Sl.No.: 092650

नामांक Roll No.

No. of Questions — 22

No. of Printed Pages — 20

SS–15–Mathematics

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2024

SENIOR SECONDARY EXAMINATION, 2024

गणित

MATHEMATICS

समयः 3 घण्टे 15 मिनिट

पूर्णांकः 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देशः
GENERAL INSTRUCTIONS TO THE EXAMINEES:

1) परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
Candidates must write first his / her Roll No. on the question paper compulsorily.

2) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
All the questions are compulsory.

3) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर–पुस्तिका में ही लिखें।
Write the answer to each question in the given answer-book only.

4) जिन प्रश्नों के आन्तिरक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.

5) प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
If there is any error / difference / contradiction in Hindi & English versions of the question paper, the question of Hindi version should be treated valid.

6) प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
Write down the serial number of the question before attempting it.

7) प्रश्न संख्या **16** से **22** में आन्तरिक विकल्प दिये गए है।
Q. Nos. **16 to 22** having internal choices.

8) प्रश्न संख्या **22** में ग्राफ पेपर पर हल करना है।
Solve Question number **22** on graph paper.

खण्ड–अ (SECTION – A)

(1) Multiple Choice Questions:
बहुविकल्पीय प्रश्नः

(i) Let R be the relation in the set {1, 2, 3, 4} given by R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} choose the correct answer in the given options.
(A) R is reflexive and symmetric but not transitive.
(B) R is reflexive and transitive but not symmetric.
(C) R is symmetric and transitive but not reflexive.
(D) R is an equivalence relation.
मान लिजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित संबंध R है। दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए।
(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है।
(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।
(C) R सममित तथा संक्रामक है किन्तु स्वतुलय नहीं है।
(D) R एक तुल्यता संबंध है। **[1]**

Sol. **(B)**

(ii) The principal value of $\text{cosec}^{-1}(2)$ is: **[1]**
$\text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान है:

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) π

Sol. **(C)** $\frac{\pi}{6}$

(iii) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ then, (2A – B) will be:
यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हैं, तो (2A – B) होगा: **[1]**

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Sol. **(C)**

$2A–B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) If $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$; then the value of x is:

यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$ हो; x का मान है: **[1]**

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) –1

Sol. **(A)**

$\Rightarrow$ $10-12 = 5x - 6x$

$\Rightarrow$ $-2 = -x$

$x = 2$

(v) If $2x + 8y = \sin x$, then $\frac{dy}{dx}$ is :

यदि $2x + 8y = \sin x$, तो $\frac{dy}{dx}$ है : **[1]**

(A) $\frac{\sin x + 2}{8}$ (B) $\frac{\cos x - 2}{8}$ (C) $\frac{\cos x + 2}{2}$ (D) $\frac{\cos x + 2}{3}$

Sol. **(B)**

$\Rightarrow$ $2 + 8\frac{dy}{dx} = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{8}$

(vi) In which of the following intervals is $y = x^2e^{-x}$ increasing?

निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्धमान? **[1]**

(A) (1,0) (B) (2,0) (C) $(2, -\infty)$ (D) (0,2)

Sol. **(D)**

$y = x^2 e^{-x}$

$\frac{dy}{dx} = -x^2 e^{-x} + e^{-x} \times 2x$

$\Rightarrow$ $xe^{-x}(-x + 2)$

Increasing : $\frac{dy}{dx} > 0$

$\Rightarrow$ $xe^{-x}(-x+2) > 0$

$\Rightarrow$ $-xe^{-x}(x-2) > 0$

$xe^{-x}(x-2) < 0$

$x \in (0,2)$

(vii) The value of $\int \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2} dx$

$\int \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2} dx$ का मान है– **[1]**

(A) $\sec x - x + c$ (B) $\sec x \tan x + c$ (C) $\tan x + x^2 + c$ (D) $\tan x - x + c$

Sol. **(D)**

$$\int \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \int \tan^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\Rightarrow \tan x - x + C$$

(viii) The area of the region bounded by the circle $x^2 + y^2 = 9$ in the first quadrant is:
प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है: **[1]**

(A) 9π (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{9\pi}{4}$ (D) 3π

Sol. **(C)**

$x^2 + y^2 = 9$

$r = 3$

Area $= \pi r^2$

$= \pi(3)^2 \Rightarrow 9\pi$

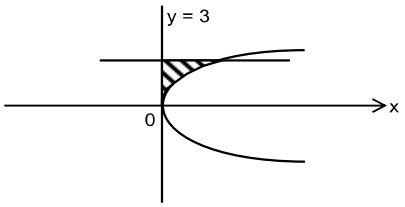
Area in first quadrant = $\frac{9\pi}{4}$ Ans.

