தமிழ்நாடு அரசு

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

தொகுதி 1

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - 2018

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
© SCERT 2018

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

இந்நூலைக் கையாள்வதற்கான வழிகாட்டி

வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்	வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.
கற்றலின் நோக்கங்கள்	மாணவர்கள் ஒவ்வொரு அத்தியாயம் , பாடம் அல்லது ஆண்டு இறுதியில் அடைந்திருக்கவேண்டிய கற்றல் இலக்குகளைக் குறிக்கிறது,
குறிப்பு	பாடத்தின் கூடுதல் கருத்துக்களை தருபவை.
உங்களுக்குத் தெரியுமா?	மாணவர்களின் கணித சிந்தனைகளை வளர்க்கும் வியத்தகு உண்மைகள், கருத்துக்கள் போன்றவை.
பயிற்சி	மாணவர்களின் நினைவாற்றல் ,சிந்தித்தல் மற்றும் புரிதலை மேம்படுத்த பயிற்சி அளித்தல்.
இணையச் செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துதல்.
இணைய இணைப்புகள்	கணினி வழி மூலங்களுக்கான பட்டியல்.
உடனடி பதில் வினைக் குறியீடு	மாணவர்கள் பாடங்கள் தொடர்பான கருத்துக்களை மேலும் அறிந்துகொள்ள மெய்நிகர் கற்றல் உலகத்துக்கு அழைத்து செல்லும் வழி.
இதர கணக்குகள்	மாணவர்களுக்கான கற்றலை மேம்படுத்த கூடுதல் கணக்குகள்.
கலைச் சொற்கள்	கணித தமிழ் வழிச் சொற்களுக்கான ஆங்கில மொழியாக்கம்
பார்வை நூல்கள்	பாடத் தலைப்போடு தொடர்புடைய மேலும் விவரங்களை அறிந்து கொள்வதற்கான துணைநூற்களின் பட்டியல்

பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன்பேசியில், கூகுள் playstore /ஆப்பிள் app store கொண்டு QR Code ஸ்கேனர் செயலியை இலவசமாகப் பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியைத் திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தித் திரையில் தோன்றும் கேமராவை QR Code–இன் அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் திரையில் தோன்றும் உரலியைச் (URL) சொடுக்க, அதன் விளக்கப் பக்கத்திற்குச் செல்லும்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்களுக்கான வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்

வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தில் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியலை ஒரு பாடமாக கொண்ட பிரிவில் பயிலும் மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்கள், தங்களது மேற்படிப்புக்கு, BCA, B.Com மற்றும் B.Sc. புள்ளியியல் ஆகிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம்.

வணிக பிரிவு மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்களுக்கு, வங்கி மற்றும், நிதி நிறுவனங்களிலும் வேலை வாய்ப்புகள் சிறப்பாக உள்ளன. கணினியை ஒரு சிறந்த பாடமாகக் கொண்ட B.Com பிரிவை பெரும்பாலான மாணவர்கள் தேர்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் முறை மேற்படிப்புக்களான CA, ICAI முதலிய படிப்புகளை தேர்ந்தெடுத்து வெற்றி பெறுவதன் மூலம், பட்டயகணக்காளர் (Chartered Accountant) நிறுவனச் செயலர் (Company Secretary) போன்ற சிறந்த பதவிகளை பெற முடியும். மேலும் B.Com பட்டதாரிகள், M.Com, P.h.D மற்றும் M.Phil போன்ற மேற்படிப்பு வகுப்புகளை தொடரலாம். B.Com பட்டதாரிகளுக்கு பெருமளவில் வேலை வாய்ப்புகள் காத்திருக்கின்றன.

பட்டப்படிப்பு முடித்த பிறகு, MBA,MA பொருளியல் MA செயல்முறை மற்றும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி பட்ட மேற்படிப்பு முதலிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம். இவற்றை தவிர, எண்ணற்ற பட்டய படிப்பு, சான்றிதழ் படிப்பு மற்றும் தொழிற் பயிற்சிக் கல்விகள் முதலியனவற்றை மேற்கொள்வதன் மூலம் ஆரம்ப கால வேலை வாய்ப்புகளை பெறலாம்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.

படிப்புகள்	கல்வி நிறுவனங்கள்	மேற்படிப்பிற்கான வாய்ப்புகள்
இளைங்கலை வணிகவியல் (B.Com.) / B.Com (Computer) **இளைங்கலை வியாபார நிர்வாகம்** (B.B.A.), **இளைங்கலை வணிக மேலாண்மை** (B.B.M.), **இளைங்கலை கணிணி பயன்பாடுகள்** (B.C.A.), **இளைங்கலை கலை** (B.A.)	• அனைத்து அரசினர் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரிகள், அரசு நிதி உதவிபெறும் கல்லூரிகள், சுயநிதி கல்லூரிகள் • ஸ்ரீராம் வணிகவியல் கல்லூரி (SRCC), புதுடெல்லி. • கூட்டுவாழ்வு சமுதாய கலை மற்றும் வணிகவியல் கல்லூரி, பூனே (Symbiosis Society's College of Arts & Commerce, Pune). • புனித தூசையப்பர் கல்லூரி, பெங்களூரு	C.A., I.C.W.A, C.S.
இளைங்கலை அறிவியல் புள்ளியியல் (B.Sc Statistics)	• மாநில கல்லூரி சேப்பாக்கம், சென்னை. • சென்னை கிறித்தவ கல்லூரி, தாம்பரம் • லயோலா கல்லூரி, சென்னை • D.R.B.C.C இந்து கல்லூரி பட்டாபிராம், சென்னை.	M.Sc.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த வியாபார நிர்வாகம், வணிகம் மற்றும் சட்ட படிப்புகள் (Five years integrated Course) B.B.A., LLB, B.A., LLB, B.Com., LL.B.	• அனைத்து அரசு சட்ட கல்லூரிகள். • டாக்டர் அம்பேத்கர் சட்ட பல்கலைகழகத்தின் கீழ் இணைக்கப்பட்ட சிறப்பு சட்டக் கல்வி நிறுவனங்கள்	M.L.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த முதுகலை பொருளியல் படிப்புகள் M.A. Economics (Integrated Five Year course) – Admission based on All India Entrance Examination	• சென்னை பொருளியல் கல்லூரி, கோட்டூர்புரம், சென்னை	Ph.D.,
இளங்கலை சமூகப்பணி (B.S.W.)	• சென்னை சமூகப்பணி கல்லூரி, எழும்பூர், சென்னை.	M.S.W

பொருளடக்கம்

1	அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்	1-41
1.1	அணிக்கோவைகள்	1
1.2	அணியின் நேர்மாறு	12
1.3	உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு	28
2	இயற்கணிதம்	42-86
2.1	பகுதிப் பின்னங்கள்	42
2.2	வரிசை மாற்றங்கள்	49
2.3	சேர்வுகள்	61
2.4	கணிதத் தொகுத்தறிதல்	68
2.5	ஈருறுப்புத் தேற்றம்	73
3	பகுமுறை வடிவியல்	87-127
3.1	இயங்குவரை	88
3.2	நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு	90
3.3	இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	97
3.4	வட்டங்கள்	103
3.5	கூம்பு வெட்டு முக வளைவரைகள்	113
4	திரிகோணமிதி	128-161
4.1	திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள்	131
4.2	கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்	136
4.3	உருமாற்று சூத்திரங்கள்	143
4.4	நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள்	150
5	வகை நுண்கணிதம்	162-216
5.1	சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள்	163
5.2	எல்லைகள் மற்றும் வகைக்கெழுக்கள்	178
5.3	வகையிடல் உத்திகள்	196
	விடைகள்	217-225
	கலைச்சொற்கள்	226-229
	துணை நூற் பட்டியல்	230

9X1BNZ

மின்னூல்

9XA7QH

மதிப்பீடு

B147_11_BMAT_TM

இணைய வளங்கள்

பாடத்திட்டம் (தொகுதி – I)

