अध्याय 10

त्रिभुजों की रचना

10.1 इस अध्याय को पढ़ने से पहले आप त्रिभुज की अवधारणा, इसके गुण एवं त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को पुनः याद कर लें ।

हमने भुजाओं और कोणों के आधार पर त्रिभुजों को वर्गीकृत किया समबाहु, समद्विबाहु एवं विषम–बाहु त्रिभुज तथा कोणों के आधार पर न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज । इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे ।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता अध्याय में हमने देखा कि एक अभीष्ट त्रिभुज बनाने के लिए हमें सभी 6 अवयवों (3 भुजा एवं 3 कोण) का माप ज्ञात होना आवश्यक नहीं होता है। यदि हमें नीचे दिए गए माप समूहों में से कोई एक दिया हो तो हम अभीष्ट त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। यहां अभीष्ट से तात्पर्य दिए गए मापों के आधार पर बनने वाले अद्वितीय त्रिभुज से है।

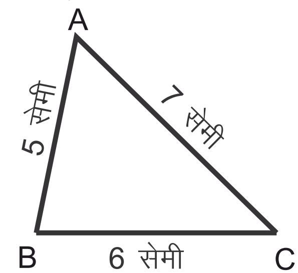
1. तीन भुजाएँ।
2. दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण ।
3. दो कोण एवं उनके बीच की भुजा ।
4. समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा ।

10.2 त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाएँ दी गई हो

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी, और AC= 7 सेमी हो।

हल **चरण–1**

पहले हम दी हुई मापों की एक कच्चा चित्र बनाते हैं। आकृति (i)

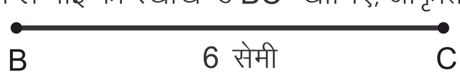


कच्चा चित्र

आकृति (i)

चरण–2

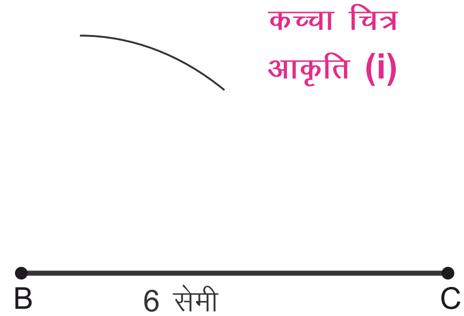
6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड BC खींचिए, आकृति (ii)



आकृति (ii)

चरण–3

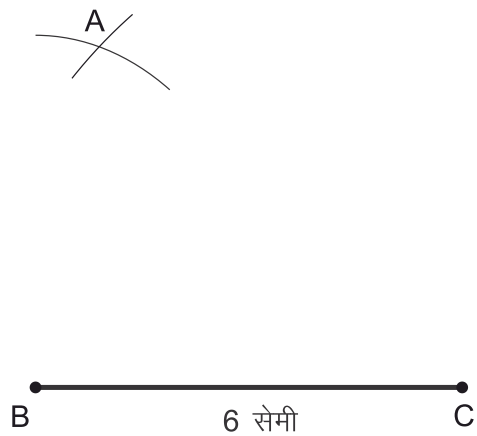
बिन्दु B से बिन्दु A से 5 सेमी की दूरी पर है। अतः B को केन्द्र मान कर और 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए ।



आकृति (iii)

चरण–4

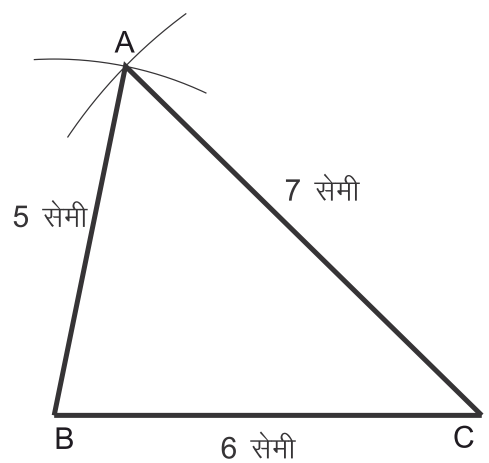
AC = 7 सेमी. है। अतः C को केन्द्र मानकर और 7 सेमी. त्रिज्या लेकर एक चाप इस तरह खीचेंगे कि वह B से खींचे गए चाप को एक बिन्दु पर काटे । आकृति (iv)



