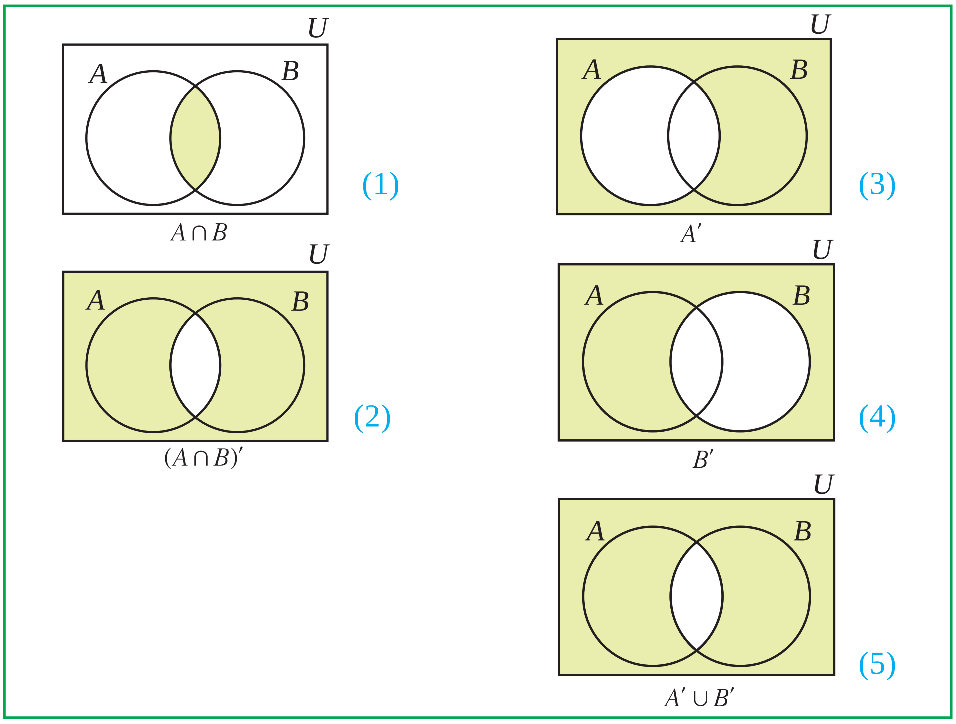
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಯಿಂದ ಪೂರಕತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಯು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಗಣ Dಗೆ, $D' = U \setminus D$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.7

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ



(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $(A\cap B)' = A'\cup B'$ ಎಂಬುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

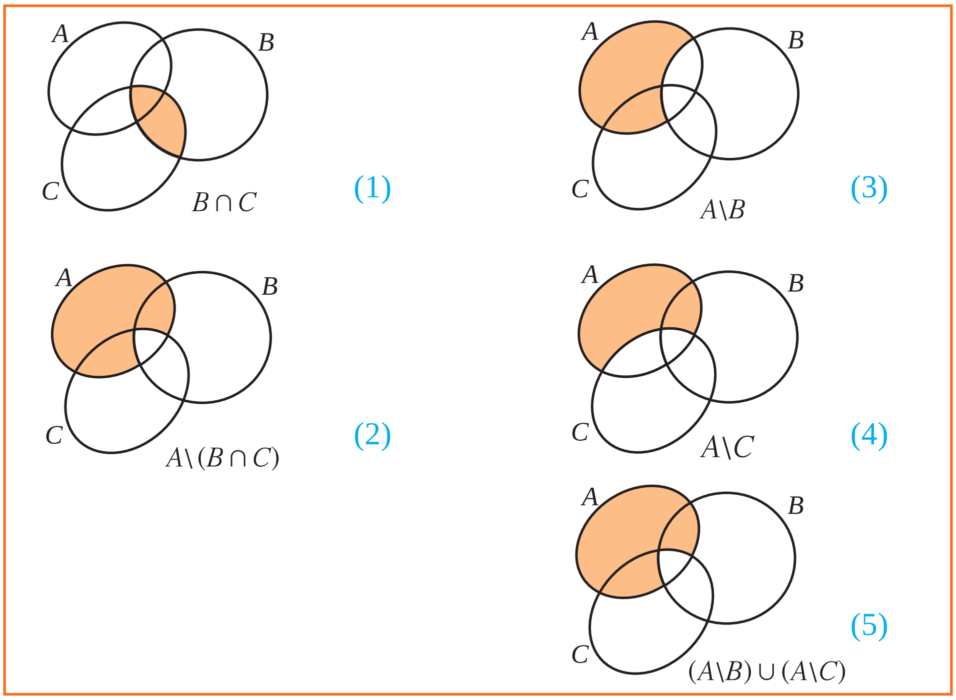
ಚಿತ್ರ 1.13

ಉದಾಹರಣೆ 1.8

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

ಪರಿಹಾರ



ಚಿತ್ರ 1.14

(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.9

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಪೂರಕತೆಯ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು ನಾವು $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ,

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

ಇದರಿಂದ,

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (1)$$

ನಂತರ,

$$A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಗೆ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.10

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ ಮತ್ತು $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$ ಆಗಿರಲಿ. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು,

$$B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

ಆಗ

$$A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$$

$$= \{a, b, x, z\}. \qquad (1)$$

ನಂತರ, $A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ ಮತ್ತು $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}. \qquad (2)$$

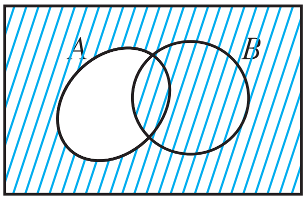
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

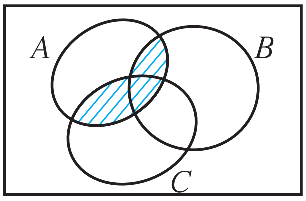
1. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.
   (i) $U = \{5, 6, 7, 8, ...13\}$, $A = \{5, 8, 10, 11\}$ ಮತ್ತು $B = \{5, 6, 7, 9, 10\}$
   (ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $M = \{b, d, f, g\}$ ಮತ್ತು $N = \{a, b, d, e, g\}$

2. ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅಗತ್ಯವೆಂಬಂತೆ $U, A, B, C, \cup, \cap, '$ ಮತ್ತು $\setminus$ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

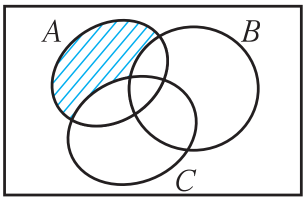
(i)



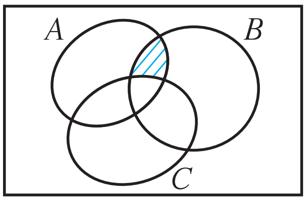
(ii)



(iii)



(iv)



3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $A \cap B \cap C$ (ii) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು ಆದರೆ ಅವೆರಡೂ C ನ ಉಪಗಣಗಳು

(iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ ಮತ್ತು $B = \{4, 16, 20, 28\}$ ಆದರೆ, $(A \cup B)'$ ಮತ್ತು $(A \cap B)'$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, f, g\}$ ಮತ್ತು= $B = \{a, b, c\}$ ಆದರೆ, ಪೂರಕತೆಯ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

7. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ ಮತ್ತು $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$

8. $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$ ಮತ್ತು $C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ ಆದರೆ, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.6 ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆ (Cardinality of sets)

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. A, B ಮತ್ತು $A\cap B$ ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆಯು ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ $A\cup B$ ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸೂತ್ರವು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು $A\cup B\cup C$ ನ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಸೂತ್ರವೇನು? ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರವು

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಬಳಕೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.11

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 65 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು, 45 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಕಿ, 42 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕ್ರಿಕೆಟ್, 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಹಾಕಿ, 25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಕಿ ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಹಾಗೂ 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೂರೂ ಆಟಗಳನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಆಟವನ್ನಾದರೂ ಆಡುತ್ತಾನೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.)

ಪರಿಹಾರ F, H ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಾಲ್ಚೆಂಡು, ಹಾಕಿ ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆಗ, $n(F)=65, n(H)=45$, ಮತ್ತು $n(C)=42$.

ಹಾಗೂ, $n(F\cap H)=20$, $n(F\cap C)=25$, $n(H\cap C)=15$ ಮತ್ತು $n(F\cap H\cap C)=8$.

ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ, $n(F\cup H\cup C)$.

ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$n(F\cup H\cup C)=n(F)+n(H)+n(C)-n(F\cap H)$$

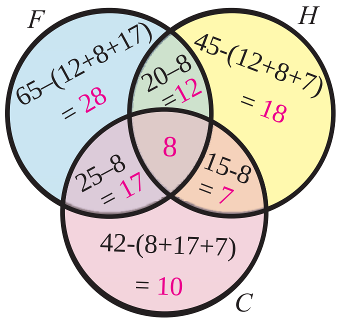
$$-n(H\cap C)-n(F\cap C)+n(F\cap H\cap C)$$

$$=65+45+42-20-25-15+8=100.$$

ಇದರಿಂದ, ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 100 ಆಗಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಕೂಡ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು. ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ತರ್ಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯು ಮೂರು ಛೇದಿಸುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಮತ್ತು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಆಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 1.15

ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

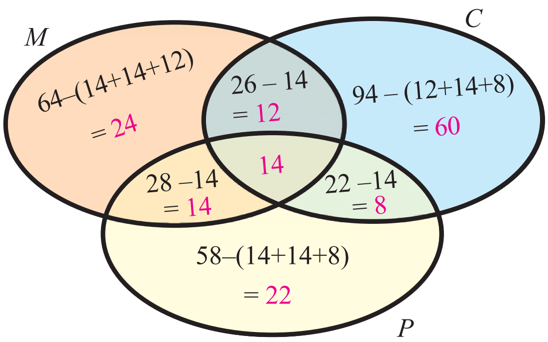
= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.

ಉದಾಹರಣೆ 1.12

ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, 64 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, 94 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ, 58 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 28 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 26 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ, 22 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗೂ 14 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವುದಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ. ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

M, C, P ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.16

$n(M\cap C\cap P) = 14$

$n(M\cap C\cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M\cap P\cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C\cap P\cap M') = 22 - 14 = 8$

ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 64–(14+14+12) = 24

ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 94 – (12+14+8) = 60

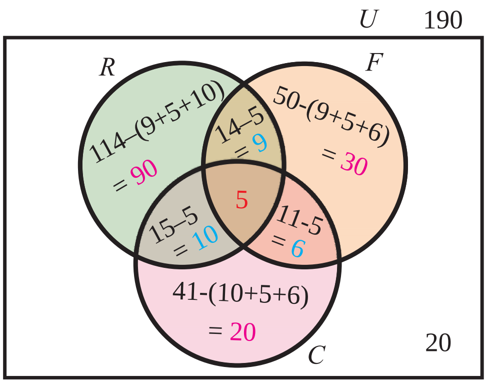
ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 58 – (14+14+8) = 22

ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 24+60+22 = 106

ಉದಾಹರಣೆ 1.13

ಒಂದು ಆಕಾಶವಾಣಿ ಕೇಂದ್ರವು 190 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಅವರು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಸಂಗೀತದ ವಿಧಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿತು. ಈ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ, 114 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 41 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 14 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಮತ್ತು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಮತ್ತು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 11 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಮತ್ತು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಹಾಗೂ 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿತು. ಹಾಗಾದರೆ, (i) ಮೂರು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನೂ ಇಚ್ಛೆಪಡದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ವಿಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಚ್ಛಿಸುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (iii) ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಆದರೆ ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ R, F ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ, ಜಾನಪದ ಮತ್ತು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.17

$n(R\cap F\cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R\cap C\cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F\cap C\cap R') = 11 - 5 = 6.$

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ, ಸಂಗೀತದ ಮೂರು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170$.

ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 190$.

ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 190 - 170 = 20$.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 9 + 6 + 10 = 25$.

ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡುವ ಆದರೆ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 30 + 6 = 36$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳು ಮತ್ತು U ಎಂಬುದು $n(U) = 700$ ಆಗುವಂತೆ ವಿಶ್ವಗಣ, $n(A) = 200, n(B) = 300$ ಮತ್ತು $n(A \cap B) = 100$ ಆದರೆ, $n(A' \cap B')$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500, n(A \cup B) = 410$ ಆದರೆ, $n(A' \cup B')$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ $n(A) = 17, n(B) = 17, n(C) = 17, n(A \cap B) = 7$ $n(B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 5$ ಮತ್ತು $n(A \cap B \cap C) = 2$ ಆದರೆ, $n(A \cup B \cup C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಗೆ $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
   (i) $A = \{4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$ ಮತ್ತು $C = \{6, 7, 8, 9\}$
   (ii) $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{x, y, z\}$ ಮತ್ತು $C = \{a, e, x\}$
5. ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ, 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಯಾರೊಬ್ಬರೂ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿಲ್ಲ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ವಿಷಯದಲ್ಲಾದರೂ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ, 85% ಜನರು ತಮಿಳು, 40% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್, 20% ಜನರು ಹಿಂದಿ, 32% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಮತ್ತು ತಮಿಳು, 13% ಜನರು ತಮಿಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ, 10% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತನಾಡಿದರೆ, ಮೂರೂ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಮಾತನಾಡುವ ಶೇಕಡಾವಾರು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಜಾಹಿರಾತು ಸಂಸ್ಥೆಯು ತನ್ನ 170 ಕಕ್ಷಿದಾರರಲ್ಲಿ, 115 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ, 110 ಜನ ರೇಡಿಯೋ, 130 ಜನ ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 85 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 75 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ರೇಡಿಯೋ, 95 ಜನ ರೇಡಿಯೋ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 70 ಜನ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡಿತು. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸುವ ಜನರೆಷ್ಟು? (ii) ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸುವ ಜನರೆಷ್ಟು?
   (iii) ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಆದರೆ ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ಬಳಸದ ಜನರೆಷ್ಟು?
8. 4000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ, 2000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ, 3000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮಿಳು, 500 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿ, 1500 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ತಮಿಳು, 300 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ, 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮಿಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ ಹಾಗೂ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಭಾಷೆಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ, (i) ಮೂರೂ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಭಾಷೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು? (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಭಾಷೆಯನ್ನಾದರೂ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು? (iii) ಎರಡು ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?

9. 120 ಕುಟುಂಬಗಳಿರುವ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿ, ಅಡಿಗೆಗಾಗಿ 93 ಕುಟುಂಬಗಳು ಕಟ್ಟಿಗೆ(ಸೌದೆ), 63 ಕುಟುಂಬಗಳು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ, 45 ಕುಟುಂಬಗಳು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ, 45 ಕುಟುಂಬಗಳು ಕಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ, 24 ಕುಟುಂಬಗಳು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ, 27 ಕುಟುಂಬಗಳು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಕಟ್ಟಿಗೆ, ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕುಟುಂಬಗಳು ಬಳಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.7 ಸಂಬಂಧಗಳು (Relations)

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಗಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಪೂರಕತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಪರ್ಯಾಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ. ಈ ಹೊಸ ಗಣವು ಗಣಿತದ "ಸಂಬಂಧ, ಉತ್ಪನ್ನ" ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿದೆ.

ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ $A \times B$ ನ್ನು (ಇದನ್ನು 'A ಛೇದಕ B' ಎಂದು ಓದುವುದು) ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. $A \times B$ ನ್ನು B ನೊಂದಿಗೆ A ನ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ ಮತ್ತು $b \in B\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, B ಛೇದಕ A ಗಣವನ್ನು

$B \times A = \{(b,a) \mid b \in B$ ಮತ್ತು $a \in A\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) (a, b) ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಅಂದರೆ, $a \neq b$ ಆದರೆ, $(a, b) \neq (b, a)$.

(ii) ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $A \times B$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸೆಲ್ ಫೋನ್ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಸೆಲ್ ಫೋನ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾರಲಾಯಿತು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ C_1, C_2, C_3 ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. C_1 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 1200, C_2 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2500 ಮತ್ತು C_3 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2500 ಆಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ ಮತ್ತು $B = \{ 1200, 2500 \}$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A \times B = \{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500)\}$

ಆದರೆ $B \times A = \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2),(1200, C_3), (2500, C_3)\}$ ಆಗಿದೆ.

$A \neq B$ ಆದರೆ, $A \times B \neq B \times A$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$A \times B$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಅಣಿತಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೊದಲ ಅಂಶವು ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಿಲ್ಲ.

F ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶದಲ್ಲಿ, ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಅಂಶವು ಮೊದಲನೇ ಅಂಶದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಂತರ, $B \times A$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, ಮೊದಲಿನ ಅಂಶ 2500 ಎಂಬುದು C_2 ಮತ್ತು C_3 ಭಿನ್ನ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ R ಸಂಬಂಧವು $A \times B$ ನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $R \subseteq A \times B$.

R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{x \in A \mid (x,y) \in R$ ಕೆಲವು $y \in B$ ಗೆ$\}$

R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{y \in B \mid (x,y) \in R$ ಕೆಲವು $x \in A$ ಗೆ$\}$

1.8 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (Functions)

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತಹ ಸಂಬಂಧ $f \subseteq A \times B$ ಆಗಿದೆ.

(i) f ನ ಕ್ಷೇತ್ರವು A ಆಗಿದೆ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ, $(x, y) \in f$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು $y \in B$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪೀಟರ್ ಡಿರಿಷ್ಲೆಟ್ (1805-1859)

ಜರ್ಮನಿಯ ಡಿರಿಷ್ಲೆಟ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಯಂತ್ರ ವಿಜ್ಞಾನ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

1837 ರಲ್ಲಿ ಇವರು $y = f(x)$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದೊಂದಿಗೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಆಧುನಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಇವರು ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಪಿಜನ್‌ಹೋಲ್ ತತ್ವವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದರು.

A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು (i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಸಂಬಂಧದ ವಿಶೇಷ ವಿಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಿಂಬನ ಅಥವಾ ವರ್ಗಾವಣೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f: A \to B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $(x,y) \in f$ ಆದರೆ, $y = f(x)$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಬಂಧದ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪುನರ್‌ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಕಾರ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ f ಉತ್ಪನ್ನವು ಸಂಬಂಧದ ನಿಯಮವಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಪ್ರತಿ $x \in A$ ಅಂಶವನ್ನು ಅನನ್ಯ $y \in B$ ಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. y ಎಂಬುದು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು $y = f(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

A ಗಣವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು B ಗಣವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ, f ನಲ್ಲಿ y ನ್ನು x ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಮತ್ತು x ನ್ನು y ನ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. f ನಲ್ಲಿ A ನ ಅಂಶಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಇದರ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

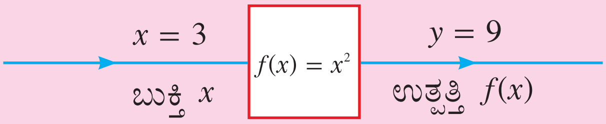
ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಆಧುನಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸುಮಾರು 1837 ರಲ್ಲಿ ನಿಕೊಲೈ ಲಬಚೊವೆಸ್ಕಿ ಮತ್ತು ಪೀಟರ್ ಡಿರಿಷ್ಲೆಟ್ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೀಡಿದರು. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಇರಲಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ವಿಭಾಗ 1.7 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $F \subseteq A \times B$ ಯು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ (i) ಮತ್ತು (ii) ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ ಎಂಬವು (ii) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬುಕ್ಕಿ ಬೆಲೆ x ಗೆ ಅನನ್ಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಬೆಲೆ y ನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಯಂತ್ರವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.



(ii) ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರದ ಅನನ್ಯ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಲು ಒಂದು ನಿಯಮದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ಮತ್ತು $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ ಆಗಿರಲಿ.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಲಿ. R ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

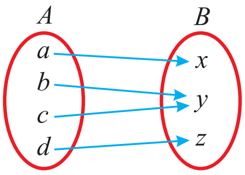
ಹಾಗೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ $y = R(x)$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು $y \in B$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ R ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವು B ಆಗಿದೆ. $R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ ಮತ್ತು $R(4) = 9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು $\{3, 6, 10, 9\}$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.15

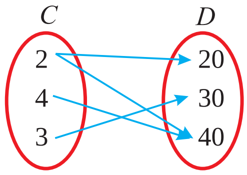
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ವಿವರಿಸಿ.

(i)



ಚಿತ್ರ 1.18

(ii)



ಚಿತ್ರ 1.19

ಪರಿಹಾರ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು ಅನನ್ಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ, C ನಲ್ಲಿರುವ 2 ಎಂಬ ಅಂಶವು 20 ಮತ್ತು 40 ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.16

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಬಂಧವು X ನಿಂದ X ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

(ii) $g = \{(3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ (iii) $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3)\}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

f ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 2 ಎಂಬುದು 3 ಮತ್ತು 1 ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) ಸಂಬಂಧ $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 1 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, g ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{2, 3, 4\} \neq X$

(iii) ನಂತರ, $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

X ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು X ನ ಅನನ್ಯ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, h ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.17

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$ ರಿಂದ $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$ ಗೆ ಇರುವ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿವೆ? ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

ಪರಿಹಾರ (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, f_1 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.
f_1 ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $\{-1, 2, -3, -4\}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$.

f_2 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, 1 ಎಂಬುದು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಅಂಶಗಳಾದ -4 ಮತ್ತು -1 ರೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, 4 ಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, f_3 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

f_3 ರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 2 \}$.

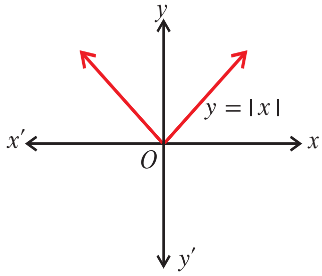
(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, f_4 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.
f_4 ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 2, 5, -4\}$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.18

$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 & \text{ಆದಾಗ} \\ -x, x < 0 & \text{ಆದಾಗ} \end{cases}$, ಇಲ್ಲಿ $x \in \mathbb{R}$. ಆಗಿರಲಿ. $\{ (x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ ಸಂಬಂಧವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆಯೇ? ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ, ಏಕೈಕ $y = |x|$ ಬೆಲೆಯು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $\mathbb{R}$ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ, $|x|$ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ) ಗಣವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.20

ಗಮನಿಸಿ

$y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 & \text{ಆದಾಗ} \\ -x, x < 0 & \text{ಆದಾಗ} \end{cases}$, ಇಲ್ಲಿ $x \in \mathbb{R}$, ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ನಿಯತಗುಣಕ** ಅಥವಾ **ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ** ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $|-8| = -(-8) = 8$ ಮತ್ತು $|8| = 8$.

1.8.1 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ (Representation of functions)

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

(i) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ, (ii) ಕೋಷ್ಟಕ, (iii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ, (iv) ನಕ್ಷೆ

$f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ.

(i) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ ಎಲ್ಲಾ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) fನಲ್ಲಿರುವ xನ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು.

(iii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ f ನ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು x-y ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವು f ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸೋಣ.

ಹಲವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಪರೀಕ್ಷೆಯು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

1.8.2 ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆ (Vertical line test)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

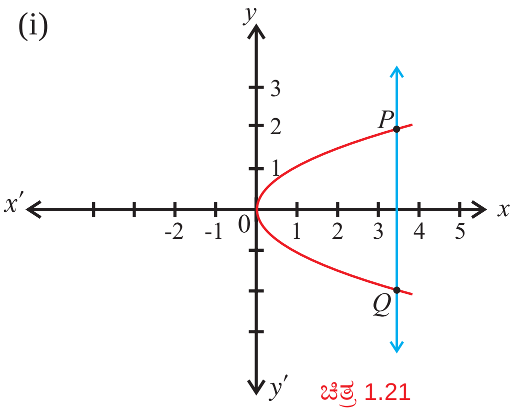
ಸೂಚನೆ

ಕೆಲವು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಗಳು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸದಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸಿದರೆ ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, x ನ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಕನಿಷ್ಠ y ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y^2 = x$ ನ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.19

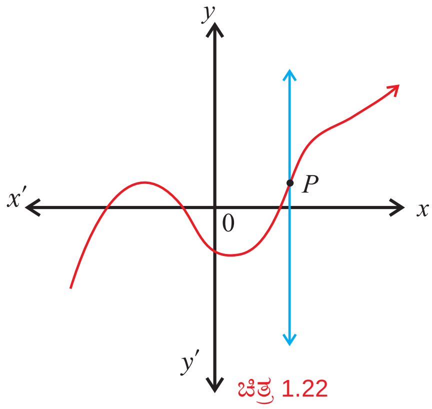
ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ನಕ್ಷೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

(i)



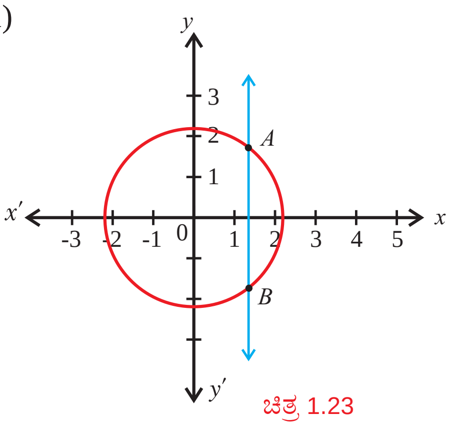
ಚಿತ್ರ 1.21

(ii)



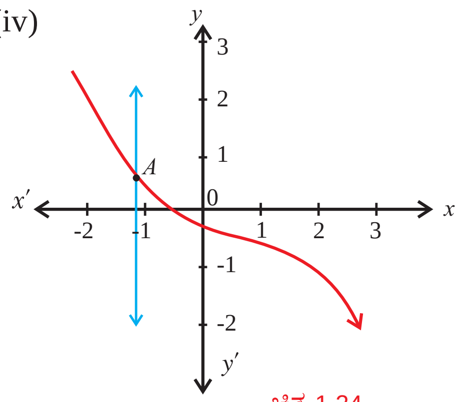
ಚಿತ್ರ 1.22

(iii)



ಚಿತ್ರ 1.23

(iv)



ಚಿತ್ರ 1.24

ಪರಿಹಾರ

(i) ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಯಾವುದೇ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) ನಕ್ಷೆಯು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.20

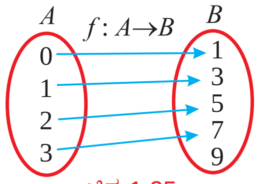
$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ ಮತ್ತು $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. $f : A \to B$ ಎಂಬುದು $f(x) = 2x + 1$ ಆಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಕೋಷ್ಟಕ (iii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು (iv) ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ

f ನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.25

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು ಎರಡು ಆವೃತ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಂತರ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಇದರ ಏಕೈಕ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪ

f ನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣದಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

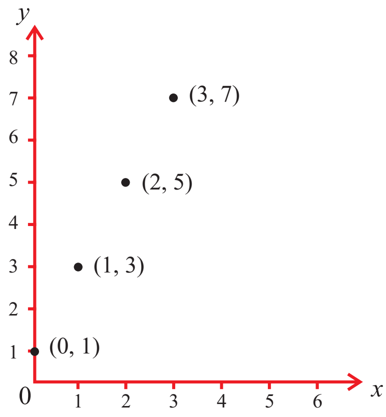
(iv) ನಕ್ಷೆ

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}$$

ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $(0, 1), (1, 3), (2, 5)$ ಮತ್ತು $(3, 7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಒಗ್ಗೂಡುವಿಕೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

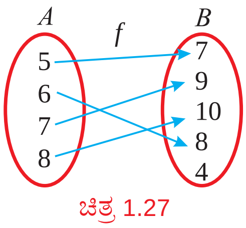


ಚಿತ್ರ 1.26

1.8.3 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಧಗಳು (Types of functions)

ಉತ್ಪನ್ನದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿಧಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

(i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (One-One function)



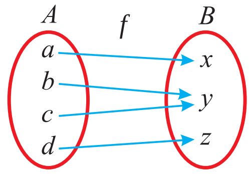
ಚಿತ್ರ 1.27

$f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ಒಂದು–ಒಂದು** ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ A ನ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, A ನಲ್ಲಿ $u \neq v$ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ $f(u) \neq f(v)$ ಎಂಬಂತಾದರೆ, f ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, B ನಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿನ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, f ನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಅಂತಃಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (Onto function)

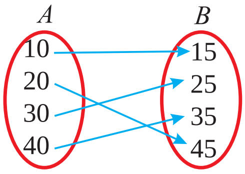
$f : A \rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ B ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $b \in B$ ಗೆ, $f(a) = b$ ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂಶ $a \in A$ ಇದ್ದರೆ, f ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು B ಯು f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, f ಎಂಬುದು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.28

(iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (One-One and onto function)

$f : A \rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ, f ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣಗಳೆರಡೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, A ನ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳಿಗೆ ಬಿಂಬನವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಅಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿರಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 1.29

ಸೂಚನೆ

(i) $f : A \rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣವಾದರೆ, $B = f$ ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

(ii) $f : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಆದರೆ, $f(a_1) = f(a_2)$ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ $a_1 = a_2$ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

(iii) $f : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳಾದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆಯು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 1.29 ರಲ್ಲಿ f ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣವಾಗಿದೆ.