1.	**அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்**	(15 பிரிவேளைகள்)
	அணிக்கோவைகள்: நினைவு கூறுதல் – அணியின் வகைகள் – அணிக்கோவைகள் – சிற்றணிக்கோவைகள் – இணைக்காரணிகள்– அணிக்கோவையின் பண்புகள். **அணியின் நேர்மாறு:** பூச்சியக்கோவை அணி – பூச்சியமற்ற கோவை அணி – சேர்ப்பு அணி – நேர்மாறு அணி – நேரிய சமன்பாடு தொகுப்பின் தீர்வு காணல். **உள்ளீடு–வெளியீடு பகுப்பாய்வு:** ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் நிபந்தனைகள்.	
2.	**இயற்கணிதம்**	(20 பிரிவேளைகள்)
	பகுதிப் பின்னங்கள்: பகுதியில் ஒரு படி காரணிகள் (ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை) – பகுதியில் ஒரு படிக் காரணிகள் (n முறை திரும்பத்திரும்ப வருவது) – ஒரு படி காரணிகளாக, காரணி படுத்தமுடியாத இரு படிக் காரணிகளை உள்ளடக்கிய பகுதி. **வரிசை மாற்றங்கள்:** காரணீயப் பெருக்கம் – எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் – வரிசை மாற்றங்கள் – வட்ட வரிசை மாற்றங்கள். **சேர்வுகள் – கணிதத் தொகுத்தறிதல் – ஈருறுப்புத் தேற்றம்.**	
3.	**பகுமுறை வடிவியல்**	(20 பிரிவேளைகள்)
	இயங்குவரை: இயங்குவரையின் சமன்பாடு. **நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு:** நினைவு கூறுதல் – நேர்க்கோடுகளின் பல்வேறு வடிவங்கள் – இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் – நேர்க்கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு – மூன்று கோடுகளின் ஒருங்கமைப் புள்ளி. **இரட்டை நேர்க்கோடுகள்:** இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு – ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் – ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் – பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு ஓர் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு. **வட்டங்கள்:** மையம், ஆரம் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு – இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல் – வட்டத்தின் பொது வடிவச் சமன்பாடு – தொடுகோட்டின் நீளம் – வட்டத்தின் துணையலகு வடிவம் – தொடுகோடுகள். **கூம்பு வெட்டு முக வளைவரைகள்:** பரவளையம்.	
4.	**திரிகோணமிதி**	(25 பிரிவேளைகள்)
	மீள் பார்வை – **திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள்:** கால் பகுதிகள் – 0^{o} லிருந்து 360^{o} வரை மாறுபடுகின்ற கோணம் θ வின் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் – துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள். **கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்:** கூட்டுக் கோணங்கள் – sine, cosine மற்றும் tangent என்பனவற்றின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் சூத்திரங்கள் – மடங்கு கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள். **உருமாற்று சூத்திரங்கள்:** பெருக்கலை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவமாக மாற்றுதல் – திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தலை பெருக்கலாக மாற்றுதல். **நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள்:** நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பண்புகள்.	
5.	**வகை நுண்கணிதம்**	(25 பிரிவேளைகள்)
	சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள்: சில அடிப்படை கருத்துருக்கள் – சார்பு – சார்பின் வகைப்பாடுகள் – சார்பின் வரைபடம். **எல்லைகள் மற்றும் வகைக்கெழுக்கள்:** எல்லையின் உள்ளமைத்தன்மை – மதிப்பிடமுடியாத வடிவங்கள் மற்றும் எல்லை மதிப்புக் காணல் – தொடர்ச்சி சார்பு – ஒரு புள்ளியில் வகையீடு காணல் – முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல். **வகையிடல் உத்திகள்:** சில திட்டமான முடிவுகள் – வகைக்கெழுக்களுக்கான பொது விதிகள் – தொடர் வகையிடுதல்.	

அத்தியாயம் 1

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- அணி மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வரையறை
- அணிக்கோவைகளின் பண்புகள்
- சேர்ப்பு அணியின் கருத்துரு
- நேர்மாறு அணியின் கருத்துரு
- ஒருங்கமை நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்
- உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு

9XJ3SA

1.1 அணிக்கோவைகள் (Determinants)

அறிமுகம்

செகி கொவா

பழமைவாய்ந்த சீன முறையில் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் மூங்கில் குச்சிகளைக் கொண்டு கணக்கிடும் நோக்கில் சீரமைக்கப்படும் நேரத்தில் செகி கொவா (1683) என்கிற ஜப்பானிய கணிதவியலாளர் அணிக்கோவைகள் பற்றிய கருத்தை உருவாக்கினார் என்று நம்பப்படுகிறது. பின்னர் காட்ஃபிரைட் வில்கெம் வான் லெபனைட்ஸ் என்கிற ஜெர்மானிய கணிதவியலாளர் அணிக் கோவைகளை முறையாக மேம்படுத்தினார். ஆர்தர் கெய்லே (1841) என்பவர் நிகழ்காலத்தில் அல்லது தற்போது பயன்படுத்தப்படுகின்ற செங்குத்துக்கோடு குறியீட்டை அறிமுகப்படுத்தினார். ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதற்கான விதிகளை 1750ஆம் ஆண்டு வெளியிட்டவர் என்று அறியபட்ட கிராமர் என்பவரால் அணிகோவை அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

பத்தாம் வகுப்பில் அணிகள் மற்றும் அதன் இயற்கணித பண்புகள் பற்றி படித்துள்ளோம். மேலும் இயற்கணித சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை அணிவடிவில் எழுதலாம் எனவும் படித்துள்ளோம். (x_1, y_1) (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) உச்சிகளை கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பானது,

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

என நாம் அறிந்துள்ளோம். இவ்வகை அமைப்பினை நினைவுக்கூர்வதில் கடினத்தன்மையைக் குறைக்கும் விதமாக கணிதவியலாளர்கள் இவற்றை அணிக்கோவை அமைப்பில் விவரிக்கும் முறையை உருவாக்கினார்கள். எனவே மேற்கண்ட அமைப்பை

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ என எழுதலாம்.

ஆகையால் ஒரு அணிக்கோவை என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தை எளிய வழியில் எழுத உதவும் அமைப்பு ஆகும். அவைகள் சதுரவடிவில் இரு குத்துக்கோடுகளுக்கிடையே வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதை காண்க. இப்பாடப்பகுதியில் மெய்யெண்களை மூலகங்களாக கொண்ட மூன்று வரிசை வரையுள்ள அணிக்கோவைகளைப் பற்றி படிப்போம். மேலும் அணிக்கோவைகளின் பல்வேறு பண்புகள் (நிரூபணமின்றி) சிற்றணிக்கோவைகள், இணைக்காரணிகள், சேர்ப்பு அணி, சதுர அணியின் நேர்மாறு மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வணிக பயன்பாடு ஆகியவற்றை கற்கலாம்.

முந்தைய வகுப்புகளில் அணிகளைப் பற்றி கற்றுக் கொண்டோம். அணிகள் மற்றும் அவற்றின் செயல்பாடுகள் பற்றி நினைவு கூறலாம்..

1.1.1 நினைவு கூறுதல்

அணி (Matrix)

வரையறை 1.1

உறுப்புகளைச் செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களைக் கொண்டு ஒரு அடைப்புக் குறிக்குள் அமைப்பது அணியாகும்.

அணிகளை A, B, C, ...என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

உதாரணமாக , $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் (Order of a matrix)

ஓர் அணி A இல் m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் இருந்தால் அந்த அணி A இன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் வரிசை 2×3

அணியின் பொதுவடிவம் (General form of matrix)

பொதுவாக $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி A பின்வருமாறு அமையும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2i} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \cdots & a_{mi} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதனை சுருக்கமாக $[a_{ij}]_{mxn}$ $i = 1,2,......m; j = 1,2,....n$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு a_{ij} என்ற உறுப்பு நிரை i மற்றும் நிரல் j – இல் உள்ள உறுப்பு ஆகும்.

அணியின் வகைகள்

நிரை அணி (Row matrix)

ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரை அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக, $A = [\, a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1i} \ldots\ldots\ldots a_{1n}]_{1\times n}$; $B = [1 \quad 2]_{1\,X\,2}$

நிரல் அணி (Column matrix)

ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

குறிப்பு

பூச்சிய அணியின் வரிசை எந்த வரிசையாகவும் அமையலாம்.

பூச்சிய அணி அல்லது இன்மை அணி (சுழி அணி) (Zero matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அவ்வணி பூச்சிய அணி எனப்படும்

உதாரணமாக, $\mathrm{O} = [0]$, $\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

என்பன பூச்சிய அணிகளாகும்.

சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு சதுர அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ வரிசை 2ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 \\ 2 & \frac{3}{5} & -4 \end{bmatrix}$ வரிசை 3ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்.

முக்கோண அணி (Triangular matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் அல்லது கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அவ்வணி முக்கோண அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&0&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&4&7\end{bmatrix}$

குறிப்பு

ஒரு சதுர அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூடுதல் அணியின் சுவடு ஆகும்.

மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 ஐ உடைய மூலைவிட்ட அணியாகும்.

திசையிலி அணி (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் சமமாக இருந்தால் அது திசையிலி அணி ஆகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய திசையிலி அணியாகும்.

அலகு அணி அல்லது சமனி அணி (Unit matrix)

ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் “எண் ஒன்று” எனில் அவ்வணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக, $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2 உடைய அலகு அணியாகும்.

$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய அலகு அணியாகும்.

அணியின் திசையிலி பெருக்கல் (Multiplication of matrix by scalar)

$A=[a_{ij}]$ என்ற அணியின் அனைத்து உறுப்புகளையும் k என்ற திசையிலியால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணி $kA=[ka_{ij}]$ $(i, j$ இன் அனைத்து மதிப்புகளும்).

மாறாக ஓர் அணி Aயை மாறிலி k ஆல் பெருக்குவது என்பது அணி A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் k ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&-2&8\end{bmatrix}$ எனில், $2A=\begin{bmatrix}2&4&8\\6&-4&16\end{bmatrix}$ ஆகும்.

அணியின் எதிர்மறை (Negative of a matrix)

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. A இன் கூட்டல் எதிர்மறை $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ ஆனது அனைத்து உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 7\\ 0 & 5 & 6\end{bmatrix}$ எனில், $-A=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\ 0 & -5 & -6\end{bmatrix}$ ஆகும்.