आकृति (iv)

चरण–5

A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अतः यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिन्दु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को मिलाएँ। अब त्रिभुज ABC तैयार है। (आकृति v)



आकृति (v)

करो और सीखो

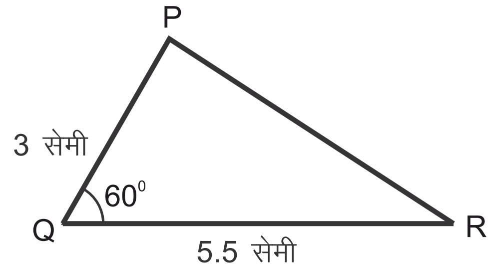
1. ΔXYZ की रचना कीजिए , जिसमें XY = 4.5 सेमी, YZ = 5 सेमी और ZX = 6 सेमी है ।
2. 5.5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए , जिसमें PQ= 4सेमी, QR = 3.5 सेमी और PR = 4 सेमी है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

10.3 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लम्बाईयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो

हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक कच्चा चित्र बनाते हैं इसके अन्य चरणों का अनुसरण उदाहरण 2 के अनुसार करते हैं।

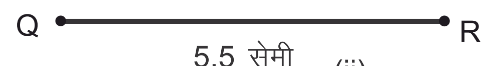
उदाहरण 2 एक त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि PQ = 3 सेमी, QR = 5.5 सेमी और कोण $\angle PQR = 60^0$ है।

हल चरण–1 पहले हम दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) आकृति (i)



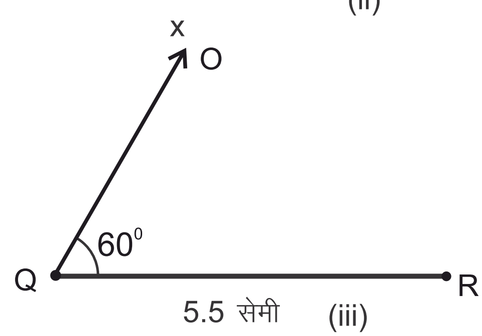
कच्चा चित्र (i)

चरण–2 5.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड QR खींचिए । (आकृति ii)

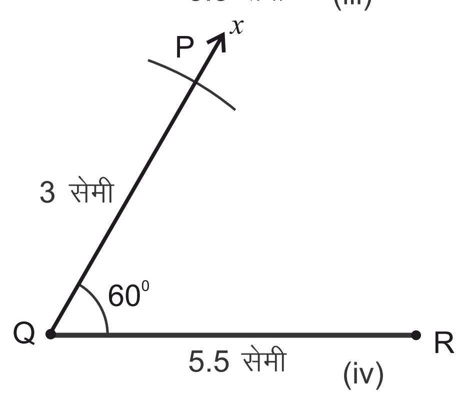


(ii)

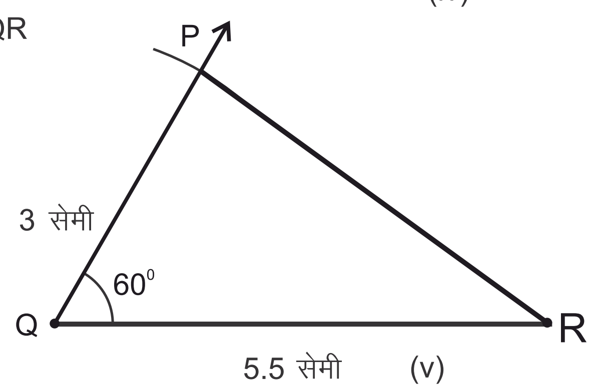
चरण–3 Q पर किरण QX खींचिए जो QR के साथ 60^0 का कोण बनाए । बिन्दु P कोण की उसी किरण पर होगा । (आकृति iii)



चरण–4 बिन्दु P निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है। Q को केन्द्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचिए । यह QX को जिस बिन्दु पर काटता है वह P होगा। (आकृति iv)



चरण–5 PR को जोडिए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है। (आकृति v)



सोचिए, चर्चा कीजिए

अध्यापक – यदि ΔABC में नाप AB = 3 सेमी. AC = 5 सेमी और $\angle C = 30^0$ हो तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं?