(iv) $f : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, ಆಗ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(v) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

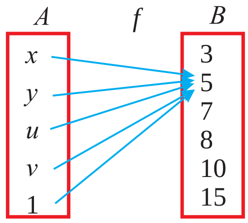
(iv) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (Constant function)

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನಲ್ಲಿನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $f : A \rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$A = \{ x, y, u, v, 1 \}$, $B = \{ 3, 5, 7, 8, 10, 15 \}$ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ, $f : A \rightarrow B$ ಯು $f(x) = 5$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

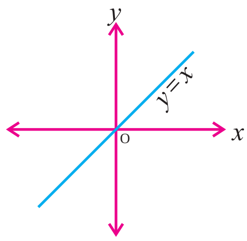


ಚಿತ್ರ 1.30

(v) ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ (Identity function)

A ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ $a \in A$ ಗಳಿಗೆ $f(a) = a$ ಆದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನ $f : A \rightarrow A$ ನ್ನು A ನ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವು A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಅದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \mathbb{R}$ ಆಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ $x \in \mathbb{R}$ ಗೆ $f(x) = x$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು $\mathbb{R}$ ನ ಮೇಲೆ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ 1.31 ಎಂಬುದು $\mathbb{R}$ ಮೇಲಿನ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.31

ಉದಾಹರಣೆ 1.21

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವು $f(x) = x^2$ ಆಗಿರಲಿ. f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$f : A \to B$ ಮತ್ತು $f(x) = x^2$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$; $f(5) = 25$.

f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳಿಗೆ ಬಿಂಬಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, $3 \in B$ ಆಗಿದ್ದು $f(x) = x^2 = 3$ ಆಗುವಂತೆ $x \in A$ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣವಾಗಿಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ

$g(x) = x^2$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $u = 1$ ಮತ್ತು $v = -1$ ಆದಾಗ $u \neq v$. ಆದರೆ $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು ಮಾತ್ರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಅಥವಾ ಮೇಲಣವಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ನಾವು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ನಿಯಮ, ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.22

ಉತ್ಪನ್ನ $f : [1, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \leq x < 4 \\ 3x^2 - 10 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

(ಇಲ್ಲಿ, $[1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 6\}$)

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$ (iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2f(5) - 3f(1)$

ಪರಿಹಾರ

(i) ನಾವು $f(5)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. 5 ಎಂಬುದು 4 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದರಿಂದ, $f(x) = 3x^2 - 10$ ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$.

(ii) $f(3)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, 3 ಎಂಬುದು 2 ಮತ್ತು 4 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(3)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $f(x) = 2x - 1$ ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆಗ, $f(3) = 2(3) - 1 = 5$.

(iii) $f(1)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ, 1 ಎಂಬುದು $1 \leq x < 2$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ.

ಆಗ, $f(x) = 1 + x$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, $f(1) = 1 + 1 = 2$.

(iv) $f(2) - f(4)$

ಈಗ, 2 ಎಂಬುದು $2 \le x < 4$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಆಗ, $f(x) = 2x - 1$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(2) = 2(2) - 1 = 3$.

ಹಾಗೂ, 4 ಎಂಬುದು $4 \le x < 6$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ. ಆಗ, $f(x) = 3x^2 - 10$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$.

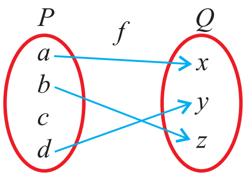
ಇದರಿಂದ, $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35$.

(v) $2\,f(5) - 3\,f(1)$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು, (i) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಆಗ, $2\,f(5) - 3\,f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124$.

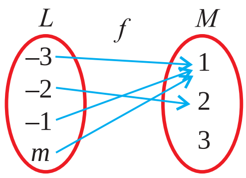
ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(i)



(ii)



2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ $F = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ ಮತ್ತು $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3$. ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ (ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿ).

(i) $f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$

(ii) $f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$

(iii) $f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನ X ನಿಂದ Y ಗಿರುವ ಯಾವ ಸಂಬಂಧಗಳು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ. ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, ಇದರ ವಿಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2, x \in X, y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ ಎಂಬುದು ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, a, b, c ಮತ್ತು d ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$ ಮತ್ತು $f = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) : x \in A \right\}$ ಆದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. f ಎಂಬುದು A ನಿಂದ A ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ?

7. $f = \{(2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3)\}$ ಎಂಬುದು A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. $A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ ಆದರೆ, ಇದು (i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (ii) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆರಡೂ ಆಗಿದೆಯೇ?

8. $f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

9. $f(x) = 2x - 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ $A = \{ 5, 6, 8, 10 \}$ ರಿಂದ $B = \{ 19, 15, 9, 11 \}$ ಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. a ಮತ್ತು b ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

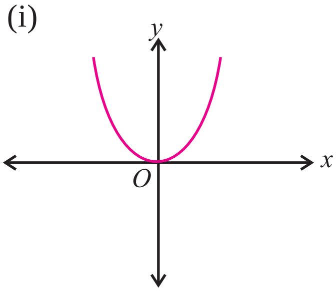
10. $A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$; $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$ ಮತ್ತು

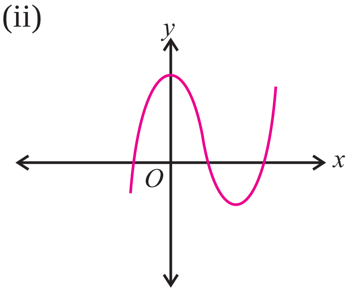
$f = \{ (x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$ ಆಗಿರಲಿ.

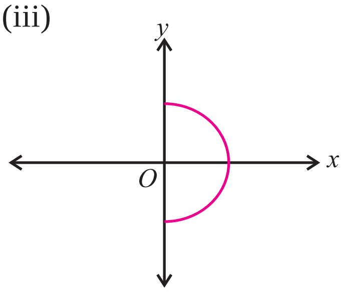
(i) f ನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (ii) ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವೇನು?

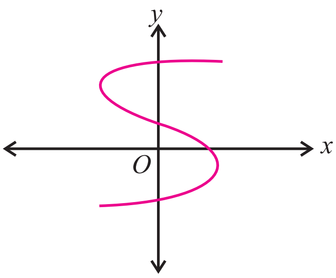
(iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೇನು ? (iv) ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

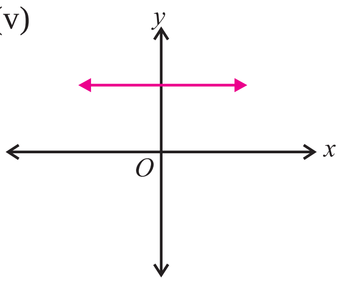
11. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿ.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


(v)


12. $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು

(i) ಕೋಷ್ಟಕದ (ii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಯು $f(x) = \frac{x-3}{3}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರಲಿ. f ನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ

(iii) ಕೋಷ್ಟಕ (iv) ನಕ್ಷೆ

14. $A = \{4, 6, 8, 10 \}$ ಮತ್ತು $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$ ಆಗಿರಲಿ. $f : A \to B$ ಯು $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, f ನ್ನು

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ (iii) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

15. $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\frac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$

16. $f : [-7, 6) \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1; & -7 \le x < -5 \\ x + 5; & -5 \le x \le 2 \\ x - 1; & 2 < x < 6 \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದೆ.

(i) $2\,f(-4) + 3\,f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\frac{4\,f(-3) + 2\,f(4)}{f(-6) - 3\,f(1)}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $A \cup B = A$ ಆದರೆ,

(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

2. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cap B$ ಯು

(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

3. ಯಾವುದೇ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $P \cap Q$ ಯು

(A) $\{x : x \in P$ ಅಥವಾ $x \in Q\}$ (B) $\{x : x \in P$ ಮತ್ತು $x \notin Q\}$

(C) $\{x : x \in P$ ಮತ್ತು $x \in Q\}$ (D) $\{x : x \notin P$ ಮತ್ತು $x \in Q\}$

4. $A = \{ p, q, r, s \}$, $B = \{ r, s, t, u \}$ ಆದರೆ, $A \backslash B$ ಯು

(A) $\{ p, q \}$ (B) $\{ t, u \}$ (C) $\{ r, s \}$ (D) $\{p, q, r, s \}$

5. $n[p(A)] = 64$ ಆದರೆ, $n(A)$ ಯು

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ, $A \cap (B \cup C)$ ಯು

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

7. ಯಾವುದೇ A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap (A \cap B)$ ಯು

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ ?

(A) $A \setminus B = A \cap B'$ (B) $A \setminus B = A \cap B$

(C) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

9. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ, $B \setminus (A \cup C)$ ಯು

(A) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (B) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$

(C) $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$ (D) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$ ಮತ್ತು $n(A \cup B) = 40$ ಆದರೆ, $n(A \cap B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ ಯು ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, (x, y) ಎಂಬುದು

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ ಯು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, 'a'ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ ಎಂಬುದು $\mathbb{N}$ ನಿಂದ $\mathbb{Z}$ ಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

(A) $\{ 1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

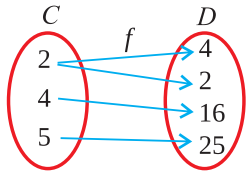
14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ ಆದರೆ, 3 ರ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು

(A) 5 ಮತ್ತು –1 (B) 6 ಮತ್ತು 8 (C) 8 ಮತ್ತು –1 (D) 6 ಮತ್ತು 5.

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$, $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಎಂಬುದು

$f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ f ಎಂಬುದು

(A) ಒಂದು–ಒಂದು (B) ಮೇಲಣ (C) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ (D) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ

16. 

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

(A) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (B) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ

(C) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (D) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ಆಗಿದ್ದು, $f : A \rightarrow B$ ನ್ನು $f(x) = x - 2$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ ಆದರೆ, $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, ಆ ಉತ್ಪನ್ನವು

(A) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (B) ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ

(C) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ (D) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ

20. $f : A \rightarrow B$ ಯು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು $n(A) = 5$ ಆದರೆ, $n(B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಗಣಗಳು

- ಗಣವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.
  - ಗಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವುಗಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
  - $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
  - $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
- ಪೂರಕತೆಗೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗದ ಪ್ರಧಾನತೆಗೆ ಸೂತ್ರಗಳು
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

- B ನೊಂದಿಗೆ A ನ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ ಮತ್ತು $b \in B\}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
- A ಯಿಂದ B ಗಿರುವ R ಸಂಬಂಧವು $A \times B$ ನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $R \subseteq A \times B$.
- $f : X \to Y$ ಉತ್ಪನ್ನವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in X$ ಎಂಬುದು ಒಂದೇ ಒಂದು $y \in Y$ ನೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರಬೇಕು.
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿದರೆ, ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.
  - ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ
  - ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ
  - ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕ
  - ಒಂದು ನಕ್ಷೆ
- ನಿಯತಗುಣಕ ಅಥವಾ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ ಉತ್ಪನ್ನ $y = |x|$ ಎಂಬುದನ್ನು $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ಆದಾಗ} \\ -x, & x < 0 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
- ಉತ್ಪನ್ನದ ಕೆಲವು ವಿಧಗಳು:
  - ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (ಅಂತಃಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ) — (ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ)
  - ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (ಪರಿಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ) — (ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)
  - ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ — (ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಎರಡೂ ಆಗಿವೆ)
  - ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ — (ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾಗಿದೆ)
  - ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ — (ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸುತ್ತದೆ)

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಬಹುಮಾನಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಏಳು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು 2000 ರಲ್ಲಿ ಯು.ಎಸ್.ಎ. ನಲ್ಲಿರುವ ಕ್ಲೇ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಇನ್ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ತಿಳಿಸಿತು. ಆಗಸ್ಟ್ 2010 ರಂತೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಆರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಪರಿಹಾರವಾಗದೇ ಉಳಿದಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯು US (ಯು.ಎಸ್.) $1000,000 ಬಹುಮಾನವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. 2010 ರಲ್ಲಿ ರಷ್ಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಗಿರಿಗೋರಿ ಪೆರಲ್‌ಮಾನ್‌ರವರು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಪರಿಹರಿಸಿದರು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅವರು ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆದರು.

2

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F.Gauss

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಶ್ರೇಢಿಗಳು
- ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (A.P.)
- ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (G.P.)
- ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಲಿಯೋನಾರ್ಡೊ ಪಿಸಾನೊ (ಫಿಬೊನೇಸಿ)

(1170-1250)

ಇಟಲಿ

ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಪುನರುಜ್ಜೀವನಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಫಿಬೊನೇಸಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದ್ದರು. 'ಫಿಬೊನೇಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಇವರು ತಿಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಇವರ ಹೆಸರು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಫಿಬೊನೇಸಿಯು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ.

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯೋಣ. ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘ ಇತಿಹಾಸದೊಂದಿಗೆ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವಿಷಯಗಳಾಗಿವೆ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧನಗಳಾಗುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಇತರೆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಸಾಧನಗಳಾಗಿವೆ.

$\mathbb{N}$ ಮತ್ತು $\mathbb{R}$ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸ್ಮರಿಸೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

(i) ISRO (ಇಸ್ರೋ) ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಒಂದು ಉಪಗ್ರಹದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಸಮಯದ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ ದಾಖಲಿಸುತ್ತಾರೆ.

(ii) ರೈಲ್ವೆ ಮಂತ್ರಿಮಂಡಲವು ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿರುವ ಕೇಂದ್ರ ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ಭೇಟಿ ನೀಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸಿತು ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕಾಗಿ 180 ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುವ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಯಿತು.

(iii) 9 ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಕುತೂಹಲವುಳ್ಳ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಸಕ್ತಗೊಂಡು, $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆಯಲು ಆರಂಭಿಸಿದನು.

(iv) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅಂಶವು 1 ಆಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಸಕ್ತನಾಗಿ, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆದನು.

(v) ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕಿಯೊಬ್ಬರು ತನ್ನ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹೆಸರಿನ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆದರು.

(vi) ಅದೇ ಶಿಕ್ಷಕಿಯು ಅದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು 35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100 ಎಂಬಂತೆ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

(iii) ಮತ್ತು (iv) ರಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (i), (ii), (v) ಮತ್ತು (vi) ರಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದರೆ (v) ಮತ್ತು (vi) ರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

2.2 ಶ್ರೇಢಿಗಳು (Sequences)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆ ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_j ಎಂಬುದು ಶ್ರೇಢಿಯ j ನೇ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು a_7 ಎಂಬುದು ಏಳನೇ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, (i), (ii), (v) ಮತ್ತು (vi) ಎಂಬವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಹಾಗೂ (iii) ಮತ್ತು (iv) ಎಂಬವು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವುದು ಎಂದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುರುತಿಸಿದ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥವಾಗಿದೆ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) 2, 4, 6, 8, $\cdots$, 2010. (ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳು)

(ii) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, $\cdots$. (1 ಮತ್ತು -1 ರ ನಡುವೆ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟವಾಗುವ ಪದಗಳು)

(iii) π, π, π, π, π. (ಒಂದೇ ಪದಗಳು; ಇಂತಹ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ.)

(iv) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, $\cdots$. (ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ)

(v) 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, $\cdots$.

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯದ n ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $a_n = 1$ ಅಥವಾ 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, (i) ಮತ್ತು (iii) ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಹಾಗೂ ಇನ್ನುಳಿದ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ. (i) ರಿಂದ (v) ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಿಕೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾದರಿ ಅಥವಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ (vi) ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವು 1 ಅಥವಾ 0 ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಆದರೂ ಕೂಡ ಆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವನ್ನು ಮೊದಲೇ

ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪಡೆಯುವುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು "ಮಾದರಿ" ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

2.2.1 ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ನೋಡುವುದು (Sequences viewed as functions)

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಪರಿಮಿತವಾದ ವಾಸ್ತವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವ $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ವಾಸ್ತವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

$\forall$ ಸಂಕೇತವು "ಎಲ್ಲಾ" ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. $\{a_k\}_1^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ a_k ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ$\{1,2,3, \cdots, \}$ ಅಥವಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಗಣಗಳು ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಗಣಗಳು ಪ್ರತಿಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರಲೇಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(x) = 2x + 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ ಆಗಿರುವ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಿಕೆಯು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. f ನ ಕ್ಷೇತ್ರವು $\mathbb{N}$ ಅಥವಾ $\mathbb{N}$ ನ $\{1, 2, \cdots, n\}$ ಉಪಗಣವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಮನಗಾಣಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.1

n ನೇ ಪದವು $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ , $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1$, ಆದರೆ, $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2$, ಆದರೆ, $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, $n = 3$, ಆದರೆ, $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳೆಂದರೆ 1, 5 ಮತ್ತು 14.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ನೇರವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.2

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $a_1 = -1,\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ ಮತ್ತು $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

ಪರಿಹಾರ

(i) $a_1 = -1$ ಮತ್ತು $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}$, $n > 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಗತ್ಯವಾದ ಪದಗಳು $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}$ ಮತ್ತು $-\frac{1}{840}$ ಆಗಿವೆ.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$F_1 = 1, F_2 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$\therefore$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳು 1, 1, 2, 3, 5 ಆಗಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಆಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪದಗಳನ್ನು 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\cdots$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿರುವಂತೆ ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಳ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಸುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಕೆಳಗಿನ n ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $a_n = \frac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \frac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. ಕೆಳಗಿನ n ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸೂಚಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$; a_7, a_9 (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1)$; a_5, a_8

   (iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$; a_5, a_7. (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2)$; a_5, a_8

3. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ 18 ನೇ ಮತ್ತು 25 ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \end{cases}$$

4. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ 13 ನೇ ಮತ್ತು 16 ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \end{cases}$$

5. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_1 = 2,\ a_2 = 3 + a_1$ ಮತ್ತು $n > 2$ ಗಳಿಗೆ $a_n = 2a_{n-1} + 5$.

6. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಆರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ಮತ್ತು $n > 3$ ಗಳಿಗೆ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

2.3 ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (Arithmetic Progression) (A.P.)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷವಾದ ವಿಧಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

d ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು d ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (A.P) ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. ಏಕೆಂದರೆ $a_1 = 2$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 3$.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. ಏಕೆಂದರೆ $a_1 = -4$ ಮತ್ತು $d = 0$.

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1.0, $-1.5, \cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. $a_1 = 2$ ಮತ್ತು $d = -0.5$.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (The general form of an A.P.)

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ನಾವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a_1 = a$ ಮತ್ತು $a_{n+1} = a_n + d$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$n = 1, 2, 3$ ಗಳಿಗೆ,

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

ಇದೇ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ನಾವು n ನೇ ಪದ a_n ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $n \in \mathbb{N}$ ಗಳಿಗೆ $a_n = a + (n-1)d$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯು $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು ಎಲ್ಲಾ $n \in \mathbb{N}$ಗಳಿಗೆ $t_n = a + (n-1)d$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯು n ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಕೊನೆಯ ಪದ l ಎಂಬುದು $l = a + (n-1)d$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $l = a + (n-1)d$ ಎಂಬುದನ್ನು $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದು ಮೊದಲ ಪದ, ಕೊನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

(iii) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $m-d,\ m,\ m+d$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(iv) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $2d$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(v) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ಅದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

(vi) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.3

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿವೆ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು t_n, $n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\quad t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\quad t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots$.

$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$

ಹಾಗೆಯೇ, $\quad t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಮೊದಲ ಪದ $3m-1$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -2 ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.4

ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲ ಪದ $a = 5$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 2 - 5 = -3$.

(ii) ಮೊದಲ ಪದ $a = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ t_n ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವಂತೆ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮೊದಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

ಇದು ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a + (n-1)d < 0$ ಪರಿಹರಿಸುವಂತೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$ ಪರಿಹರಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$

$\Longrightarrow (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$ (ಎರಡು ಕಡೆಯೂ -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಸಮತೆಯು ಹಿಮ್ಮುಖಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$.

$\Longrightarrow n > 26\frac{2}{3} + 1$. ಅಂದರೆ, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಸಮತೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $n = 28$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ (t_{28}) 28 ನೇ ಪದವು ಮೊದಲ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.6

ಒಂದು ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 23 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳು, ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 21, ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 19 ಮತ್ತು ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿದು ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿವೆ. ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಿವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, . . . , n ನೇ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 23, 21, 19, $\cdots$, 5.

$k = 2, \cdots, n$ ಗಳಿಗೆ $t_k - t_{k-1} = -2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, 23, 21, 19, $\cdots$, 5 ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 23,$ $d = -2$ ಮತ್ತು $l = 5.$

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ 10 ಸಾಲುಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.7

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹30,000 ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನದೊಂದಿಗೆ 2010 ರಲ್ಲಿ ಅವನ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸೇರಿದನು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ₹600 ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನ ವೇತನವು ₹39,000 ಆಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ₹39,000 ಆಗುವಂತಿರಲಿ.

$2010, 2011, 2012, \cdots, [2010 + (n-1)]$ ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹30,000, ₹30,600, ₹31,200, $\cdots$, ₹39000 ಆಗುತ್ತದೆ.

ವೇತನಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಅಗತ್ಯವಾದ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 100 ರಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಿಸೋಣ. ಈಗ $300, 306, 312, \cdots, 390$ ಹೊಸ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 300,\ d = 6,\ l = 390.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n = \frac{l-a}{d} + 1$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯಕ್ತಿಯ 16 ನೇ ವರ್ಷದ ವೇತನವು ₹39,000 ಆಗಿದೆ.

$\therefore$ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು 2025 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ₹39,000 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.8

ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2:5:7$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 7 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ $x\,(x \neq 0)$ ಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2x, 5x$ ಮತ್ತು $7x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ, $2x, 5x-7, 7x$ ಎಂಬವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore\ (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x = 14.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 28, 70, 98 ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು 6 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 5 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $125, 120, 115, 110, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 15 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $24,\ 23\frac{1}{4},\ 22\frac{1}{2},\ 21\frac{3}{4}, \cdots.$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವ ಪದವು 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ?

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 12 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. 4, 9, 14, $\cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 17 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$. (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 9 ನೇ ಪದವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, ಇದರ 29 ನೇ ಪದವು 19 ನೇ ಪದದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 10 ನೇ ಮತ್ತು 18 ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 41 ಮತ್ತು 73 ಆದರೆ, 27 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. .

9. 1, 7, 13, 19,$\cdots$ ಮತ್ತು 100, 95, 90, $\cdots$ ಎರಡು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 13 ರಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ?

11. ದೂರದರ್ಶನ ಉತ್ಪಾದಕರೊಬ್ಬರು ಏಳನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1000 ದೂರದರ್ಶನಗಳು ಮತ್ತ ಹತ್ತನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1450 ದೂರದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಳವಾದರೆ, ಮೊದಲ ವರ್ಷ ಮತ್ತು 15 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ದೂರದರ್ಶನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಮೊದಲ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹640 , ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹720 ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹800 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಅವರು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ, 25 ನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವರ ಉಳಿತಾಯವೆಷ್ಟು?

13. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು –120 ಆದರೆ, ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 18 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 140 ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ m ನೇ ಪದದ m ರಷ್ಟು ಅದರ n ನೇ ಪದದ n ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, $(m+n)$ ನೇ ಪದವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹25,000 ವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 14% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡುತ್ತಾನೆ. ಈ ಮೊಬಲಗುಗಳು (ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ, 20 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ ಎಂಬವೂ ಕೂಡ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. a^2, b^2, c^2 ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ಎಂಬವೂ ಕೂಡ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ ಮತ್ತು $b^2 = ac$ ಆದರೆ, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ಎಂಬವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2.4 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (Geometric Progression) (G.P.)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

r ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $a_{n+1} = a_n r$, $n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) $3, 6, 12, 24, \cdots$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $\{a_n\}_1^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$.

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (The general form of a G.P.)

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ r ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a_1 = a$ ಮತ್ತು $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a_{n+1} = r\, a_n$

$n = 1, 2, 3$ ಆದಾಗ,

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

ಇದೇ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a_n = ar^{n-1}$ ಎಂಬುದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯು

$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದದ ಸೂತ್ರವು

$t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಬಹುದು?

r ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $\{t_n\}_1^{\infty}$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವಾಗಿರದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದದ ಅನುಪಾತವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ, ಇದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಅದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು r ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ $\frac{a}{r}, a, ar$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(iv) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$.ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು ಮೇಲಿನಂತೆ r ಆಗಿರದೇ r^2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 2.9

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ?

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$.

(iii) $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{21}, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.
ಅಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತವು ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

(ii) $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\frac{1}{10}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

(iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.10

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೊತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು $\frac{2}{5}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \quad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು 0.02 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.11

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಪದವು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು ಏಳನೇ ಪದವು $\frac{16}{81}$ ಆದರೆ, ಆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $t_4 = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $t_7 = \frac{16}{81}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕಾಗಿ, $t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$. ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \text{ ಮತ್ತು } t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}.$$

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, a ಮತ್ತು r ಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

t_4 ರಿಂದ t_7 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. ಇದರಿಂದ, $r = \frac{2}{3}$.

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \quad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$.