சம அணிகள் (Equality of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகள்

(i) ஒரே வரிசை உடையனவாகவும்

(ii) அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகவும் இருந்தால் அவை சம அணிகள் எனப்படும்.

அணிகளின் கூட்டலும், கழித்தலும் (Addition and subtraction of matrices)

இரு அணிகள் A, B ஒரே வரிசையாக அமையும்போது மட்டும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது. இவற்றின் கூடுதல் $A + B$ ஆனது A, B இன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுவதாகும். குறியீட்டு முறையில்

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A + B = [a_{ij}+ b_{ij}]_{m\times n}$

இதே போன்று $A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m\times n}+ [- b_{ij}]_{m\times n}= [a_{ij}- b_{ij}]_{m\times n}$ என்பதாகும்.

அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகளில் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B யின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் இவ்வணிகள் பெருக்கத்தக்கவை எனப்படும். அணி A இன் ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளையும் அணி B இன் ஒவ்வொரு நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் பெருக்கி கூட்டுவதன் மூலம் AB என்ற பெருக்கல் அணி கிடைக்கிறது.

$A=[a_{ij}]$ என்பது $m\times p$ வரிசையுடைய அணி மற்றும் $B=[b_{ij}]$ என்பது $p\times n$ வரிசையுடைய அணி எனில் AB யின் பெருக்கல் அணி $C=[c_{ij}]$ என்பது $m\times n$ வரிசையுடைய அணி ஆகும்.

நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose Matrix)

$A=[a_{ij}]$ என்பது $m\times n$ வரிசையுடைய ஒரு அணி என்க. அணி A இன் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். அந்த அணியை A^T என்று குறிக்கலாம். இங்கு A^T இன் வரிசை $n\times m$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}$ எனில் $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

குறிப்பு

மேற்கூறியக் கருத்துகள், மாணவர்கள் நன்கு அறிந்தவை என நம்பப்படுகிறது. நமது தற்போதைய பாடத்திட்டத்தினை கீழ்வரும் பிரிவுகளிலிருந்து தொடங்குவோம்.

வரையறை 1.2

மெய்யெண்கள் அல்லது கலப்பெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி A யுடன் நாம் ஓர் எண்ணை தொடர்புபடுத்த முடியுமானால், இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை என்கிறோம். இதனை $|A|$ அல்லது $\det(A)$ அல்லது Δ எனகுறிக்கலாம்.

சதுர அணி A இன் உறுப்புகளை கொண்டு ஓர் அணிக்கோவையை வடிவமைத்தால் இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை எனலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ எனில் } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.1

மதிப்பிடுக : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)4$$

$$= 8+4 = 12$$

மூன்று அல்லது அதற்கு மேல் வரிசையுடைய அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதற்கு நாம் சிற்றணி மற்றும் இணைகாரணிகளை வரையறுக்க வேண்டும்.

1.1.2 சிற்றணிக்கோவை (Minor)

$|A| = |[a_{ij}]|$ என்பது n வரிசையுடைய அணிக்கோவை என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij} இன் சிற்றணிக்கோவையானது a_{ij} அமைந்த நிரை மற்றும் நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij} யின் சிற்றணிக்கோவையானது M_{ij} எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

1.1.3 இணைக்காரணிகள் (Cofactors)

தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவைகள் இணைக்காரணிகள் ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில்

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ இன் உறுப்புகளான a_{11}, a_{12}, a_{13} இவற்றின் சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) a_{11} இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

a_{11} இன் இணைக்காரணி $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12} இன் இணைக்காரணி $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

a_{13} இன் இணைக்காரணி $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில் உள்ள உறுப்புக்களுக்கு சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{11} = 3$

-2 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{12} = 4$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{21} = -2$

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{22} = 1$

1 இன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 3$

-2 இன் இணைக்காரணி $= A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -4$

4 இன் இணைக்காரணி $= A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = 2$

3 இன் இணைக்காரணி $= A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பின் சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8$

5 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$

0 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

3 இன் இணைக்காரணி $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -5$

1 இன் இணைக்காரணி $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 20$

2 இன் இணைக்காரணி $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = -6$

2 இன் இணைக்காரணி $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = 2$

2 இன் இணைக்காரணி $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = -8$

5 இன் இணைக்காரணி $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = 1$

4 இன் இணைக்காரணி $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = 1$

1 இன் இணைக்காரணி $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -11$

0 இன் இணைக்காரணி $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 4$

ஒரு அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் மதிப்பிடலாம்.

உதாரணமாக,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்க.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ (அல்லது)}$$

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \text{ (}R_1\text{ வழியாக விரிவுபடுத்த)}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \text{ (அல்லது)}$$

$$a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} \quad \text{(}C_1\text{ வழியாக விரிவுபடுத்த)}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

மதிப்பு காண்க : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ (1இன் சிற்றணிக்கோவை)} - 2 \text{ (2 இன் சிற்றணிக்கோவை)} + 4\text{(4 இன் சிற்றணிக்கோவை)}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 - 52 = -52.$$

1.1.4 அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (நிரூபணமின்றி)

1. ஓர் அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல்களை பரிமாற்றம் செய்தால், அதன் மதிப்பு மாறாது.
2. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) தமக்குள் பரிமாற்றம் செய்யப்படின் அணிக்கோவை மதிப்பின் குறிமட்டுமே மாறும்.
3. ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.
4. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு மாறிலி k ஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படும்.
5. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) விகித சமத்தில் இருப்பின் அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.
6. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்கும் எனில் அவ்வணிக்கோவையை அதே வரிசையுடைய இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும்.
7. ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையாக பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x^2-(x-1)(x+1)$$

$$= x^2-(x^2-1)$$

$$= x^2-x^2+1 = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 1.7

தீர்க்க $\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 1, x = 2, x = 3$$

குறிப்பு

முக்காண அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு என்பது அணியின் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad (\because R_2 \equiv R_3)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-b & (a-b)(a+b) \\ 0 & b-c & (b-c)(b+c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[0-0+\{b+c-(a+b)\}]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவைகளின் அனைத்து உறுப்புகளின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளைக் காண்க.

   (i) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு காண்க

3. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில் $|AB|$ யைக் காண்க.

5. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & x \\ -x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு காண்க

7. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & bc & b+c \\ \frac{1}{b} & ca & c+a \\ \frac{1}{c} & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

8. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

1.2 அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

1.2.1 பூச்சியக்கோவை அணி (Singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.

1.2.2 பூச்சியமற்ற கோவை அணி (Non–singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ஐ பூச்சியக்கோவை அணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$\therefore$ A என்பது பூச்சிய கோவை அணி ஆகும்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

A மற்றும் B என்பன சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் AB மற்றும் BA முறையே சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகளாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ஐ பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 8 = 16$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகும்

1.2.3 சேர்ப்பு அணி (Adjoint of matrix)

A என்ற அணியின் இணைக்காரணிகளால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் சேர்ப்பு அணி ஆகும். இதனை adj A என எழுதலாம்

அதாவது adj $A = [A_{ij}]^T$. $[A_{ij}]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணி அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு

(i) $|adjA| = |A|^{n-1}$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(ii) $|kA| = k^n|A|$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iii) $adj(kA) = k^{n-1}adjA$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iv) $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I$

(v) $AdjI = I$, I என்பது ஓர் அலகு அணி.

(vi) adj (AB) = (adj B)(adj A)

(vii) $|AB| = |A||B|$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க

தீர்வு

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} \quad = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} \quad = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0-(-4) = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} \quad = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-3)) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} \quad = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-12 = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} \quad = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-8) = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} \quad = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-3) = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} \quad = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0 = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} \quad = = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & -12 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.4 நேர்மாறு அணி

A என்பது வரிசை n உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி என்க. $AB=BA=I$ (I என்பது n வரிசை அலகு அணி) எனுமாறு ஒரு அணி B ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.

இப்போது, $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A \quad = |A|\,\text{I}$

$$\Longrightarrow \text{A}\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) \quad = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$$

$$\Longrightarrow \qquad AB \quad = BA \qquad = I$$ இங்கு $B = \frac{1}{|A|}adjA$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$$

குறிப்பு

(i) B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும்

அதாவது $B = A^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(iii) ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது

(iv) A^{-1} ன் வரிசையும், A ன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

(v) $I^{-1} = I$, இங்கு I என்பது அலகு அணியாகும்.

(vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (vii) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

$$A^2 = I \Leftrightarrow A = A^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க..