(ix) Area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$, y –axis and the line $y = 3$ is:
वक्र $y^2 = 4x$, y –अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है: **[1]**

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{8}$ (D) $\frac{9}{2}$

Sol. **(B)**

$y^2 = 4x$



$$\text{Area} = \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}[27 - 0] = \frac{9}{4}$$

(x) The degree of the differential equation $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ is

अवकलन समीकरण $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ की घात हैः **[1]**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. **(A)**

degree $\Rightarrow$ 1

(xi) If $\vec{a}$ is a nonzero vector of magnitude 'a' and λ a nonzero scalar, then $\lambda\vec{a}$ is unit vector if **[1]**

यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिणाम 'a' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि :

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

Sol. **(D)**

$\left|\lambda\vec{a}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda|\left|\vec{a}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{|\lambda|}$

(xii) The direction cosine of y-axis is : **[1]**

y-अक्ष के दिक्–कोसाइन है–

(A) 0, 0, 0 (B) 1, 0, 0 (C) 0, 1, 0 (D) 0, 0, 1

Sol. **(C)**

Direction cosine of y-axis

$\alpha = 90°, \beta = 0; \quad \gamma = 90°$

$l = \cos\alpha = 0$

$m = \cos\beta = 1$

$n = \cos\gamma = 0$

$\therefore$ 0, 1, 0

(xiii) The direction consines of the line passing through the two points (–2, 4, –5) and (1, 2, 3) is : **[1]**

दो बिंदुओं (–2, 4, –5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन है–

(A) $\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{8}{\sqrt{70}}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{-3}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$ (D) $\frac{8}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}$

Sol. **(B)**

Direction Ratio

$\Rightarrow$ 3, –2, 8 $\quad \therefore \quad l = \frac{3}{\sqrt{9+4+64}} = \frac{3}{\sqrt{77}}$

$m = \frac{-2}{\sqrt{77}}, \quad n = \frac{8}{\sqrt{77}}$

(xiv) If P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 and P(B/A) = 0.4, then the value of P(A ∩ B) is : **[1]**

यदि P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 और P(B/A) = 0.4 हो, तो P(A ∩ B) का मान है–

(A) 0.32 (B) 0.20 (C) 0.40 (D) 0.64

Sol. **(A)**

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad 0.4=\frac{P(A\cap B)}{0.8}$$

$P(A\cap B) = 0.4\times0.8 = 0.32$

(xv) Two cards are drawn at random and without replacement from a pack of 52 playing cards, then the probability that both the cards are black is : **[1]**

52 पत्तो की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए, तो दोनों पत्तो के काले रंग का होने की प्रायिकता है–

(A) $\frac{26}{52}$ (B) $\frac{52}{102}$ (C) $\frac{25}{51}$ (D) $\frac{1}{2}$

Sol. Probability of first black card $P(B_1) = \frac{26}{52}$

Second card black $P(B_2) = \frac{25}{51}$

$\therefore \frac{26}{52}\times\frac{25}{51}=\frac{25}{102}$ **Option is not here.**

2. Fill in the blanks :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) $\sin^{-1}$ x is a function whose domain is_____. **[1]**

$\sin^{-1}$ x एक ऐसा फलन है, जिसका प्रांत _____ है।

Sol. Domain of $\sin^{-1}x$ is [–1, 1] Ans.

(ii) The value of $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ is_____ **[1]**

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ का मान _____ है।

Sol. $\text{Sin}^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\text{Sin}^{-1}\left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\text{Sin}^{-1}\left[\sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\pi}{3}$ **Ans.**

(iii) The principal value of $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ is _____ **[1]**

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य मान _____ है।

Sol. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ Ans.

