అధ్యాయం - 4

ప్రత్యేక అంశాలు - విశ్లేషణ

1. రాత లెక్కలు (Verbal problems)

గణిత సమీకరణము :

Know What + Know how + Know why = Know more

ఇన్‌స్టిట్యూట్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషనల్ సైన్స్, U.S. డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్ వారు నిర్వహించిన రీసెర్చ్ ఆధారముగా పద సమస్య సాధనలో సోపానములు ఈ కింది విధముగా ఉన్నవి.

I. ఇచ్చిన పద సమస్యను చదువుము.

- సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుము.
- సమస్యలో ఇచ్చిన పదములను, ఉపయోగించి గణిత పరిభాషను అర్థము చేసుకొనుము.
- ఇచ్చిన పద సమస్య ఏ రకమునకు చెందినదో గుర్తించుము.
  (నిర్మాణము, ప్రూఫ్, గ్రాఫ్, పట్టికాపూరణ)

II. ఈ చార్టును పూర్తిచేసి సాధింపుము.

1.	ఇచ్చిన పద సమస్యలో ఇచ్చినవి, కనుగొనవలసిన అంశములు ఏమిటి? ♦ ఇచ్చిన సమస్య మీరు అర్థము చేసుకొని మీ సొంత పదములలో చెప్పగలరా? ♦ ఇచ్చిన సమస్యను మరో రూపములో వ్యక్తపరచగలరా? ♦ ఇచ్చిన సమస్యలో ముఖ్య పదాల యొక్క అర్థము ఏమి? ♦ ఇచ్చిన సమస్యా సాధన అవసరమైన పదమును / బొమ్మను గీయగలవా?	
2.	పద సమస్యా సాధన అవసరమైన సమాచారము ఏమిటి? ♦ ఇచ్చిన సమాచారము, సమస్యా సాధనకు దోహదపడుతుందా గుర్తించుము. ♦ సమస్యలో ఏమికనుగోవాలి అని తెలుసుకొనుటకు సమస్యను సొంత మాటలలో రాసుకోవాలి. ♦ క్రమంలో అంశాలను రాసుకోవాలి. ♦ సాదృశ్యము గల మరిన్ని సమస్యల సాధన విధానములు పరిశీలించాలి. ♦ ఏమి కనుగోవాలి, ఇచ్చిన దానిని గణిత పరిభాషలో సాంకేతికముగా రాయాలి.	
3.	పద సమస్యా సాధనకు ఇచ్చిన సమాచారము సరిపోతుందా? ♦ అదనపు సమాచారము ఏమైనా ఉందా? ♦ సమస్య సాధనకు అదనముగా కావలసిన సమాచారమును గుర్తించుము.	

© SCERT not to be republished

	♦ ఏ పరిక్రియ నుపయోగించి, ఏ సూత్రమునుపయోగించి లేదా ఏ కృత్యము ద్వారా సాధిస్తారో గుర్తించాలి. ♦ సమస్యాసాధనలో అవసరమైన సిద్ధాంతము, నిరూపిత ఆధారమును గుర్తించాలి.	
4.	సమస్యాసాధన ఏవిధముగా ఉంటుంది? ♦ సమస్యాసాధన కొరకు ఒక ప్రణాళిక / పద్ధతిని ఏర్పరచుకొనుము. ♦ అమరిక కొరకు ప్రయత్నించడం. ♦ క్రమములో అంశాలు రాసుకోవాలి. ♦ అవసరమైన అనుగుణమైన పటం గీయాలి. ♦ అవసరమైన సందర్భాలను గుర్తించి అనవసరమైన కొన్ని సందర్భాలను తొలగించాలి. ♦ సౌష్టవాన్ని ఉపయోగించడం. ♦ ఉపకరణాన్ని ఉపయోగించడం. ♦ అవసరమైన కృత్యమును గుర్తించి దానిని అమలుచేయాలి. ♦ చాతుర్యంను ప్రదర్శించాలి.	
5.	సమస్య సాధింపుము	
6.	**పునఃశ్చరణ** మీ యొక్క సమాధానము ఏమిటి?	
7.	ఏ విధముగా సాధించావు? పద్ధతి ఏమిటి?	
8.	ఈ పద్ధతిలో సాధించుటకు గల కారణములు తెల్పుము?	

© SCERT not to be republished

కృత్య పత్రం

(Worksheet / Verbal Problems)

© SCERT not to be republished

1. $2y\,(y + z) - (x + y)\,(x + z)$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

   (గమనిక : బ్రాకెట్‌ను తొలగించకుండా కారణాంక విభజన చేయండి.)

2. $\dfrac{(1986^2 - 1992)\,(1986^2 + 3972 - 3)\,(1987)}{(1983)\;(1985)\;(1988)\;(1989)}$ విలువను కనుక్కోండి?

3. 15 సెం.మీ., 20 సెం.మీ. భుజాలుగా కల్గిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును దాని కర్ణము వెంబడి భ్రమింప చేస్తే ఏర్పడిన ద్విశంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును, ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$గా తీసుకొనుము).

4. అంతర వ్యాసార్ధము 21 సెం.మీ. గా గల ఒక స్థూపాకారపు పాత్రలో నీరు నింపబడియున్నది. 10.5 సెం.మీ. వ్యాసము గల ఒక ఘనపు గోళము నీటిలో పూర్తిగా ముంచబడినది. నీటి యొక్క మట్టములో పెరుగుదల ఎంత? (నీరు పొర్లిపోలేదు అనుకోవాలి)

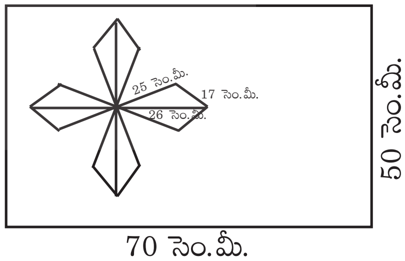
5. a, b, c, x, y, z లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

   $a^2 + b^2 + c^2 = 25,\ x^2 + y^2 + z^2 = 36$ మరియు $ax + by + cz = 30$ అయిన $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ విలువను కనుగొనుము.

6. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజాల కొలతలలో అతి చిన్నది 2003. మిగిలిన భుజాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన దాని యొక్క పరిధిని కనుగొనుము.