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \neq 0$$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

If $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

A என்பது பூச்சிய கோவை அணி. எனவே A^{-1} யைக் காணஇயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15-20) - 4(6-8) + 4(10-10)$$

$$= 2(-5) - 4(-2) + 4(0)$$

$$= -10 + 8 + 0 \quad = -2 \neq 0$$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$A_{11} = -5;\ A_{21} = 8; A_{31} = -4$$

$$A_{12} = 2; A_{22} = -2; A_{32} = 0$$

$$A_{13} = 0; A_{23} = -2; A_{33} = 2$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A \quad = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ எனில் $A^2-kA+I_2=O$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் k ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 12\\4 & 7\end{bmatrix}$$

தரவு $A^2-kA+I_2=O$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}7 & 12\\4 & 7\end{bmatrix}-k\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}7-2k+1 & 12-3k+0\\4-k+0 & 7-2k+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}8-2k & 12-3k\\4-k & 8-2k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4-k=0$$

$$\Rightarrow k=4.$$

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 4-3=1\neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$$

$$=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.18

If $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ எனக் காட்டுக

தீர்வு

தரவு $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$|B|=\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}=0+1=1\neq 0$$

B^{-1}யைக் காணஇயலும்.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-1\neq 0$$

$(AB)^{-1}$யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj}(AB)=\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}adj(AB)$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\text{adj } A=\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj B$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} = \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$AB = BA = \mathrm{I}$$

ஆகையால் A மற்றும் B அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் சேர்ப்பு அணி காண்க.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் $A(adj\ A) = |A|\ I$ என்பதை சரிபார்க்க, மேலும் A^{-1} காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணி காண்க.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $adj\ (AB) = (adj\ B)(adj\ A)$ என்பதை சரிபார்க்க

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், $(adj\ A)A = O$ எனக் காட்டுக.

6. If $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், A இன் நேர்மாறு அணி A எனக் காட்டுக.

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A ஐக் காண்க.

8. $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் எனக் காட்டுக.

9. $A=\begin{bmatrix}3&7\\2&5\end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix}6&8\\7&9\end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ என்பதை சரிபார்க்க.

10. $\begin{bmatrix}1&1&3\\2&\lambda&4\\9&7&11\end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இல்லை எனில் λ இன் மதிப்பு காண்க.

11. $X=\begin{bmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&p&q\end{bmatrix}$ மற்றும், $Y=X^{-1}$ எனில் p,q ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

1.2.5 நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் நேரிய சமன்பாடு தொகுப்பின் தீர்வு காணல்

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை மதிப்பிட வேண்டிய n மாறிகள் என்க. இம் மாறிகளில் அமைந்த அசமபடித்தான n நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

இதனை $$\begin{bmatrix}a_{11}\,a_{12}\ldots.a_{1n}\\a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\.\\.\\b_m\end{bmatrix}$$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம். இவ்வாறாக $AX=B$ ... (1) என்கிற அணி சமன்பாட்டை அடைகிறோம்.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\,a_{12}\ldots..a_{1n}\\a_{21}\,a_{22}\ldots..a_{2n}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}\,a_{m2}\ldots.a_{mn}\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{bmatrix}\text{ மற்றும் } B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\.\\.\\b_m\end{bmatrix}$$

சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$X=A^{-1}B$$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க :

$$2x + 5y = 1$$

$$3x + 2y = 7$$

தீர்வு

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 3, \quad y = -1.$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:

$3x - 2y + 3z = 8;\ 2x + y - z = 1;\ 4x - 3y + 2z = 4$

தீர்வு

தரவு $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

இதனை $AX = B$ என்று எழுதலாம்

$$X = A^{-1}B$$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -17 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = -1 \qquad A_{12} = -8 \qquad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = -6 \qquad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1 \qquad A_{32} = 9 \qquad A_{33} = 7$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -5 & -6 & 1 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = 2$ மற்றும் $z = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

4 கிலோ வெங்காயம், 3 கிலோ கோதுமை மற்றும் 2 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹320, 2 கிலோ வெங்காயம், 4 கிலோ கோதுமை, 6 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹560, 6 கிலோ வெங்காயம், 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 3 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹380 எனில், நேர்மாறு அணி முறையில் ஒரு கிலோவிற்கான பொருள்களின் விலையை காண்க.

தீர்வு

ஒரு கிலோ வெங்காயம், கோதுமை, அரிசியின் விலைகள் முறையே x, y, z என்க.

$$4x + 3y + 2z = 320$$

$$2x + 4y + 6z = 560$$

$$6x + 2y + 3z = 380.$$

இதனை

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$$AX = B$$

இங்கு, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = 0 \qquad A_{12} = 30 \qquad A_{13} = -20$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = 0 \qquad A_{23} = 10$

$A_{31} = 10 \qquad A_{32} = -20 \qquad A_{33} = 10$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 30 & -20 \\ -5 & 0 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 56 \\ 38 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 - 280 + 380 \\ 960 + 0 - 760 \\ -640 + 560 + 380 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$x = 20, \; y = 40, \; z = 60.$

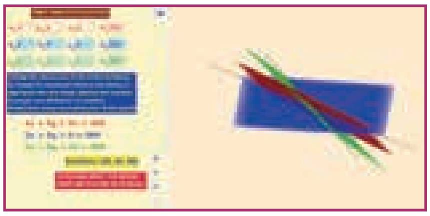
ஒரு கிலோ வெங்காயத்தின் விலை = ₹20.

ஒரு கிலோ கோதுமையின் விலை = ₹40

ஒரு கிலோ அரிசியின் விலை = ₹60

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

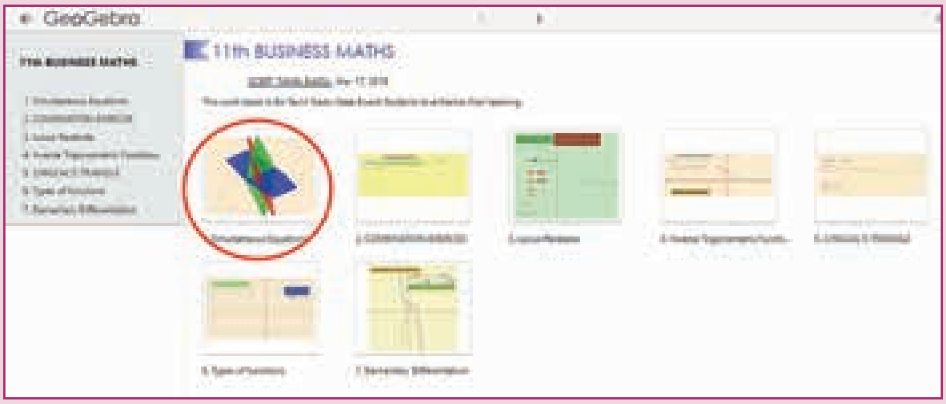
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHS" எனும் GeoGebra பணிப் புத்தகத்தில் "Simultaneous Equations" க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

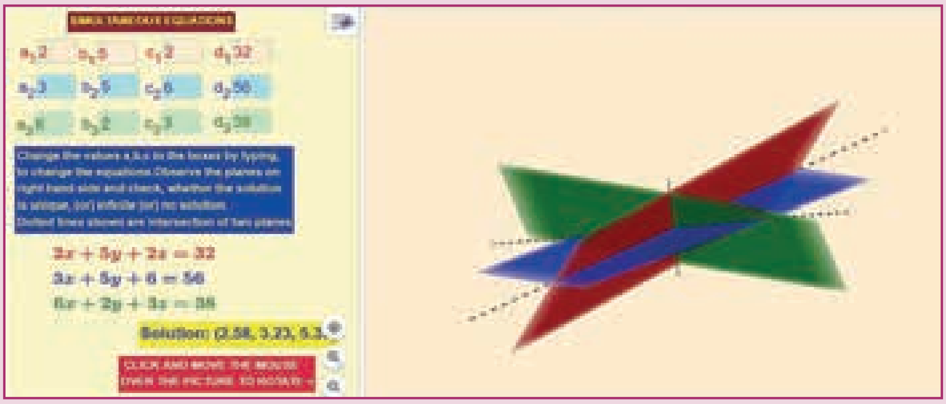
படி - 2

தேர்வுப்பெட்டியில் தேவையான ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளுக்கான அளவுருக்களை உள்ளீட்டுப்பெட்டியில் தட்டச்சு செய்யவும். நீங்களாக தீர்வைக் கண்டுபிடித்துக் கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். வலப் பக்கத்தில் சமன்பாடுகளுக்கான தளங்களும் அவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியும்(தீர்வு) காணப்படும். மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டாவிடில் தீர்வு இல்லை என்று பொருள் படும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 1.3

1. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க : $2x + 3y - 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$

2. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க :

   (i) $3x - y + 2z = 13$; $2x + y - z = 3$; $x + 3y - 5z = -8$

   (ii) $x - y + 2z = 3$; $2x + z = 1$; $3x + 2y + z = 4$.