(iv) If $y = \cos\sqrt{x}$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ will be _____ **[1]**

यदि $y = \cos\sqrt{x}$, हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान _____ होगा।

Sol. $y = \cos\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ **Ans.**

(v) The rate of change of the area of a circle with respect to its radius r at r = 3cm is _____ **[1]**

एक वृत्त की त्रिज्या r = 3 सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ..... है।

Sol. Area = πr^2

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ at r = 3

$= 6\pi$ cm^2/cm Ans.

(vi) The numbers of arbitrary constants present in the particular solution of a differential equation of third order are -------

तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट ही में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या ..... होती हैं।

[1]

Sol. Numbers of arbitrary constant is 0.

(vii) A vector whose initial and terminal points concide, is called .....

एक सदिश जिसके प्रारंभिक एवं अंतिम बिन्दु संपाती होते है..... कहलाता है।

[1]

Sol. Zero vector

(3) Very short answer type questions:
अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न :

(i) Find the value of determinant $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$

सारणिक $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। **[1]**

Sol. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

(ii) Find equation of line joining (1, 2) and (3, 6) using determinants.
सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) **और** (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए **[1]**

Sol. Equation of line

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $x(2-6) - y(1-3) + 1\ (6-6) = 0$ $\Rightarrow$ $-4x + 2y = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{2x - y = 0}$ Ans.

(iii) The radius of a circle is increasing uniformly at the rate of 3 cm/s. Find the rate at which the area of the circle is increasing when the radius is 10 cm.
एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए की वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10cm है। **[1]**

Sol. given $\frac{dr}{dt}$ = 3 cm/sec.

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi r \times 3 = 2\pi \times 10 \times 3 = 60\pi$ cm²/sec. Ans.

(iv) Prove that the logarithmic function is increasing on $(0, \infty)$.
सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में वर्धमान फलन है। **[1]**

Sol. $y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

for Increasing $\frac{dy}{dx} > 0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x} > 0$ $x \neq 0$

$x > 0$; $x \varepsilon (0,\infty)$ Ans.

(v) **Evaluate** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\, dx$.

$\int (2x - 3\cos x + e^x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **[1]**

Sol. $I = \int \left(2x - 3\cos x + e^x\right) dx$

$= 2\frac{x^2}{2} - 3\sin x + e^x + C$

$= x^2 - 3\sin x + e^x + C$ **Ans.**

(vi) **Evaluate** $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **[1]**

Sol. $I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

Let $1 + \cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$I = -\int \frac{dt}{t}$

$= -\ell n\, |t| + c$

$= -\ell n\, |1 + \cos x| + c$ Ans.

(vii) Verify that the function $y = e^x + 1$ is a solution of the differential equation $y'' - y' = 0$

सत्यापित कीजिए कि फलन $y = e^x + 1$ अवकलन समीकरण $y'' - y' = 0$ का हल है। **[1]**

Sol. $y = e^x + 1$

$y' = e^x$

Again derivative

$y'' = e^x$

$\therefore$ Now put $y'' - y'$

$\Rightarrow$ $e^x - e^x = 0$

LHS = RHS

(viii) Find the position vector of the mid point of the vector joining the points P(2, 3, 4) and Q(4, 1, –2)

दो बिन्दुओं P(2, 3, 4) **और** (4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

[1]

Sol. $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{OQ} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

mid point of vector joining two points

$\Rightarrow$ $\frac{6\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}}{2}$ $\Rightarrow$ $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ Ans.

(ix) Find the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का , सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए । **[1]**

Sol. Projection = $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\Rightarrow \frac{2+6+2}{\sqrt{1+4+1}} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{6}}$ Ans.