कृष्णा, विक्रम, सरला बनाने का प्रयास करते हैं।

कृष्णा – AC = 5 सेमी खींचकर $\angle C = 30^0$ खींच सकते हैं।

विक्रम – $\angle C$ की एक भुजा CA है। पर बिन्दु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए

अध्यापक – ध्यान दीजिए कि बिन्दु B को अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयों और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ है।

करो और सीखो

(i) ΔDEF की रचना कीजिए, जबकि DE = 5 सेमी, DF = 3 सेमी और $\angle EDF = 90^0$ हो।

(ii) एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लम्बाई 6.5 सेमी हो और उनके बीच का कोण 110^0 हो।

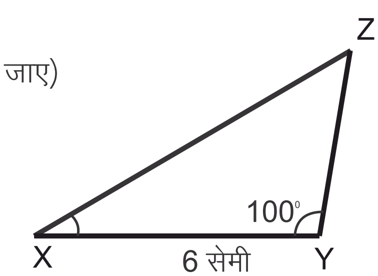
(iii) BC = 7.5 सेमी और AC= 5 सेमी और $\angle C = 60^0$ वाले ΔABC की रचना कीजिए।

10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों की अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी हो

सबसे पहले एक कच्चा चित्र खींचिए । अब दिया हुआ रेखाखण्ड खींचिए। दोनों अंत बिन्दुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

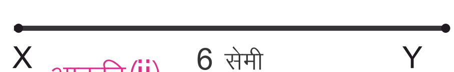
उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि XY= 6 सेमी, $\angle ZXY = 30^0$ और $\angle XYZ = 100^0$ है।

हल **चरण–1** वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं । (इससे अनुमान लग जाता हे कि कैसे रचना की जाए) आकृति (i)



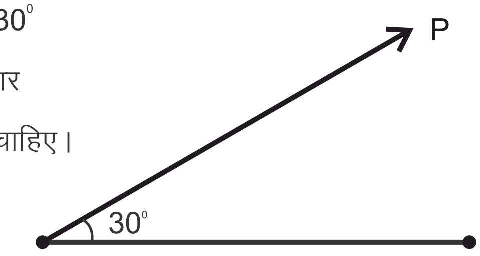
आकृति (i)

चरण–2 6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड XY खींचिए। (आकृति ii)



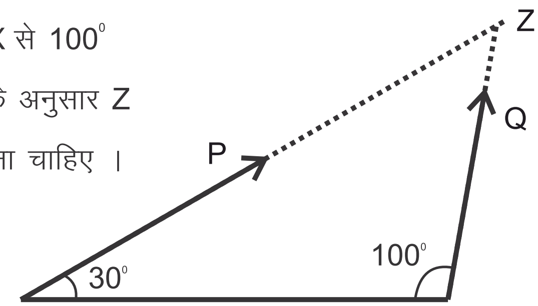
आकृति (ii)

चरण–3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिन्दु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए। (आकृति iii)



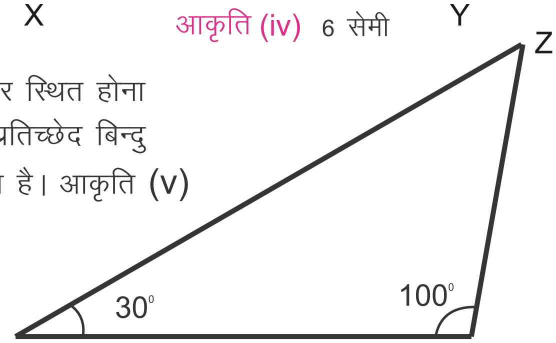
X आकृति (iii) 6 सेमी Y

चरण–4 Y पर एक किरण YQ खींचिए जो YX से 100° का कोण बनाए । दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए । (आकृति iv)



X आकृति (iv) 6 सेमी Y

चरण–5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अतः इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिन्दु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है। आकृति (v)