7. ఒక గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ. గోళము ఉపరితలవైశాల్యము, 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము కల్గిన శంఖువు వక్రతల వైశాల్యమునకు 5 రెట్లు అయిన శంఖువు యొక్క ఎత్తు, ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$)

8. 50×70 సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాకార పలకపై పటములో చూపిన విధముగా డిజైన్ గీయబడింది. ఈ డిజైన్‌లో 26 సెం.మీ., 17 సెం.మీ. మరియు 25 సెం.మీ. కొలతలుగా గల 8 త్రిభుజములు ఇయ్యబడ్డాయి. డిజైన్ యొక్క మొత్తము వైశాల్యమును కనుగొని, డిజైన్ లేని ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.



9. $2222^{5558} + 5555^{2222}$, 7చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడునని ఋజువుచేయుము.

10. ABCD దీర్ఘచతురస్రము. AB = 16 యూనిట్లు, మరియు BC = 12 యూనిట్లు F, AB పై బిందువు., E, CD పై బిందువు, AFCE ఒక సమచతుర్భుజము అయితే EF కొలతను కనుగొనుము.

11. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+2013} = ?$

12. a మరియు b లు 4 అంకెల సంఖ్యలు. $a > b$ మరియు ఒక సంఖ్యను తిరగేసి రాయగా మరో సంఖ్య వస్తుంది. $\frac{a+b}{5} = \frac{b-1}{5}$ అయితే b విలువను కనుగొనుము.

13. $x + y + z + t = 1$

$x + 3y + 9z + 27t = 81$

$x + 4y + 16z + 64t = 256$

$x + 167y + 167^2z + 167^3t = 167^4$ అయితే x విలువను కనుగొనుము?

14. $$\frac{(1+17)\left(1+\frac{17}{2}\right)\left(1+\frac{17}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{17}{9}\right)}{(1+19)\left(1+\frac{19}{2}\right)\left(1+\frac{19}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{19}{17}\right)}$$

15. x-అక్షమునకు సమాంతరముగా యున్న ఒక రేఖ $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ సమీకరణమును సూచించు గ్రాఫును $x = a$, $x = b$ వద్ద ఖండిస్తే $(a-1)(b-1)$ విలువను కనుగొనుము.

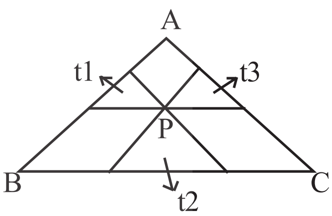
16. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజాలు a, b. $a > b$. లంబకోణమును సమద్విఖండన చేయురేఖ త్రిభుజమును రెండు సరూప లంబకోణ త్రిభుజములుగా విభజిస్తే ఆ రెండు త్రిభుజాల లంబకేంద్రముల మధ్య దూరమును కనుగొనుము. (విశ్లేషిక రేఖాగణిత పద్ధతి నుపయోగించుము)

17. x^{2013} ను (x^2-1) చే భాగించగా వచ్చు శేషము ఎంత?

18. [YE] [ME] = [TTT] అయితే Y + E + M + T విలువ ఎంత?

YE, ME లు రెండంకెల సంఖ్యలు, TTT మూడంకెల సంఖ్య.

19. $\triangle ABC$ అంతరములో ఒక బిందువు. దాని గుండా మూడు రేఖలు ఒక్కొక్కటి, ఒక్కొక్క భుజమునకు సమాంతరముగా గీయబడి, త్రిభుజమును 6 భాగాలుగా విభజించాయి. $\triangle ABC$ లో మూడు చిన్న త్రిభుజాలు $\triangle t_1, \triangle t_2, \triangle t_3$ ల వైశాల్యములు వరుసగా 4, 9, 16 చదరపు యూనిట్లు అయితే $\triangle ABC$ త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.



20. పూర్ణసంఖ్యలు భుజాలుగా గల్గిన లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క అంతరవృత్త వ్యాసార్థము కూడా పూర్ణసంఖ్య అని చూపుము.

21. $x, y \in z$ మరియు $x < y$, $x^2 + y^2 = 2000$ అయితే $31 < y < 45$ అని చూపుము.

22. త్రిభుజము ABC లో అంతరవృత్తము త్రిభుజ భుజాలను BC, CA మరియు AB లను D, E మరియు F ల వద్ద స్పృశించు చున్నది. అంతరవృత్త వ్యాసార్థము 4 సెం.మీ. మరియు BD, CE, AF లు వరుస పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన త్రిభుజ భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

23. $(a^2 + b^2)^3 + (a^3 + b^3)^2$ మరియు $ab \neq 0$ అయితే $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ల యొక్క సంఖ్య విలువలను కనుగొనుము.

24.
```
 T I C K
 T O C K
 T I C K
 T O C K
       A
---------
C L O C K
---------
```
సంకలనము పూరింపుము

T, I, C, K, O, L, A విలువలను కనుగొనుము.

(T, I, C, K, O, L, A లు అంకెలు పునరావృత్తం కానివి)

© SCERT not to be republished

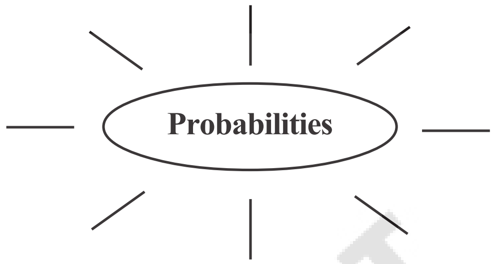
2. సంభావ్యత

(Probability)

1. (a) సంభావ్యత అనగా నేమి?

   (b) సంభావ్యత నేర్చుకోవలసిన అవసరం ఏమి?

సంభావ్యత అనగానేమి? (Brain stroming)



మనం నివసించే ప్రపంచం అనిశ్చితమైనది. మానవుని చుట్టూ ఉండే పరిస్థితులు అన్నీ తన అధీనంలో ఉండవు. వాటిలో ప్రకృతి శాసించేవి కూడా ఉంటాయి. ఉదాహరణకి మనం ఒక ప్రదేశాన్ని చేరుకోవాలంటే అనేక దారులు ఉన్నట్లయితే; ఏ దారి నుండి వెళితే త్వరగా, సురక్షితంగా వెళ్ళవచ్చు? మనకు తెలిసిన వారికి గుండె ఆపరేషన్ చేయించాల్సివస్తే ఏ హాస్పిటల్‌లో చేయిస్తే విజయవంతమవుతుంది? వచ్చే 3 రోజులలో వాతావరణ పరిస్థితులు ఏవిధంగా ఉంటాయి? 10 గంటలకు బయలుదేరవలసిన రైలు సరియైన సమయానికి బయలుదేరుతుందా?