(x) Evaluate the product $(3\vec{a} - 5\vec{b}).(2\vec{a} + 7\vec{b})$

$(3\vec{a} - 5\vec{b}).(2\vec{a} + 7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए। **[1]**

Sol. $\left(3\vec{a} - 5\vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} + 7\vec{b}\right)$

$\Rightarrow \quad 6\vec{a} \cdot \vec{a} + 21\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 35\vec{b} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \quad 6|\vec{a}|^2 + 11\vec{a} \cdot \vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

खण्ड–ब (SECTION – B)

Short answer type question:
लघुउत्तरीय प्रश्न :

4. Prove that the relation R in the set {1, 2, 3} given by R = {(1, 2), (2, 1)} is symmetric but neither reflexive nor transitive.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 2), (2, 1)} द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक हैं। **[2]**

Sol. Set {1, 2, 3}

R = {(1, 2) (2, 1)}

Reflexive : $(a, a) \in R$

$(1,1) \notin R, (2,2) \notin R$

$\therefore$ it is not reflexive

Symmetric

$\therefore (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

Transitivie :

$(a, b) \in R$ & $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

$(1, 2) \in R$ & $(2, 1) \in R$ Þ $(1,1) \notin R$

$\therefore$ it is not transitive.

5. Simplify $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$.

सरल कीजिए $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$. **[2]**

Sol. $\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

6. Show that $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$.

दर्शाइए कि $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$. **[2]**

Sol. LHS $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}7 & 1\\ 33 & 34\end{bmatrix}$

RHS $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}16 & 5\\ 39 & 25\end{bmatrix}$

LHS $\neq$ RHS

7. Find the adjoint of matrix $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$C_{11} = 4,\ C_{12} = -3$

$C_{21} = -2\ ;\ C_{22} = 1$

Adj. $A = \begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ Ans.

8. If $\sin^2x + \cos^2y = 1$, then find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $\sin^2x + \cos^2y = 1$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. $\sin^2x + \cos^2y = 1$

$2\sin x \cos x + 2\cos y \times -\sin y \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x}{\sin y \cos y}$ **Ans.**

9. Differentiate log(cos.e^x) with respect to x.

log(cos.e^x) का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। **[2]**

Sol. $y = \log(\cos e^x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos e^x} - \sin e^x \times e^x$

$\Rightarrow \frac{-e^x \sin e^x}{\cos e^x}$ Ans.

10. Find $\frac{dy}{dx}$, if $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$.

यदि $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. $x = 4t$; $y = \frac{4}{t}$

$\frac{dx}{dt} = 4$; $\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{t^2}$ **Ans.**

11. Prove that the function given by $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ is increasing inR

सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है। **[2]**

Sol. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$= 3(x^2 - 2x + 1)$

$f'(x) = 3(x-1)^2 > 0$

So it is increasing in R **Ans.**

12. Evaluate $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.

$\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. $I = \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

$\Rightarrow \int \sin^3 x \cos x \cos^2 x dx$

$\Rightarrow \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$

Let $\sin x = t$

$\cos x \, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int t^3 (1 - t^2) dt$

$= \int (t^3 - t^5) dt$

$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C$

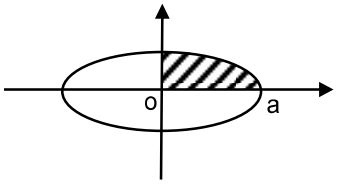
$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\cos^6 x}{6} + C$ Ans.

13. Find the area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. $x^2 + y^2 = a^2$

Required area



$\Rightarrow \quad 4 \int y \, dx$

$\Rightarrow \quad 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$\Rightarrow \quad \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a$

$\Rightarrow \quad \pi a^2$ **Ans.**

14. Find the area of the parallelogram whose adjacent sides are determined by the vectors $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$.

एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित है। **[2]**

Sol. Area of parallelogram. = $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Given $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad (20)\hat{i} - (-5)\hat{j} + (-5)\hat{k}$

$\Rightarrow \quad 20\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}$

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(20)^2 + (5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{400 + 25 + 25} = \sqrt{450}$ sq.unit **Ans.**

15. A fair die has been tossed. Find P(E/F) and P(F/E) for the events E = {1, 3, 5}, F = {2, 3} and G = {2, 3, 4, 5}.

एक न्याय पांसे को उछाला गया है। घटनाओं E = {1, 3, 5}, F = {2, 3} और G = {2, 3, 4, 5} के लिये P(E/F) और P(F/E) ज्ञात कीजिए। **[2]**

Sol. E = {1, 3, 5} F = {2, 3}

G = {2, 3, 4, 5}

$\therefore \quad P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

$\therefore \quad E \cap F = \{3\}$

$P(E \cap F) = \frac{1}{6}$; $P(F) = \frac{2}{6}$

$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{1}{2}$ Ans.

and $P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$

$= \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$ Ans.