X आकृति (v) 6 सेमी Y

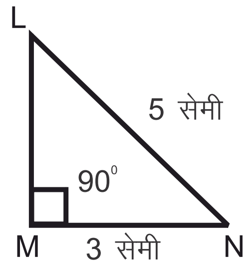
करो और सीखो

1. ΔABC की रचना कीजिए, जब $\angle A = 60^{0}$, $\angle B = 30^{0}$ और AB = 5.8 सेमी दिया है ।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि PQ = 5 सेमी $\angle PQR = 105^{0}$ और $\angle QRP = 40^{0}$ दिया है। (संकेत– त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि EF = 7.2 सेमी, $\angle E = 110^{0}$ $\angle F = 80^{0}$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

10.5 एक समकोण त्रिभुज की रचना जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लम्बाईयाँ दी हुई हो। यहाँ, एक आकृति बनाना सरल है । दी हुई भुजा के अनुसार एक रेखाखण्ड खींचिए इसके एक अंत बिन्दु पर समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लम्बाई की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए । निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए ।

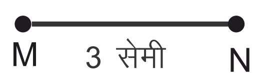
उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 सेमी, और MN = 3 सेमी

हल **चरण–1** एक कच्चा चित्र खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए। (आकृति i)



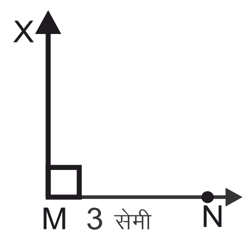
आकृति (i)

चरण–2 3 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड MN खींचिए (आकृति ii)



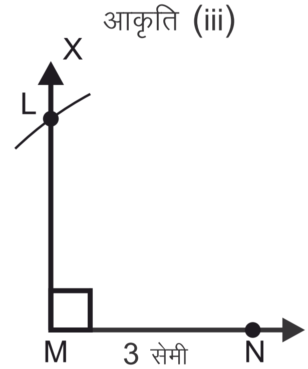
आकृति ii

चरण–3 M पर MX⊥MN खींचिए। इसके लिए M पर 90° का कोण बनाइए। (आकृति iii)



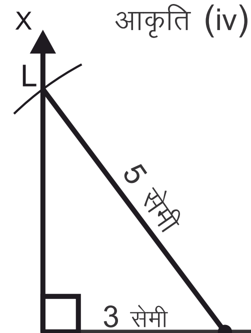
आकृति (iii)

चरण–4 N को केन्द्र मानकर, 5 सेमी का एक चाप खीचिए। (L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए क्योंकि यह N से 5 सेमी की दूरी पर हैं) (आकृति iv)



आकृति (iv)

चरण–5 L को लंब रेखा MX पर और केन्द्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अत: L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है (आकृति v)



आकृति (v)

करो और सीखो

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $\angle Q = 90^0$, QR = 8 सेमी, PR= 10 सेमी है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 सेमी. लम्बा है और एक भुजा 4 सेमी लम्बी है।

प्रश्नावली 10

1. ΔPQR की रचना कीजिए, जब PQ = 4 सेमी, QR = 3 सेमी तथा RP= 5.5 सेमी हो।
2. ΔXYZ की रचना कीजिए, जब XZ = 6 सेमी, XY = 4.5 सेमी तथा $\angle X = 50^0$ है।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जब AB = 5 सेमी, $\angle A = 45^0$ तथा $\angle B = 60^0$ है।
4. ΔDEF की रचना कीजिए, जब कर्ण DE = 5 सेमी, आधार DF = 3 सेमी तथा $\angle D = 90^0$ है।
5. एक 4 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए ।
6. ΔPQR की रचना कीजिए जहाँ त्रिभुज PQ = 5 सेमी , $\angle P = 75^0$, तथा $\angle R = 55^0$ हो।

हमने सीखा

1. इस अध्याय में हमने स्केल और परकार की सहायता से त्रिभुज की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है ।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है ।
3. इस अध्याय में निम्नलिखित माप समूहों से त्रिभुज की रचना का अध्ययन किया है।
   (i) जब त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दी हो । (SSS)
   (ii) जब किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई और उनके मध्य स्थित कोण दिया गया हो। (SAS)
   (iii) जब दो कोण और उनक अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी गई हो । (ASA)
   (iv) जब किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा दी गई हो। (RHS)