ఇలాంటి ప్రశ్నలు నిత్యజీవితంలో మనకు తారసపడుతుంటాయి. మనం ఒక విషయం భవిష్యత్తులో ఏవిధంగా జరుగుతుందో ఊహించడానికి ఉత్సాహాన్ని చూపిస్తాము. మనం ఊహించి నిర్ణయం తీసుకోవడానికి అనేక విషయాలు దోహదపడుతాయి. ఈ విధంగా ఊహించి ఒక విషయంపై నిర్ణయం తీసుకోవడానికి మనకు సంభావ్యతపై పరిజ్ఞానం అవసరం. సంభావ్యతను తెలపడానికి మనం భిన్నాలు, దశాంశాలు లేదా శాతాలను ఉపయోగిస్తాము. **"సంభావ్యత అనగా ఏదేని ఒక సంఘటన జరిగే/ఏర్పడే అవకాశాన్ని సంఖ్యామాపనంగా తెలిపేది."**

✦ **సంభావ్యత ఉపయోగాలు :**

సంభావ్యతను ఉపయోగించి మనం మనకు తెలియకుండానే అనేక నిర్ణయాలు తీసుకొంటాము.

వైద్యపరమైన నిర్ణయాలు : మనకు కావలసిన వారికి అత్యవసరంగా శస్త్ర చికిత్స చేయాలంటే, మనకు తెలియకుండానే అందుబాటులో ఉన్న మంచి ఆసుపత్రికి, తీసుకొని వెళ్తాము. దానికోసం ఎక్కువ శస్త్ర చికిత్సలను విజయవంతంగా చేసిన డాక్టరు కోసం చూస్తాం.

క్రీడారంగం : ఒక ఆటగాడిని జట్టుకు ఎంపిక చేయాలంటే అతని గత రికార్డులు మరియు అతని ఆట తీరు లాంటి వాటిని రేటింగ్స్ చేసి తీసుకొంటారు.

ఇన్సూరెన్స్ రంగం : భీమా కంపెనీలు భీమా ఇచ్చేటప్పుడు వారి వయసు, ఆరోగ్యపరిస్థితి, ఆ వయసులో ఉన్నవారి మరణాల రేటు యొక్క సంభావ్యతను దృష్టిలో ఉంచుకొని నిర్ణయిస్తారు.

వాతావరణ శాఖ : గడచిన కొద్ది రోజుల నుండి ఉన్న ఉష్ణోగ్రతలను, సంవత్సరంలోని ఆకాలములో వచ్చిన తుఫానులను బట్టి అంచనా వేస్తారు.

© SCERT not to be republished

1. ఒక సంఘటన సంభావ్యత 0 మరియు 1ల మధ్య (0, 1 కలిపి) ఉంటుంది. ఈ సంభావ్యత రెండు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము.

   i) ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత ii) సైద్ధాంతిక సంభావ్యత

   i) ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత : ఈ పద్ధతిలో సంభావ్యతను కనుగొనుటకు (అంచనావేయుటకు) ప్రయోగాన్ని చాలా ఎక్కువసార్లు చేస్తాము. ఇలా ఎక్కువసార్లు చేసిన ప్రయోగంలో మనకు కావలసిన మనకు కావలసిన ఘటన ఎన్నిసార్లు సంభవించిందో నమోదు చేస్తాము.

   A అనే ఒక ఘటన అయిన, దాని ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత

   $$P(A) = \frac{\text{అనుకూల యత్నాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం యత్నాల సంఖ్య}}$$

   ఈ సంభావ్యత నిగమన పద్ధతిలో ఉంటుంది.

ప్రయోగ సంభావ్యత V/s సైద్ధాంతిక సంభావ్యత

చాలాసార్లు ప్రయోగానికి ముందే దానిని సైద్ధాంతికంగా సంభావ్యతను అంచనావేస్తాము. కాని ప్రయోగం చేసిన తర్వాత ఏర్పడే సంభావ్యతకు అంచనావేసిన సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు తేడా ఉంటుంది. ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు చేసినట్లయితే, దాని సంభావ్యత అది సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు దగ్గరగా ఉంటుంది.

ఉదా:

ప్రయోగ సంభావ్యత	సైద్ధాంతిక సంభావ్యత
ఒక నాణేన్ని 10 సార్లు ఎగుర వేసినప్పుడు 3 సార్లు బొమ్మ, 7 సార్లు బొరుసు పడింది. అయిన బొమ్మపడిన సంభావ్యత ఎంత? P బొమ్మ = $\frac{3}{10}$ = 0.4	ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ పడే సంభావ్యత ఎంత? మొత్తం పర్యవసానాలు = 2 అనుకూల పర్యవసానాలు = 1 P బొమ్మ = $\frac{1}{2}$ = 0.5

ఇక్కడ ప్రయోగ సంభావ్యత మరియు సిద్ధాంత సంభావ్యతల మధ్య వ్యత్యాసం ఉంది. కాని ప్రయోగాన్ని మళ్ళీ మళ్ళీ చేసి ప్రయోగ సంభావ్యత, సిద్ధాంత సంభావ్యతను సమీపిస్తుంది. కొంత మంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నాణేన్ని చాలా ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసి ఫలితాలు నమోదుచేశారు. కాని క్రింది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ప్రయోగ ఫలితాలు గమనించండి.

పేరు	నాణెం ఎగురవేసిన సంఖ్య	బొమ్మల సంఖ్య	సైద్ధాంతిక సంభావ్యత
బఫన్ (ఫ్రెంచ్)	4040	2048	$\frac{2048}{4040}$ = 0.5069
జాన్‌కెర్రిచ్ (ఇంగ్లీషు)	10000	5067	$\frac{5067}{10000}$ = 0.5069
కార్ల్‌పియర్సన్ (ఇంగీషు)	24000	12012	$\frac{12012}{24000}$ = 0.5069

సైద్ధాంతికంగా ఒకసారి నాణేన్ని ఎగురవేసిన సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$ = 0.5 పై పట్టికను గమనించిన కార్ల్‌పియర్సన్ 24,000 సార్లు నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు వచ్చిన ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత 0.5005 (దాదాపు సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు దగ్గరగా) వచ్చింది.