   (iii) $2x - z = 0$; $5x + y = 4$; $y + 3z = 5$

3. இரவி என்கிற விற்பனையாளர் வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களை 2009 ஆண்டின் சனவரி, பிப்ரவரி மற்றும் மார்ச் மாதங்களில் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு (ரூபாயில்)
	A	B	C	
சனவரி	9	10	2	800
பிப்ரவரி	15	5	4	900
மார்ச்	6	10	3	850

   A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களுக்கான தரகு வீதத்தை நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

4. A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களின் விலையை ஒரு அலகிற்கு முறையே x, y மற்றும் z என்க. P என்பவர் 4 அலகு C யை வாங்குகிறார் 3 அலகு A மற்றும் 5 அலகு B யை விற்பனை செய்கிறார். Q என்பவர் 3 அலகு B யை வாங்குகிறார். மேலும் 2 அலகு A யையும் 1 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். R என்பவர் 1 அலகு A யை வாங்குகிறார். மேலும் 4 அலகு B யையும் 6 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். மேற்கண்டவற்றில் P,Q,R என்பவர்கள் முறையே ஈட்டியத் தொகை ₹6,000, ₹5,000, ₹13,000 எனில் A,B மற்றும் C ன் ஒரு அலகிற்கான விலையைக் நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

5. மூன்று எண்களின் கூடுதல் 20. முதல் எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கி, இரண்டாவது எண்ணைக் கூட்டி, மூன்றாவது எண்ணைக் கழிக்க, கிடைக்கும் மதிப்பு 23 ஆகும். முதல் எண்ணை மூன்றால் பெருக்கி வரும் மதிப்புடன் இரண்டு மற்றும் மூன்றாம் எண்களைக் கூட்ட கிடைக்கும் மதிப்பு 46 எனில் அந்த எண்களை நேர்மாறு அணிமுறையில் காண்க.

6. ஒரு அலுவலகத்தில் மூன்று வாரங்களில் செலவுகள் செய்ததற்கான விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. மூன்று வாரங்களுக்கு வெவ்வேறு தரப்பினரின் ஊதியங்கள் மாறாமல் இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தரப்பினரின் ஊதியத்தையும் நேர்மாறு அணி முறையில் கணக்கிடுக.

வாரங்கள்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை			வாரத்திற்கு மொத்த செலவு (₹)
	A	B	C	
1 வது வாரம்	4	2	3	4900
2 வது வாரம்	3	3	2	4500
3 வது வாரம்	4	3	4	5800

1.3 உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு (Input – Output Analysis)

பேராசிரியர் வேஸ்லி W. லியோன்டிப் என்பவரால் உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்ற உத்தி கண்டறியப்பட்டது. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்பது பொருளாதாரப் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான இணைச் சார்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பொருளாதார பகுப்பாய்வு அமைப்பாகும். இந்த முறையானது பெரும்பாலும் நேரிடை அல்லது எதிரிடை பொருளாதார அதிர்வுகளின் விளைவுகளை கணக்கிட பயன்படுகிறது. மேலும் பொருளாதாரம் முழுவதிலும் ஏற்படகூடிய சிற்றலை விளைவுகளை பகுப்பாய்வு செய்ய பயன்படுகிறது.

உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு உள்ளீடு–வெளியீடு அட்டவணைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். பொருளாதார கட்டமைப்பில் உள்ள தொழிற்சாலைகளுக்கு சுழற்சி முறையில் அளிக்கப்படும் விவரங்கள் நிரை மற்றும் நிரல்களாக அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரல்களின் தலைப்பில் தொழிற்சாலைகள் வகைப்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள விவரம் தொழிற்சாலை உற்பத்தியில் பயன்படுத்தக் கூடிய உள்ளீடுகளின் அளவினை தொடர்புப்படுத்துகிறது. உதாரணத்திற்கு மோட்டார் உற்பத்தியில், நிரல், மோட்டார் கட்டமைப்பிற்கு தேவையான வளங்களை குறிக்கிறது. (அதாவது இரும்பு, அலுமினியம், பிளாஸ்டிக், மின்னணுக்கள் மற்றும் பல) உள்ளீடு மற்றும் வெளியீடு மாதிரிகள் ஒரு ரூபாய் முதலீடு அல்லது உற்பத்திக்கு தேவையான உழைப்பின் அளவை குறிப்பதற்குத் தனியாக அட்டவணைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

A_1 மற்றும் A_2 என்ற இரு தொழிற்சாகைகளைக் கொண்ட எளிமையான பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஒன்றை கருதுவோம். அந்த தொழிற்சாலைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே விதமான பொருளை மட்டுமே உற்பத்திச் செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் தனது செயல்பாட்டிற்கு, தன் உற்பத்தியில் ஒரு பகுதியையும், ஏனையவற்றிற்கு மற்ற தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியையும் பயன்படுத்திக் கொள்கிறது. இவ்விதமாக அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்து செயல்படுகின்றன. மேலும் உற்பத்தி முழுவதும் நுகரப்படுவதாகக் கொள்வோம். அதாவது ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையில் மொத்த உற்பத்தியும் அதன் தேவையும், மற்ற தொழிற்சாலைகளின் தேவையையும், வெளியாரின் தேவை அதாவது இறுதித் தேவையையும் சரியாக நிறைவு செய்யுமாறு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு மாறாதிருக்கும் போது இரு தொழிற்சாலைகளின் தற்போதைய உற்பத்தி அளவுகளின் விவரங்கள் அடிப்படையில், வெளியாரின் தேவையின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றபடி உற்பத்தி அளவுகள் எந்த அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் காணுவதே நமது நோக்கமாகும்.

a_{ij} என்பது A_j ஆல் பயன்படுத்தப்படும் A_i இன் உற்பத்தியின் ரூபாய் மதிப்பு என்க. இதில் $i, j = 1, 2$

x_1 மற்றும் x_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் தற்போதைய உற்பத்திகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

d_1 மற்றும் d_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் உற்பத்திக்கான இறுதித் தேவைகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

இவற்றின் வாயிலாக நாம் அமைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$a_{11} + a_{12} + d_1 = x_1; \qquad a_{21} + a_{22} + d_2 = x_2 \qquad \ldots (1)$$

மேலும் $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{x_j}$ $i, j = 1, 2$ என்க

அதாவது $b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1}$; $b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2}$; $b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1}$; $b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2}$

எனவே சமன்பாடுகள் (1) யை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + d_1 = x_1 \qquad b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + d_2 = x_2$$

இவற்றைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(1 - b_{11})x_1 - b_{12}x_2 = d_1$$

$$-b_{21}x_1 + (1 - b_{22})x_2 = d_2$$

இவற்றின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 - b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$(1 - B)X = D$ ஆகும்

இங்கு $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{X = (I - B)^{-1} D}$$

இங்கு அணி B என்பது தொழில்நுட்ப அணி [Technology Matrix] எனப்படும்.

1.3.1 ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள்

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இருக்க ஹாக்கின்–சைமன் என்பவர்களது கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்.

B என்பது தொழில்நுட்ப அணி எனில்,

(i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

இரு தொழிற்சாலைகளையுடைய பொருளாதார அமைப்பின் தொழில்நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி அது செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$= (0.2)(0.3)-(-0.2)(-0.9)$$

$$= 0.06 - 0.18$$

$$= -0.12 < 0$$

$|I - B|$ என்பது குறை எண்.

∴ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் [Hawkins-simon] நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படவில்லை.. எனவே பொருளாதாரக் கட்டமைப்புக்கு செயல்படும் வகையில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

2016 ஆம் ஆண்டின் இரண்டு தொழிற்சாலைகளின் பரிவர்த்தனைகளின், பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	1	2	இறுதி தேவை	மொத்த உற்பத்தி
1	500	1,600	400	2,500
2	1,750	1,600	4,650	8,000
தொழிலாளர்கள்	250	4,800	-	-

தொழில்நுட்ப அணியைக் கண்டுபிடித்து, இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள் படி செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என சரிபார்க்க.

தீர்வு

$a_{11} = 500 \qquad a_{12} = 1600 \qquad x_1 = 2500$

$a_{21} = 1750 \qquad a_{22} = 1600 \qquad x_2 = 8000$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{500}{2500} = 0.20; \qquad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{1750}{2500} = 0.70; \qquad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

தொழில்நுட்ப அணி $= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$ முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது

இப்பொழுது, $|I - B| = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{vmatrix}$

$= (0.8)(0.8) - (-0.7)(-0.2)$

$= 0.64 - 0.14$

$= 0.50 > 0$

$|I - B|$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I-B|$ என்பது மிகை. ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkins-simon) இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

ஒரு பொருளாதார அமைப்பில் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகள் உள்ளன. அவற்றின் தேவை மற்றும் அளிப்பு நிலவரம் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர் பிரிவு	உபயோகிப்போர் பிரிவு P_1	P_2	இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
P_1	10	25	15	50
P_2	20	30	10	60

P_1 ன் இறுதித் தேவையானது 35க்கும் P_2 ன் இறுதித் தேவை 42 க்கும் மாறும்போது உற்பத்திகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$a_{11} = 10 \qquad a_{12} = 25 \qquad x_1 = 50$

$a_{21} = 20 \qquad a_{22} = 30 \qquad x_2 = 60$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

தொழில்நுட்ப அணி, $$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$, முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது.

$$|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{30} > 0$$

$(I - B)$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I - B|$ யும் மிகையாக உள்ளது. ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் இரு நிபந்தைனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளன. எனவே பொருளாதார கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$adj\ (I–B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|}adj(I-B)$$

($|I-B| \neq 0$, என்பதால் $(I-B)^{-1}$ கிடைக்கப்பெறும்)

$$= \frac{1}{\frac{7}{30}} adj(I-B)$$

$$= \frac{30}{7}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

தீர்வு $= X = (I-B)^{-1}D$, இங்கு $D = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{12}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 204 \end{bmatrix}$$