ಅಂದರೆ, $\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \cdots$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.12

ಒಂದು ಕೃಷಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಂಟೆಗೆ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 30 ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳಿದ್ದರೆ, 14 ನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳಿರುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಕೃಷಿಯ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 30$

ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2(30)$

ಎರಡನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2(2(30)) = 30(2^2)$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $r = 2$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, t_n ಎಂಬುದು n ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು $t_n = 30\,(2^n)$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 14 ನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $t_{14} = 30\,(2^{14})$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.13

ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ₹500 ರ ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 10% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. 10 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಈ ಠೇವಣಿಯ ಬೆಲೆಯೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ಅಸಲು ₹500 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಈ ಅಸಲಿಗೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯು $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು = ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

ಈಗ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ,

n ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$

$(n-1)$ ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ = n ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು.

ಆದ್ದರಿಂದ, n ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n$$

10 ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ $=$ ₹ $500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} =$ ₹ $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$.

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ:

$$A = P(1 + i)^n$$

ಇಲ್ಲಿ, A ಎಂಬುದು ಮೊತ್ತ, P ಎಂಬುದು ಅಸಲು, $i = \frac{r}{100}$, r ಎಂಬುದು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ಮತ್ತು n ಎಂಬುದು ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.14

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{13}{12}$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳು $\frac{a}{r}, a, ar$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12} \quad (1)$$

ಹಾಗೂ,

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$$

$$\implies a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$$

$a = -1$ ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$(-1)\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r + 4)(4r + 3) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = -\frac{4}{3}$ ಅಥವಾ $-\frac{3}{4}$

$r = -\frac{4}{3}$ ಮತ್ತು $a = -1$ ಆದಾಗ, ಪದಗಳು $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ ಆಗಿವೆ.

$r = -\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $a = -1$ ಆದಾಗ, ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ ಪದಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.15

a, b, c, d ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ a, b, c, d ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು r ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಪದವು a ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

ಈಗ, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a - d)^2$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48,\cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1,\cdots.$ (iii) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{27},\ \cdots.$
   (iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12},\cdots.$ (v) $\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}},\cdots.$ (vi) $4,-2,\ -1,-\frac{1}{2},\cdots.$
2. $\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1,-2,\cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 4 ನೇ ಪದ ಮತ್ತು 7 ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 54 ಮತ್ತು 1458 ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲನೇ ಪದವು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಆರನೇ ಪದವು $\frac{1}{729}$ ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. (i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{25},\cdots$ ರಲ್ಲಿ $\frac{128}{15625}$ (ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\cdots$ ರಲ್ಲಿ 1024 ಎಂಬವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದಗಳಾಗಿವೆ?
6. $162,\ 54,\ 18,\cdots$ ಮತ್ತು $\frac{2}{81},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{9},\cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಸಮವಾದರೆ, n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಐದನೇ ಪದವು 1875 ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಪದವು 3 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{39}{10}$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 1 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 216 ಮತ್ತು ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತವು 156 ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 7 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{7}{4}$ ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 13 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 91 ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ₹1000 ವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 5% ರ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. 12 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು ₹50,000 ಕ್ಕೆ ನಕಲು ಮಾಡುವ ಒಂದು ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿತು. ನಕಲು ಯಂತ್ರವು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 45% ದರದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅಂದಾಜಿಸಲಾಗಿದೆ. 15 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆ ಏನು?
14. a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
15. a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a+b,\ \ b+c,\ \ c+d,$ ಗಳು ಕೂಡಾ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2.5 ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Series)

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ:

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 1990 ರ ಜನವರಿ 1 ರಂದು ₹25,000 ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ₹500 ರ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. 2010 ರ ಜನವರಿ 1 ರವರೆಗೆ ಅವನು ಪಡೆದ ಒಟ್ಟು ವೇತನವೆಷ್ಟು?

ಮೊದಲು, ಅವನ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500)).$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು, ಅವನ ಇಪ್ಪತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ವೇತನವನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ,

$$25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500)).$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಬೇಕಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $S_n = a_1 + a_2 +, \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ ರಿಂದ ಆಂಶಿಕ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ **ಆಂಶಿಕ ಮೊತ್ತಗಳ** ಶ್ರೇಢಿಯು $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಆಗಿದೆ.

$(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು $\{a_n\}_1^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ **ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, $\sum$ (ಸಿಗ್ಮ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತವು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು (ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನ) ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಾಧಾರಣ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಸಂಕಲನವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು? ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸೋಣ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು **ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಮತ್ತು **ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ**ಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

2.5.1 ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ (Arithmetic series)

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯು ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಪದಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ $a,\ a + d,\ a + 2d, ...,\ a + (n-1)d, \cdots$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು S_n ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots (a + (n-1)d)$

$\implies S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$

$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಇದು $1, 2, 3, \cdots, (n-1)$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವಲ್ಲದೇ ಬೇರೇನೂ ಅಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ ಮೊದಲ n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ ಆಗಿರಲಿ. (1)

ಮೇಲಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸೋಣ. S_n ನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1).$ (3)

(3) ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು $(n+1)$ ಗಳಿವೆ?

(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ n ಪದಗಳಿವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಅನುಗುಣವಾದ ಪದಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಲ್ಲಿ n ರಷ್ಟು $(n+1)$ ಗಳು ಇರಲೇಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, (3) ಎಂಬುದು $2S_n = n(n+1)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸರಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಆಗಿದೆ. (4)

ಇದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

100 ರವರೆಗಿನ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು **ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ದೊರೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ **ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಕ್ ಗಾಸ್** ಬಳಸಿದರು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಇವರ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಇವರಿಗೆ ಕೇವಲ ಐದು ವರ್ಷಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ನೀಡಿದ್ದರು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗಕ್ಕೆ ನೀವು ಹೋದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.

ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಕ್ ಗಾಸ್
(1777 – 1855)

ಈಗ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ

$S_n = na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d]$

$= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$

$= na + d\frac{n(n-1)}{2}$ (4) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (5)

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2} \text{ (ಮೊದಲ ಪದ + ಕೊನೆಯ ಪದ)}$$

$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

ಮೊದಲ ಪದ a ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಎಂಬುದು

(i) ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.16

$5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$a = 5,\quad d = 11 - 5 = 6,\quad l = 95$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಈಗ,
$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊತ್ತ
$$S_n = \frac{n}{2}[l + a]$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.17

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ $2n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ $2n$ ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots$ $2n$ ಪದಗಳವರೆಗೆ

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ (ಗುಂಪು ಮಾಡಿದ ನಂತರ)

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ

ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯು ಮೊದಲ ಪದ $a = -3$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -4$ ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಮೊತ್ತ $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$$

$$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$$

$$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1).$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.18

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -203 ಮತ್ತು ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -572 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $S_{14} = -203$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\implies \frac{14}{2}[2a + 13d] = -203$$

$$\implies 7[2a + 13d] = -203$$

$$\implies 2a + 13d = -29. \quad (1)$$

ಹಾಗೂ, ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $= -572.$

ಈಗ, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

ಅಂದರೆ, $S_{25} = -203 - 572 = -775.$

$$\implies \frac{25}{2}[2a + 24d] = -775$$

$$\implies 2a + 24d = -31 \times 2$$

$$\implies a + 12d = -31 \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $a = 5$ ಮತ್ತು $d = -3.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯು $5 + (5 - 3) + (5 + 2(-3)) + \cdots.$

ಅಂದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯು $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$ ಎಂಬ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವು -351 ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, $a = 24$, $d = -3.$

$S_n = -351$ ಆಗುವಂತಹ n ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$

ಅಂದರೆ, $\frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$

$$\implies \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$$

$$\implies n(51 - 3n) = -702$$

$$\implies n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n - 26)(n + 9) = 0$$

$\therefore$ $n = 26$ ಅಥವಾ $n = -9$

ಇಲ್ಲಿ, n ಎಂಬುದು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 26 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -351 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.20

8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ 8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ 104, 112, 120, $\cdots$, 992 ಆಗಿವೆ.

S_n ಎಂಬುದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + ,\cdots + 992$.

ಈಗ, 104, 112, 120, $\cdots$, 992 ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 104,\ d = 8$ ಮತ್ತು $l = 992$.

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992 - 104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376$.

ಇದರಿಂದ, 8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 61376 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.21

ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯು 85° ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯು 215° ಆಗಿದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಒಳ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + l$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 85$ ಮತ್ತು $l = 215$.

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a] \qquad (1)$$

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-2)\times 180^0$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = (n-2)\times 180$

(1) ರಿಂದ, $\frac{n}{2}[l + a] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[215 + 85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 12 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. ಮೊದಲ (i) 75 ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ (ii) 125 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. n ನೇ ಪದ $3 + 2n$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 30 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ.

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ S_n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$ (ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 40 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 44 ಮತ್ತು ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 55 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಮೊತ್ತವು 368 ಆಗುತ್ತದೆ?

8. 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಮೂರನೇ ಪದವು 7 ಮತ್ತು ಏಳನೇ ಪದವು ಮೂರನೇ ಪದದ ಮೂರರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 2 ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 300 ಮತ್ತು 500 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$.

12. 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದ 100 ಮತ್ತು 200 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ನಿರ್ಮಾಣ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ ಸೇತುವೆ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ತಡ ಮಾಡಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತಿ ದಿನವೂ ದಂಡವನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ದಂಡವು ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ₹4000 ಮತ್ತು ನಂತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ₹1000 ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಸ್ಥೆಯ ಆಯವ್ಯಯದ ಪ್ರಕಾರ ಗರಿಷ್ಠ ₹1,65,000 ದಂಡವನ್ನು ಪಾವತಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ತಡಮಾಡಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಟ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಪ್ರತೀ ವರ್ಷ ₹1000 ವನ್ನು 8% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತೀ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬಡ್ಡಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದೇ? ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, 30 ವರ್ಷಗಳ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೆ ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $3n^2 - 2n$. ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವು ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾರಿ, ಎರಡು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿ ಮತ್ತು ಹೀಗೆಯೇ ಗಂಟೆ ಬಾರಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಗಂಟೆ ಬಾರಿಸುತ್ತದೆ?

17. ಮೊದಲ ಪದ a, ಎರಡನೇ ಪದ b ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ c ಆಗಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವು $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $(2n+1)$ ಪದಗಳಿದ್ದರೆ, ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಅನುಪಾತವು $(n+1):n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ m ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಅನುಪಾತವು $m^2 : n^2$ ಆದರೆ, m ನೇ ಪದ ಮತ್ತು n ನೇ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತವು $(2m-1):(2n-1)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. ಒಬ್ಬ ಮಾಲಿಯು ತನ್ನ ತೋಟದಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಾಕಾರದ ರಚನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾನೆ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಉದ್ದವಾದ ಮೊದಲ ಸಾಲಿಗೆ 97 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿವೆ. ಪ್ರತೀ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಅಂತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ 25 ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಿದೆ. ಅವನು ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಬೇಕು?

2.5.2 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ (Geometric series)

ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯು **ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ**ಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$r \neq 0$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ಎಂಬುದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ ಆಗಿರಲಿ. (1)

$r = 1$ ಆದರೆ, (1) ರಿಂದ $S_n = na$.

$r \neq 1$ ಗೆ, (1) ನ್ನು ಬಳಸಿ,

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad (2)$$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

ಇದರಿಂದ, $r \neq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$.

> ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು,
>
> $$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ ಆದಾಗ} \\ na, & r = 1 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$
>
> ಇಲ್ಲಿ, a ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ.

ಗಮನಿಸಿ

$-1 < r < 1$ ಆದರೆ, $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \dfrac{a}{1 - r}$ ಸೂತ್ರವು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.22

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 25 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $a = 16$, $r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1$. ಈಗ, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.23

ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$

$$t_6 = 2(r)^5 = 486$$

$$\Longrightarrow \quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$$

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_5 = \dfrac{a(r^5 - 1)}{r - 1}$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

ಉದಾಹರಣೆ 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 1022 ಆಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ $2 + 4 + 8 + \cdots$.

n ಎಂಬುದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 2,\ r = 2,\ S_n = 1022.$

n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = \dfrac{a[r^n - 1]}{r - 1}$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1).$$

ಆದರೆ $S_n = 1022$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $2(2^n - 1) = 1022$

$$\Longrightarrow \quad 2^n - 1 = 511$$

$\Longrightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9.$ ಆದ್ದರಿಂದ, $n = 9.$

ಉದಾಹರಣೆ 2.25

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದ 375 ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪದ 192 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ r ಆಗಿರಲಿ.

$a = 375, \quad t_4 = 192$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad t_4 = 375\,r^3 \implies 375\,r^3 = 192$

$r^3 = \frac{192}{375} \implies r^3 = \frac{64}{125}$

$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \implies r = \frac{4}{5}$, ಇದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1)\times 5 \times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$

$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$ ಬಳಸುವುದರ ಬದಲಾಗಿ $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$ ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.26

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 72 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $a + ar + ar^2 + ar^3$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $r > 0$.

$a + ar = 8$ ಮತ್ತು $ar^2 + ar^3 = 72$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$

$\implies r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$

$r > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $r = 3.$

ಈಗ, $a + ar = 8 \implies a = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು $2 + 6 + 18 + 54$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ ಶ್ರೇಣಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ) (9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸಿ)

$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ]

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ$) - n]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$

ಉದಾಹರಣೆ 2.28

ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯವರು ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ 25 ಬೀದಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಿಡ ನೆಡಲು ಯೋಜಿಸಿ ಮೊದಲನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಿಡ, ಎರಡನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು, ಮೂರನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಎಂಟು, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಪಟ್ಟಣದ 25 ಬೀದಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ನೆಡಲ್ಪಟ್ಟ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. S_n ಎಂಬುದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{25} = (1)\,\frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1} = 2^{25} - 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $2^{25} - 1$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 27 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8.$ (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12.$
4. ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 ಪದಗಳವರೆಗೆ.
5. (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ ರ ಮೊತ್ತವು 1092 (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ ರ ಮೊತ್ತವು 728
   ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು?
6. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡನೇ ಪದವು 3 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\frac{4}{5}$. ಮೊದಲ 23 ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 36 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots$. (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots$.
9. ಮೊದಲ ವಾರದಲ್ಲಿ ಐದು ಜನ ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಎರಡನೇ ವಾರದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ನಾಲ್ಕು ಜನರಿಗೆ ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗವನ್ನು ಹರಡುತ್ತಾರೆ. 15 ನೇ ವಾರದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ, ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾದ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಬ್ಬ ಮಾಲಿಯು ಹುಡುಗನೊಬ್ಬನಿಗೆ ಅವನ ಉತ್ತಮ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಬಹುಮಾನವಾಗಿ ನೀಡಲು ಬಯಸಿ ಹುಡುಗನಿಗೆ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾನೆ. ಹುಡುಗನು ಒಂದೇ ಬಾರಿಗೆ 1000 ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 1, ಎರಡನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 2, ಮೂರನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 4, ನಾಲ್ಕನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 8, ಹೀಗೆ ಹತ್ತು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಹುಡುಗನು ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮೂರರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ $n, 2n$ ಮತ್ತು $3n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕ್ರಮವಾಗಿ S_1, S_2 ಮತ್ತು S_3 ಆದರೆ, $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಗಮನಿಸಿ

$a = 1$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $x \neq 1$ ರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡ ಭಾಗವು ಘಾತ $n - 1$ ರ x ನಲ್ಲಿರುವ ವಿಶೇಷ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

2.5.3 ವಿಶೇಷ ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Special series) $\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$ ಮತ್ತು $\sum_{k=1}^{n} k^3$

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ Σ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಮೊತ್ತಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ.

ಸಿಗ್ಮಾ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ಸಂಕೇತ	ವಿಸ್ತರಣೆ
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ ಅಥವಾ $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n - 1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d + 5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	$3[1 + 1 + \cdots 10$ ಪದಗಳು$] = 30.$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು $a = 1, d = 1$ ಮತ್ತು $l = n$ ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಯೂ ಕೂಡ $S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}(1 + n)$ ಎಂಬಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಸಿಗ್ಮಾ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ಮತ್ತು (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ:

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇದು $a = 1, d = 2, l = (2n-1)$ ರೊಂದಿಗೆ n ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \qquad \left(S_n = \frac{n}{2}(a+l)\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (1)

ಗಮನಿಸಿ

1. ಸೂತ್ರ (1) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಕೂಡ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. $l = 2n-1 \Longrightarrow n = \frac{l+1}{2}$ ಆಗುವುದರಿಂದ, (1) ರ ಪ್ರಕಾರ, $1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$.

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$\therefore \quad k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ ($a = k$, $b = k-1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

$\Longrightarrow \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ (1)

$k = 1$ ಆದಾಗ, $1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2$ ಆದಾಗ, $2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3$ ಆದಾಗ, $3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1.$ ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$k = n$ ಆದಾಗ, $n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1.$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $k = 1, 2, \cdots, n$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿದರೆ,

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] - 3[1 + 2 + \cdots + n] + n$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] = n^3 + 3[1 + 2 + \cdots + n] - n$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$ (2)

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

ಕೆಳಗಿನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸೋಣ.

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

ಈ ನಮೂನೆಯನ್ನು n ಪದಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (3)$$

(i) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ),

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(v) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.29

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots 25$ ಪದಗಳವರೆಗೆ (ii) $31 + 33 + \cdots + 53$

ಪರಿಹಾರ

(i) $$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $n = 25$

$\therefore 1 + 3 + 5 + \cdots 25$ ಪದಗಳವರೆಗೆ $= 25^2$ $\quad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \right)$

$= 625.$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2$ $\quad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 \right)$

$= 27^2 - 15^2 = 504.$

ಉದಾಹರಣೆ 2.30

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$

$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$ $\quad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$

$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$

$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) ಈಗ, $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$

$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$

$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$

$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$

$= 14910 - 506 = 14404.$

(iii) ಈಗ, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$

$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.31

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

ಪರಿಹಾರ

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2$$ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ ಆದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ k ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11$$

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

$$\Longrightarrow k = -12 \text{ ಅಥವಾ } k = 11$$

k ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $k = 11$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.33

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ ಆದರೆ, $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$ ಆದರೆ, $1+2+3+\cdots+n$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19\times 19\times 10\times 10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1+2+3+\cdots+n = 190$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.34

ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 11 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 24 ಸೆಂ.ಮೀ., ಆಗಿರುವ 14 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು $11^2+12^2+\cdots+24^2$ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

14 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 11^2+12^2+13^2+\cdots+24^2$

$$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+24^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6

1. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1+2+3+\cdots+45$ (ii) $16^2+17^2+18^2+\cdots+25^2$

(iii) $2+4+6+\cdots+100$ (iv) $7+14+21\cdots+490$

(v) $5^2+7^2+9^2+\cdots+39^2$ (vi) $16^3+17^3+\cdots+35^3$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ ಆದರೆ, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ ಆದರೆ, $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ., 13ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 23ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 12 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಅಂಚುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 16 ಸೆಂ.ಮೀ., 17 ಸೆಂ.ಮೀ., 18 ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 15 ಘನಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.7

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ?

(A) ಶ್ರೇಢಿಯು $\mathbb{N}$ ನ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

(B) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(C) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

(D) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯ 8 ನೇ ಪದ

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{20}$ ರ ಮುಂದಿನ ಪದ

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a - 4b + 6c - 4l + m$ ರ ಬೆಲೆಯು

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a-b}{b-c}$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು $100n+10$ ಆದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿ (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ

7. $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$ ಆಗುವಂತೆ $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 13 ನೇ ಪದವು

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (B) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ

(C) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ (D) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿ

9. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳು $k+2, 4k-6, 3k-2$ ಆದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. a, b, c, l, m, n ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$ ಗಳು

(A) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (B) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ.

11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರನೇ ಪದವು 2 ಆದರೆ, ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a-b}{b-c}$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x,\ 2x+2,\ 3x+3, \cdots$ ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $5x,\ 10x+10,\ 15x+15, \cdots$ ಗಳು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ.

14. $-3, -3, -3, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮಾತ್ರ (C) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ

(B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಮಾತ್ರ (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎರಡೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

15. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 256, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು 4 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ 3 ನೇ ಪದವು

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ, $t_2 = \frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $t_3 = \frac{1}{5}$ ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ ಆದರೆ, $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $(1+\sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1-\sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1+\sec x)(1+\sec^3 x + \sec^4 x)$

18. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು $t_n = 3 - 5n$ ಆದರೆ, ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. $a^{m-n},\ a^m,\ a^{m+n}$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1+2+3+...+n=k$ ಆದರೆ, $1^3+2^3+\cdots+n^3$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದಾಗಿದೆ.
- $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಆಗುವಂತಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ ಆಗಿದೆ.
- $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ಮತ್ತು d ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು d ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವು $t_n = a + (n-1)d, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.
- $a_{n+1} = a_n r$, ಇಲ್ಲಿ $r \neq 0, \ n \in \mathbb{N}$ ಮತ್ತು r ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವು $t_n = ar^{n-1}, \ n = 1, 2, 3, \cdots$ ಆಗಿದೆ.
- ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೊತ್ತವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೊತ್ತವು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಎಂಬುದು $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$. ಇಲ್ಲಿ, l ಎಂಬುದು ಕೊನೆಯ ಪದ.
- ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ ಆದಾಗ} \\ na & , \ r = 1 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$

  ಇಲ್ಲಿ, a ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.
- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.
- ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ),

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಮೇರಿನ್ ಮರ್ಸೆನಿರವರ ಹೆಸರಿನಿಂದಿರುವ ಮರ್ಸೆನಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು $M = 2^p - 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ p ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. M ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದರೆ, ಇದನ್ನು ಮರ್ಸೆನಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಕುತೂಹಲವೆಂದರೆ, $2^p - 1$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದರೆ, p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ತಿಳಿದಿರುವ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $2^{43,112,609} - 1$ ಎಂಬುದು ಮರ್ಸೆನಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

3 ಬೀಜಗಣಿತ

The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - Author unknown

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಬಹುಪದಗಳು
- ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ
- ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು
- ವರ್ಗಮೂಲ
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಆಲ್–ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿ (780-850) ಅರಬ್

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೂಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಆಲ್-ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿರವರ ಕೊಡುಗೆಯು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಸತನಕ್ಕೆ ತಳಹದಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿತು. ಸರಳ ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೊದಲ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅವರು ನೀಡಿದರು.

ಇವರನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸ್ಥಾಪಕರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಇವರ ಕಾರ್ಯವು ಅರೇಬಿಕ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ ಹಿಂದು-ಅರೇಬಿಕ್ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲು ಕಾರಣವಾಯಿತು.

3.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಬೀಜಗಣಿತವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಹತ್ವವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ಹಳೆಯದಾದ ಶಾಖೆಯಾಗಿದೆ. ಮೂರನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ, ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಡಯೋಫಾಂಟಸ್‌ರವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ "ಅಂಕಗಣಿತ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದರು. ಆರನೆಯ ಮತ್ತು ಏಳನೆಯ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ, ಆರ್ಯಭಟ ಮತ್ತು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರಂತಹ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು.

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅರಬ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಧಿಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯು ಉಂಟಾಯಿತು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, ಆಲ್–ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿರವರ "ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ಮತ್ತು ಸರಿದೂಗಿಸುವುದರಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಮೇಲಿನ ಸಂಗ್ರಹ" ಪುಸ್ತಕವು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಮೈಲುಗಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅವರು ಆಲ್‌ಜಾಬ್ರ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪದವನ್ನು ಲ್ಯಾಟಿನ್‌ನಲ್ಲಿ ಆಲ್‌ಜೀಬ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಧೆ ಅಥವಾ ಪುನರ್ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಎಂದು ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. 13 ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಲಿಯೋನಾರ್ಡೊ ಫಿಬೊನೇಸಿರವರ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮಹತ್ವಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿಯಾಗಿದ್ದವು. ಇಟಲಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಲೂಕಾ ಪೇಸಿಯೋಲಿ (1445-1517) ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರಾಬರ್ಟ್ ರೆಕಾರ್ಡೆ (1510-1558) ರವರ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು ಇನ್ನುಳಿದ ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿಯಾದ ಕಾರ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ನಂತರದ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವು ಹೆಚ್ಚು ಅಮೂರ್ತವಾಗಿ ಅರಳತೊಡಗಿತು ಮತ್ತು 19 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮುನ್ನಡೆಯನ್ನು ಪಡೆದರು. ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪೀಕಾಕ್ (ಬ್ರಿಟನ್, 1791-1858) ರವರು ಸ್ವತಃ ಸಿದ್ಧ ಚಿಂತನೆಯ ಸಂಸ್ಥಾಪಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಇವರನ್ನು ಕೆಲವು ಸಮಯದಲ್ಲಿ "ಬೀಜಗಣಿತದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಮೂರ್ತ ಸಂಕೇತಗಳ ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪೀಕಾಕ್‌ರವರ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಡಿ ಮಾರ್ಗನ್ (ಬ್ರಿಟನ್, 1806-1871) ಮುಂದುವರಿಸಿದರು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹರಿಸುವ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನಹರಿಸೋಣ.

3.2 ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (System of linear equations in two unknowns)

9 ನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ x ನಲ್ಲಿರುವ $ax+b=0, a\neq 0$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ, a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿರುವ $ax+by=c$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x=x_0,\ y=y_0$ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸಿದರೆ, (x_0, y_0) ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ, $ax+by=c$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (x, y) ಬಿಂದುವು $ax+by=c$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (x, y) ಪರಿಹಾರವು ಈ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $ax+by=c$ ಸಮೀಕರಣವು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ, ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ, ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$x=x_0,\ y=y_0$ ಬೆಲೆಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸಿದರೆ, (x_0, y_0) ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ $a_1x+b_1y = c_1$

$a_2x+b_2y = c_2$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು

(i) ಸಂಗತ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಜೊತೆಯ ಬೆಲೆಗಳು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು

(ii) ಅಸಂಗತ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಯಾವುದೇ x ಮತ್ತು y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಾರದು.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) $ax+by=c$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಚರಾಂಶಗಳು ಮೊದಲ ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ನೀವು ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.

$$a_1x+b_1y = c_1 \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y = c_2 \quad (2)$$

ಎಂಬ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಚರಾಂಶವನ್ನಾದರೂ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ a_1, b_1, a_2 ಮತ್ತು b_2 ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ $a_1^2+b_1^2\neq 0$, $a_2^2+b_2^2\neq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ, ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(i) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿರಬಹುದು.

(ii) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸದಿರಬಹುದು.

(iii) ಅಧಿವ್ಯಾಪಿಸಿರಬಹುದು.

(i) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. (ii) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. (iii) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅನುಗುಣವಾದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು (i) ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ (ii) ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಪರಿಹರಿಸೋಣ.

3.2.1 ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ (Elimination method)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಹೊರಹಾಕುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಒಗ್ಗೂಡಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬಹುದು.

(i) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರತಿ ಪದಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬೇಕಾದ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದದ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

(ii) ನಂತರ, ಫಲಿತ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ ವರ್ಜಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.1

ಬಿಡಿಸಿರಿ : $3x - 5y = -16$, $2x + 5y = 31$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$3x - 5y = -16 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \quad (2)$$

ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು y ನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವರ್ಜಿಸಬಹುದು.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$$5x = 15 \quad (3)$$

ಅಂದರೆ, $x = 3$.