खण्ड–स (SECTION – C)

Long answer type questions:
दीर्घउत्तरीय प्रश्न :

16. Evaluate $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}dx$. **[3]**

$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

OR अथवा

Evaluate $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$. **[3]**

$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^3)^2+a^6}}dx$

Let $x^3 = t \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = \frac{dt}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^3)^2+a^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{t^2+a^6}}\frac{dt}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|t+\sqrt{t^2+a^6}\right| + C''$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right| + C$$

OR

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$$

Let $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$

$$= \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$x = Ax + 2A + Bx + B \Rightarrow \quad x = x(A + B) + 2A + B$

$A + B = 1$

$2A + B = 0$

Now $A = -1$ and $B = 2$

$$\int \frac{-1}{(x+1)}dx + \int \frac{2}{(x+2)}dx$$

$= -\log(x+1) + 2\log(x+2) + C = -\log(x+1) + \log(x+2)^2 + C$

17. Find the general solution of the differential equation $x\frac{dy}{dx}+2y = x^2 (x \neq 0)$. **[3]**

अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y = x^2 (x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

OR अथवा

Find the general solution of the differential equation $(e^x + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})\,dx = 0$. **[3]**

अवकल समीकरण $(e^x + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})\,dx = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Sol. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$

Now, $P = \frac{2}{x}$; $Q = x$

$\text{I.F.} = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ell nx} \Rightarrow x^2$

$\therefore$ $y \times \text{I.F.} = \int x \times \text{I.F.}\, dx + C$

$yx^2 = \int x.x^2\, dx + C = \int x^3\, dx + C$

$yx^2 = \frac{x^4}{4} + C$ **Ans.**

OR

$(e^x + e^{-x})\, dy = (e^x - e^{-x})\, dx$

$\int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

$y = \ell n\, |e^x + e^{-x}| + C$ **Ans.**

18. Find the angle between the pair of lines given by $\vec{r} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = (5\hat{i} - 2\hat{j}) + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$. **[3]**

दिए गए रेखा–युग्म $\vec{r} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (5\hat{i} - 2\hat{j}) + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

OR अथवा

Show that the line through the point (1, –1, 2), (3, 4, –2) is perpendicular to the line through the point (0, 3, 2) and (3, 5, 6). **[3]**

दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, –1, 2), (3, 4, –2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

Sol. Here, $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

The angle θ between the two lines is given by:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}).(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{9+4+36}}\right| = \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

Hence, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

OR

Direction ratio of 1st line $\Rightarrow$ 2, 5, – 4

Direction ratio of 2nd line $\Rightarrow$ 3, 2, 4

Lines are perpendicular $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$\Rightarrow$ $2 \times 3 + 5 \times 2 + (-4) \times 4$

$\Rightarrow$ $6 + 10 - 16$

$\Rightarrow$ 0

$\therefore$ LHS = RHS

19. A family has two children. What is the probability that both the children are boys given that at least one the them is a boy? **[3]**

एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

OR अथवा

A die is thrown. If E is the event ' the number appearing is a multiple of 3, and F be the event the number appearing is even' then find whether E and F are independent? **[3]**

एक पासे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए तो बताएँ क्या घटनाएँ E और F स्वतंत्र है?

Sol. Let b stand for boy and g for girl. The sample space of the experiment is :

$S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$

Let E and F denote the following events:

E : 'both the children are boys'

F : 'at least one of the child is a boy'

Then $E = \{(b, b)\}$ and $F = \{(b, b), (g, b), (b, g)\}$

Now, $E \cap F = \{(b, b)\}$

Thus, $P(F) = \frac{3}{4}$ and $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

Therefore, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

OR अथवा

We know that the sample space is $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Now $E = \{3, 6\}$, $F = \{2, 4, 6\}$ and $E \cap F = \{6\}$

Then $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ and $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

Clearly $P(E \cap F) = = P(E).P(F)$

Hence, E and F are independent events.