P_1 ன் உற்பத்தி ₹150 கோடியாகவும், P_2 –ன் உற்பத்தி ₹204 கோடியாகவும் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

ஒரு பொருளாதார கட்டமைப்பில் நிலக்கரி மற்றும் இரும்பு உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. இரண்டு பொருட்களும் ஒவ்வொன்றின் உற்பத்தியில் இடைஉள்ளீடாக பயன்படுகிறது. ஒரு டன் இரும்பு உற்பத்திக்கு 0.4 டன் இரும்பு மற்றும் 0.7 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. இவ்வாறே ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்திக்கு 0.1 டன் இரும்பு மற்றும் 0.6 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. எந்த ஒரு உள்ளீடு மூலதனமும் தேவைப்படவில்லை. இந்த அமைப்பு செயல்படும் நிலையில் உள்ளதாக நீங்கள் கருதுகிறீர்களா? ஒரு டன் இரும்பு மற்றும் ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் வேலை நாட்கள் முறையே 5 மற்றும் 2. பொருளாதார கட்டமைப்பில் 100 டன் நிலக்கரியும் 50 டன் இரும்பும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் எனில் மொத்த உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் தொழிலாளர் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

	இரும்பு	நிலக்கரி	இறுதி தேவை
இரும்பு	0.4	0.1	50
நிலக்கரி	0.7	0.6	100
தொழிலாளர் நாட்கள்	5	2	-

தொழில்நுட்ப அணி $B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$I-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$|I-B| = \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{vmatrix}$$

$$= (0.6)(0.4)-(-0.7)(-0.1)$$

$$= 0.24 - 0.07 = 0.17$$

ஹாக்கின்ஸ்–சைமனின் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$\text{adj } (I-B) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|} adj(I-B)$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$X = (I-B)^{-1}\text{D}$, இங்கு $\text{D} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 30 \\ 95 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 176.5 \\ 558.8 \end{bmatrix}$$

இரும்பு வெளியீடு = 176.5 டன்கள்

நிலக்கரி வெளியீடு = 558.8 டன்கள்

மொத்த தொழிலாளர்களின் வேலை நாட்கள்

= 5(இரும்பு வெளியீடு) + 2(நிலக்கரி வெளியீடு)

$= 5(176.5) + 2(558.8)$

$= 882.5 + 1117.6 = 2000.1$

$\simeq$ 2000 தொழிலாளர் நாட்கள்.

பயிற்சி 1.4

1. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.41 & 0.33 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானதா என சரிபார்க்க.

2. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானாதா என சரிபார்க்க

3. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 \\ 0.40 & 0.67 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு உள்ளதா என ஆராய்க.

4. A மற்றும் B ஆகிய இரு பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது 0.4 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் A உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. அதேபோன்று 0.1 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் B உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. தொழில் நுட்ப அணியை எழுதவும். 68 டன்கள் A மற்றும் 10.2 டன்கள் B ஆகியவை தேவைப்படும் எனில் இரண்டையும் உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவையான மொத்த அளவு காண்க.

5. இரு தொழிற்சாலைகளுக்கிடையே உள்ள உற்பத்தி பரிமாற்றம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தி பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த வெளியீடு
	X	Y		
X	30	40	50	120
Y	20	10	30	60

தொழில் நுட்ப அணியை கண்டுபிடிக்க மற்றும் ஹாக்கின் சைமன் நிபந்தனைகளின்படி அமைப்பின் சாத்தியத்தை சோதிக்கவும், உள் தேவை மாற்றங்கள் முறையே 80 மற்றும் 40 அலகு எனில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் புது தேவையை பூர்த்தி செய்வதற்கான மொத்த வெளியீடு என்ன?

6. இரு பொருளாதார பிரிவிற்கான பரிவர்த்தனை அணி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவு	விற்பனை		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	1	2		
1	4	3	13	20
2	5	4	3	12

(i) தொழில் நுட்ப அணியைக் எழுதுக

(ii) பிரிவு 1 ன் இறுதித் தேவையானது 23 அலகுகள் அதிகரிக்கும் போது உற்பத்திகளைக் காண்க.

7. ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பரிமாற்றத்தின் இரு பிரிவு X மற்றும் Y கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்திப் பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	X	Y		
X	15	10	10	35
Y	20	30	15	65

X ன் உள்நாட்டு தேவை 12 க்கும் Y ன் உள்நாட்டு தேவை 18 க்கும் மாறும் போது மொத்த உற்பத்தி காண்க.

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ எனில் x ன் மதிப்புகள் காண்க

(a) 0, −1 (b) 0, 1 (c) −1, 1 (d) −1, −1

2. $\begin{vmatrix} 2x+y & x & y \\ 2y+z & y & z \\ 2z+x & z & x \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) $x\,y\,z$ (b) $x + y + z$ (c) $2x + 2y + 2z$ (d) 0

3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ இல் – 7 இன் இணைக் காரணி

(a) –18 (b) 18 (c) –7 (d) 7

4. If $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ எனில், $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு

(a) Δ (b) $-\Delta$ (c) 3Δ (d) -3Δ

5. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}^2$ என்ற அணிக் கோவையின் மதிப்பு

(a) abc (b) 0 (c) $a^2\,b^2\,c^2$ (d) $-abc$

6. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|kA|$ என்பது

(a) $k|A|$ (b) $-k|A|$ (c) $k^3|A|$ (d) $-k^3|A|$

7. $adj(AB) =$

(a) $adjA\ adjB$ (b) $adjA^T\ adjB^T$ (c) $adjB\ adjA$ (d) $adjB^T\ adjA^T$

8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு

(a) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (b) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (c) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (d) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ மேலும் $ad - bc \neq 0$ எனில், A^{-1} என்பது

(a) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$

10. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வாய்ப்பிற்கான ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 2

11. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) சர். பிரான்சிஸ் கால்டன் (b) பிஷர்

(c) பேராசிரியர் வேஸ்லி. W. லியோன்டிப் (d) ஆர்தர் கேய்லி

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளில் எதற்கு நேர்மாறு அணி இல்லை?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணி

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ எனில் $A(adjA)$ என்பது

(a) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. A, B என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது தவறு?

(a) $A^2 = I \Rightarrow A^{-1} = A$ (b) $I^{-1} = I$

(c) If $AX = B$ எனில், $X = B^{-1}A$

(d) A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|adj\ A| = |A|^2$

16. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4x & 4y & 4z \\ -3x & -3y & -3z \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) 5 (b) 4 (c) 0 (d) 3

17. நேர்மாறு அணி உடைய வரிசை 2 கொண்ட அணி A எனில், $det(A^{-1})$ என்பது

(a) d t(A) (b) $\frac{1}{det(A)}$ (c) 1 (d) 0

18. A என்பது 3×3 வரிசை உடைய அணி மற்றும் $|A| = 4$ எனில், $|A^{-1}|$ என்பது

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{16}$ (c) 2 (d) 4

19. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி மற்றும் $|A| = 3$ எனில், $|adjA|$ என்பது

(a) 81 (b) 27 (c) 3 (d) 9

20. $\begin{vmatrix} x & x^2 - yz & 1 \\ y & y^2 - zx & 1 \\ x & z^2 - xy & 1 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) $-xyz$

21. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $|2A|$ என்பது

(a) $4\cos 2\theta$ (b) 4 (c) 2 (d) 1

22. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ மற்றும் A_{ij} என்பது a_{ij}, இன் இணைக்காரணி எனில் Δ ன் மதிப்பு

(a) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (b) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(c) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (d) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

23. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$ எனில் x ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-5}{6}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{-16}{5}$ (d) $\frac{16}{5}$

24. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ எனில், $\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு

(a) –5 (b) –125 (c) –25 (d) 0

25. ஓர் அணிக் கோவையில் மூன்று நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வ சமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 3

இதரக் கணக்குகள்

1. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

2. மதிப்பிடுக $\begin{vmatrix} 10041 & 10042 & 10043 \\ 10045 & 10046 & 10047 \\ 10049 & 10050 & 10051 \end{vmatrix}$

3. விரிவுபடுத்தாமல் அணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் என நிறுவுக $\begin{vmatrix} 5 & 5^2 & 5^3 \\ 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^4 & 5^5 & 5^6 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$ என நிறுவுக.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $A(adjA) = (adjA)(A) = |A|I_3$ என சரிபார்க்க.

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ என நிறுவுக மற்றும் A^{-1} காண்க.

8. நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க : $x - y + z = 2, 2x - y = 0, 2y - z = 1$.

9. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் மொத்த விலை ₹70. ஒரு கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹70. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹170. எனில் நேர்மாறு அணி முறையில் ஒவ்வொரு பொருட்களின் ஒரு கிலோவிற்கான விலையைக் காண்க.