© SCERT not to be republished

ఉదా : 2

<table>
<tr><th>ప్రయోగ సంభావ్యత</th><th>సైద్ధాంతిక సంభావ్యత</th></tr>
<tr><td>ఒక సంచిలో 6 గోళీలు ఉన్నాయి. వాటిలో 3 ఎర్రగోళీలు, 3 నీలం గోళీలు కలవు. అయిన యాదృశ్చికంగా ఒక గోళీని సంచి నుండి తీసిన అది ఎరుపు గోళీ వచ్చే సంభావ్యత ఎంత
P బొమ్మ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$</td><td>ఇదే సమస్యను ప్రయోగం ద్వారా చేసి ఫలితాలు నమోదు చేసిన.
<table><tr><th>యత్నము</th><th>ఎరుపు</th><th>నీలం</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>1</td></tr></table>P (ఎరుపు) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$</td></tr>
</table>

రెండింటి సంభావ్యతల మధ్య వ్యత్యాసం కలదు. ఒకవేళ ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు చేసినట్లయిన అది 0.5కు సమీపిస్తుంది.

9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలోని సంభావ్యత అధ్యాయంలో ఇచ్చిన లెక్కలు మీ గ్రూపులో చర్చించండి. వీటిలో ఏయే లెక్కలు ఏ సంభావ్యతకు చెందుతాయో కారణాలు తెల్పండి.

కృత్యం చేయండి :

రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినప్పుడు వాటి పై ముఖం (Head) పై

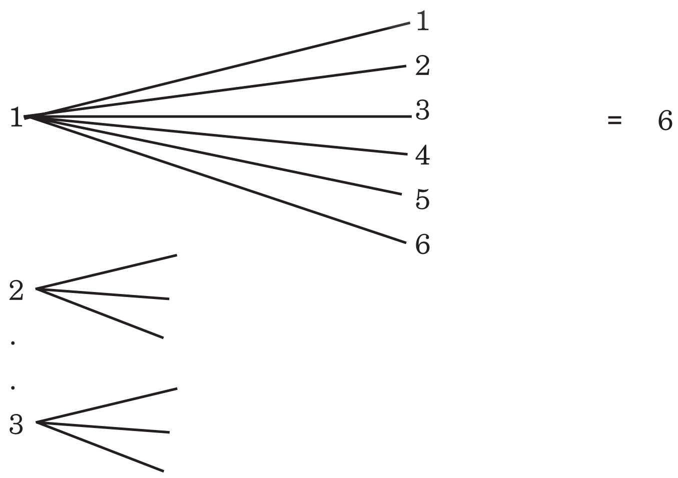
1) గరిష్ఠంగా వచ్చు స్కోరు మొత్తం = __________

2) కనిష్ఠంగా వచ్చు స్కోరు మొత్తం = __________

దానిని తెలుసుకొనుటకు కింది ప్రయోగాన్ని చేద్దాం (ప్రయోగపద్ధతి) :

a) రెండు పాచికలను ఒక సారి దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు = __________

Hint: మొదటి పాచిక రెండవ పాచిక



©SCERT not to be republished

b) రెండు పాచికలను రెండుసార్లు దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు సంఖ్య = ____________

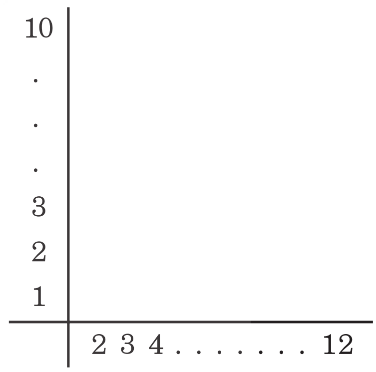
c) రెండు పాచికలను మూడుసార్లు దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు సంఖ్య = $\frac{108}{(\text{ఎందుకు})}$

పాచికను 108 సార్లు (ఎక్కువసార్లు దొర్లించుట ఎందుకు) దొర్లించిన వాటిపై ముఖంపై స్కోరుల మొత్తాన్ని కింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.

సాధ్యమయ్యే మొత్తం	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
2 3 4 5 6 7 8 9 12		
	మొత్తం	108

పై పట్టికను ఉపయోగించి కమ్మీ రేఖాచిత్రాన్ని నిర్మించండి.

కమ్మీ రేఖాచిత్రం నుండి అధిక సంభవమైన స్కోరు = __________



© SCERT not to be republished

సైద్ధాంతిక సంభావ్యత (B)

మొదట రెండు పాచికలపై సాధ్యమయ్యే మొత్తాన్ని కింది పట్టికలో నమోదుచేయండి.

2వ పాచిక

1వ పాచిక

మొత్తం	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

పట్టిక నుండి కింది దానిని పూర్తిచేయండి.

మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
అవి ఏర్పడిన సంఖ్య											

దీని కమ్మీరేఖా చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

అధిక సంభవమైన స్కోరు = ______________

రెండు పద్ధతులలో (A, B) ప్రత్యేకంగా కింది ప్రశ్నలు చర్చించండి.

1. కమ్మీల పొడవులు ఒకే విధంగా ఉన్నాయా? ___________
2. అధికంగా సంభవించిన స్కోరు ___________
3. కమ్మీ రేఖాచిత్రాలలో సౌష్ఠవంగా ఉన్నాయా? ___________

గమనిక :

ఒక ప్రయోగాన్ని ఎక్కువసార్లు చేసినప్పుడు ఆ ప్రయోగ సంభావ్యత సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు సమీపిస్తుంది. ఈ భావన గణితములో సాంఖ్యాకశాస్త్రం మరియు సంభావ్యతకు మూలం ఇది 1713లో బెర్నోలీ ప్రతిపాదించారు.

దీనినే Law of Large numbers అంటారు.