ಈಗ, ನಾವು y ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ (1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ.

(1) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $3(3) - 5y = -16$

$$\Longrightarrow \quad y = 5.$$

$x = 3$ ಮತ್ತು $y = 5$ ಆದಾಗ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $3(3) - 5(5) = -16$ ಮತ್ತು $2(3) + 5(5) = 31$ ಆಗುತ್ತವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ಸತ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರವು (3, 5) ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (3) ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತವಾಗಿದೆ. y ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ಚರಾಂಶ x ನಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣ (3) ನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು "ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.2

11 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 3 ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 50 ಹಾಗೂ 8 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 3 ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 38 ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $3x = 12$. ಇದರಿಂದ $x = 4$.

y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, (1) ರಲ್ಲಿ $x = 4$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$11(4) + 3y = 50$. ಅಂದರೆ, $y = 2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಪರಿಹಾರವು $x = 4$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 4 ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನದ ಬೆಲೆಯು ₹ 2 ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಲಭ್ಯವಾದ ಬೆಲೆಗಳು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.3

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ : $3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

x ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಮತ್ತು (2) ನ್ನು -3 ರಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸೋಣ.

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$

$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $17y = -68$. ಇದರಿಂದ, $y = -4$

ನಂತರ, (1) ರಲ್ಲಿ $y = -4$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3x + 4(-4) = -25$$

ಅಂದರೆ, $x = -3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $(-3, -4)$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಉದಾಹರಣೆ 3.3 ರಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆ 3.1 ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಕೂಡುವುದು ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ x ಅಥವಾ y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವಂತೆ ನಾವು ಕೆಲವು ನಿರ್ವಹಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ನಾವು ವರ್ಜಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.4

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿ : $101x + 99y = 499$, $99x + 101y = 501$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$101x + 99y = 499 \quad (1)$$

$$99x + 101y = 501 \quad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ x ನ ಸಹಗುಣಕವು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ y ನ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಂತರ ಕಳೆಯಬೇಕು.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ, $200x + 200y = 1000$.

200 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $x + y = 5 \quad (3)$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, $2x - 2y = -2$

$$x - y = -1 \quad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ $x = 2,\ y = 3$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಪರಿಹಾರವು (2, 3) ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.5

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ : $3(2x + y) = 7xy$; $3(x + 3y) = 11xy$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$3(2x + y) = 7xy \quad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \quad (2)$$

xy ಪದವು ಇರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲ ಹಾಗೂ $x = 0$ ಆದರೆ, $y = 0$ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, (0, 0) ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ $x \neq 0$ ಮತ್ತು $y \neq 0$ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x \neq 0,\ y \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳನ್ನು xy ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \text{ ಅಂದರೆ, } \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \quad (3)$$

ಮತ್ತು

$$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \quad (4)$$

$a = \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $b = \frac{1}{y}$ ಆಗಿರಲಿ.

(3) ಮತ್ತು (4) ರ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$3a + 6b = 7 \quad (5)$$

$$9a + 3b = 11 \quad (6)$$

ಇದು a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ.

b ನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು, (6) $\times 2 \implies 18a + 6b = 22$ (7)

(5) ರಿಂದ (7) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, $-15a = -15$. ಅಂದರೆ, $a = 1$.

(5) ರಲ್ಲಿ $a = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $b = \frac{2}{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 1$ ಮತ್ತು $b = \frac{2}{3}$.

$a = 1$ ಆದಾಗ, $\frac{1}{x} = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$.

$b = \frac{2}{3}$ ಆದಾಗ, $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \frac{3}{2}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $(1, \frac{3}{2})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ,
$$3(2x + y) = 7xy \quad (1)$$
$$3(x + 3y) = 11xy \quad (2)$$

ಈಗ, (2) × 2 – (1) $\implies 15y = 15xy$

$\implies 15y(1-x) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಮತ್ತು $y = 0$

$x = 1$ ಆದಾಗ, $y = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಆದಾಗ, $x = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳೆಂದರೆ $(1, \frac{3}{2})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$.

ಸೂಚನೆ: $15y = 15xy$ ರಲ್ಲಿ, y ನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಬಾರದು.
ಏಕೆಂದರೆ, $y = 0$ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಿ.

1. $x + 2y = 7,\ x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8,\ 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4,\ \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy,\ 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy},\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy},\ x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy,\ 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70,\ 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97,\ 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5}, x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}, \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0, x \neq 0, y \neq 0$

ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳ ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ಸಹಗುಣಕಗಳು $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.ಆಗಿರುವಂತೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಲು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು b_2 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು b_1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \qquad (3)$$

$$b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \qquad (4)$$

ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ (4) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$(b_2 a_1 - b_1 a_2)x = b_1 c_2 - b_2 c_1 \implies x = \dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$. ಇಲ್ಲಿ, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

(1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಮತ್ತು y ಗಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿದರೆ,

$y = \dfrac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$. ಇಲ್ಲಿ, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ ಮತ್ತು } y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \qquad (5)$$

ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಸಂಗತಿ (i) $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. ಅಂದರೆ, $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (ii) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. ಅಂದರೆ, $a_2 \neq 0$ ಮತ್ತು $b_2 \neq 0$ ಆದರೆ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ a_1 ಮತ್ತು b_1 ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1 = 0 \qquad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2 \implies \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ (6) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$c_1 = \lambda c_2$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (2) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಸಹ ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ಆದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$c_1 \neq \lambda c_2$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸೋಣ.

$a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. ಆಗಿರುವ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ಅಥವಾ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

3.2.2 ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ (Cross multiplication method)

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ x ಮತ್ತು y ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ನಾವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಪರಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಎಂದು ಕರೆಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಈಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಅದು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ರೊಂದಿಗೆ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ಪರಿಹರಿಸೋಣ.

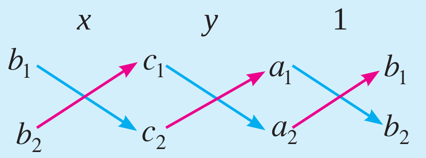
ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೆನೆಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಳಗಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬಹುದು.



ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಗುಣಲಬ್ಧ (ಮೇಲ್ಮುಖ ಬಾಣ)ವನ್ನು ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧ(ಕೆಳಮುಖ ಬಾಣ)ದಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ರೂಪದಿಂದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $b_1c_2 - b_2c_1$ ಅಥವಾ $c_1a_2 - c_2a_1$ ಎಂಬವು 0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ

(i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆದರೆ, $x = 0$.

(ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆದರೆ, $y = 0$.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ನಾವು ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.6

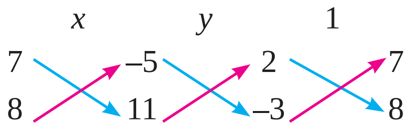
ಬಿಡಿಸಿರಿ : $2x + 7y - 5 = 0$

$-3x + 8y = -11$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನಕ್ಕಾಗಿ, ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \dfrac{y}{(-5)(-3)-(2)(11)} = \dfrac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}$.

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{117} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{1}{37}$. ಅಂದರೆ, $x = \dfrac{117}{37}$, $y = -\dfrac{7}{37}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $\left(\dfrac{117}{37}, -\dfrac{7}{37}\right)$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.7

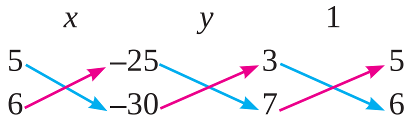
ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿ : $3x + 5y = 25$

$7x + 6y = 30$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $3x + 5y - 25 = 0$

$7x + 6y - 30 = 0$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



$$\Longrightarrow \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \quad \text{ಅಂದರೆ,} \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0, \ y = 5.$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $(0, 5)$ ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$ ಎಂದರೆ $x = \frac{0}{-17} = 0$ ಎಂಬರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{x}{0}$ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಸಂಕೇತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವಲ್ಲ. ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.8

ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ(ಅದಲು–ಬದಲು) ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ $10x + y$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (35= 10(3) +5 ಎಂಬಂತೆ)

ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ, x ಎಂಬುದು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10y + x$ ಆಗಿದೆ.

ಮೊದಲ ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $y = 2x$. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

ಅಂದರೆ, $-9x + 9y = 27 \Longrightarrow -x + y = 3 \qquad (2)$

ಸಮೀಕರಣಗಳು (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $x = 3$.

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $y = 6$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $(3\times10) + 6 = 36$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.9

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಛೇದದಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ, $\frac{18}{11}$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂಶವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಛೇದವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ $\frac{2}{5}$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{x}{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad 11x = 6y - 18 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad 5x + 40 = 4y$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $11x - 6y + 18 = 0$ (1)

$5x - 4y + 40 = 0$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18\ ;\quad a_2 = 5,\ b_2 = -4,\ c_2 = 40.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

$x \quad y \quad 1$

$-6 \quad 18 \quad 11 \quad -6$

$-4 \quad 40 \quad 5 \quad -4$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{168}{14} = 12$; $y = \frac{350}{14} = 25$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{12}{25}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.10

ಎಂಟು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಹನ್ನೆರಡು ಹುಡುಗರು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಆರು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಎಂಟು ಹುಡುಗರು 14 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ತಾನೊಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ತಾನೊಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y ಆಗಿರಲಿ. $x \neq 0$ ಮತ್ತು $y \neq 0$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು $\frac{1}{x}$ ಭಾಗದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ $\frac{1}{y}$ ಭಾಗದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 8 ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು 12 ಹುಡುಗರು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{1}{10}$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}$ (1)

ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 6 ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು 8 ಹುಡುಗರು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{1}{14}$ ಆಗಿದೆ.

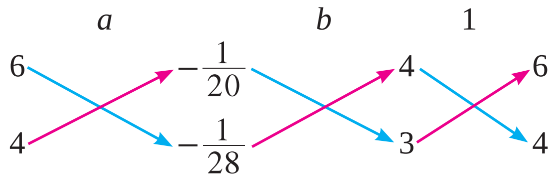
ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$ (2)

$a = \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $b = \frac{1}{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$8a + 12b = \frac{1}{10} \Longrightarrow 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0.$ (3)

$6a + 8b = \frac{1}{14} \Longrightarrow 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0.$ (4)

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ (3) ಮತ್ತು (4) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ



ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18}$. ಅಂದರೆ, $\frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}$.

ಅಂದರೆ, $a = \frac{1}{140}, \quad b = \frac{1}{280}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{1}{a} = 140, \quad y = \frac{1}{b} = 280.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ತಾನೊಬ್ಬನೇ 140 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ತಾನೊಬ್ಬನೇ 280 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ.

   (i) $3x + 4y = 24, 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44, 0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2, \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 5 ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ii) ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯದ ಅನುಪಾತವು 9 : 7 ಮತ್ತು ಅವರ ಖರ್ಚಿನ ಅನುಪಾತವು 4 : 3 ಆಗಿದೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 2000 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (iii) ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದ ಏಳರಷ್ಟಿದೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 18 ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (iv) ಮೂರು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಮೇಜುಗಳ ಬೆಲೆಯು ₹ 700 ಹಾಗೂ ಐದು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಮೇಜುಗಳ ಬೆಲೆಯು ₹ 1100 ಆದರೆ, ಎರಡು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಮೇಜುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯೇನು?

   (v) ಒಂದು ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 28 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 1ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 33 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (vi) ಒಂದು ರೈಲು ಸ್ಥಿರ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೂರವನ್ನು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು 6 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 4 ಗಂಟೆಗಳ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು 6 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಅಧಿಕ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.3 ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳು (Quadratic polynomials)

x ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ n ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದವು $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a_0 \neq 0$ ಮತ್ತು $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಘಾತ ಎರಡನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ವರ್ಗ ಬಹುಪದ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$, b ಮತ್ತು c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಘಾತ ಸೊನ್ನೆಯ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ ಎಂಬವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

$x = k$ ನಲ್ಲಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ನ್ನು k ನಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $x = k$ ನಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು $p(k) = ak^2 + bk + c$ ಆಗಿದೆ.

3.3.1 ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು (Zeros of a polynomial)

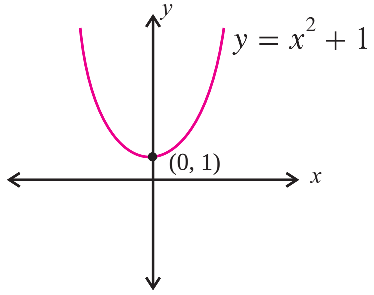
$p(x)$ ಬಹುಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $p(k) = 0$ ಆಗುವಂತೆ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, k ಎಂಬುದನ್ನು $p(x)$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

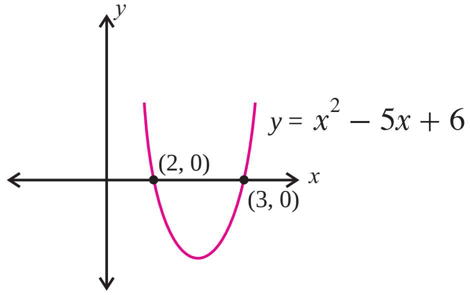
$q(x) = x^2 - 5x + 6$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $q(2) = 0$ ಮತ್ತು $q(3) = 0$.

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ಬಹುಪದವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $p(x) = x^2 + 1$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ $p(k) = 0$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ k ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದದ ನಕ್ಷೆ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷವು ಛೇದಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 3.1 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 3.2 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 3.1



ಚಿತ್ರ 3.2

3.3.2 ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $x - \alpha$ ಮತ್ತು $x - \beta$ ಗಳು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta)$, ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

ಎರಡೂ ಕಡೆ x^2, x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta)$ ಮತ್ತು $c = k\alpha\beta$.

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ ರ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳೆಂದರೆ,
>
> **ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ :** $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$.
>
> **ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ :** $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.11

$x^2 + 9x + 20$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = 0 \Longrightarrow (x + 4)(x + 5) = 0 \therefore x = -4$ ಅಥವಾ $x = -5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(-4) = (-4 + 4)(-4 + 5) = 0$ ಮತ್ತು

$p(-5) = (-5 + 4)(-5 + 5) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x)$ ನ ಸೊನ್ನೆಗಳು -4 ಮತ್ತು -5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -9$ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 20$ (1)

ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ,

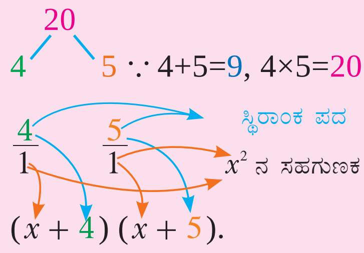
ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\frac{9}{1} = -9$ (2)

ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = \frac{20}{1} = 20$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$x^2 + 9x + 20$ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.



ಸೂಚನೆ

$p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವು ಗರಿಷ್ಠ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಯಾವುದೇ $a \neq 0$ ಗೆ $a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$ ಎಂಬುದು α ಮತ್ತು β ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ a ನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ, α ಮತ್ತು β ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.12

ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕ್ರಮವಾಗಿ -4 ಮತ್ತು 3 ಆದರೆ, ಆ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = -4$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 3$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆ ರೀತಿಯ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು $p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3$

ಉದಾಹರಣೆ 3.13

$x = \frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $x = -1$ ರಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

α ಮತ್ತು β ಗಳು $p(x)$ ನ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿ,

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

ಇದು $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು -1 ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ ಅಗತ್ಯವಾದ ಬಹುಪದವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು:

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $p(x)$ ನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ಗುಣಲಕ್ಷಣದೊಂದಿಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

$4x^2 + 3x - 1$ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು -1 ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

   (v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

   (v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ (Synthetic division)

29 ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, 4 ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 1 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 29 = 4(7) + 1.

ಹೀಗೆಯೇ, $p(x)$ = (ಭಾಗಲಬ್ಧ)$q(x)$ + ಶೇಷ ಆಗಿರುವಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಪಡೆಯಲು $p(x)$ ಬಹುಪದವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದ $q(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$. ಇಲ್ಲಿ, $r(x)$ ನ ಘಾತ < $q(x)$ ನ ಘಾತ.

ಇದನ್ನು ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$q(x) = x + a$ ಆದರೆ, $r(x)$ ನ ಘಾತ = 0. ಆದ್ದರಿಂದ, $r(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = s(x)(x + a) + r$. ಇಲ್ಲಿ r ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

ಮೇಲೆ $x = -a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \implies r = p(-a)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $q(x) = x + a$ ಆದರೆ, $x = -a$ ನಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಜಕ ಆದರೆ, ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂನಿಂದ $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

(i) $q(x)$ ಎಂಬುದು ರೇಖೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $r(x) = r$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $q(x)$ ನ ಘಾತ $= 1$ (ಅಂದರೆ, $q(x)$ ಎಂಬುದು ರೇಖೀಯ) ಆದರೆ, $p(x)$ ನ ಘಾತ $= 1 + s(x)$ ನ ಘಾತ.

(iii) $x + a$ ರಿಂದ $p(x)$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $p(-a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $r = 0$ ಆದರೆ, $q(x)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ತತ್ಸಮಾನವಾಗಿ $q(x)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

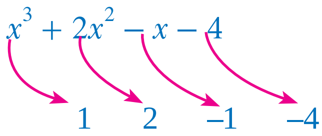
ಒಂದು ಸರಳ(ರೇಖೀಯ) ಬಹುಪದದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಸುಂದರ ವಿಧಾನವನ್ನು 1809 ರಲ್ಲಿ **ಪಾಲೋ ರಫಿನ್**ರವರು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಇವರ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಒಳಗೊಂಡ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ರೇಖೀಯ ಬಹುಪದದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಭಾಗಾಹಾರ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಪಾಲೋ ರಫಿನ್
(1765-1822, ಇಟಲಿ)

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು $q(x) = x + 2$ ಎಂಬುದು ಭಾಜಕ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧ $s(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ r ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಹಂತ 1 ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳನ್ನು x ನ ಘಾತಗಳು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ). ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಪದಗಳಿಗೆ 0 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.



ಹಂತ 2 ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 3 ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ನಮೂದಿಗೆ 0 ನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ನಮೂದುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

–2	1	2	–1	–4
	0	1×(–2) → –2	0×(–2) → 0	–1×(–2) → 2
	1+0 = 1	2+(–2) = 0	–1+0 = –1	–4+2 = –2 ⟵ ಶೇಷ

ಹಂತ 4 ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ನಮೂದುಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಸಹಗುಣಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^2 - 1$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು -2 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ ನ್ನು $x - 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ ಆಗಿರಲಿ. ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯು 3. ಆದ್ದರಿಂದ,

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ ಶೇಷ

$\therefore$ $p(x)$ ನ್ನು $x - 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^2 + 4x + 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.15

$2x + 1$ ರಿಂದ $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 + ax^2 - bx - 6$ ಆದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ಆಗಿರಲಿ.

ಭಾಜಕವು $2x + 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $2x + 1 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಆಗ $x = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯು $-\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ.

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ ಶೇಷ

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧವು $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಆದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 + ax^2 - bx - 6$. ಇದನ್ನು ನಾವು ಪಡೆದ ಭಾಗಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $a = 0$ ಮತ್ತು $b = 7$. ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 0$, $b = 7$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ ನ್ನು $x + 4$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 - ax^2 + bx + 6$ ಆದರೆ, a, b ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ ನ್ನು $2x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $4x^3 + px^2 - qx + 3$ ಆದರೆ, p , q ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.4.1 ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಘನ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

$p(x)$ ಘನ ಬಹುಪದದ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿದರೆ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $p(x)$ ನ ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವು ಘನ ಬಹುಪದವನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಗೆ, $x = a$ ಯು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $p(a) = 0$.

(ii) $x - a$ ಯು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತವಾದರೆ, $p(a) = 0$. (ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ)

(iii) $x - 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(x)$ ನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $x + 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, ಸ್ಥಿರಾಂಕದೊಂದಿಗೆ x ನ ಸಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು x ನ ಬೆಸ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.16

(i) $x - 1$ ಎಂಬುದು $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ii) $x + 1$ ಎಂಬುದು $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ಆಗಿರಲಿ.

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. (ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x - 1)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

(ii) $q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ಆಗಿರಲಿ.

$q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 1$ ಎಂಬುದು $q(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.17

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $p(1) = -2 \neq 0$ (ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

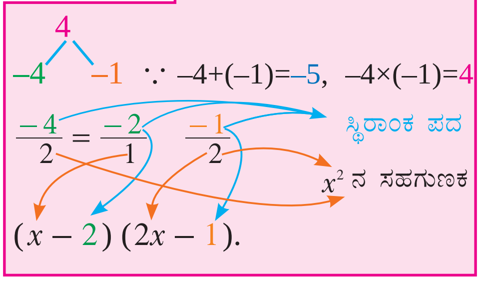
$\therefore$ $(x - 1)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, $p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$2x^2 - 5x + 2$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.



ಇತರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

–1	2	–3	–3	2
	0	–2	5	–2
	2	–5	2	0 ⟶ ಶೇಷ

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

ಈಗ, $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.18

ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ಆಗಿರಲಿ.

$p(1) \neq 0$ ಮತ್ತು $p(-1) \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x + 1$ ಮತ್ತು $x - 1$ ಎಂಬವು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಯತ್ನ ಮತ್ತು ದೋಷ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ x ನ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗಾಗಿ ನಾವು ಶೋಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

$x = 2$ ಆದಾಗ, $p(2) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x - 2$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇತರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

2	1	–3	–10	24	
	0	2	–2	–24	
	1	–1	–12	0	⟶ ಶೇಷ

$\therefore$ ಇನ್ನೊಂದು ಅಪವರ್ತನವು $x^2 - x - 12$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.)

3.5.1 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) (Greatest Common Divisor) (GCD)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ.) ಅಥವಾ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.)ವು ಅವುಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಸರಳವಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c

(i) ರಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಭಾಜಕಗಳು a, a^2, a^3 ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ a^3 ಎಂಬುದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, a^4, a^3, a^5, a^6 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ (GCD) ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು a^3 ಆಗಿದೆ.

(ii) ರಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆಯೇ, a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ab^4 ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.19

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5$, $12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$

ಪರಿಹಾರ

(i) 90, 150 ಮತ್ತು 225 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ ಮತ್ತು $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

ಮೇಲಿನವುಗಳಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 3 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 3 \times 5 = 15$

(ii) ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಅದೇ ರೀತಿಯ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ $15x^4y^3z^5$ ಮತ್ತು $12x^2y^7z^2$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕಗಳು 3, x^2, y^3 ಮತ್ತು z^2 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 3 \times x^2 \times y^3 \times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ, $6(2x^2 - 3x - 2)$, $8(4x^2 + 4x + 1)$, $12(2x^2 + 7x + 3)$.

6, 8, 12 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. 2 ಆಗಿದೆ.

ವರ್ಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$$

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು $(2x + 1)$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 2(2x + 1)$.

3.5.2 ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಹುಪದಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (Greatest common divisor of polynomials using division algorithm)

924 ಮತ್ತು 105 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಒಂದು ಸರಳವಾದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21$, (ಅಥವಾ)

$84 = 4 \times 21 + 0$,

924 ಮತ್ತು 105 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು 21 ಆಗಿದೆ.

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

ಬಹುಪದಗಳು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಇದೇ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

$(f(x))$ ನ ಘಾತ $\geq$ $(g(x))$ ನ ಘಾತ ಆಗಿರುವಂತೆ $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಲ್ಲದ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿರಲಿ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳನ್ನು ರೇಖೀಯವಾಗಿ, ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲಾಗಿದ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿ, ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ನಾವು ಕಲಿತಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಆಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದು ಕಠಿಣವಾದ ಸಮಸ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನವು ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 1 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ಪಡೆಯಲು ಮೊದಲು $f(x)$ ನ್ನು $g(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $q(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬುದು ಶೇಷ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(g(x))$ ನ ಘಾತ $>$ $(r(x))$ ನ ಘಾತ. $r(x)$ ಶೇಷವು 0 ಆದರೆ, $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $g(x)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2 $r(x)$ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ಪಡೆಯಲು $g(x)$ ನ್ನು $r(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $r_1(x)$ ಎಂಬುದು ಶೇಷವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $r(x)$ ನ ಘಾತ $>$ $r_1(x)$ ನ ಘಾತ. $r_1(x)$ ಶೇಷವು 0 ಆದರೆ, $r(x)$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಆಗಿದೆ.

ಹಂತ 3 $r_1(x)$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಶೇಷವು 0 ಆಗುವವರೆಗೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ. ಕೊನೆಯ ಹಂತದ ಒಂದು ಹಿಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿರುವ ಶೇಷವು $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಆಗಿದೆ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.$(f(x), g(x))$ ಅಥವಾ GCD $(f(x), g(x))$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ತತ್ವದ ಮೇಲೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ ಆಧಾರಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, GCD (252,105) = GCD (147,105) = GCD(42,105) = GCD(63,42) = GCD(21,42) = 21.

ಉದಾಹರಣೆ 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ ಮತ್ತು $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$ ಮತ್ತು $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಘಾತ $>$ $g(x)$ ನ ಘಾತ. $\therefore$ ಭಾಜಕವು $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಆಗಿದೆ.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad x + 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\ & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\ \hline & \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\ & \quad 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\ \hline & \quad\quad 3x^2 + 6x - 9 \\ & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{ಶೇಷ } (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 1 \\ \hline x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ & x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ & \quad -x^2 - 2x + 3 \\ \hline & \quad 0 \longrightarrow \text{ಶೇಷ} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, GCD $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

ಗಮನಿಸಿ

ಎರಡು ಮೂಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಸರಳವಾದ ಅಪವರ್ತನ(ಸ್ಥಿರಾಂಕ)ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಏನನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು $3x^2 + 6x - 9$ರಿಂದ ಸರಳವಾದ ಅಪವರ್ತನ 3ನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $x^2 + 2x - 3$ ನ್ನು ಹೊಸ ಭಾಜಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.21

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$ ಮತ್ತು $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$ ಆಗಿರಲಿ.

$g(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x = 2x(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$ ಆಗಿರಲಿ.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ಮತ್ತು $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಭಾಜಕವನ್ನು $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\ & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\ \hline & 3x^2 + 12x + 12 \\ & (x^2 + 4x + 4) \\ & \hookrightarrow \text{ಶೇಷ } (\neq 0) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ & x^3 + 4x^2 + 4x \\ \hline & -2x^2 - 8x - 8 \\ & -2x^2 - 8x - 8 \\ \hline & 0 \longrightarrow \text{ಶೇಷ} \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ಮತ್ತು $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ವು $x^2 + 4x + 4$ ಆಗಿದೆ.