10. A மற்றும் B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரங்கள் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	A	B		
A	50	75	75	200
B	100	50	50	200

A ன் இறுதித் தேவை 300 ஆகவும் B இன் இறுதித் தேவை 600 ஆகவும் மாறும்போது அவற்றின் உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க

தொகுப்புரை

- ஒரு சதுர அணிக்கு தொடர்புடைய அணிக்கோவையின் மதிப்பு ஓர் எண்ணாக அமையும்.
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக் கோவை மதிப்பு $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$
- A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவை என்பது, Aயிலிருந்து a_{ij} உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுவித்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். இதனை M_{ij} எனக் குறிப்போம்.
- தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவை இணைக்காரணி ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில் $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ எனில்,

  $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ அல்லது $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$
- $\text{adj } A = [A_{ij}]^T$ இங்கு $[A_{ij}]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணிகளின் அணி.
- $|adjA| = |A|^{n-1}$, இங்கு n என்பது A என்ற அணியின் வரிசை.
- $A(adjA) = (adjA)(A) = |A| I$.
- $adjI = I$, I என்பது அலகு அணி ஆகும்.
- $\text{adj}(AB) = (adj\ B)(adj\ A)$.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

- A என்பது n ஆம் வரிசை பூச்சியமற்றக்கோவை அணி என்க. $AB = BA = I$ எனுமாறு ஒரு அணி B ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.
- A இன் நேர்மாறு $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$.
- ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkkins - Simon) நிபந்தனைகளின்படி உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என உறுதிப்படுத்த
  (i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.
  (ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

கலைச்சொற்கள்	
அணிக்கோவை	Determinant
இணைக் காரணி	Cofactor
உள்ளீடு	Input
சிற்றணிக் கோவைகள்	Minors
சேர்ப்பு அணி	Adjoint Matrix
திசையிலி	Scalar
நிரை நிரல் மாற்று அணி	Transpose of a Matrix
நேர்மாறு அணி	Inverse Matrix
பகுப்பாய்வு	Analysis
பூச்சியக் கோவை அணி	Singular Matrix
பூச்சியமற்றக் கோவை அணி	Non-Singular Matrix
முக்கோண அணி	Triangular Matrix
மூலை விட்ட அணி	Digonal Matrix
வெளியீடு	Output

அத்தியாயம் 2

இயற்கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- பகுதி பின்னங்களின் வரையறை
- பகுதி பின்னங்களை பிரித்தலின் பல்வேறு உத்திகள்.
- வார்த்தைகள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான வரிசை மாற்றங்கள்.
- குழுக்கள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான சேர்வு
- வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகள் ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான வேறுபாடு
- கணிதத் தொகுத்தறிதலின் கொள்கை மற்றும் கருத்துருக்கள்.
- ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தின் உத்திகள்.

9Y2UVK

முன்னுரை

அல்–குவாரிஷ்மி

இயற்கணிதம் என்பது கணித கருத்துருக்களை ஒருங்கிணைப்பதற்கு பயன்படக் கூடிய முக்கியமான கணித கூற்றாகும். இயற்கணிதம் என்பது எண்களோடு தொடர்புடைய வடிவியல் மற்றும் தரவு பகுப்பாய்வோடு கூடிய செயல்கள் மீது உருவாக்கப்பட்டிருக்கிறது. "Algebra" என்பது "al-Jabr" என்ற அரேபிய வார்த்தையிலிருந்து தருவிக்கப்பட்டதாகும். "அல்–குவாரிஷ்மி " (Al-Khwarizm) என்ற அரபு கணிதவியலாளர் இயற்கணிதத்தின் தந்தை என்று பாரம்பரியமாக அறியப்படுகிறார். ஏதாவது ஒரு சமதள உருவம் மற்றும் திண்மம் ஆகியவற்றின் சுற்றளவு, பரப்பளவு மற்றும் கனஅளவு ஆகியவற்றை கண்டுபிடிப்பதற்கு இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.

2.1 பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions)

விகிதமுறு கோவை (Rational Expression)

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$, $[q(x) \neq 0]$ என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படும் கோவை விகிதமுறு கோவை எனப்படும்.

ஒரு விகிதமுறு கோவையில் தொகுதியின் படியானது, பகுதியின் படியை விட குறைவாக இருந்தால், அது தகு பின்னம் என்று அழைக்கப்படும். தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால், அது தகாப் பின்னம் என்றழைக்கப்படும்.

ஒரு தகா பின்னத்தை பல்லுருப்பு கோவை மற்றும் தகு பின்னம் ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஆக விவரிக்க முடியும்.

அதாவது, $$\frac{p(x)}{q(x)} = f(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

எடுத்துக்காட்டாக, $$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = 1-\frac{x}{x^2+2x+1}$$

பகுதிப் பின்னங்கள் – (Partial Fractions)

$\frac{3}{x-1}$ மற்றும் $\frac{2}{x-2}$ என்ற பின்னங்களை கூடுதல் அல்லது கழித்தல் விகிதங்களின் மூலம் ஒரே ஒரு பின்னமாக மாற்றி எழுதலாம்.

i.e., $$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2} = \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}$$

ஆகவே, $$\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}$$

ஒரு பின்னத்தினை இரண்டு அல்லது மூன்று எளிய பின்னங்களின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் அமைப்பில் எழுதும் முறையே பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் எனப்படும்.

பொதுவாக $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ என்பன x ல் அமைந்த இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில் $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற விகிதமுறு கோவையினை சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு எளிய பின்னங்களின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாக மாற்றி எழுதும் முறைக்கு பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல் என்று பெயர்.

2.1.1 ஒரு படி காரணிகள் (ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை)

$\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற பின்னத்தில் பகுதி $q(x)$ ஆனது மீண்டும் வராத ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கு தொகையாக, $(ax+b)(cx+d)$ என்ற வடிவத்தில் இருந்தால் அவற்றினை $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$ என்று பிரித்து எழுதலாம். இங்கு A மற்றும் B யின் மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

உதாரணமாக $\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ என்பனவற்றில் A, B மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு

$$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ என்க

இருபுறமும் $(x-1)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$1 = A(x+1)+B(x-1) \qquad \ldots (1)$$

$x=1$ எனில், $\quad 1 = A(2)$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

$x=-1$ எனில், $\quad 1 = A(0)+B(-2)$

$$\therefore B = -\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$\dfrac{7x-1}{x^2-5x+6}$ ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

$\dfrac{7x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{(x-2)} + \dfrac{B}{(x-3)}$ என்க $\qquad \ldots(1)$

இருபுறமும் $(x-2)(x-3)$, ஆல் பெருக்க

$$7x-1 = A(x-3)+B(x-2) \qquad \ldots (2)$$

$x = 3$ என சமன்பாடு (2) ல் பிரதியிட

$$21 - 1 = B\,(1)$$

$$\Rightarrow \quad B = 20$$

$x = 2$ என சமன்பாடு (2)ல் பிரதியிட

$$14-1 = A(-1)$$

$$\Rightarrow \quad A = -13$$

A மற்றும் B யின் மதிப்புகளை (1)ல் பிரதியிட

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-3)}\right]_{x=2} + \frac{1}{(x-3)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-2)}\right]_{x=3}$$

$$= \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

பகுதியை ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கங்களாக எழுதுக

$(x^2-4)(x+1)=(x-2)(x+2)(x+1)$

$$\therefore \quad \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+1)} \text{ என்க} \qquad ...(1)$$

இரு புறமும் $(x-2)(x+2)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$x+4=A(x+2)(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)(x+2) \qquad ...(2)$$

$x = -2$ என (2) ல் பிரதியிட

$$-2+4 = A(0)+B(-4)(-1)+C(0)$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{2}$$

$x = 2$ என (2) ல் பிரதியிட

$$2+4 = A(4)(3)+B(0)+C(0)$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}$$

$x = -1$ என (2) ல் பிரதியிட

$$-1+4 = A(0)+B(0)+C(-3)(1)$$

$$\therefore \quad C=-1$$

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{x+1}$$

2.1.2 பகுதியில் ஒரு படிக் காரணிகள் (n– முறை திரும்பத் திரும்ப வருவது)

கொடுக்கப்பட்ட $\frac{p(x)}{q(x)}$, என்ற பின்னத்தில் பகுதி $q(x)$ல் $(ax+b)$ என்ற ஒருபடிக் காரணியானது n முறை திரும்பத் திரும்ப வருமாயின், $(ax+b)^n$ வடிவத்தில் இருந்தால் அதற்குரிய எளிய பின்னம் பின்வருமாறு

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

உதாரணமாக, $\dfrac{9x+7}{(x+4)(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x+4)}+\dfrac{B}{(x+1)}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

$\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ எனில் A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x = A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1) \quad \ldots (1)$$

$x = 1$ என (1) ல் பிரதியிட

$$1 = A(1+1)^2+B(0)+C(0)$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

$x = -1$ என (1) ல் பிரதியிட

$$-1 = A(0)+B(0)+C(-1-1)$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

சமன்பாடு (1) ல் மாறிலிகளின் கெழுக்களை சமன்படுத்த

$$A-B-C = 0$$

$$\Rightarrow B = A-C$$

$$\therefore B = -\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}$ ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

Let $\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \dfrac{A}{(x-2)}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x+3)} \quad \ldots (1)$