खण्ड–द (SECTION – D)

Essay type questions:

निबन्धात्मक प्रश्न :

20. Evaluate $\int \sqrt{(1-4x-x^2)}dx$. **[4]**

$\int \sqrt{(1-4x-x^2)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

OR अथवा

Evaluate $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$. **[4]**

$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. Consider, $I = \int\sqrt{1-4x-x^2}dx = \int\sqrt{1-(x^2+4x+4-4)}dx = \int\sqrt{1+4-(x+2)^2}dx$

$= \int\sqrt{(\sqrt{5})^2-(x+2)^2}dx$

Since, $\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

$\therefore \quad I = \frac{(x+2)}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C$

OR अथवा

Put $t = x^5 + 1$, then $dt = 5x^4\,dx$.

Therefore, $\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$

Hence, $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}}-\left(-(-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Alternatively, first we transform the integral and then evaluate the transformed integral with new limits.

Let $t = x^5 + 1$. Then $dt = 5x^4\,dx$.

Note that, when $x = -1$, $t = 0$ and when $x = 1$, $t = 2$

Thus, as x varies from – 1 to 1, t varies from 0 to 2.

Therefore, $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}dx = \int_0^2\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

21. Find the shortest distance between the lines l_1 and l_2 whose vector equations are
रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है : **[4]**

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

OR/ अथवा

Find the equation of the line in vector and in Cartesian form that passes through the point with position vector $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ is in the direction **[4]**

बिन्दु, जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ से गुजरने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

Sol. Comparing (1) and (2) with $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ and $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ respectively,

we get, $\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$

Therefore, $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$

and $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

So, $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$

Hence, the shortest distance between the given lines is given by:

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2).(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

OR/ अथवा

It is given that

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Since, the vector equation of the line is given by $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, where λ is some real number.

Hence, $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

Since, $\vec{r}$ is the position vector of any point (x, y, z) on the line.

Therefore, $x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = (2 + \lambda)\hat{i} + (-1 + 2\lambda)\hat{j} + (4 - \lambda)\hat{k}$

Eliminating, we get the Cartesian form equation as

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Thus, the equation of the line in vector from is $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ and cartesian form is:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

22. Maximize Z = 4x + y subject to constraints $x + y \leq 50$, $3x + y \geq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method. **[4]**

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत Z = 4x + y का आलेखीय विधि से अधिमतमीकरण कीजिए।

$x + y \leq 50$, $3x + y \geq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

OR/ अथवा

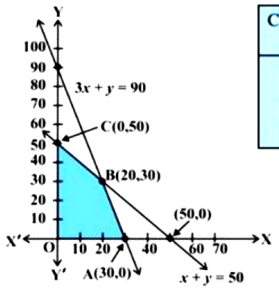
Maximize Z = 3x + 2y subject to constraints $x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method. **[4]**

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत Z = 3x + 2y का आलेखीय विधि से अधिमतमीकरण कीजिए।

$x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Sol. The shaded region in Figure is the feasible region determined by the system of constraints (2) to (4). We observe that the feasible region OABC is bounded. So, we now use Corner Point Method to determine the maximum value of Z.

The coordinates of the corner points O, A, B and C are (0, 0), (30, 0), (20, 30) and (0, 50) respectively. Now we evaluate Z at each corner point.

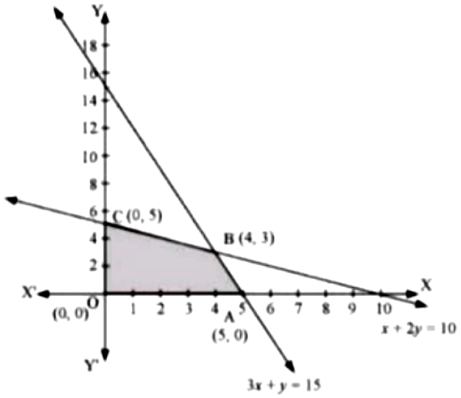


Corner Point	Corresponding value of Z	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	Maximum
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

Hence, maximum value of Z is 120 at the point (30, 0).

OR/ अथवा

The feasible region determined by the constraints, $x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$ and $x, y \geq 0$, is given by:



Since the corner points of the feasible region are A (5, 0), B (4, 3) and C (0, 5). The values of Z at these corner points are as follows:

Corner point	Z = 3x + 2y	
A (5, 0)	15	
B (4, 3)	18	→ Maximum
C (0, 5)	10	

Thus the maximum value of Z is 18 at the point B(4, 3).