$3x$ ಮತ್ತು $2x$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು x ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, GCD $(f(x), g(x)) = x(x^2 + 4x + 4)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $7x^2yz^4$, $21x^2y^5z^3$ (ii) x^2y, x^3y, x^2y^2
   (iii) $25bc^4d^3$, $35b^2c^5$, $45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4$, $49x^2yz^3$, $14xy^2z^2$
2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $c^2 - d^2$, $c(c - d)$ (ii) $x^4 - 27a^3x$, $(x - 3a)^2$
   (iii) $m^2 - 3m - 18$, $m^2 + 5m + 6$ (iv) $x^2 + 14x + 33$, $x^3 + 10x^2 - 11x$
   (v) $x^2 + 3xy + 2y^2$, $x^2 + 5xy + 6y^2$ (vi) $2x^2 - x - 1$, $4x^2 + 8x + 3$
   (vii) $x^2 - x - 2$, $x^2 + x - 6$, $3x^2 - 13x + 14$ (viii) $x^3 - x^2 + x - 1$, $x^4 - 1$
   (ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$, $20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$
   (x) $(a - 1)^5(a + 3)^2$, $(a - 2)^2(a - 1)^3(a + 3)^4$
3. ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದ ಜೋಡಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, $4x^2 - 16x + 12$
   (ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$, $3x^2 + 13x + 10$
   (iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$
   (iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.) (Least Common Multiple) (LCM)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, a^4, a^3, a^6 ಸರಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

a^3, a^4 ಮತ್ತು a^6 ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು $a^6, a^7, a^8, \cdots$ ಆಗಿವೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವು a^6 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, a^4, a^3, a^6 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. a^6 ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, a^3b^4, ab^5, a^2b^7 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. a^3b^7 ಆಗಿದೆ.

ಲ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಇನ್ನೂ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.22

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2c^3b, 42a^3cb^2, 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ,
$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$
$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$
$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

ಗುಣಲಬ್ಧ $2^1\times3^2\times5^2 = 450$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಆಗಿದೆ.

(ii) ಈಗ, 35, 42 ಮತ್ತು 30 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು $5\times7\times6 = 210$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 210\times a^3\times c^3\times b^3 = 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು $(a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$ ಆಗಿದೆ.

(iv) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.
$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ,
$$\text{ಲ.ಸಾ.ಅ.} = (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ (Relation between LCM and GCD)

ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $21 \times 35 = 105 \times 7$. ಇಲ್ಲಿ, LCM (21,35) =105 ಮತ್ತು GCD (21,35) = 7. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ:

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, **$f(x) \times g(x) =$ LCM $(f(x), g(x)) \times$ GCD $(f(x), g(x))$.**

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಸಮರ್ಥಿಸೋಣ.

$f(x) = 12(x^4 - x^3)$ ಮತ್ತು $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ ಎಂಬವು ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2)$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\text{LCM}(f(x), g(x)) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$$

$$\text{GCD}(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\text{LCM} \times \text{GCD} = 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (3)$$

ಹಾಗೂ, $f(x) \times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. $f(x)$, $g(x)$ ಹಾಗೂ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯಿಲ್ಲದೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ -1 ರ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳು ಏಕೈಕ(ಅನನ್ಯ)ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ ಮತ್ತು $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x^2 + 5x + 7$ ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ ಮತ್ತು $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ ಆಗಿರಲಿ.

$\text{GCD} = x^2 + 5x + 7$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, $\text{GCD} \times \text{LCM} = f(x) \times g(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\text{LCM} = \dfrac{f(x) \times g(x)}{\text{GCD}}$ (1)

$f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳೆರಡನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$f(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಿಸೋಣ.

	1	−2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		−2	−2	26	
		−2	−10	−14	
			8	40	56
			8	40	56
				0	

$f(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $x^2 - 2x + 8$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, (1) $\Longrightarrow$ $\quad$ LCM $= (x^2 - 2x + 8) \times g(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad$ LCM $= (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಪಡೆಯಲು $g(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನಂತರ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು $f(x)$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.24

ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x + 1$ ಮತ್ತು $x^6 - 1$ ಆಗಿವೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದವು $x^3 + 1$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\quad$ GCD $= x + 1$ ಮತ್ತು LCM $= x^6 - 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$f(x) = x^3 + 1$ ಆಗಿರಲಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ $\quad$ LCM $\times$ GCD $= f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = \frac{\text{LCM} \times \text{GCD}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.8

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದ ಜೋಡಿಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   - (i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x - 2$.
   - (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x^2 + x + 1$.
   - (iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x + 7$.
   - (iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $2x - 1$.

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲ.ಸಾ.ಅ., ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಹುಪದ $p(x)$ ನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದ $q(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   - (i) $(x + 1)^2(x + 2)^2,\ (x + 1)(x + 2),\ (x + 1)^2(x + 2)$.
   - (ii) $(4x + 5)^3(3x - 7)^3,\ (4x + 5)(3x - 7)^2,\ (4x + 5)^3(3x - 7)^2$.
   - (iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4),\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4$.
   - (iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1),\ (5x^2 + x),\ (5x^3 - 9x^2 - 2x)$.
   - (v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3),\ (x - 1),\ (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.
   - (vi) $2(x + 1)(x^2 - 4),\ (x + 1),\ (x + 1)(x - 2)$.

3.6 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು (Rational expressions)

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಮತ್ತು $n \neq 0$ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ $\frac{m}{n}$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು $p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $q(x)$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

$p(x)$ ನ್ನು $\frac{p(x)}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $p(x)$ ಬಹುಪದವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಬಹುಪದ ಆಗಿರಲೇಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{x}{x^2+1}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಬಹುಪದವಲ್ಲ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, $2x+7,\ \frac{3x+2}{x^2+x+1},\ \frac{x^3+\sqrt{2}x+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$.

3.6.1 ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು (Rational expressions in lowest form)

$p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು 1 ಆಗಿರುವಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $\frac{p(x)}{q(x)}$ ಎಂಬುದು ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ನ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಅಂಶ $p(x)$ ಮತ್ತು ಛೇದ $q(x)$ ಗಳೆರಡನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಇದರ ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.25

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$

(ii) ಈಗ, $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x) = 6x^2-5x+1 = (2x-1)(3x-1)$ ಮತ್ತು

$q(x) = 9x^2+12x-5 = (3x+5)(3x-1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ ಮತ್ತು

$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.9

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

(i) $\dfrac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (ಸುಳಿವು: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\dfrac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\dfrac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\dfrac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ (Multiplication and division of rational expressions)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$; $q(x)\neq 0$ ಮತ್ತು $\dfrac{g(x)}{h(x)}$; $h(x)\neq 0$ ಎಂಬವು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ,

(i) ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ನ್ನು $\dfrac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಅವುಗಳ ಭಾಗಾಹಾರ $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ನ್ನು $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{h(x)}{g(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$

ಉದಾಹರಣೆ 3.26

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}$ ನ್ನು $\dfrac{27z^5}{x^4y^2}$ ರಿಂದ (ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ ನ್ನು $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ ರಿಂದ (iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $$\frac{x^3y^2}{9z^4}\times\frac{27z^5}{x^4y^2} = \frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)} = \frac{3z}{x}.$$

(ii) $$\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = a^2-ab+b^2.$$

(iii) $$\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$$
$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4} = x+4.$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.27

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}$ ನ್ನು $\dfrac{x-1}{x+1}$ ರಿಂದ (ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}$ ರಿಂದ (iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1} \div \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \dfrac{(x+1)}{(x-1)} = \dfrac{4}{x-1}$.

(ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3} \div \dfrac{x^2+x+1}{3x+9} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \dfrac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1)$.

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$= \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.10

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\dfrac{x^2-2x}{x+2} \times \dfrac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x^2-81}{x^2-4} \times \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \dfrac{x^2-4}{x^3+64} \times \dfrac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \dfrac{x+3}{x^2-2x}$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\dfrac{x^2-36}{x^2-49} \div \dfrac{x+6}{x+7}$

(iii) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\dfrac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \dfrac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x) \neq 0$ ಮತ್ತು $s(x) \neq 0$ ಗಳೊಂದಿಗೆ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ಮತ್ತು $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ(ವ್ಯವಕಲನ)ವನ್ನು $\dfrac{p(x)}{q(x)} \pm \dfrac{r(x)}{s(x)} = \dfrac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.28

ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ. (i) $\dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x-1}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9} + \dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$

(ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$

$$= \dfrac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$

$$= \dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3} = \dfrac{x+2+x+6}{x+3} = \dfrac{2x+8}{x+3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.29

$\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ ಕ್ಕೆ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು?

ಪರಿಹಾರ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ.

$\dfrac{x^3-1}{x^2+2}+p(x) = \dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$p(x) = \dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \dfrac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \dfrac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \dfrac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.30

$\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$ ನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$

$$= \left[\dfrac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\dfrac{x+2}{x+1}$$

$$= \dfrac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\dfrac{x+2}{x+1}$$

$$= \dfrac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \dfrac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.11

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

   (i) $\dfrac{x^3}{x-2}+\dfrac{8}{2-x}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

   (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\dfrac{x-2}{x^2-7x+10}+\dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\dfrac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\dfrac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\dfrac{2x+5}{x+1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\dfrac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ ಕ್ಕೆ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು?

3. $2x^2-5x+1$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\dfrac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ ರಿಂದ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು?

4. $P=\dfrac{x}{x+y}$, $Q=\dfrac{y}{x+y}$ ಆದರೆ, $\dfrac{1}{P-Q}-\dfrac{2Q}{P^2-Q^2}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.7 ವರ್ಗಮೂಲ (Square root)

$a\in\mathbb{R}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವು $b^2=a$ ಆಗುವಂತಹ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ b ಆಗಿದೆ. a ನ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt[2]{a}$ ಅಥವಾ $\sqrt{a}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. $(-3)^2=9$ ಮತ್ತು $(+3)^2=9$ ಗಳೆರಡೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $\sqrt{\ }$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{9}=3$. ಹೀಗೆಯೇ, $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{10000}=100$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ವರ್ಗವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬಹುಪದಗಳ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $\sqrt{(p(x))^2}=|p(x)|$, ಇಲ್ಲಿ $|p(x)|=\begin{cases}p(x), & p(x)\ge 0 \text{ ಆದರೆ}\\ -p(x), & p(x)<0 \text{ ಆದರೆ}\end{cases}$.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{(x-a)^2}=|(x-a)|$ ಮತ್ತು $\sqrt{(a-b)^2}=|(a-b)|$.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ತುಂಬಾ ಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ. (i) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನ (ii) ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಪದಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಾಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

3.7.1 ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲ (Square root by factorization method)

ಉದಾಹರಣೆ 3.31

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2-24xy$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}}=11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}}=\dfrac{9}{8}\left|\dfrac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2-24xy}=\sqrt{4x^2+12xy+9y^2-24xy}=\sqrt{(2x-3y)^2}$

$=|(2x-3y)|$

ಉದಾಹರಣೆ 3.32

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \frac{1}{x^6} - 2$
(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) ಮೊದಲು, ನಾವು ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸೋಣ.

$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$ ಮತ್ತು
$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

ಈಗ, $\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$

$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2} = |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.12

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$
   (iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$
2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $16x^2 - 24x + 9$
   (ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$
   (iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$
   (iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$
   (v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$
   (vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (Finding the square root of a polynomial by division method)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸರಳೀಕರಿಸಲಾಗದ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಬಹುಪದಗಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನವು ಪ್ರಶಸ್ತವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

(i) $\sqrt{66564}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline 2 & 6\ \ 65\ \ 64 \\ & 4 \\ \hline 45 & 2\ \ 65 \\ & 2\ \ 25 \\ \hline 508 & 40\ \ 64 \\ & 40\ \ 64 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ & 9x^4 \\ \hline 6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\ & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline 6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\ & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{66564} = 258$ ಮತ್ತು $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$.

ಗಮನಿಸಿ

(i) ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತಗಳ **ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ** ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಿಗೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(ii) ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಸೂಕ್ತವಾದ a, b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c \\ &= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$. ಇಲ್ಲಿ $a = 3x^2,\ b = 2x\ ,\ c = 1$.

ಪರ್ಯಾಯ : ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಮೊದಲು $9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$$

ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ. ನಂತರ ಸೂಕ್ತವಾದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ m, n, l ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿವೆ.

$$\begin{aligned}25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 &= 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4 \\ &= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2 \\ &= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2 \\ &= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac \\ &= (a - b + c)^2.\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ, $a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2$

$\therefore\ \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದವು ಈಗಾಗಲೇ x ನ ಘಾತದ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆ.

	$x^2 - 5x + 6$
x^2	$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$
	x^4
$2x^2 - 5x$	$-10x^3 + 37x^2$
	$-10x^3 + 25x^2$
$2x^2 - 10x + 6$	$12x^2 - 60x + 36$
	$12x^2 - 60x + 36$
	0

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತದ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ನಂತರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

	$5 - 3x + x^2$
5	$25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$
	25
$10-3x$	$-30x + 19x^2$
	$-30x + 9x^2$
$10 - 6x + x^2$	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	0

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು $|x^2 - 3x + 5|$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾದರೆ, m ಮತ್ತು n ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತದ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯೋಜಿಸಿರಿ.

$$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m.$$

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $n = -16$ ಮತ್ತು $m = 16$ ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.13

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$
2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Quadratic equations)

ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಒಂದು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು. ಇದನ್ನು ದಿನನಿತ್ಯ ಬಳಕೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದ ಯಶಸ್ಸು ಪುರಾತನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಸಲ್ಲಬೇಕು. $ax^2 + bx = c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (ಕ್ರಿ.ಶ. 598 - 665) ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ನಂತರ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಶ್ರೀಧರ್ ಆಚಾರ್ಯ (ಕ್ರಿ.ಶ.1025) ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದರು. ಈಗ ಇದನ್ನು (ಭಾಸ್ಕರ II ನಮೂದಿಸಿರುವಂತೆ) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ನಾವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ನೋಡಲಿದ್ದೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

x ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, a, b, c ಎಂಬವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.

$p(x)$ ಎಂಬುದು 2 ರ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದವಾದರೆ, $p(x) = 0$ ರೂಪದ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಆದರ್ಶ ರೂಪವು $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2x^2 - 3x + 4 = 0, 1 - x + x^2 = 0$ ಎಂಬವು ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿವೆ.

3.8.1 ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of a quadratic equation by factorization method)

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಾಗ, ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಂಪೂರ್ಣ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೆಲವು ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಸುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.36

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $6x^2 - 5x - 25 = 0$

ಪರಿಹಾರ $6x^2 - 5x - 25 = 0$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲು, $\alpha + \beta = -5$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ ಆಗಿರುವಂತೆ α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ -5 ಎಂಬುದು x ನ ಸಹಗುಣಕ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\alpha = -15$ ಮತ್ತು $\beta = 10$.

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$
$$= (2x-5)(3x+5).$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x - 5 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 5 = 0$ ರಿಂದ ಪರಿಹಾರ ಗಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.37

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ, ನಾವು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ $x = 4$ ಮತ್ತು $x = -4$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-4, 4\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.38

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$, $3 - 4x > 0$

ಪರಿಹಾರ $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ, $24 - 10x = (3 - 4x)^2$

$$\Longrightarrow 16x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3)=0. \quad \text{ಇದರಿಂದ,} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad -\frac{5}{8}.$$

$x = \frac{3}{2}$ ಆದಾಗ, $3 - 4x = 3 - 4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x = \frac{3}{2}$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ.

$x = -\frac{5}{8}$, $3 - 4x > 0$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನಂತಿರುವ ಕರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, **ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣದ** ಮೇಲೆ ನಾವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗುತ್ತೇವೆ.

$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$. ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿ, ಈ ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣದ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x=5$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $x^2 = 25$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು $x=5$ ಮತ್ತು $x=-5$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, $x=-5$ ಎಂಬುದು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು **ಅನ್ಯ** ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು ಕರಣಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಅಂತಿಮ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಖಂಡಿತವಾದುದಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಕಳೆದುಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲದ ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.14

ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $(2x+3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2 - 6) = x(x+7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2+b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x+1)^2 - 5(x+1) = 12$ (x) $3(x-4)^2 - 5(x-4) = 12$

3.8.2 ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ರಿಂದ, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ಎಂಬ ಕೊನೆಯ ಪದವು x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + bx$ ಎಂಬ ಪದವು $x + \frac{b}{2}$ ನ ವರ್ಗವಾಗಿರಲು $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಮಾತ್ರ ಹಿಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು $x^2 + bx$ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಕೂಡಿದರೆ, ಫಲಿತಾಂಶವು ದ್ವಿಪದದ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1 x^2 ನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆದರೆ, 2 ನೇ ಹಂತಕ್ಕೆ ಹೋಗಿರಿ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು x^2 ನ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 2 x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ವರ್ಗಮೂಲದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

$$x^2 = t \Longrightarrow x = \sqrt{t} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = -\sqrt{t}. \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } t \text{ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲ.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.39

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ಆಗಿದೆ.

$$\implies x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0 \quad \text{(ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ)}$$

$$\implies x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5} \quad (x\text{ ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧವು } \frac{3}{5} \text{ ಆಗಿದೆ})$$

$$\implies x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \quad \left(\text{ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \text{ ಕೂಡಿರಿ}\right)$$

$$\implies \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\implies x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} \quad \text{(ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.40

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $a = 0$ ಆದರೆ, ಸಾಧಿಸಲು ಏನೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. $a \neq 0$ ಗೆ,

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\implies x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \implies x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\implies x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\implies \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \implies \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\implies x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \implies x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

3.8.3 ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of quadratic equation by formula method)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\implies x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \implies x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

ಅಂದರೆ, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$\Longrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (1)

ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.41

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $x + 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ ಮತ್ತು $x + 4 \neq 0$.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 - 4x - 8 = 0$. ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲ.ಸಾ.ಅ. ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು)

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2 + 2\sqrt{3}$ ಅಥವಾ $2 - 2\sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}\}$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.15

1. ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (ii) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (iv) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

(v) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ (vi) $\frac{5x + 7}{x - 1} = 3x + 2$

2. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರ (Solution of problems involving quadratic equations)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಹರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನಂತರ ಪರಿಹರಿಸಬೇಕು. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.42

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $5\frac{1}{5}$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಇದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು $\frac{1}{x}$ ಆಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $5x^2 - 26x + 5 = 0$

$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$

ಅಂದರೆ, $(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5$ ಅಥವಾ $\frac{1}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $5, \frac{1}{5}$ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.43

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು ಅದರ ಎತ್ತರ(ಔನ್ನತ್ಯ)ಕ್ಕಿಂತ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಪಾದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು x ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು $(x + 4)$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ (ಪಾದ) $\times$ (ಎತ್ತರ)

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, $\frac{1}{2}(x + 4)(x) = 48$

$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x + 12)(x - 8) = 0$

$\implies x = -12$ ಅಥವಾ 8

ಆದರೆ, $x = -12$ ಎಂಬುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಉದ್ದವು ಧನಾತ್ಮಕ ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 8$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x + 4 = 12$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.44

ಒಂದು ಕಾರು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 30 ನಿಮಿಷಗಳು ತಡವಾಗಿ ಹೊರಟಿತು. ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ 150 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳ ದೂರವನ್ನು ತಲುಪಲು, ಅದು ತನ್ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ 25 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕಾರಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವು x ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಂಡ ನಂತರ ಕಾರಿನ ವೇಗವು $(x+25)$ ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿದೆ.

ಒಟ್ಟು ದೂರ = 150 ಕಿ.ಮೀ.; ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = $\frac{\text{ದೂರ}}{\text{ವೇಗ}}$

ನಿಗದಿತ ಸಮಯ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದ ಸಮಯ(ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತೆ)ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ T_1 ಮತ್ತು T_2 ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ, $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ ಗಂಟೆ (30 ನಿಮಿಷಗಳು = $\frac{1}{2}$ ಗಂಟೆ)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+100)(x-75) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 75$ ಅಥವಾ -100, ಆದರೆ $x = -100$ ಎಂಬುದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗದ ಬೆಲೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಾರಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವು 75 ಕಿ.ಮೀ./ಗ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.16

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{65}{8}$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 45 ಆಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಬ್ಬ ರೈತನು 100 ಚ.ಮೀ. ಆಯತಾಕಾರದ ತರಕಾರಿಯ ತೋಟವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಬಯಸಿದನು. ಈತನು ಕೇವಲ 30 ಮೀ. ಮುಳ್ಳುತಂತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, ಅವನ ಮನೆಯ ಸುತ್ತು ಗೋಡೆಯನ್ನೇ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಬಾಹುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಆಯತಾಕಾರದ ತೋಟದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿದನು. ತೋಟದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮೈದಾನವು 20 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 14 ಮೀ. ಅಗಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದೇ ಅಗಲವುಳ್ಳ 111 ಚ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಹಾದಿ ಇದೆ. ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಹಾದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪ ವೇಗದಲ್ಲಿ 90 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ವೇಗವನ್ನು 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಇದು 30 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ಮೂಲ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ತಟಸ್ಥವಾಗಿರುವ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೋಣಿಯ ವೇಗವು 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿದೆ. ಇದು ನದಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ ನಂತರ ಮೂಲ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 4 ಗಂಟೆ 30 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿರುಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ನದಿಯ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ವರ್ಷದ ಹಿಂದೆ, ಒಬ್ಬನ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎಂಟರಷ್ಟಿತ್ತು. ಈಗ ಅವನ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಚದುರಂಗ ಹಲಗೆಯು 64 ಸಮನಾದ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6.25 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಹಲಗೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಅಂಚು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಚದುರಂಗ ಹಲಗೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು B ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಕ್ಕಿಂತ 6 ದಿನಗಳ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲವನ್ನು A ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರು ಒಟ್ಟಿಗೆ 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, B ಒಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೊರಟವು. ಮೊದಲ ರೈಲು ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರೈಲು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿದವು. ಮೊದಲ ರೈಲು ಎರಡನೇ ರೈಲಿಗಿಂತ 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗ. ವೇಗವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಅವುಗಳು 50 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತೀ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.8.5 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗಿವೆ.

$b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ, $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣವು $x = \frac{-b}{2a}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರವಾಗಿ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವು $b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. $b^2 - 4ac$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯು $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಶೋಧಿಸುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ **ಶೋಧಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\triangle$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$	ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ
$\triangle > 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮ
$\triangle = 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
$\triangle < 0$	ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ (ಸಂಮಿಶ್ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 3.45

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

ಪರಿಹಾರ $ax^2 + bx + c = 0$ ಗೆ ಶೋಧಕ, $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) ಇಲ್ಲಿ, $a = 1$; $b = -11$ ಮತ್ತು $c = -10$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮವಾಗಿವೆ.

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 4$, $b = -28$ ಮತ್ತು $c = 49$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

$\triangle = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮವಾಗಿವೆ.

(iii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2, b = 5$ ಮತ್ತು $c = 5$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5)$

$= 25 - 40 = -15$

$\triangle < 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.46

ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಹಾಗೂ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ c ಗೆ $(a-b+c)x^2 + 2(a-b)x + (a-b-c) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $Ax^2 + Bx + C = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ,

$A = a - b + c$, $B = 2(a-b)$ ಮತ್ತು $C = a - b - c$.

$Ax^2 + Bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು

$B^2 - 4AC = [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c)$

$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c]$

$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2]$

$\triangle = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle > 0$ ಮತ್ತು ಇದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.47

$x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$. (1)

(1) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1, b = -2(3k+1), c = 7(3+2k)$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k)$

$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3+2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$

ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle = 0$.

$\Longrightarrow \quad 9k^2 - 8k - 20 = 0$

$\Longrightarrow \quad (k-2)(9k+10) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $k = 2, \; -\frac{10}{9}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.17

1. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

   (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

   (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

   (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

   (iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಅವಾಸ್ತವ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$, ಇಲ್ಲಿ $ad - bc \neq 0$, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮವಾದರೆ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು $a = b = c$ ಆಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವು ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮವಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $c^2 = a^2(1 + m^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3.8.6 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ a , b , c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ಆಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ , $\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$

$= \frac{c}{a} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β ಆದರೆ,

(i) ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ $(x-\alpha)$ ಮತ್ತು $(x-\beta)$ ಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

ಅಂದರೆ, x^2 − (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) x + (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)= 0

> **ಸೂಚನೆ**
> ಒಂದೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.48

$3x^2 - 10x + k = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲ ಮತ್ತು k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $3x^2 - 10x + k = 0$ ಆಗಿದೆ.

α ಮತ್ತು β ಗಳು ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$ (1)

(1) ರಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{1}{3}$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\beta = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ, $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow k = 3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವು $\beta = 3$ ಮತ್ತು k ನ ಬೆಲೆಯು $k = 3$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.49

$ax^2 - 5x + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆರಡೂ 10 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, a ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 - 5x + c = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\frac{5}{a} = 10, \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $\frac{c}{a} = 10$

$\Longrightarrow \quad c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $c = 5$

ಸೂಚನೆ

$ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2 - \beta^2$ ಇತ್ಯಾದಿ ರೀತಿಯ α ಮತ್ತು β ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹಲವಾರು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $\alpha + \beta$ ಮತ್ತು $\alpha\beta$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}]$, $\alpha \geq \beta$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

ಉದಾಹರಣೆ 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha > \beta$ ಆದಾಗ $\alpha - \beta$ (iv) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a = 2, b = -3, c = -1$. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{4} \times (-2) = -\frac{13}{2}$

(iii) $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(iv) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\dfrac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\beta\right)=\dfrac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}.$$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}=\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\dfrac{161}{16}\right)\left(-\dfrac{2}{1}\right)=-\dfrac{161}{8}.$

ಉದಾಹರಣೆ 3.51

$7+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $7-\sqrt{3}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳು $7+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $7-\sqrt{3}$ ಆಗಿವೆ.

$\therefore$ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3}=14.$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})=(7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46.$

ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು x^2- (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) $x+$ (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) $=0$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2-14x+46=0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.52

$3x^2-4x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ ಮತ್ತು $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $3x^2-4x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\alpha+\beta=\frac{4}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕಾಗಿ,

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

ಹಾಗೂ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2-\dfrac{28}{9}x+\dfrac{1}{3}=0$ ಅಥವಾ $9x^2-28x+3=0$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.18

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$
   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$
2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}$
3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$
4. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $\alpha^2 + \beta^2$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, α^2 ಮತ್ತು β^2 ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $-\alpha$ ಮತ್ತು $-\beta$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
7. $x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $\frac{1}{\alpha^2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\beta^2}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta, 2\beta + \alpha$
9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು ಇನ್ನೊಂದರ ವರ್ಗವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. $5x^2 - px + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಹಾಗೂ $\alpha - \beta = 1$ ಆದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.19

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $6x - 2y = 3, kx - y = 2$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ
   (A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$
2. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಸಂಗತವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು
   (A) ಐಕ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. (B) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸಬೇಕು.
   (C) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಾರದು. (D) x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಬೇಕು.
3. $x - 4y = 8 , 3x - 12y = 24$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು
   (A) ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
   (B) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. (C) ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
   (D) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಹೊಂದಿಲ್ಲದೆಯೂ ಇರಬಹುದು.