© SCERT not to be republished

ఉపాధ్యాయునికి మరియు విద్యార్థికి పాఠ్యపుస్తకం ముఖ్యమైన వనరు. ఉపాధ్యాయుడు పాఠ్యపుస్తకాన్ని తాము బోధించే పాఠాలకు సంబంధించిన ప్రణాళికలు తయారుచేసుకోడానికి, బోధించవలసిన గణిత భావనలు, పద్ధతులు తెలుసుకోడానికి ఉపయోగిస్తారు. పిల్లలు పాఠ్యపుస్తకాన్ని భావనలు మరియు పద్ధతులు తెలుసుకోడానికి ఉపయోగిస్తారు.

– SCF 2011

కృత్య పత్రం

(Wroksheet / Probability)

"ఈ రోజు వార్తలలోని ముఖ్యాంశాలు ఏవిధంగా ఉండవచ్చు?"

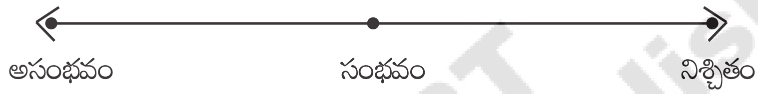
లక్ష్యము : ఈ కృత్యము తర్వాత శిక్షణార్థులు నిత్యజీవితంలో జరిగే విషయాలను, అవి ఏర్పడే అవకాశాలను బట్టి సంభావ్యత పరిభాషలో చెప్పగలుగుతారు.

సమూహాలు : ప్రతి సమూహానికి 4 గురు ఉండేటట్లు మొత్తం 6-7 సమూహాలుగా విభజించండి.

సామాగ్రి : చార్ట్‌పేపర్, స్కెచ్, గ్లూ, కత్తెర, పాత వార్తాపత్రికలు.

"గ్రూపులలో చర్చించి ఆ రోజు రాత్రి 9 గం॥ ప్రసారమయ్యే వార్తలలోని 5 ముఖ్యాంశాలను ఏవి ఉండవచ్చో ఊహించండి." (10 ని॥లు)

(On board)



10 ని॥ తర్వాత ఏదైన ఒక సమూహ నల్లబల్లపై తమ వార్తా ముఖ్యాంశాలలోని మొదటి అంశాన్ని రాస్తారు. మొత్తం తరగతిలో చర్చించి మొదటి వార్తా అంశం అది సంభవించే అవకాశాలను బట్టి పై స్కేలులో గుర్తిస్తాము.

ఒకవేళ పై స్కేలులో ఉన్న బిందువులలో కాకుండా వేరే ప్రదేశంలో ఆ వార్తాంశాన్ని గుర్తించవలసి వస్తే వాటికి ఏయే పదాలు ఉపయోగించాలి.

అధికసంభవం, అల్పసంభవం

శిక్షణార్థులు సంభావ్యత అధ్యాయాన్ని (4.1) పేజి. 292 చదువుతారు. (10 ని॥లు)

తమ సమూహంలో చర్చించి రాసిన వార్తా ముఖ్యాంశాలను పైన తెల్పబడిన విధంగా శ్రేణీకరణ చేసి రాస్తాము.

ప్రదర్శన :

ప్రతి సమూహ వారి వారి వార్తా ముఖ్యాంశాలను అసంభవం, అల్పసంభవం, సమసంభవం, అధిక సంభవం, నిశ్చితం లాంటి పదాలను ఉపయోగించి ప్రదర్శన చేస్తారు.

© SCERT not to be republished

3. గణితములో నిరూపణలు

(Proofs in Mathematics)

1. అనిర్వచనీయ పదాలు (Undifined terms) :

గణితశాస్త్రము వేరే ఏ ఇతర శాస్త్రాలపైన ఆధారపడక స్వతంత్రమైనది. కావున ఇందులోని పదములను నిర్వచించాలంటే వేరొక గణిత పదములో వివరించాలి. తిరిగి రెండవ పదాన్ని మూడవ పదముతో వివరించాలి. ఈ విధంగా తిరిగి తిరిగి మళ్ళీ మొదటి పదానికి చేరాల్సి వస్తుంది. ఈ స్థితి నుండి బయటపడాలంటే అనిర్వచనీయ పదాలుండాలని అరిస్టాటిల్ ప్రతిపాదించాడు. 19 శతాబ్ది ప్రారంభము వరకు ఏ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు కూడ వీటిపై దృష్టి సారించలేదు. 1882లో మార్జిజ్ పాచ్‌తో అనిర్వచనీయపదాల ప్రాముఖ్యత వచ్చింది.

అనిర్వచనీయ పదాలను నిర్వచించకుండా వారి భావనను మాత్రమే వివరించబడుతుంది. గణితంలో బిందువు, రేఖ, తలము, సంఖ్య, శూన్యము మొదలగునవి అనిర్వచనీయ పదాలుగా తీసుకొన్నారు. వీటి సంఖ్య సమితివాద ప్రవేశముతో తగ్గింది. ఎందుకనగా సమితివాదము గణితశాస్త్ర వివిధ భాగాలను కలుపుతుంది.

నిర్వచనాలు (Definitions) :

ఒక పదాన్ని నిర్వచించాలంటె ఆ పదము వివరించు విషయములపై స్పష్టమైన అవగాహన ఉండాలి. ఒక పదము నిర్వచనను అంటే అది తెల్పు భావనను ఇతర పదాలతో చెప్పడము.

మంచి నిర్వచనములో (1) నిర్వచిత పదము పేర్కొనబడాలి (2) నిర్వచించుటకు అంతకు ముందు నిర్వచించబడిన పదాలు (లేక అనిర్వచిత పదాలు) మాత్రమే వాడాలి. (3) నిర్వచిత పదము ఏ తరగతికి చెందునో వివరించి అది మిగిలిన పదములతో ఏ విషయములో విభేదించుచున్నదో తెల్పాలి. (4) అనవసర విషయము లుండకూడదు (5) దీనికి విపర్యయము కలదు.

ఉదా: 1) మూడు భుజములు గల బహుభుజి <u>త్రిభుజము</u>. వివరణ: 1) నిర్వచిత పదము త్రిభుజము పేర్కొనబడింది (2) అది చెందు తరగతి బహుభుజాలు చెప్పబడింది (3) వేరు వేరు బహుభుజాలు భుజముల సంఖ్య (మూడు)తో విభేదించునని చూపబడింది.

ఉదా: మూడు భుజములు మూడు కోణములు గల బహుభుజి త్రిభుజము.

వివరణ : ఇందులో 'మూడు కోణములు' అవసరములేదు.