4. $p(x) = (k+4)x^2 + 13x + 3k$ ಬಹುಪದದ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯು ಇನ್ನೊಂದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ ಬಹುಪದದ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 3 (B) 4 (C) –3 (D) –4

6. $x+4$ ರಿಂದ $x^2 - 2x + 7$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ ನ್ನು $x-1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು

(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ ಮತ್ತು $x^4 - 1$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು

(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ ಮತ್ತು $x^4 - y^4$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು

(A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ ಮತ್ತು $(x - a)^2$ ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು

(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

(C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. a^k, a^{k+3}, a^{k+5} ಇಲ್ಲಿ, $k \in \mathbb{N}$ ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಸರಳ ರೂಪವು

(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13. $\dfrac{a+b}{a-b}$ ಮತ್ತು $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ ಗಳೆರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14. $\dfrac{x^2 - 25}{x+3}$ ನ್ನು $\dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\dfrac{b^3}{b-a}$ ರೊಂದಿಗೆ $\dfrac{a^3}{a-b}$ ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಹೊಸ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 - ab + b^2$ (C) $a^3 + b^3$ (D) $a^3 - b^3$

16. $49\,(x^2 - 2xy + y^2)^2$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $7|x - y|$ (B) $7(x + y)(x - y)$ (C) $7(x + y)^2$ (D) $7(x - y)^2$

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $|x + y - z|$ (B) $|x - y + z|$ (C) $|x + y + z|$ (D) $|x - y - z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, c ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

20. $x^2 + 5kx + 16 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(A) $k > \frac{8}{5}$ (B) $k > -\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5} < k < \frac{8}{5}$ (D) $0 < k < \frac{8}{5}$

21. ಒಂದು ಮೂಲವು 3 ಆಗಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $x^2 - 6x - 5 = 0$ (B) $x^2 + 6x - 5 = 0$

(C) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (D) $x^2 - 5x + 6 = 0$

22. $x^2 - bx + c = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + bx - a = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವು

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. α, β ಗಳು $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, ತಪ್ಪಾದ ಹೇಳಿಕೆಯು

(A) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(C) $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{b}{c}$

24. α ಮತ್ತು β ಗಳು $ax^2 + bx + c = 0$ ರ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\frac{1}{\alpha}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\beta}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $ax^2 + bx + c = 0$ (B) $bx^2 + ax + c = 0$

(C) $cx^2 + bx + a = 0$ (D) $cx^2 + ax + b = 0$

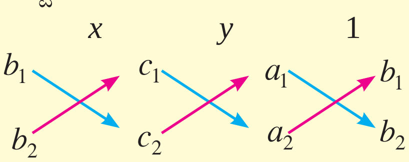
25. $b = a + c$ ಆದರೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣವು

(A) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. (B) ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(C) ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. (D) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಮೊದಲು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿ ನಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.



- $p(k) = 0$ ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ k ಎಂಬುದನ್ನು $p(x)$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

- $p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧ

  ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

  ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{c}{a} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

- (i) ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಗೆ, $x = a$ ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $p(a) = 0$.
  (ii) $x - a$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(a) = 0$.
  ಇವೆರಡರ ವಿಲೋಮಗಳೂ ಸತ್ಯ.
- ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತವುಳ್ಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.
- ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.
- ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಆ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- $a \in \mathbb{R}$ ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವು $b^2 = a$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ b ಆಗಿದೆ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt[2]{a}$ ಅಥವಾ $\sqrt{a}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
- x ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.
- ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (i) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನ (ii) ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನ (iii) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.
- $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗಿವೆ.
  ಇಲ್ಲಿ, $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.
- $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು
  (i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ, ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಎರಡು ಸಮಾನವಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಫರ್ಮಾಟನ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ: $n > 2$ ಆದಾಗ $x^n + y^n = z^n$ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರು "ನಾನು ಸತ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಒಳಗೊಂಡಿರಲು ಈ ಚೌಕಟ್ಟು ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ" ಎಂದು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು 1994 ರಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಆಂಡ್ರಿವ್ ವೈಲ್ಸ್‌ರವರು ಪರಿಹರಿಸುವವರೆಗೆ ಸುಮಾರು 300 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಯಾರೂ ಪರಿಹರಿಸಲಾಗಲಿಲ್ಲ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಆಂಡ್ರಿವ್ ವೈಲ್ಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಅವರ ಪಟ್ಟಣದ ಗ್ರಂಥಾಲಯದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರು.

4

ಮಾತೃಕೆಗಳು

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred - *Sylvester*

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಚನೆ
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ
- ಮಾತೃಕೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಜೇಮ್ಸ್ ಜೋಸೆಫ್ ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್

(1814-1897) ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಇವರು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆ ಮೂಲಭೂತ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು "ಶೋಧಕ" ಪದವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಹಲವಾರು ಗಣಿತೀಯ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ.

1880 ರಲ್ಲಿ ಲಂಡನ್ನಿನ ರಾಯಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ನೀಡುವ ಉನ್ನತ ಬಹುಮಾನವಾದ ಕಾಪ್ಲೆ ಪದಕವನ್ನು ನೀಡಿ ಇವರನ್ನು ಗೌರವಿಸಿದೆ. 1901 ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಲಂಡನ್ನಿನ ರಾಯಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯು ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್ ಪದಕವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆ.

4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ "ಮಾತೃಕೆ" ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಗಣಿತೀಯ ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

18 ಮತ್ತು 19 ನೇ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿ ರೂಪಿಸಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲಾಯಿತು. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ ಮತ್ತು ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರದಿಂದ ಉಂಟಾಯಿತು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹು ಶಕ್ತಿಯುತವಾದ ಸಾಧನಗಳಾಗಿವೆ. ಮಾತೃಕೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅವು ಹಲವಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ವಸ್ತುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲು ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದಟ್ಟವಾದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಕೇತಗಳೊಂದಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಗಣಿತೀಯ ಶೀಘ್ರಲಿಪಿಯು ತುಂಬಾ ನಾಜೋಕು ಮತ್ತು ಶಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಗಾಗಿ "ಮಾತೃಕೆ" ಎಂಬ ಪದವು 1850 ರಲ್ಲಿ **ಜೇಮ್ಸ್ ಜೋಸೆಫ್ ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್**ರವರಿಂದ ಪರಿಚಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. "Matrix" ಎಂಬುದು ಗರ್ಭಾಶಯಕ್ಕೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಅದೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಲವೊಂದು ರಚಿತವಾಗುವ ಅಥವಾ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಕೂಡ ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು.

x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ :

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \quad (2)$$

ಚರಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸದೇ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿ ವರ್ಜಿಸುವ (ಗಾಸಿಯನ್ ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವ) ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ (2, 1) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

4.2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಚನೆ (Formation of matrices)

ಮಾತೃಕೆಗಳು ಉದ್ಭವವಾಗುವ ಮಾರ್ಗಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ. ( ) ದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕುಮಾರನು ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥದೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಇದನ್ನು (10) ಎಂಬಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ( ) ದ ಒಳಗಿರುವ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥದೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಇದನ್ನು (10 7) ಎಂಬಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೋಡಿ:

ಕುಮಾರ ಮತ್ತು ಅವನ ಸ್ನೇಹಿತರಾದ ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ರಾಜು 8 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಗೋಪಿ 6 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಇದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

	ಪೆನ್ನುಗಳು	ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು
ಕುಮಾರ	10	7
ರಾಜು	8	4
ಗೋಪಿ	6	5

ಇದನ್ನು ನಮೂದುಗಳು ಅನುಗುಣವಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

(i) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ← ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ← ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ← ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು

↑ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು

ಇದೇ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

	ಕುಮಾರ	ರಾಜು	ಗೋಪಿ
ಪೆನ್ನುಗಳು	10	8	6
ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು	7	4	5

ಇದನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

(ii) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ← ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು, ← ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು

↑ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಮೂರನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು

ಜೋಡಣೆ (i) ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, ಜೋಡಣೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು **ಮಾತೃಕೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಮಾತೃಕೆಯು ಚೌಕ ಆವರಣ ಅಥವಾ ಆವರಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳೊಳಗೆ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿದೆ.

ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $A, B, X, Y, \cdots$ ಗಳಂತಹ ಒಂದು ದಪ್ಪ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮಾತೃಕೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ನಮೂದುಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಆ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಆ ಮಾತೃಕೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.1 ಮಾತೃಕೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (General form of a matrix)

m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ A ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಕಂಡ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ ಎಂಬವು ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಮೇಲಿನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಅಥವಾ $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ಎಂದೂ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ, $i = 1, 2, 3, \dots, m.$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, 3, \dots, n.$

ಇಲ್ಲಿ, a_{ij} ಎಂಬುದು A ನ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೇ ಕಂಬಸಾಲು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮತ್ರಕೆಯ ಅಂಶವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶ, $a_{23} = 1.$

ಹೀಗೆಯೇ, $a_{11} = 4, a_{12} = 5, a_{13} = 3, a_{21} = 6, a_{22} = 2, a_{31} = 7, a_{32} = 8$ ಮತ್ತು $a_{33} = 9.$

4.2.2 ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮ ಅಥವಾ ಆಯಾಮ (Order or dimension of a matrix)

A ಮಾತೃಕೆಯು m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m\times n$ (m ಛೇದಕ n ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳುವುದು) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಯು 2 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ m ಯಾವಾಗಲೂ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಕ್ಷರ n ಯಾವಾಗಲೂ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

4.3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು (Types of matrices)

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕೆಲವು ವಿಧಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

(i) ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ (Row matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸದಿಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = (5 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 1)$ ಮತ್ತು $B = (-3 \ \ 0 \ \ 5)$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1×4 ಮತ್ತು 1×3 ಕ್ರಮದ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = (a_{ij})_{1 \times n}$ ಎಂಬುದು $1 \times n$ ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ (Column matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಸದಿಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2×1 ಮತ್ತು 3×1 ಕ್ರಮದ ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ ಎಂಬುದು $m \times 1$ ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(iii) ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ (Square matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ಎಂಬುದು m ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ ಅಂಶಗಳನ್ನು A ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ (Diagonal matrix)

ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಎಲ್ಲಾ $i \neq j$ ಗೆ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು.

(v) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ (Scalar matrix)

ಒಂದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ಆದಾಗ} \\ k, & i = j \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಅದಿಶ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(vi) ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ (Unit matrix)

ಒಂದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು 1 ಆದರೆ, ಆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು I_n ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ಆದಾಗ} \\ 0, & i \neq j \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಆದರೆ, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅನನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

(vii) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ (Null matrix or Zero-matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು O ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಎಂಬವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2×3 ಮತ್ತು 2×2 ಕ್ರಮಗಳ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ (i) ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಿಲ್ಲ. (ii) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. (iii) ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಗೆ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(viii) ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ (Transpose of a matrix)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು A^T (A ನ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳಿ) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

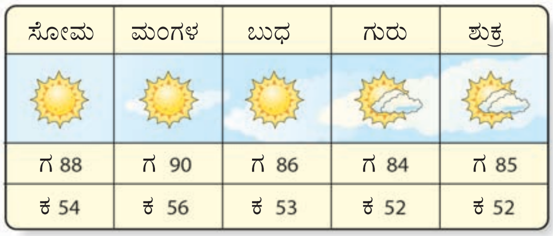
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ ಆದರೆ, } \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಆದರೆ,

$$A^T = [b_{ij}]_{n\times m}. \text{ ಇಲ್ಲಿ, } i = 1, 2, \cdots, n \text{ ಮತ್ತು } j = 1, 2, \cdots, m \text{ ಗಳಿಗೆ } b_{ij} = a_{ji}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 4.1

ಕೋಷ್ಟಕವು ಐದು-ದಿನಗಳ ಗರಿಷ್ಠ (H) ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ (L) ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಯಾವ ದಿನ ಹೆಚ್ಚು ಶಾಖವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ?



ಪರಿಹಾರ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

$$\begin{array}{cc} & \text{ಸೋಮ} \quad \text{ಮಂಗಳ} \quad \text{ಬುಧ} \quad \text{ಗುರು} \quad \text{ಶುಕ್ರ} \\ A = \begin{array}{c}\text{ಗರಿಷ್ಠ}\\ \text{ಕನಿಷ್ಠ}\end{array} & \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}. \end{array} \quad \text{ಅಂದರೆ, } A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು (ಗರಿಷ್ಠ) ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ, ಮಂಗಳವಾರವು ಹೆಚ್ಚು ಶಾಖವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ದಿನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.2

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕೊಬ್ಬು, ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್ ಮತ್ತು ಪ್ರೋಟೀನ್‌ಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

	ಪದಾರ್ಥ 1	ಪದಾರ್ಥ 2	ಪದಾರ್ಥ 3	ಪದಾರ್ಥ 4
ಕೊಬ್ಬು	5	0	1	10
ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್	0	15	6	9
ಪ್ರೋಟೀನ್	7	1	2	8

3×4 ಮತ್ತು 4×3 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ 3×4 ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ ಎಂಬಂತೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ 4×3 ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ಎಂಬಂತೆ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 4.3

$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮ (ii) a_{13} ಮತ್ತು a_{42} ಅಂಶಗಳು (iii) 2 ಎಂಬ ಅಂಶದ ಸ್ಥಾನ.

ಪರಿಹಾರ (i) A ಮಾತೃಕೆಯು 4 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 4×3 ಆಗಿದೆ.

(ii) a_{13} ಅಂಶವು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. $\therefore a_{13} = 8$.
ಹೀಗೆಯೇ, $a_{42} = -2$, ನಾಲ್ಕನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶ.

(iii) 2 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. $\therefore a_{22} = 2$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.4

ಅಂಶಗಳು $a_{ij} = |2i - 3j|$ ಆಗಿರುವ 2×3 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, 2×3 ಮಾತೃಕೆಯು

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = |2i - 3j|$ ಇಲ್ಲಿ, $i = 1, 2$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, 3$

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = |-1| = 1$, $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$, $a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = [2(2) - 3] = 1$, $a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2$, $a_{23} = |2(2) - 9| = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಮಾತೃಕೆಯು $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A^T ಮತ್ತು $(A^T)^T$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

A ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ A ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆ A^T ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ಹೀಗೆಯೇ, A^T ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ $(A^T)^T$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, $(A^T)^T = A$. ಯಾವುದೇ ಮಾತೃಕೆ B ಗೆ, $(B^T)^T = B$ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದೇ ಅದಿಶ k ಗೆ, $(kA)^T = kA^T$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಒಂದು ಜಲ ಕ್ರೀಡಾ ಉದ್ಯಾನವನದ ಪ್ರವೇಶ ಚೀಟಿಯ ದರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

	ವಾರದ ದಿನಗಳ ದರಗಳು (₹)	ವಾರಾಂತ್ಯದ ದರಗಳು (₹)
ವಯಸ್ಕರು	400	500
ಮಕ್ಕಳು	200	250
ಹಿರಿಯ ನಾಗರಿಕರು	300	400

ವಯಸ್ಕರು, ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ಹಿರಿಯ ನಾಗರಿಕರ ಪ್ರವೇಶ ಚೀಟಿಗಳ ದರಗಳಿಗೆ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ 6 ಹಿರಿಯ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳು, 8 ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳು ಮತ್ತು 13 ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು 3×1 ಮತ್ತು 1×3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $(3 \ \ 4 \ \ 5)$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು 8 ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮಾತೃಕೆಯು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಗಳೇನು?

5. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು 30 ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮಾತೃಕೆಯು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಗಳೇನು?

6. ಅಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ 2×2 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{i-j}{i+j}$

7. ಅಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ 3×2 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, (i) ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ii) a_{24} ಮತ್ತು a_{32} ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (iii) 7 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಯಾವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಯಾವ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ?

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A ನ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A^T)^T = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

4.4 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Operation on matrices)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಾನತೆ, ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

(i) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಾನತೆ (Equality of matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನವಾದವು ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ,

(i) ಅವು ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ಮತ್ತು

(ii) A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಅನುರೂಪ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $a_{ij} = b_{ij}$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವು ಸಮಾನವಾದ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲ.

ಹಾಗೂ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. ಏಕೆಂದರೆ, ಅನುರೂಪವಾದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x, y ಮತ್ತು z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ, $x = 3$, $y = 9$ ಮತ್ತು $z = 4$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.7

ಬಿಡಿಸಿರಿ : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2x \\ 31 + 4y \end{pmatrix}$

ಪರಿಹಾರ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $y = 6 - 2x$ ಮತ್ತು $3x = 31 + 4y$.

ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 6 - 2x$ ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ, $3x = 31 + 4(6 - 2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

$\therefore \quad x = 5$ ಮತ್ತು $y = 6 - 2(5) = -4$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 5$ ಮತ್ತು $y = -4$.

(ii) ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರ (Multiplication of a matrix by a scalar)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅದಿಶ (ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) k ಗೆ, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $b_{ij} = ka_{ij}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಅದಿಶ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ B ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $B = kA$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $3A$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $3A$ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ (Addition of matrices)

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 3 ಹುಡುಗಿಯರು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

$A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ ಹುಡುಗರು / ಹುಡುಗಿಯರು

ವಿಜ್ಞಾನ

$B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ ಹುಡುಗರು / ಹುಡುಗಿಯರು

ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಳಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಅನುರೂಪ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಬೇಕು.

$$A+B=\begin{pmatrix}45 & 72 & 81\\30 & 90 & 65\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}51 & 80 & 90\\42 & 85 & 70\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}45+51 & 72+80 & 81+90\\30+42 & 90+85 & 65+70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96 & 152 & 171\\72 & 175 & 135\end{pmatrix}$$

ಅಂತಿಮ ಮಾತೃಕೆಯು ಮೊದಲ ಹುಡುಗನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 96 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಕೊನೆಯ ಹುಡುಗಿಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 135 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾಳೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಮಾತೃಕೆ $C=[c_{ij}]_{mxn}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಕಲನದ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿರುವಂತೆಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು $A+B$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.9

$A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 2\\5 & 9 & 1\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಲಭ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $A+B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.10

$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -2 & 3\\1 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\2 & 8 & 2 & 3\end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A+B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು 2×4 ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A+B=\begin{pmatrix}5 & 6 & -2 & 3\\1 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 7\\2 & 8 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7\\1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3\end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A+B=\begin{pmatrix}8 & 5 & 2 & 10\\3 & 8 & 6 & 5\end{pmatrix}$

(iv) ಮಾತೃಕೆಯ ಋಣಾತ್ಮಕ (Negative of a matrix)

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ಮಾತೃಕೆಯ ಋಣಾತ್ಮಕವನ್ನು $-A$ ರಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $-A=(-1)A$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $-A=[b_{ij}]_{mxn}$. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $b_{ij}=-a_{ij}$.

(v) ಮಾತೃಕೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನ (Subtraction of matrices)

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, ವ್ಯವಕಲನ $A-B$ ಎಂಬುದನ್ನು $A-B=A+(-1)B$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $A-B=[c_{ij}]$. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.11

ತೂಕವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪಥ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗಿಯರ ಆರಂಭದ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ A ಮಾತೃಕೆಯು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಥ್ಯದ ನಂತರ ಅವರ ಅನುಗುಣವಾದ ತೂಕಗಳನ್ನು B ಮಾತೃಕೆಯು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{ಹುಡುಗರು} \\ \text{ಹುಡುಗಿಯರು}\end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{ಹುಡುಗರು} \\ \text{ಹುಡುಗಿಯರು}\end{matrix}$$

ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕಳೆದುಕೊಂಡ ತೂಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ, $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of matrix addition)

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A ಮತ್ತು B ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A+B = B+A$.

(ii) ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A, B ಮತ್ತು C ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶದ ಲಭ್ಯತೆ

ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವಾಗಿದೆ. A ಎಂಬುದು $m \times n$ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ, $A + O = O + A = A$. ಇಲ್ಲಿ O ಎಂಬುದು $m\times n$ ಕ್ರಮದ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದೆ.

(iv) ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶದ ಲಭ್ಯತೆ

A ಮಾತೃಕೆಗೆ, $B + A = A + B = O$ ಆದರೆ, B ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$A + (-A) = (-A) + A = O$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $-A$ ಎಂಬುದು A ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವು ಅದರ ಋಣಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಏಕೈಕ (ಒಂದೇ ಒಂದು) ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. ಮಾತೃಕೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x, y ಮತ್ತು z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = 2A + B$ ಆದರೆ, C ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $6A - 3B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a ಮತ್ತು b ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ,

$A + (B + C) = (A + B) + C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

11. ಒಂದು ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ ಕಂಪನಿಯು ಅದರ ಮೂರು ಶಾಖೆಯ ಮಳಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳು ತಮ್ಮ ಪೂರೈಕೆಯ ಖರೀದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಮಾರಾಟವಾದ ಪ್ರತಿ ವಿಧದ ಮನರಂಜನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

		ಟಿ.ವಿ.	ಡಿ.ವಿ.ಡಿ	ವಿಡಿಯೋಗೇಮ್ಸ್	ಸಿ.ಡಿ. ಪ್ಲೇಯರ್ಸ್
ವಾರ I	ಮಳಿಗೆ I	30	15	12	10
	ಮಳಿಗೆ II	40	20	15	15
	ಮಳಿಗೆ III	25	18	10	12
ವಾರ II	ಮಳಿಗೆ I	25	12	8	6
	ಮಳಿಗೆ II	32	10	10	12
	ಮಳಿಗೆ III	22	15	8	10

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಎರಡು ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಈಜು ಕೊಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ದಿನದ ಪ್ರವೇಶ ಶುಲ್ಕದ ವಿವರವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಪ್ರವೇಶ ಶುಲ್ಕ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ		
ಸದಸ್ಯತ್ವ	ಮಕ್ಕಳು	ವಯಸ್ಕರು
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ	20	30
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ	30	40
ಸದಸ್ಯತ್ವ–ರಹಿತ		
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ	25	35
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ	40	50

ಸದಸ್ಯತ್ವ–ರಹಿತಕ್ಕಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4.6 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ (Multiplication of matrices)

ಕುಮಾರಿಯು 3 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 2 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮೀನಾಳು 4 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹10 ಮತ್ತು ₹5 . ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

$3\times 10+2\times 5=40$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕುಮಾರಿಗೆ ₹ 40 ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$4\times 10+5\times 5=65$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೀನಾಳಿಗೆ ₹ 65 ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನೂ ಬಳಸಿ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯೋಣ.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 10+2\times 5\\4\times 10+5\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\65\end{pmatrix}$

ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹8 ಮತ್ತು ₹4 ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕುಮಾರಿ ಮತ್ತು ಮೀನಾಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $3\times 8+2\times 4=$ ₹32 ಮತ್ತು $4\times 8+5\times 4=$ ₹ 52 ಆಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 8+2\times 4\\4\times 8+5\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\52\end{pmatrix}$

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಬಹುದು.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & 8\\5 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\times 10+2\times 5 & 3\times 8+2\times 4\\4\times 10+5\times 5 & 4\times 8+5\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 32\\65 & 52\end{pmatrix}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾದರೆ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನಾವು ಮೊದಲ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಂಶಗಳನುಸಾರವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಸರಳವಾದ ಉದಾಹರಣೆಯು ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. AB ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು

$AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix}$ ಆಗಿದೆ.

ಹಂತ 1 : A ನ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು B ನ ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ, ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -9\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(3)+(-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 2: A ನ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಬಳಸಿ, ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿರುವ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 3: A ನ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನೊಂದಿಗೆ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 4: A ನ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ.

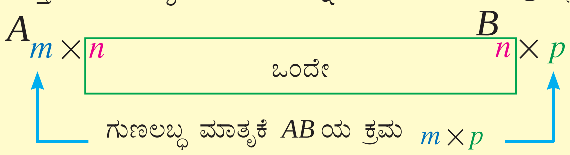
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 5: AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ಆದರೆ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ರಮವು $m\times p$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಉದಾಹರಣೆ 4.12

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $A_{2\times 5}$ ಮತ್ತು $B_{5\times 4}$ (ii) $A_{1\times 3}$ ಮತ್ತು $B_{4\times 3}$

ಪರಿಹಾರ

(i) A ನಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೂ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×4 ಆಗಿದೆ.

(ii) A ನ ಕ್ರಮವು 1×3 ಮತ್ತು B ನ ಕ್ರಮವು 4×3 ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A ನಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.13

ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

ಪರಿಹಾರ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$3x + 2y = 8$ ಮತ್ತು $4x + 5y = 13$

$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$ ಮತ್ತು $4x + 5y - 13 = 0.$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ,

	x		y	1
2	–8	3	2	
5	–13	4	5	

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2, \; y = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $A^2 = A \times A$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$

4.7 ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of matrix multiplication)

ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ, (i) $AB \neq BA$ (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ) (ii) $AB = 0$ ಎಂಬುದು A ಅಥವಾ B ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು (iii) $AB = AC$, A ಯು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಮಾತೃಕೆ, ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ $B = C$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

(i) $AB \neq BA$ (ii) $AD = O$, ಆದಾಗ್ಯೂ, A ಮತ್ತು D ಗಳು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲ ಮತ್ತು (iii) $AB = AC$, ಆದರೆ $B \neq C$. ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ AB ಮತ್ತು BA ಗಳೆರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, $AB = BA$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ಕಡ್ಡಾಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.15

$A=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$ ಆದರೆ, AB ಮತ್ತು BA ಗಳನ್ನು ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 3×2 ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಮತ್ತು BA ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿವೆ.

$$AB=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}72-42&-24+7&16+35\\-18+24&6-4&-4-20\\0+18&0-3&0-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&-17&51\\6&2&-24\\18&-3&-15\end{pmatrix}$$

ಹೀಗೆಯೇ,

$$BA=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78&-69\\50&-61\end{pmatrix}.$$ ($AB \neq BA$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ, ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವಾಗ, $(AB)C = A(BC)$.

(iii) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ, (i) $A(B+C) = AB + AC$.

(ii) ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವಾಗ, $(A+B)C = AC + BC$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.16

$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C=\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A(B+C) = AB + AC$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $$B+C=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$A(B+C)=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&38\\5&34\end{pmatrix} \quad (1)$$

ಈಗ, $AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -6+12 & 15+14 \\ 2+24 & -5+28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-10 & 3+6 \\ -1-20 & -1+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತೆಯ ಲಭ್ಯತೆ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಸಮಾನವಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

n ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ A ಗೆ, $AI = IA = A$. ಇಲ್ಲಿ, I ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, I ಎಂಬುದನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅನನ್ಯತಾ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $AI = IA = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ, I ಎಂಬುದು ಕ್ರಮ 2 ರ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.)

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 9+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

ಹಾಗೂ, $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+9 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AI = IA = A$.

(v) ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮದ ಲಭ್ಯತೆ

A ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದ್ದು, $AB = BA = I$, ಇಲ್ಲಿ I ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ, ಆಗಿರುವಂತೆ n ಕ್ರಮದ B ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, B ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) B ಯು A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವಾದರೆ, A ಯು B ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವು ಲಭ್ಯವಾದರೆ, ಅದು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

ಹಾಗೂ, $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\therefore$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿವೆ.

(vi) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸ್ಥಳಾಂತರಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಲೋಮ ನಿಯಮ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದು, AB ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.19

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (1)

ಈಗ, $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $(AB)^T = B^T A^T$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

   (i) AB, ಇಲ್ಲಿ $A = [a_{ij}]_{4x3}, B = [b_{ij}]_{3x2}$ (ii) PQ, ಇಲ್ಲಿ $P = [p_{ij}]_{4x3}, Q = [q_{ij}]_{4x3}$

   (iii) MN, ಇಲ್ಲಿ $M = [m_{ij}]_{3x1}, N = [n_{ij}]_{1x5}$ (iv) RS, ಇಲ್ಲಿ $R = [r_{ij}]_{2x2}, S = [s_{ij}]_{2x2}$

2. ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

   (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣಿನ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ತನ್ನ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಒಂದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣು, ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 20, ₹ 10 ಮತ್ತು ₹ 5 ಆಗಿದೆ. ಮೂರು ದಿನಗಳಲ್ಲಾದ ಮಾರಾಟದ ವಿವರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದಿನ	ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು	ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು	ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳು
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

ಪ್ರತಿ ದಿನ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಬಗೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ್ದರಿಂದ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ ಹಾಗೂ $AX = C$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, AB ಮತ್ತು BA ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = (2 \quad 1)$ ಆದರೆ, $(AB)C = A(BC)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

10. ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. ಬಿಡಿಸಿರಿ : $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (0)$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A+B)C$ ಮತ್ತು $AC + BC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $(A+B)C = AC + BC$ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಲ್ಲದ ಹೇಳಿಕೆ ಯಾವುದು?
   (A) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (B) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (C) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (D) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ,
   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ
   (A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

4. $A = (1 \ \ -2 \ \ 3)$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A + B$ ಯು
   (A) $(0 \ \ 0 \ \ 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (C) (-14) (D) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

5. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3. ಆದರೆ, ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು
   (A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯು
   (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A ನ ಕ್ರಮವು 3×4 ಮತ್ತು B ನ ಕ್ರಮವು 4×3 ಆದರೆ, BA ನ ಕ್ರಮವು
   (A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

8. $A \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2)$ ಆದರೆ, A ನ ಕ್ರಮವು
   (A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. $AB = I$ ಮತ್ತು $BA = I$ ಆಗುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, B ಯು
   (A) ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ (B) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ
   (C) A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಮಾತೃಕೆ (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ
    (A) $2, 0$ (B) $0, 2$ (C) $0, -2$ (D) $1, 1$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $A + B = O$ ಆದರೆ, B ಯು

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A^2 ಎಂಬುದು

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. Aನ ಕ್ರಮವು $m \times n$ ಮತ್ತು Bನ ಕ್ರಮವು $p \times q$ ಆಗಿದ್ದು, A ಮತ್ತು Bಗಳ ಸಂಕಲನವು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ,

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ ಎಂಬುದು $A^2 = I$ ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ,

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ ಮತ್ತು $a_{ij} = i + j$ ಆದರೆ, $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a, b, c ಮತ್ತು d ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) 1, 0, 0, 1 (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) 1, 0, 0, 0

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಮಾತೃಕೆ $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿದೆ.
- m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m \times n$ ಆಗಿದೆ.
- $m = 1$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $n = 1$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $m = n$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ಎಂಬುದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಮತ್ತು $i = j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = k$ (k ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i = j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 1$ ಮತ್ತು $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]$ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  ಅಂದರೆ, A ಮತ್ತು B ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A + B = B + A$.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  ಅಂದರೆ, A, B ಮತ್ತು C ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m\times n$ ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $n\times p$ ಆದರೆ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $m\times p$ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, $AB \neq BA$.
- ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
  ಅಂದರೆ, $(AB)C = A(BC)$.
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ ಮತ್ತು $(AB)^T = B^T A^T$
- $AB = BA = I$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- $AB = O$ ಆದರೆ, $A = O$ ಅಥವಾ $B = O$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಿಲ್ಲ.
  ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

2003 ರಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಒಂದು ಮಿಲಿಯನ್ ಯು.ಎಸ್.ಡಾಲರ್ ಮೊತ್ತದ ಅಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಇದು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ನಾರ್ವೆನ ವಿಜ್ಞಾನದ ಅಕಾಡೆಮಿರವರಿಂದ ನೀಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಉನ್ನತ ಸಾಧನೆಗೈದ ಒಬ್ಬರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ನಾರ್ವೆನ ರಾಜ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿರುವ ಭಾರತೀಯ, ಅಮೇರಿಕಾವಾಸಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎಸ್.ಆರ್.ಶ್ರೀನಿವಾಸ ವರದನ್‌ರವರಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಅವರ ಮೂಲಭೂತ ಕೊಡುಗೆಗಾಗಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಪಕ ವಿಚಲನೆಗಳ ಏಕರೂಪ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ 2007 ರಲ್ಲಿ ಅಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

5 ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - *Leonardo de Vinci*

- ಪೀಠಿಕೆ
- ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ
- ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
- ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್

(1601-1665) ಫ್ರಾನ್ಸ್

17 ನೇ ಶತಮಾನದ ಮೊದಲ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ ಮುಂಚೂಣಿಯ ಇಬ್ಬರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರುಗಳಲ್ಲಿ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆರೊಂದಿಗೆ ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರು ಒಬ್ಬರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಭೂತ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದರು. ಇವರು ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಊರ್ಧ್ವಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೂಲ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದರು.

ಇವರು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಆದಿ ಪರಿಶೋಧನೆಯ ಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು 1636 ರಲ್ಲಿ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಇದು ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ "ಲಾ ಜಾಮೆಟ್ರಿ" ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿತು.

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ರೇಖಾಗಣಿತವಾಗಿದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ನಡುವಿನ ಸೇತುವೆಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಫ್ರೆಂಚ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ರೇಖಾಗಣಿತದ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಅಧ್ಯಯನವು ನಡೆಯಿತು. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬಳಕೆಯು ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ಮಹತ್ವಪೂರ್ಣ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಕ್ರಾಂತಿಯಾಗಿದೆ. ಇವರು 1637 ರಲ್ಲಿ "ಲಾ ಜಾಮೆಟ್ರಿ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ, ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರೂ ಕೂಡಾ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಮಹಾ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. 1692 ರಲ್ಲಿ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಗಾಟ್‌ಫ್ರೆಡ್ ವಿಲ್ಹೆಲ್ಮ್ ವಾನ್ ಲೀಬ್ನಿಟ್ಸ್‌ರವರು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜಾಂಕ ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವಾಂಕಗಳಂತಹ ಆಧುನಿಕ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ನಿಕೋಲಸ್ ಮುರ್ರೆ ಬಟ್ಲರ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ "ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ನ್ಯೂಟನ್ ಹಾಗೂ ಲೀಬ್ನಿಟ್ಸ್‌ರವರ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಅದ್ಭುತವಾದ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿತವಾಗಿವೆ".

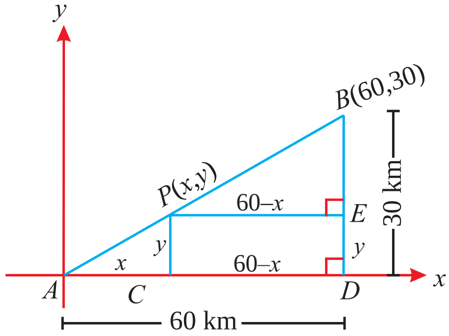
ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಾದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳು, ಸಮತಲ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳಂತಹ ವಿಚಾರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

5.2 ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ (Section formula)

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಒಬ್ಬನು A ಯಿಂದ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ 60 ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ, ನಂತರ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ B ಪಟ್ಟಣವನ್ನು ತಲುಪಬಹುದು ಎಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. ಒಂದು ದೂರ ಸಂಪರ್ಕ ಸಂಸ್ಥೆಯು A

ಮತ್ತು B ಪಟ್ಟಣಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1:2$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸಿದೆ. ಈಗ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾದ P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಸ್ಥೆಯು ತಿಳಿಯಲು ಬಯಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.1

A ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಿ. $P(x,y)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. P ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P ಯಿಂದ BD ಗೆ E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ΔPAC ಮತ್ತು ΔBPE ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

ಈಗ, $\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$

$2x = 60 - x$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 20.$

ಹಾಗೂ, $\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$

$2y = 30 - y$

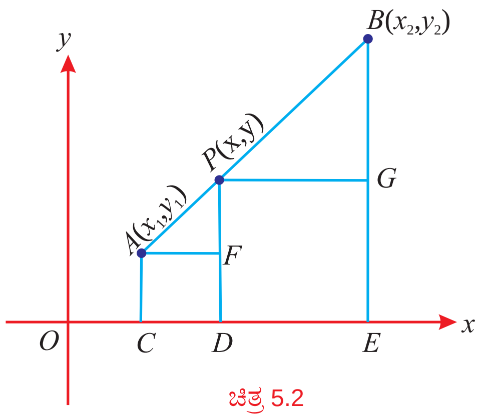
ಆದ್ದರಿಂದ, $y = 10.$

$\therefore$ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರದ ಸ್ಥಾನವು $P(20,10)$. ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

$P(x, y)$ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l:m$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವಂತೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$.



ಚಿತ್ರ 5.2

ಚಿತ್ರ 5.2 ರಿಂದ, $AF = CD = OD - OC = x - x_1$

$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$

ಹಾಗೂ, $PF = PD - FD = y - y_1$

$BG = BE - GE = y_2 - y$

ಈಗ, ΔAFP ಮತ್ತು ΔPGB ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

(ಅಧ್ಯಾಯ 6ರ ವಿಭಾಗ 6.3ನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$

$\therefore$ $\frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ ಮತ್ತು $\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$

$lx + mx = lx_2 + mx_1$

$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l+m}$

$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$

$ly + my = ly_2 + my_1$

$\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l+m}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಬಂಧಿತ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \frac{ly_2 - my_1}{l-m}\right)$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ.

(ii) **AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (Midpoint)**

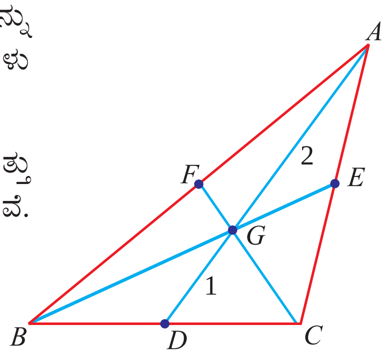
AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು M ಆದರೆ, AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು M ಬಿಂದುವು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1:1 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, $l = 1$ ಮತ್ತು $m = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು

$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(iii) **ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (Centroid of a triangle)**

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಎಂಬ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ΔABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. AD, BE ಮತ್ತು CF ಗಳು ΔABC ಯ ಮಧ್ಯರೇಖೆ(ಔನ್ನತ್ಯ)ಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.3

ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕೀಭವನ(ಏಕಸಂಪಾತ)ವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಏಕೀಭವನ ಬಿಂದುವು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ΔABC ಯ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು $G(x, y)$ ಆಗಿರಲಿ.

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ ಆಗಿದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ, ಗುರತ್ವಕೇಂದ್ರ G ಯು AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $2 : 1$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

$$G(x, y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2 + x_3)}{2} + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2 + y_3)}{2} + 1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ,

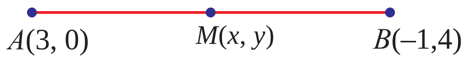
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.1

$(3, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $M(x, y)$ ಎಂಬುದು

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



ಚಿತ್ರ 5.4

$\therefore$ $(3, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

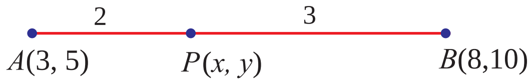
$$M(x, y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2).$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.2

$(3, 5)$ ಮತ್ತು $(8, 10)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(3, 5)$ ಮತ್ತು $B(8, 10)$ ಆಗಿರಲಿ.

AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವು $P(x,y)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.5

ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, $P(x, y) = P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8, y_2 = 10$ ಮತ್ತು $l = 2, m = 3$

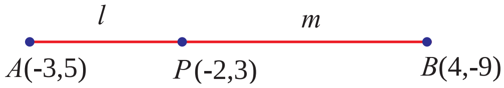
$$\therefore \quad P(x, y) = P\left(\frac{2(8) + 3(3)}{2+3}, \frac{2(10) + 3(5)}{2+3}\right) = P(5, 7)$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.3

$A(-3, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, -9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $P(-2, 3)$ ಬಿಂದುವು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(-3, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, -9)$ ಆಗಿವೆ.

$P(-2, 3)$ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.6

ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right) = P(-2, 3) \quad (1)$$

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9$.

$$(1) \implies \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$$

x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{4l - 3m}{l+m} = -2$$

$$\implies \qquad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

ಅಂದರೆ, $\qquad l : m = 1 : 6$

ಆದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1:6$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿಯೂ ಸಹ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(ii) ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಅನುಪಾತಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಒಂದು ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಒಂದು ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.4

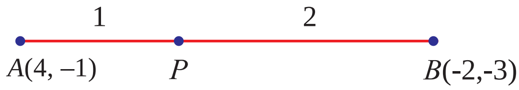
$(4, -1)$ ಮತ್ತು $(-2, -3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(4,-1)$ ಮತ್ತು $B(-2,-3)$ ಆಗಿರಲಿ.

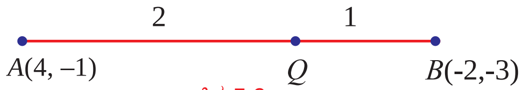
$AP = PQ = QB$ ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳು $P(x,y)$ ಮತ್ತು $Q(a,b)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 5.7

ಆದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1:2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $2:1$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.8



ಚಿತ್ರ 5.9

$\therefore$ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಬಿಂದುಗಳು

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right) \text{ ಮತ್ತು}$$

$$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\implies P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right) \text{ ಮತ್ತು } Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right) \qquad\qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right).$$

PB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು Q ಮತ್ತು AQ ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು P ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.5

$A(4,-6), B(3,-2)$ ಮತ್ತು $C(5,2)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ಮತ್ತು (x_3,y_3) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

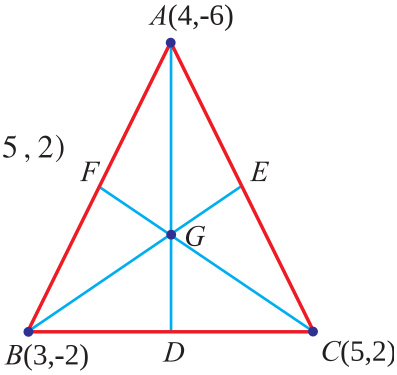
$$G(x\,,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

ಇಲ್ಲಿ, $(x_1\,,y_1) = (4,-6)$, $(x_2\,,y_2) = (3,-2)$, $(x_3,y_3) = (5\,,2)$

$\therefore$ $(4,-6), (3\,,-2)$ ಮತ್ತು $(5,\,2)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

$$G(x\,,y) = G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4,-2).$$



ಚಿತ್ರ 5.10

ಉದಾಹರಣೆ 5.6

$(7,3),(6,1),(8,2)$ ಮತ್ತು $(p,4)$ ಎಂಬವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(7,3), B(6,1), C(8,2)$ ಮತ್ತು $D(p,4)$ ಆಗಿರಲಿ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore$ AC ಕರ್ಣ ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಅಧಿವ್ಯಾಪಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

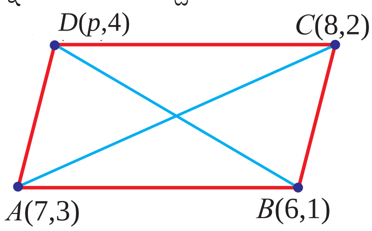
$$\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore\ p = 9$$



ಚಿತ್ರ 5.11

ಉದಾಹರಣೆ 5.7

$A(4\,,0)$ ಮತ್ತು $B(0\,,6)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು C ಮತ್ತು O ಎಂಬುದು ಮೂಲಬಿಂದು ಆದರೆ, C ಬಿಂದುವು $\triangle OAB$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2,3)$ ಆಗಿದೆ.

$P(x_1,y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2,y_2)$ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$O(0,0)$ ಮತ್ತು $C\,(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು

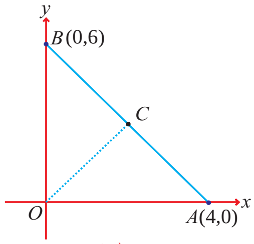
$$OC = \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}.$$

$A(4,0)$ ಮತ್ತು $C(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ,

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B\ (0,6)$ ಮತ್ತು $C(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ,

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$



ಚಿತ್ರ 5.12

$\therefore \quad OC = AC = BC$

$\therefore \quad C$ ಬಿಂದುವು $\triangle OAB$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಸೂಚನೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ OAB ಯಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಯು ಪರಿಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

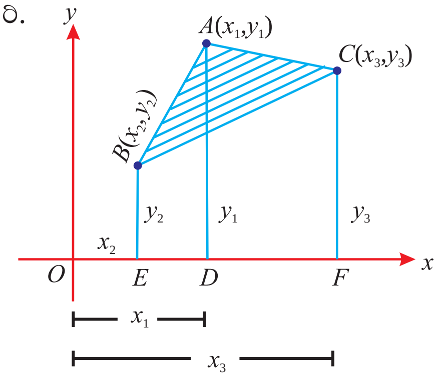
1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1,-1)$ ಮತ್ತು $(-5,3)$ (ii) $(0,0)$ ಮತ್ತು $(0,4)$
2. ಕೆಳಗಿನ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1,3),(2,7)$ ಮತ್ತು $(12,-16)$ (ii) $(3,-5),(-7,4)$ ಮತ್ತು $(10,-2)$
3. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು $(-6, 4)$ ರಲ್ಲಿದೆ. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ಅಂತ್ಯವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಅಂತ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು $(1, 3)$ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು $(-7, 6)$ ಮತ್ತು $(8, 5)$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$ ಮತ್ತು $D(-2, 4)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-6, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $3 : 2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $(-3, 5)$ ಮತ್ತು $(4, -9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $1 : 6$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $AP = \frac{2}{9} AB$ ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವಂತೆ AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು P ಆಗುವಂತೆ $A\ (-6,-5)$ ಮತ್ತು $B\ (-6, 4)$ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. $A(2,-2)$ ಮತ್ತು $B(-7, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $A(-4\ ,0)$ ಮತ್ತು $B\ (0,6)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. $(6, 4)$ ಮತ್ತು $(1,-7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು x-ಅಕ್ಷವು ವಿಭಜಿಸುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. $(-5, 1)$ ಮತ್ತು $(2\ , 3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು y-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ? ಹಾಗೂ ಛೇಧನಾ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. $(1, -1)$, $(0, 4)$ ಮತ್ತು $(-5, 3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.3 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Area of a triangle)

ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವು ABC ಆಗಿರಲಿ.

AD, BE ಮತ್ತು CF ರೇಖೆಗಳನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.13

ಚಿತ್ರದಿಂದ, $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$ ಮತ್ತು

$EF = x_3 - x_2$.

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= ABED$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$+ ADFC$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$-$ $BEFC$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

> ΔABC ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಆದರೆ,
>
> ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಸೂಚನೆ

> ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.
>
> $\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.
>
> (ಅಥವಾ) $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\,y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ΔABC ಯ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

x_1y_2, x_2y_3 ಮತ್ತು x_3y_1 ಕರ್ಣ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಬಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೂಡಿರಿ.

$x_2y_1,\ x_3y_2$ ಮತ್ತು x_1y_3 ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಚುಕ್ಕೆ ಬಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಪಡೆಯಲು ಹಿಂದಿನದರಿಂದ ಈಗಿನದನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

ಸೂಚನೆ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ.

(i) ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(ii) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(iii) ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

5.4 ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಏಕರೇಖಾಗತೆ (Collinearity of three points)

ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕಂಡುಬಂದರೆ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದಾದರೆ, ಅವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

5.5 ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Area of the Quadrilateral)

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(x_1,y_1), B(x_2, y_2), C(x_3,y_3)$ ಮತ್ತು $D(x_4, y_4)$ ಆಗಿರಲಿ.

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \Delta ABD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $+ \Delta BCD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$

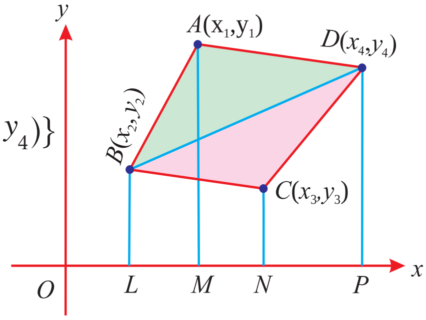
$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

$\therefore$ $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

ಅಥವಾ

$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು



ಚಿತ್ರ 5.14

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ಮತ್ತು $D(x_4, y_4)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಳಸಿದ ತಂತ್ರವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Bmatrix}.$$

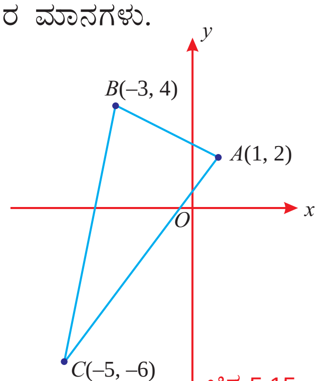
ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.8

$(1, 2)$, $(-3, 4)$ ಮತ್ತು $(-5, -6)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.15

ಪರಿಹಾರ

ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಶೃಂಗಗಳು $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ ಮತ್ತು $C(-5, -6)$ ಆಗಿರಲಿ.

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22$$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.9

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 68 ಚದರ ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು $A(6, 7)$, $B(-4, 1)$ ಮತ್ತು $C(a, -9)$ ಆದರೆ, a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2}\{(6 + 36 + 7a) - (-28 + a - 54)\} = 68$$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$

$$\Longrightarrow (42 + 7a) - (a - 82) = 136$$

$$\Longrightarrow 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.10

$A(2, 3)$, $B(4, 0)$ ಮತ್ತು $C(6, -3)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\{(0 - 12 + 18) - (12 + 0 - 6)\}$$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{6 - 6\} = 0.$$

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.11

$(a,0)$ ಮತ್ತು $(0,b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು $P(x,y)$ ಆದರೆ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $a, b \neq 0$.

ಪರಿಹಾರ (x,y), $(a,0)$ ಮತ್ತು $(0,b)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ ಅವುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Longrightarrow \quad ab - bx - ay = 0$ ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$

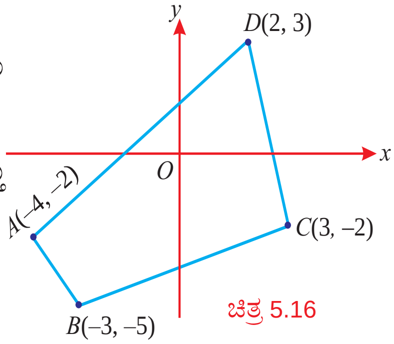
$\therefore \quad bx + ay = ab$

ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ab ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } a, b \neq 0.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.12

$(-4, -2)$, $(-3, -5)$, $(3, -2)$ ಮತ್ತು $(2, 3)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.16

ಪರಿಹಾರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಶೃಂಗಗಳು $A(-4, -2)$, $B(-3, -5)$, $C(3, -2)$ ಮತ್ತು $D(2, 3)$ ಆಗಿರಲಿ.

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}\{(20+6+9-4)-(6-15-4-12)\}$

$= \frac{1}{2}\{31+25\} = 28$ ಚದರ ಮಾನಗಳು. $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $(0, 0)$, $(3, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 2)$ (ii) $(5, 2)$, $(3, -5)$ ಮತ್ತು $(-5, -1)$

   (iii) $(-4, -5)$, $(4, 5)$ ಮತ್ತು $(-1, -6)$

2. ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶೃಂಗಗಳು	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಚದರ ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)
(i) $(0,0)$, $(4, a)$, $(6, 4)$	17
(ii) (a, a), $(4, 5)$, $(6, -1)$	9
(iii) $(a, -3)$, $(3, a)$, $(-1, 5)$	12

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(i) $(4, 3), (1, 2)$ ಮತ್ತು $(-2, 1)$ (ii) $(-2, -2), (-6, -2)$ ಮತ್ತು $(-2, 2)$

(iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right), (6, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, 4)$

4. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(k, -1), (2, 1)$ ಮತ್ತು $(4, 5)$ (ii) $(2, -5), (3, -4)$ ಮತ್ತು $(9, k)$

(iii) $(k, k), (2, 3)$ ಮತ್ತು $(4, -1)$

5. ಕೆಳಗಿನ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(6, 9), (7, 4), (4, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 7)$ (ii) $(-3, 4), (-5, -6), (4, -1)$ ಮತ್ತು $(1, 2)$

(iii) $(-4, 5), (0, 7), (5, -5)$ ಮತ್ತು $(-4, -2)$

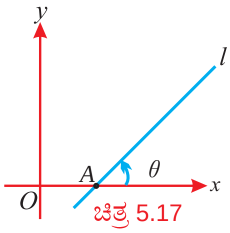
6. $(h, 0), (a, b)$ ಮತ್ತು $(0, k)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ಇಲ್ಲಿ $h, k \neq 0$)

7. $(0, -1), (2, 1)$ ಮತ್ತು $(0, 3)$ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.6 ಸರಳರೇಖೆ (Straight Lines)

5.6.1 ಓರೆಯ ಕೋನ (Angle of Inclination)

l ಸರಳರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಧನಾತ್ಮಕ x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು l ರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುವ ಕೋನವನ್ನು l ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.17

ಗಮನಿಸಿ

l ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ,

(i) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

(ii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆಗಳಿಗೆ, $\theta = 0^\circ$ ಅಥವಾ 180° ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆಗಳಿಗೆ, $\theta = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಸರಳರೇಖೆಯು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದ್ದು, x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದು A ನಲ್ಲಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅಂತಿಮವಾಗಿ x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು 0° ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

5.6.2 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ (Slope of a straight line)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಲಂಬರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸರಳರೇಖೆ l ನ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, $\tan\theta$ ಎಂಬುದನ್ನು ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು m ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \theta \neq 90^\circ$ ಗೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) x-ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $\tan 90^0$ ನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, y-ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ಅದು ಲಂಬರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದರ್ಥ.

(iii) θ ಎಂಬುದು ಲಘುಕೋನವಾದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, θ ಎಂಬುದು ವಿಶಾಲಕೋನವಾದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

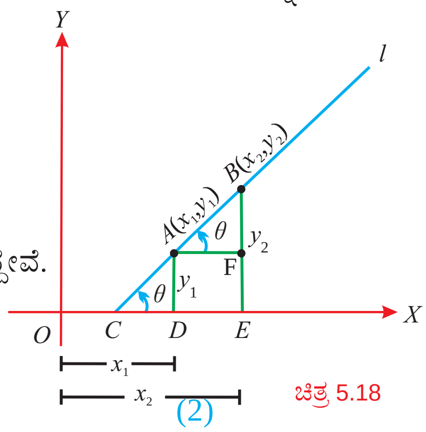
5.6.3 ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ (Slope of a straight line when any two points on the line are given)

ಓರೆಯ ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$.