2. స్వీకృతాలు (Axioms) :

హేతుబద్ధ తార్కిక వ్యవస్థ గల ఏ శాస్త్రమైనను అందరికి అంగీకృతమైన కొన్ని మౌళిక భావనలతో ప్రారంభించాల్సి వస్తుంది. ఈ భావనలకు నిరూపణ ఉండదు. వీటిని సత్యముగా తీసుకొని వేరు భావనలు నిర్మిస్తాము. ఇవి అందరిచే సత్యములుగా అంగీకరించబడిన భావనలు.

గణిత శాస్త్రములో నిరూపణ లేకుండా సత్యములుగా స్వీకరించ బడిన మౌళిక భావనలను స్వీకృతాలు అన్నారు. ఉదా: (1) ఒక వస్తువు దాని భాగముకన్న పెద్దది (2) సమాన రాశులకు సమాన రాశులు కలిపిన వచ్చు రాశులు సమానాలు మొదలగునవి.

రేఖా గణితంలో నిరూపణ లేకుండా తీసుకొన్న భావనలను స్వీకృతాలు ప్రతిపాదనలు అన్నారు. ఉదా: (1) రెండు బిందువుల గుండాపోవు ఒక రేఖఉండును (2) దత్త వ్యాసము గల్గిన వృత్తము గీయవచ్చును. మొదలగునవి.

© SCERT not to be republished

ఐతే ప్రస్తుతము గణితశాస్త్ర విభాగములతో సంబంధము లేకుండా అన్ని మౌళిక భావనలను స్వీకృతాలు (Axioms) అని వాదుచున్నాము.

3. సిద్ధాంతాలు – పరికల్పనలు (Theorems - conjuctures) :

అనిర్వచనీయ పదాలు, నిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాల భావనల నుండి హేతుబద్ధ తార్కికతో నిగమన పద్ధతి ద్వారా ఏర్పడిన ప్రవచనములు (భావనలు) సిద్ధాంతములు ఇవన్నియు అనుషంగిక ప్రవచనములే.

గణితశాస్త్రములో వచ్చు వివిధ అంశముల అమరికలు / విన్యాసాలను పరిశీలించి చెప్పబడు ప్రవచనము పరికల్పన. ఇవన్నియు అనుషంగికాలే. ఇది పరిశీలన ద్వారా చెప్పబడినవి కాన నిరూపణలేదు. ఎప్పుడైతే పరికల్పన నిరూపించబడుతుందో అది సిద్ధాంతమవుతుంది.

ఉదా: 1) గోల్డ్ బ్యాక్ పరికల్పన

2) రీమాన్ పరికల్పన

3) ఫిబొనాకి సంఖ్యలలో 144 మాత్రమే వర్గసంఖ్య.

మొన్న మొన్నటి వరకు నాల్గువర్ణముల సమస్య (Four clolur problem) కూడ పరికల్పననే కాని అది నిరూపితమైనది.

నిజానికి చెప్పాలంటే సిద్ధాంతాలు / పరికల్పలన్ని పరిశీలన ద్వార గణితశాస్త్ర అంశములను కలుపుతు చెప్పబడిన ప్రవచనాలే. నిరూపణ తరువాత జరుగును. ప్రతి సిద్ధాంతము పరికల్పనతోనే ప్రారంభమవుతుంది. పైథాగరస్ సిద్ధాంతము మొదట చెప్పబడింది. తరువాత నిరూపించబడింది.

4. ప్రవచనము :

సత్యముల ఏక అసత్యము అని నిర్ణయింపదగు సంపూర్ణ వాక్యమును ప్రవచనము అంటారు. అనగా ప్రతి నిర్వచనము ఒక సత్యప్రవచనమే.

గణితంలో ప్రవచనాలు నిరూపించబడతాయి. ఇతర శాస్త్రములలో అవి సరిచూడబడతాయి లేక పరిక్షించబడతాయి. గణితశాస్త్ర ప్రవచనములు అంతకు ముందే తెలిసిన విషయముల నుండి నిగమన పద్ధతిద్వారా రాయబడినవి. ఇతర శాస్త్ర ప్రవచనాలు ప్రయోగములు, పరిశీలనల ద్వారా గమనించిన విషయాలు హేతుకీకరణద్వారా చెప్పబడినవి. అందుకే సాపేక్షతా సిద్ధాంతము సరిచూచుట, పరీక్షించుట మాత్రమే జరిగినది కానీ నిరూపించబడలేదు.

5. నిరూపణ అంటే ఏమిటి?

గణిత ప్రవచనపు నిరూపణ అంటే హేతుబద్ధ తార్కిక వాదనలతో ప్రవచనపు సత్యతను నిర్ధారించుట. దీనిలోని సోపానములన్ని అనుషంగిక ప్రవచనాలే. నిరరూపణ అంటే అంగీకృత వాదన అని చెప్పవచ్చు.

నిరూపణ ప్రాముఖ్యత :

దిగువ ఉదాహరణాన్ని గమనించండి.

ఉదా:– $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}$ అని చూపుము.

నిరూపణ:– $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = \frac{1001-1000}{1001000} = \frac{1}{1001000}$

కాని 1001000 > 1000000 కావున $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}$

క్యాలుకులేటర్ లేదా కంప్యూటర్‌తో పై ప్రవచనాన్ని సరిచూసుకొనవచ్చును. నిరూపణ శ్రమ తప్పుతుంది. కాని గణితములో అవగాహన ముఖ్యము. యంత్రము జవాబు చెబుతుంది. కాని ఎందుకు అనే ప్రశ్నకు సమాధానం చెప్పదు. అదియేగాక నిరూపణ సామాన్యీ కరణానికి బాట వేస్తుంది. ఉదా: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$ రాబట్టవచ్చు అంతేగాక కంప్యూటరులలో సంఖ్యలోని అంకెలకు పరిమితి గలదు. పరిమితిని మించిన అది ఉజ్జాయింపు విలువలు మాత్రమే చెబుతుంది. కచ్చితత్వము ఉండదు.

6. గణిత ప్రవచనాన్ని ఎలా నిరూపించాలి?

గణితశాస్త్ర ప్రవచనముల నిరూపణకు ప్రత్యేకమైన పద్ధతులు ఏవియులేవు. అందుకు ఫర్మా సిద్ధాంత నిరూపణకు 300 సంవత్సరాలయింది. ఇంకను ఎన్నో పరికల్పనలు అలానే మిగిలిపోయాయి. కాని పోల్యాగారు సూచించిన విధంగా ఆలోచిస్తే మనకు క్లూ దొరకవచ్చు.