AB ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತಿರಲಿ.

l ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$. (1)

x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ AD ಮತ್ತು BE ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ A ನಿಂದ BE ಗೆ AF ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.18

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$

ಮತ್ತು $BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$

ಹಾಗೂ $\angle DCA = \angle FAB = \theta$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABF ರಲ್ಲಿ,

$x_1 \ne x_2$ ಆದರೆ, $\tan\theta = \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, ಪ್ರವಣತೆ, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

> (x_1,y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $\theta \ne 90^\circ$ ಆದಂತೆ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. ಇಲ್ಲಿ, $x_1 \ne x_2$

ಸೂಚನೆ

(x_1,y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y \text{ ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆ}}{x \text{ ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆ}}$ ಎಂದೂ ಅರ್ಥೈಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

5.6.4 ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿಬಂಧನೆ (Condition for parallel lines in terms of their slopes)

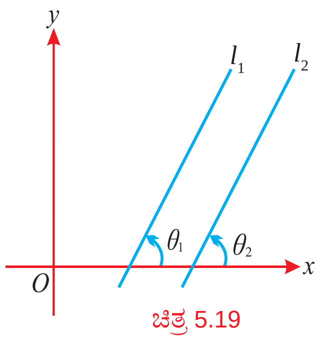
ಪ್ರವಣತೆಗಳು m_1 ಮತ್ತು m_2 ಹಾಗೂ ಓರೆಯ ಕೋನಗಳು θ_1 ಮತ್ತು θ_2 ಹೊಂದಿರುವ ಕ್ರಮವಾಗಿ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

l_1 ಮತ್ತು l_2 ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, θ_1 ಮತ್ತು θ_2 ಓರೆಯ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$$

$\therefore$ ಲಂಬವಲ್ಲದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮವಾದರೆ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.19

5.6.5 ಲಂಬವಾದ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿಬಂಧನೆ (Condition for perpendicular lines in terms of their slopes)

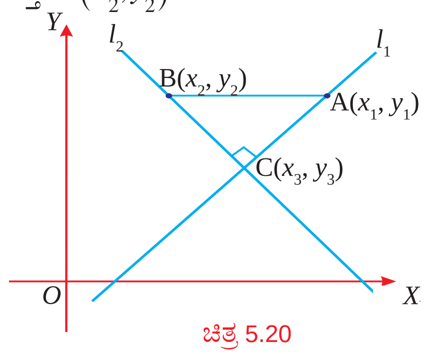
ಲಂಬವಾದ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು m_1 ಮತ್ತು m_2 ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು $C(x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ.

l_1 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

l_2 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.



ಚಿತ್ರ 5.20

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\implies (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies \left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(x_3 - x_1\right)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\implies (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1.$$

$$\implies m_1 m_2 = -1 \text{ ಅಥವಾ } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

m_1 ಮತ್ತು m_2 ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, $m_1 m_2 = -1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $m_1 m_2 = -1$ ಆದರೆ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ

x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳೆಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, $m_1 m_2 = -1$ ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯು ಸತ್ಯವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, x-ಅಕ್ಷದ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.13

ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$m = \tan\theta$. ಇಲ್ಲಿ, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\theta \neq 90^\circ$.

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.14

ಓರೆಯ ಕೋನವು 45° ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$.

$$m = \tan 45^\circ \implies m = 1.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.15

$(3\ ,\ -2)$ ಮತ್ತು $(-1\ ,\ 4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$(3\ ,\ -2)$ ಮತ್ತು $(-1\ ,\ 4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$$m = \frac{4+2}{-1-3} = -\frac{3}{2}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.16

ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, $A(5, -2)$, $B(4, -1)$ ಮತ್ತು $C(1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$A(5, -2)$ ಮತ್ತು $B(4, -1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ AB ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = \frac{-1+2}{4-5} = -1$.

$B(4, -1)$ ಮತ್ತು $C(1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ BC ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = \frac{2+1}{1-4} = -1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= BC$ ಯ ಪ್ರವಣತೆ.

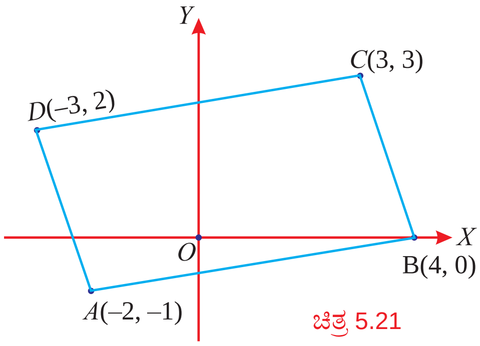
ಹಾಗೂ, B ಬಿಂದುವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, A , B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.17

ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕ್ರಮಾನುಗತವಾದ $(-2\,,\,-1)$, $(4\,,\,0)$, $(3\,,\,3)$ ಮತ್ತು $(-3\,,\,2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬಿಂದುಗಳು $A(-2\,,\,-1)$, $B(4\,,\,0)$, $C(3\,,\,3)$ ಮತ್ತು $D(-3\,,\,2)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.21

AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{0+1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$

CD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{2-3}{-3-3} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $=$ CD ಯ ಪ್ರವಣತೆ

ಇದರಿಂದ, AB ಯು CD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. (1)

BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{3-0}{3-4} = -3$

AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{2+1}{-3+2} = -3$

$\therefore$ BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $=$ AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, BC ಯು AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. (2)

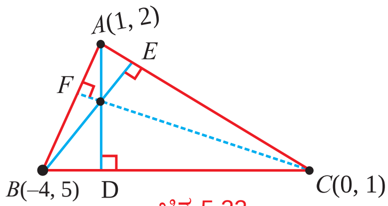
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ $ABCD$ ಯು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.18

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(1\,,2)$, $B(-4\,,5)$ ಮತ್ತು $C(0\,,1)$ ಆಗಿವೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯ ಔನ್ನತ್ಯಗಳು AD, BE ಮತ್ತು CF ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.22

BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{1-5}{0+4} = -1$

AD ಔನ್ನತ್ಯವು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= 1$ $\quad \because m_1 m_2 = -1$

AC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{1-2}{0-1} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, BE ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= -1$ $\quad \because BE \perp AC$

ಹಾಗೂ, AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{5-2}{-4-1} = -\dfrac{3}{5}$

$\therefore$ CF ನ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{5}{3}$ $\quad \because CF \perp AB$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. ಕೆಳಗಿನ ಓರೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 30° (ii) 60° (iii) 90°

3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(3, -2)$ ಮತ್ತು $(7, 2)$ (ii) $(2, -4)$ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದು
   (iii) $(1+\sqrt{3}, 2)$ ಮತ್ತು $(3+\sqrt{3}, 4)$

4. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1, 2)$ ಮತ್ತು $(2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$
   (iii) (a, b) ಮತ್ತು $(-a, -b)$

5. $(0, -4)$ ಮತ್ತು $(8, 0)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $ABCD$ ಚೌಕದ AB ಬಾಹುವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ (ii) BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ (iii) AC ಕರ್ಣದ ಪ್ರವಣತೆ

7. ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ BC ಬಾಹುವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು BC ಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (i) $(2, 3), (3, -1)$ ಮತ್ತು $(4, -5)$
   (ii) $(4, 1), (-2, -3)$ ಮತ್ತು $(-5, -5)$ (iii) $(4, 4), (-2, 6)$ ಮತ್ತು $(1, 5)$

9. $(a, 1), (1, 2)$ ಮತ್ತು $(0, b+1)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $A(-2, 3)$ ಮತ್ತು $B(a, 5)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು $C(0, 5)$ ಮತ್ತು $D(-2, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $A(0, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು $C(-1, -2)$ ಮತ್ತು $D(5, b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. b ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(1, 8), B(-2, 4), C(8, -5)$. AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ M ಮತ್ತು N ಆದರೆ, MN ನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ MN ಎಂಬುದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

13. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು $(6, 7), (2, -9)$ ಮತ್ತು $(-4, 1)$ ರಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(-5, 7), B(-4, -5)$ ಮತ್ತು $C(4, 5)$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, $(1, 2), (-2, 2), (-4, -3)$ ಮತ್ತು $(-1, -3)$ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $A(-2,-4)$, $B(5, -1)$, $C(6, 4)$ ಮತ್ತು $D(-1, 1)$ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.6.6 ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ (Equation of a straight line)

ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು L ಆಗಿರಲಿ. x ಮತ್ತು y ಚರಾಂಶಗಳ ಮೊದಲ ಘಾತಾಂಕದ $px + qy + r = 0$ ಸಮೀಕರಣವು L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವ x ಮತ್ತು y ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳು L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು L ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ L ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ, L ನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವಿವರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈಗ L ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

(i) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ (ii) ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆ (iii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆ

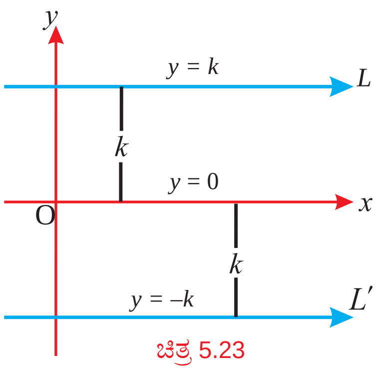
(i) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ (Horizontal line): L ಎಂಬುದು ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ (a) L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷ ಆಗಿದ್ದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. $y = 0$ ಆದಾಗ x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.
ಆದ್ದರಿಂದ, $y = 0$ ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ x-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $y = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (b) L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ. ಅಂದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.23

$\therefore$ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = k$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, k ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$k > 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. $k < 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $k = 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವೇ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(ii) ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆ (Vertical line): L ಎಂಬುದು ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

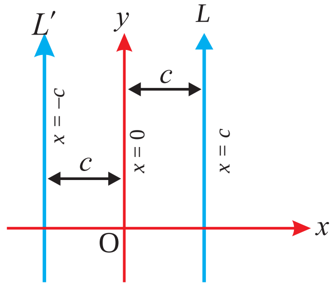
ಸಂಗತಿ (a) L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷ ಆಗಿರಲಿ. $x = 0$ ಆದರೆ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ (x, y) ಬಿಂದುವು L ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0$ ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $x = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (b) L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.24

$\therefore$ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = c$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, c ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$c > 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲಕ್ಕೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

$c < 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷದ ಎಡಕ್ಕೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

$c = 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

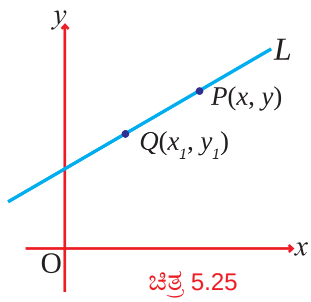
(iii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆ: L ಎಂಬುದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು L ನ್ನು ಸಮೀರಣದಿಂದ ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸುವುದು? θ ಎಂಬುದು ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. θ ಮತ್ತು L ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, L ನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

> ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆ L ನ ಪ್ರವಣತೆ m ನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
>
> (i) θ ಎಂಬ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, $m = \tan\theta$.
>
> (ii) L ಮೇಲಿನ ಎರಡು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
>
> (iii) L ಎಂಬುದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $m = 0$. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ.

ಈಗ L ಎಂಬುದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ. (a) ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ರೂಪ (b) ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ (c) ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪ (d) ಛೇದಕಗಳ ರೂಪ

(a) ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ರೂಪ (Slope-Point form)

L ನ ಪ್ರವಣತೆಯು m ಮತ್ತು L ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು $Q(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಎಂಬುದು L ಮೇಲಿನ Q ಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಒಂದು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,



ಚಿತ್ರ 5.25

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಪ್ರವಣತೆ m ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

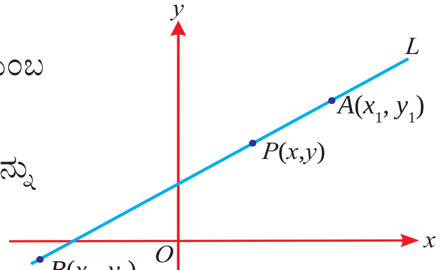
L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ (x, y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, $y - y_1 = m(x - x_1)$ (1)

ಗಮನಿಸಿ

(i) x ಮತ್ತು y ಚರಾಂಶಗಳಿಂದಾದ ಮೊದಲ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ (1) ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು L ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) (1) ರ ಸಮೀಕರಣವು L ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆಯು x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ m ಎಂಬುದು ಪ್ರವಣತೆಯಾಗಿದೆ.

(b) ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ (Two-Points form)



ಚಿತ್ರ 5.26

ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ L ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

L ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, L ನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ (1) ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಿದೆ.

L ನ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ಇಲ್ಲಿ, L ಎಂಬುದು ಊರ್ಧ್ವವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $x_2 \neq x_1$.

ಸೂತ್ರ (1) ರಿಂದ,

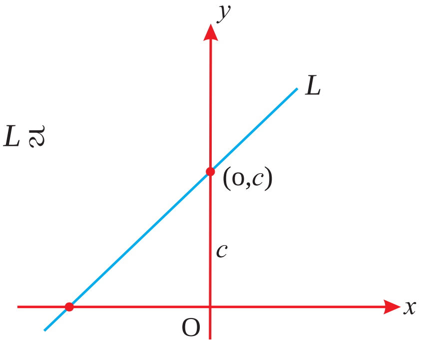
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$\Longrightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ $\Longrightarrow$ L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ (x, y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (2)

ಸೂಚನೆ

L ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ (x_2, y_2) ಬಿಂದುವನ್ನೂ ನಾವು ಬಳಸಬಹುದು.

(c) ಪ್ರವಣತೆ – ಛೇದಕ ರೂಪ (Slope-Intercept form)



ಚಿತ್ರ 5.27

L ನ ಪ್ರವಣತೆ m ಮತ್ತು L ನ y-ಛೇದಕವು c ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

c ಎಂಬುದು y-ಛೇದಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $(0, c)$ ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

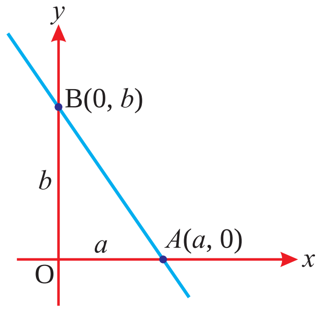
$(x_1, y_1) = (0, c)$ ದೊಂದಿಗೆ (1) ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$y - c = m(x - 0)$

$\Longrightarrow$ L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ $y = mx + c$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪ**ದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = mx + c$ ಆಗಿದೆ.

(d) ಛೇದಕ ರೂಪ (Intercepts form)



ಚಿತ್ರ 5.28

L ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $A(a, 0)$ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು $B(0, b)$ ರಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $m = -\frac{b}{a}$.

(1) ರಿಂದ, $y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$

$\Longrightarrow$ $ay = -bx + ab$

$bx + ay = ab$

ab ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\therefore$ x-ಛೇದಕವು a ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು b ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

L ನ ಎಲ್ಲಾ (x , y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (4)

ಸೂಚನೆ

(i) m ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ L ರೇಖೆಯು ಉಂಟುಮಾಡಿದ x-ಛೇದಕವು d ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = m(x - d)$ ಆಗಿದೆ.

(ii) $y = mx$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ($m \neq 0$ ಗೆ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.)

(iii) (1), (2) ಮತ್ತು (4) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

(iv) (1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ (x , y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ $px + qy + r = 0$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.19

ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(3, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

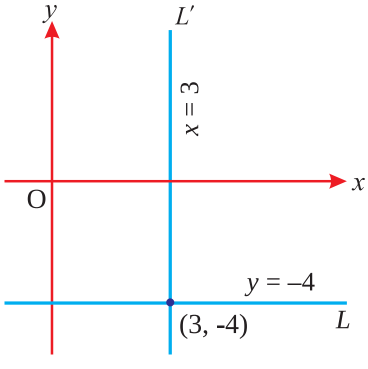
ಪರಿಹಾರ $(3, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಹಾಗೂ x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ L ಮತ್ತು L' ಆಗಿರಲಿ.

L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು -4 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, L ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = -4$ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, L' ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು 3 ಆಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ, L' ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = 3$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.29

ಉದಾಹರಣೆ 5.20

ಓರೆ ಕೋನವು 45° ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $\frac{2}{5}$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

y-ಛೇದಕವು $c = \frac{2}{5}$

ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪದಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = mx + c$$

$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x+2}{5}$$

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $5x - 5y + 2 = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.21

ಪ್ರವಣತೆ $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $(-2, 3)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರವಣತೆ $m = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಬಿಂದು $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\implies y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x - 3y + 11 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.22

$(-1, 1)$ ಮತ್ತು $(2, -4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ ಮತ್ತು $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$

$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $5x + 3y + 2 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.23

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$ ಮತ್ತು $C(4, 5)$ ಆಗಿವೆ. A ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು D ಆಗಿರಲಿ.

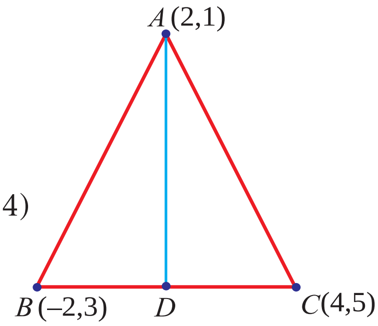
$\therefore$ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2}$ $\quad \because (x_1, y_1) = (2, 1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2) = (1, 4)$

$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$

$\therefore$ $3x + y - 7 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.30

ಉದಾಹರಣೆ 5.24

ಸರಳರೇಖೆಯ x-ಛೇದಕ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{4}$ ಆದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸರಳರೇಖೆಯ x-ಛೇದಕ, $a = \frac{2}{3}$

ಸರಳರೇಖೆಯ y-ಛೇದಕ, $b = \frac{3}{4}$

ಛೇದಕ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $9x + 8y - 6 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.25

ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 5 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು $(6, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ x-ಛೇದಕ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.

ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತ $a + b = 5$

$\implies$ $b = 5 - a$

ಛೇದಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(5-a)x + ay = a(5-a)$ (1)

(1) ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $(6, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 - 13a + 30 = 0.$$

ಅಂದರೆ, $(a-3)(a-10) = 0$

$\therefore \quad a = 3$ ಅಥವಾ $a = 10$

$a = 3$ ಆದಾಗ, (1) $\Longrightarrow (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$\Longrightarrow \quad 2x + 3y = 6$ (2)

$a = 10$ ಆದಾಗ, (1) $\Longrightarrow (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$\Longrightarrow \quad -5x + 10y = -50$

ಅಂದರೆ, $x - 2y - 10 = 0.$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $2x + 3y = 6$ ಮತ್ತು $x - 2y - 10 = 0$ ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ, x-ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಮೂಲಮಾನಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(-5,-2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರವಣತೆಯು -3 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 4
   (ii) ಓರೆ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 3

4. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಮೂಲಮಾನಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ, θ ಎಂಬುದು ಓರೆಯ ಕೋನ.

5. (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರವಣತೆಯು -4 ಮತ್ತು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ
   (ii) ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $(5, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ

7. ಓರೆ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿರುವ, $(4, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(-2, 5)$ ಮತ್ತು $(3, 6)$ (ii) $(0, -6)$ ಮತ್ತು $(-8, 2)$

9. $P(1, -3)$, $Q(-2, 5)$ ಮತ್ತು $R(-3, 4)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ PQR ತ್ರಿಭುಜದ R ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) (4, 2), (7, 5) ಮತ್ತು (9, 7) (ii) (1, 4), (3, −2) ಮತ್ತು (−3, 16)

11. ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 2 ಮತ್ತು 3 (ii) $-\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $-\frac{3}{4}$

12. (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಛೇದಕಗಳು $3:2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು (2, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಛೇದಕಗಳು ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು (5, −3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. x-ಛೇದಕವು y-ಛೇದಕದ ಮೂರರಷ್ಟಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (9, −1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (3, 2) ಆದರೆ, AB ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. x-ಅಕ್ಷದ ಛೇದಕವು y-ಅಕ್ಷದ ಛೇದಕಕ್ಕಿಂತ 5 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (22, −6) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $ABCD$ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು $A(3, 6)$ ಮತ್ತು $C(-1, 2)$ ಆದರೆ, BD ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{3}{2}$ ಆಗಿರುವ ಹಾಗೂ $A(-2, 6)$ ಮತ್ತು $B(3, -4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.7 ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (General Form of Equation of a straight line)

$a \neq 0$ ಅಥವಾ $b \neq 0$ ಆಗುವಂತೆ a, b ಮತ್ತು c ಎಂಬವು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿರುವಾಗ $ax + by + c = 0$ ಆದರ್ಶ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $ax + by + c = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $ax + by + c = 0$ ರ ಪ್ರವಣತೆ

(ii) $ax + by + c = 0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

(iii) $ax + by + c = 0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ

(iv) ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

(i) $ax+by+c=0$ ರ ಪ್ರವಣತೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ b \neq 0$ (1)

(1) ನ್ನು $y = mx + k$ ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

ಪ್ರವಣತೆ, $m = -\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕ $= -\frac{c}{b}$

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ

ಪ್ರವಣತೆ $m = -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $-\dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) $ax+by+c=0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು k ನ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $ax + by + k = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

(iii) $ax+by+c=0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು k ನ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $bx - ay + k = 0$ ಆಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ

ಸಹಗುಣಕಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರದ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(i) ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ಲಂಬವಾದರೆ, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

(iv) ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.26

$3x + 2y - 12 = 0$ ಮತ್ತು $6x + 4y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $3x + 2y - 12 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\dfrac{3}{2}$

ಹೀಗೆಯೇ, $6x + 4y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ $m_1 = m_2$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.27

$x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $2x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $x+2y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\frac{1}{2}$

$2x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = \frac{-2}{-1} = 2$

ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $m_1 m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

$\therefore$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.28

(2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x-8y+13=0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $x-8y+13=0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x-8y+k=0$.

ಇದು (2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ,

$$2-8(5)+k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x-8y+38=0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.29

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(2, 1)$, $B(6, -1)$ ಮತ್ತು $C(4, 11)$ A ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

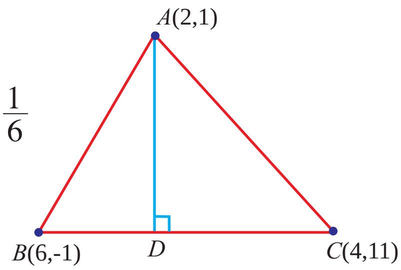
ಪರಿಹಾರ BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \frac{11+1}{4-6} = -6$

AD ರೇಖೆಯು BC ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \frac{1}{6}$

$\therefore$ AD ಯ ಸಮೀಕರಣವು $y-y_1 = m(x-x_1)$

$$y-1 = \frac{1}{6}(x-2) \implies 6y-6 = x-2$$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x-6y+4=0$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.31

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $3x+4y-6=0$ (ii) $y=7x+6$ (iii) $4x=5y+3$.

2. $x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $3x+6y+2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $3x-5y+7=0$ ಮತ್ತು $15x+9y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{y}{2} = x-p$ ಮತ್ತು $ax+5=3y$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $5x-2y-9=0$ ಮತ್ತು $ay+2x-11=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $8px + (2-3p)y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $px + 8y - 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $(h, 3)$ ಮತ್ತು $(4, 1)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $7x - 9y - 19 = 0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, h ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $(1, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $3x - y + 7 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $(1, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x - 2y + 3 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $(1, 2)$ ಮತ್ತು $(2, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಹಾಗೂ $2x + y - 3 = 0$ ಮತ್ತು $5x + y - 6 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $3x - 5y + 11 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಹಾಗೂ $5x - 6y = 1$ ಮತ್ತು $3x + 2y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $2x + y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $x - 2y + 3 = 0$ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ $3x - y + 9 = 0$ ಮತ್ತು $x + 2y = 4$ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(2, -4)$, $B(3, 3)$ ಮತ್ತು $C(-1, 5)$ ಆದರೆ, B ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(-4,4)$, $B(8,4)$ ಮತ್ತು $C(8,10)$ ಆದರೆ, A ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x + 2y = 13$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x + 2y = 7$ ಮತ್ತು $2x + y = 8$ ಆಗಿದ್ದು, $(0, -2)$ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $2x - 3y + 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ $(3, -2)$ ಮತ್ತು $(-5, 8)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. PQR ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $PQ = PR$. QR ಪಾದವು x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು PQ ನ ಸಮೀಕರಣವು $2x - 3y + 9 = 0$ ಆಗಿದೆ. PR ನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $(a, -b)$ ಮತ್ತು $(3a, 5b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

   (A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(-a, -3b)$

2. $A(1, -3)$ ಮತ್ತು $B(-3, 9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1:3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು

   (A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$

3. $A(3, 4)$ ಮತ್ತು $B(14, -3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವು ವಿಭಜಿಸುವ ಅನುಪಾತ

   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. $(-2, -5)$, $(-2, 12)$ ಮತ್ತು $(10, -1)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

   (A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$

5. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(x, 6)$ ಮತ್ತು $(3, 2)$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ

   (A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. (0,0), $(2, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 2)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) 1 ಚ.ಮಾನಗಳು (B) 2 ಚ.ಮಾನಗಳು (C) 4 ಚ.ಮಾನಗಳು (D) 8 ಚ.ಮಾನಗಳು

7. $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ ಮತ್ತು $(1, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) 3 ಚ.ಮಾನಗಳು (B) 2 ಚ.ಮಾನಗಳು (C) 4 ಚ.ಮಾನಗಳು (D) 1 ಚ.ಮಾನ

8. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆ ಕೋನವು

   (A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

9. $(3, -2)$ ಮತ್ತು $(-1, a)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $-\frac{3}{2}$ ಆದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2, 6)$ ಮತ್ತು $(4, 8)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

    (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x - y - 2 = 0$ ಮತ್ತು $2x + y - 9 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು

    (A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$

12. $4x + 3y - 12 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವು

    (A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$

13. $7y - 2x = 11$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

    (A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. $(2, -7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

    (A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. $2x - 3y + 6 = 0$ ರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3, 2$ (D) $3, -2$

16. ಕೇಂದ್ರವು $(-6, 4)$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ತುದಿಯು $(-12, 8)$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯು

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. $2x + 3y - 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(-2, 5)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. (2, 5), (4, 6) ಮತ್ತು (a, a) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ ಸರಳರೇಖೆಯು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. ಪ್ರವಣತೆಯು 3 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು -4 ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ ಮತ್ತು $x = -4$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ ಮತ್ತು $2x + ky = 5$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ಆಗಿದೆ.
- $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ ಆಗಿದೆ.
- $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ Q ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ಆಗಿದೆ.
- (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು
$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾದರೆ,
  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (ಅಥವಾ)
  (ii) AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ = BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ ಅಥವಾ AC ಯ ಪ್ರವಣತೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.
- ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$.
- (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು
  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ಆಗಿದೆ.
- $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\frac{a}{b}, b \neq 0.$
- ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ.
- ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.
- ಎರಡು ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $m_1 m_2 = -1$. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಸರಳರೇಖೆ	ಸಮೀಕರಣ
1.	x-ಅಕ್ಷ	$y = 0$
2.	y-ಅಕ್ಷ	$x = 0$
3.	x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ	$y = k$
4.	y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರ	$ax+by+k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ ಗೆ ಲಂಬ	$bx-ay+k = 0$
	ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು	**ಸಮೀಕರಣ**
1.	ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು	$y = mx$
2.	ಪ್ರವಣತೆ m, y-ಛೇದಕ c	$y = mx + c$
3.	ಪ್ರವಣತೆ m, ಒಂದು ಬಿಂದು (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x-ಛೇದಕವು a, y-ಛೇದಕವು b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$