మొట్టమొదట నిరూపించాల్సిన ప్రవచనాన్ని అర్థం చేసుకోవాలి. అనగా మన లక్ష్యమేమో తెలుసుకోవాలి. దీనికై సారాంశ భాగమేది? దత్తాంశ భాగమేది? ఇచ్చిన షరతులేమి? అని నీలోనీవే ప్రశ్నించుకోవాలి. సాధ్యమైనచోట సమస్యను రేఖాచిత్రము / పటము ద్వారా ప్రదర్శించి దత్తాంశ సారాంశాలను సరియైన సంకేతాలతో ప్రదర్శించాలి.

పిదప దత్తాంశ సారాంశాలకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించాలి. నేరుగా లేకున్న చిన్న చిన్న ఉపలక్ష్యాలతో సంబంధాన్ని ఏర్పరచాలి.

7. నిరూపణ ఎలా రాయాలి?

i) సమాచారాన్ని (సమస్యలోని) సూచించు పటమును గీయాలి.

ii) సమస్యలోని దత్తాంశాన్ని పదముతో అన్వయము చేస్తూ రాయాలి.

iii) సమస్య / ప్రవచనములోని సారాంశాన్ని పదముతో అన్వయము చేస్తూ రాయాలి.

iv) గమ్యం చేరుటకు ఇంకను కావలసిన సమాచారముకై పటమును క్షుణ్ణంగా అధ్యయనం చేయాలి.

v) పిదప నిరూపణ రాయుట ప్రారంభించాలి. వారు ప్రతిప్రవచనమునకు కారణమును తెల్పాలి. దిగువ తెల్పిన విషయాలను కారణాలుగా చూపవచ్చును. (ఎ) స్వీకృతములు (బి) నిర్వచనములు (సి) దత్తాంశము (డి) పూర్వము నిరూపించిన ప్రవచనాలు.

8. నిరూపణ విధానం :

a) దత్తాంశం

b) సారాంశం

c) పటం

d) ఉపపత్తి సోపానములు / ప్రవచనాలు	కారణాలు
1) ________	1) ________
2) ________	2) ________
3) ________	3) ________
4) ________	4) ________
5) ________	5) ________

© SCERT not to be republished

9. నిరూపణ పద్ధతులు :

1) ప్రత్యక్షనిరూపణ : (i) ప్రత్యక్షనిరూపణలో సిద్ధాంతము $H \rightarrow C$ (దత్తాంశం – సారాంశం) లో H సత్యముగా తీసుకొని తార్కిక కారణాలతో తెలిసిన సమాచారాన్ని ఉపయోగించి C చేరుకొంటాము. ఇందులో సోపానాలలో $H \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 .... \rightarrow C$ లుగా వివరిస్తే, ఇందులో C_1, C_2, C_3. . . . లు ఉపలక్ష్యాలను ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా: a, b లు వాస్తకవ సంఖ్యలు $a > b$ అయిన $a^2 < b^2$ అని చూపుము.

నిరూపణ:

$a < b \Rightarrow a^2 < ab$ ఇరువైపుల a చే గుణించగా

$\Rightarrow ab < b^2$ ఇరువైపుల b చే గుణించగా

$\Rightarrow a^2 < ab < b^2$ సంక్రమణ న్యాయము.

$\Rightarrow a^2 < b^2$

<u>(ii) తిరోగమన పద్ధతి :</u> సారాంశము నుండి దత్తాంశమునకు వ్యతిరేక దిశలో సోపానములు రాయుట. ఇది దత్తాంశము నుండి సారాంశము రాయుటలో కష్టముగా నున్నప్పుడు ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా: $a < b$ లు వాస్తవ సంఖ్యలైన $4ab < (a + b)^2$

సాధాన:

$$4ab < (a + b)^2 \Leftarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Leftarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Leftarrow 0 < (a - b)^2$$
$$\Leftarrow a - b \neq 0$$
$$\Leftarrow a \neq b$$
$$\Leftarrow a < b$$

కావున $a < b$ అయిన $4ab < (a + b)^2$

2) పరోక్ష పద్ధతి : ఇందులో సారాంశపు ప్రత్యామ్నాయాలన్ని పరిగణలోనికి తీసుకొనబడును. ప్రత్యామ్నాయాలన్నిటిలో ఏదో ఒకటి మాత్రమే సత్యముగా ఉండవలెను. ప్రత్యామ్నాయాలని అసత్యములని చూపుదుము. కావున మనకు సారాంశము మాత్రమే సత్యముగా మిగులును.

ఉదా॥ రెండు సరళ రేఖలు ఖండించుకొనిన అవి ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండిచు కొనును.

ఇందులో సారాంశము రెండు రేఖలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును దీనికి ప్రత్యామ్నాయము ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించు కొనును.

కావున ఒకటి కంటె ఎక్కువ అనగా రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిచును అనుకొనిన దత్తాంశానికి వ్యతిరేకతను సూచించునని చూపెదము. దత్తాంశము సత్యముగా తీసుకొంటాము కావున ప్రత్యామ్నాయము. ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనుటము తప్పు. కానీ ప్రవచన నిరూపణ.

(i) $x^2 - 4y = 3$ అగునట్టు x, y సహజ సంఖ్యలుండవు దత్తాంశము; $x^2 - 4y = 3$

సారాంశము x, y లు సహజ సంఖ్యలు కావు.

సాధన : సారాంశానికి ప్రత్యామ్నాయము x, y లు సహజసంఖ్యలు అనుకొనిన అవి సరియో బేసియో కావలెను.

సందర్భము (a) x సరిసంఖ్యయైన

$x = 2z$ అనుకొనుము.

$\therefore (2z)^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4z^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4(z^2 - y) = 3$

కావున 3, 4 యొక్క గుణిజము, ఇది అసత్యము.

సందర్భము (b) x బేసి సంఖ్య యైన

$x = 2x + 1$ అనుకొనుము

$(2z + 1)^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4z^2 - 4y + 1 - 4y) = 3$

$\Rightarrow 4(z^2 + z - y) = 2 \Rightarrow 2, 4$ యొక్క గుణిజము

కావున x, సరిసంఖ్య కాదు బేసి సంఖ్యయు కాదు కావున 'x' సహజ సంఖ్య కాదు.

3) ప్రత్యుదాహరణ : నిజముగా ఇది నిరూపణ కాదు. ప్రవచనము తప్పు అని చెప్పుటకు వాదు తర్కము. ఉదాహరణ మాత్రమే ఇచ్చెదము.

ఉదా: (1) "ప్రధాన సంఖ్యలన్నియు బేసి సంఖ్యలే"

2. సరి ప్రధాన సంఖ్య ప్రత్యుదాహరణమగును.

వ్యతిరేకత (2) అన్నిటి కన్న పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య ఏదియూ లేదు.

సాధన : p అతి పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనిన

$(2.3.5.7.11 \ldots\ldots\ldots\ldots p) + 1$; p కంటె పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య

© SCERT not to be republished

తరగతి గది నిర్వహణలో సంఘంలోని వివిధ ఏర్పాటువాద ధోరణులను కూడా గమనించాలి. ఉదాహరణకు "కొన్ని వర్గాల వారికి గణితం అవసరం లేదు" లేదా "ఆడ పిల్లలు గణితం నేర్చుకోలేరు" వంటి నమ్మకాలు తరగతి గది నిర్వహణను ప్రభావితం చేస్తాయి. ఇదే విధంగా కొన్ని కులాలకు చెందిన వారి గురించి కూడా అపనమ్మకాలు ఉన్నాయి. ఇవన్నీ తరగతి గదిలో ప్రశ్నించబడాలి మరియు పారదోలబడాలి.

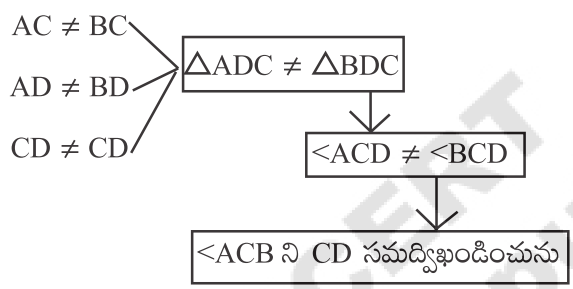
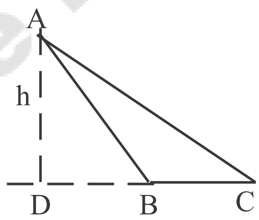
– SCF 2011

కృత్య పత్రం

(Worksheet on Proofs)

1. కింది ప్రశ్నలకు దానికి ఎదురుగా ఈయబడిన స్థలంలో సమాధానాలు రాయండి.
2. సమాధానము స్పష్టంగా, సహేతుకంగా, సంక్షిప్తంగా ఉండాలి.

	ప్రశ్నలు	జవాబు
1.	ఇది ఐదు పదముల వాక్యము : ఇది ఐదు పదముల వాక్యము కాదు : రెండింటి సత్యవిలువలు " ఏవి?	
2.	"నిర్వచనము" ఏలాంటి ప్రవచనము?	
3.	"ఉమ్మడి శీర్షము కలిగి ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపుల గల కోణాలు ఆసన్న కోణాలు" నిర్వచనము సరిగాకలదా? లేనిచో సరిచేసి రాయండి.	
4.	నిరూపణ చేయు ప్రవచనపు దత్తాంశమును ఎల్లప్పుడు సత్యముగా తీసుకొంటాము. ఎందుకు?	
5.	అన్ని ఆమ్లాలు పుల్లగా ఉంటాయి; ద్రవము A పుల్లగా ఉంది. కావున ద్రవము A	
6.	"గోల్డ్ బాక్ పరికల్పన ఇంతవరకు నిరూపించబడలేదు" కావున అది ప్రవచనము కాదు. మీరేమంటారు?	
7.	"అన్ని కోణాలు సమానములుగా గల చతుర్భుజము చతురస్రము" ప్రత్యుదాహరణ మిమ్ము. ప్రవచనాన్ని సత్యప్రవచనంగా మార్చండి.	
8.	"ప్రపంచములో సమాన తలవెంట్రుకల సంఖ్యగల వారు కనీసము ఇద్దరుంటారు" ఎలా చెప్పగలవు?	
9.	"నేను పొద్దుటి నుండి పేపరు వాడు కొరకు చూస్తున్నాను ఇంతవరకు రాలేదు" అన్నాడు వాట్సన్. "ఎందుకు వేచి చూడటము. ఈ రోజు పేపరు ఇక్కడ లేదు. కావున పేపరు వాడు రాలేదు" అన్నాడు షేర్లాక్ హోమ్స్. వారి వాదనలలో బేధమేమి?	
10.	"రష్యా యొక్క రాజధాని మాస్కో అయిన ఇండియా రాజధాని ఢిల్లీ". దత్తాంశ సారాంశాల మధ్య సంబంధము లేదు ఐన ఇది సత్యప్రవచనము. ఎందుకు?	
11.	"ఇది ఫిబ్రవరి నెల కావున ఈ నెలలో 28 రోజులే ఉంటాయి. ప్రత్యుదాహరణ ఇవ్వండి.	

	ప్రశ్నలు	జవాబు
12.	"ఒక కోణ భుజములకు సమాన దూరములో గల బిందువు ఆకోణ సమద్విఖండవ రేఖపై ఉండును. పటము గీచి దత్తాంశ, సారాంశాలు రాయండి.	
13.	దిగువ వారిలో రెండు సార్లు నోబెల్ బహుమతి గ్రహీత (1) నెపోలియన్ (2) న్యూటన్ (3) లీనస్ పాలింగ్ (4) గాలబ్ మిగిలినవారు ఎందుకు కారు.	
14.	$\triangle ABC$ లో $AC \neq BC$ మరియు $\triangle ABC$ లో $AD \neq AB$ అయిన <ACB ని CD సమద్విఖండన చేయును" నిరూపణ క్రమచిత్రము ఇలాకలదు.  దీనిని రెండు నిలువు వరసల నిరూపణగా తిరిగా రాయండి.	
15.	త్రిభుజము వైశాల్యమును కనుగొను సమస్యలో ప్రక్కనున్న పటము గీయబడింది. దీనికి తగు దత్తాంశ సారాంశాలనురాయండి. 	

© SCERT not to be republished