$(x-2)^2(x+3)$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$x+1 = A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2 \quad \ldots (2)$$

$$x = 2 \quad \text{என } (2) \text{ ல் பிரதியிட}$$

$$2+1 = A(0)+B(5)+C(0)$$

$$\therefore \quad B = \frac{3}{5}$$

$$x = -3 \quad \text{என } (2) \text{ ல் பிரதியிட}$$

$$-3+1 = A(0)+B(0)+C(-3-2)^2$$

$$\therefore \quad C = \frac{-2}{25}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A+C$$

$$A = -C$$

$$\therefore \quad A = \frac{2}{25}$$

A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளை (1) ல் பிரதியிட,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{2}{25(x-2)} + \frac{3}{5(x-2)^2} - \frac{2}{25(x+3)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

$\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} \qquad \ldots (1)$$

$(x-1)(x+2)^2$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$\therefore \quad 9 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) \quad \ldots (2)$$

$$x = -2 \text{ என } (2) \text{ ல் பிரதியிட}$$

$$9 = A(0)+B(0)+C(-2-1)$$

$$\therefore \quad C = -3$$

$$x = 1 \text{ என } (2) \text{ ல் பிரதியிட}$$

$$9 = A(3)^2+B(0)+C(0)$$

$$\therefore \quad A = 1$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A + B$$

$$B = -A$$

$$\therefore \quad B = -1$$

A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளை (1) ல் பிரதியிட

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

2.1.3 ஒரு படி காரணிகளாக, காரணிப் படுத்தமுடியாத இரு படிக் காரணிகளை உள்ளடக்கிய பகுதி

$\frac{p(x)}{q(x)}$, என்கிற விகிதமுறு கோவையில், $q(x)$ என்பது ax^2+bx+c என்ற இருபடிக் காரணி, ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கலாக மாற்ற இயலாது எனில், $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பதனை $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ என்கிற அமைப்பில் பகுதிப் பிரிப்பாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ என்பதனை பகுதி பின்னமாக பிரிக்க.

தீர்வு

இங்கு (x^2+1) யை ஒரு படி காரணிகளாக காரணி படுத்த முடியாது. எனவே

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

இருபுறமும் $(x-1)(x^2+1)$ ஆல் பெருக்குக

$$2x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) \qquad \ldots (2)$$

$x = 1$ என (2) ல் பிரதியிட

$$2+1 = A(1+1)+0$$

$$\therefore \quad A = \frac{3}{2}$$

$x = 0$ என (2) ல் பிரதியிட

$$0+1 = A(0+1)+(0+C)(-1)$$

$$1 = A \quad - C$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{2}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) இன் இருபுறமும் சமன்படுத்த,

$$A + B = 0$$
$$B = -A$$
$$\therefore \quad B = \frac{-3}{2}$$

A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளை (1) ல் பிரதியிட

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$
$$= \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

பயிற்சி 2.1

கீழ்காணும் பின்னங்களை பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக:

1. $\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$
2. $\dfrac{4x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$
4. $\dfrac{1}{x^2-1}$
5. $\dfrac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}$
6. $\dfrac{2x^2-5x-7}{(x-2)^3}$
7. $\dfrac{x^2-6x+2}{x^2(x+2)}$
8. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$
9. $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)^2}$
10. $\dfrac{1}{(x^2+4)(x+1)}$

2.2 வரிசை மாற்றங்கள்

2.2.1 காரணீயப் பெருக்கம்l

ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கல் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகும். இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

n, என்கிற இயல் எண்ணிற்கு $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$2! = 2 \times 1 = 2$$
$$1! = 1$$

குறிப்பு

$0! = 1$

ஏதேனும் இயல் எண் n க்கு

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \dots\ 3\times 2\times 1$$
$$= n(n-1)!$$
$$= n(n-1)(n-2)!$$

குறிப்பாக, $8! = 8\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)$

$$= 8\times7!$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

கீழ்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) $\frac{7!}{6!}$ (ii) $\frac{8!}{5!}$ (iii) $\frac{9!}{6!3!}$

தீர்வு

(i) $\frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6!}{6!} = 7.$

(ii) $\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336.$

(iii) $\frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84.$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

7! ஐ 5! ன் காரணீயப் பெருக்கலாக மாற்றி எழுதுக.

தீர்வு

$$7! = 7\times6!$$
$$=7\times6\times5! = 42\times5!$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ எனில் n –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!} = \frac{n}{11!}$$
$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times9!} = \frac{n}{11!}$$
$$\frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right] = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!} \times \frac{11}{10} = \frac{n}{11!}$$

$$n = \frac{11! \times 11}{9! \times 10}$$

$$= \frac{11! \times 11}{10!}$$

$$= \frac{11 \times 10! \times 11}{10!}$$

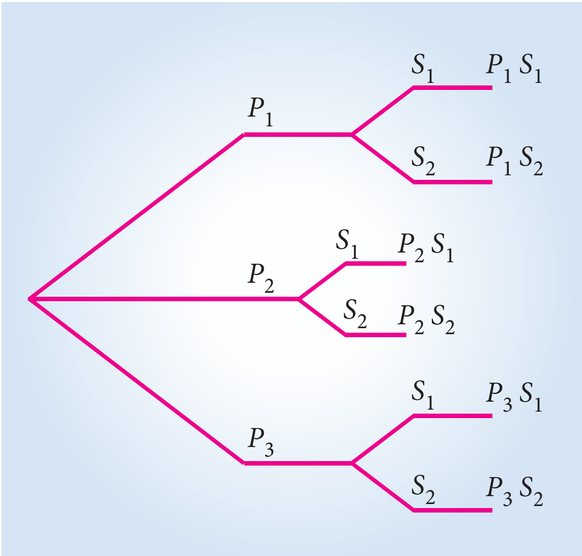
$$= 121.$$

2.2.2 எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்

பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை:

மூன்று நுழைவாயில்களும், வெளியேறுவதற்கு இரண்டு வாயில்களும் உள்ள விழா மண்டபத்தை கருத்தில் கொள்வோம். வரும் ஒரு நபர் எத்தனை வழிகளில் விழா மண்டபத்திற்கு உள்ளே சென்று வெளியேறலாம் என்பதற்கான விடையைக் காண்பது நமது நோக்கமாகும்.

இந்த கணக்கில், மண்டபத்தின் மூன்று நுழைவாயில்களை முறையே P_1, P_2 மற்றும் P_3 எனக் கொள்வோம். விழா மண்டபத்தை விட்டு வெளியேறும் வழிகளை S_1 மற்றும் S_2 எனக் கொள்வோம்.



படம். 2.1

விழா மண்டபத்திற்கு வரும், ஒரு நபர் P_1 அல்லது P_2 அல்லது P_3 என்ற ஏதேனும் ஒரு நுழைவாயில் வழியாக, 3 வழிகளில் உள்ளே செல்லலாம். மண்டபத்திற்குள் சென்றவுடன், S_1 அல்லது S_2 என்ற ஏதேனும் ஒரு வாயில் வழியாக, (இரு வழிகளில்) வெளியேறலாம்.விழா மண்டபத்திற்கு சென்று வெளியேறும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $3 \times 2 = 6$ வழிகள்

மேற்காணும் சூழ்நிலைப் போன்று நடைமுறை வாழ்க்கையில் பல்வகை கணக்குகளின், தீர்வு காண, நாம் பயன்படுத்தும் கொள்கையே, பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையாகும்.

வரையறை 2.1

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளில் ஒன்றை m வழிகளிலும் மற்றொன்றை n வழிகளிலும் செய்யமுடியும் எனில், இரு பணிகளையும் ஒருங்கே, தொடர்ந்து $m \times n$ வழிகளில் செய்ய முடியும் என்பதே **பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

'NOTE' என்ற ஆங்கிலச் சொல்லில் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எழுத்துக்கள் மீண்டும் வராதவாறு, அர்த்தமற்ற அல்லது அர்த்தம் உடைய வார்த்தைகள் எத்தனை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட ஆங்கில வார்த்தை 'NOTE' –ல் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களை, கீழ்கண்டவாறு நான்கு காலியிடங்களை கொண்டு குறிப்போம்

□	□	□	□
1	2	3	4

படம் 2.2

முதல் காலியிடத்தை, நான்கு எழுத்துக்களை கொண்டு, நான்கு வழிகளில் நிரப்பலாம். எழுத்துக்களை மீண்டும் ஒருமுறை பயன்படுத்த முடியாததால், இரண்டாம் காலியிடத்தை 3 முறைகளிலும் மூன்றாம் காலியிடத்தை இரண்டு வழிகளிலும், கடைசி இடத்தை ஒரு வழியிலும் நிரப்பலாம். பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி உருவாக்கப்படும் மொத்த வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ வார்த்தைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

ஒவ்வொரு குறிக்கோள் வினாவும் நான்கு வாய்ப்புகளை பெற்றிருப்பின், நான்கு வினாக்களுக்கு, மொத்தம் எத்தனை வழிகளில் விடையளிக்கலாம்?

தீர்வு

ஒவ்வொரு வினாவிற்கும், 4 விடைகள் உண்டு, ஆதலால், ஒவ்வொரு வினாவையும் நான்கு வழிகளில் விடையளிக்கலாம். எனவே, நான்கு வினாக்களுக்கு $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ வழிகளில் விடையளிக்கலாம்

எடுத்துக்காட்டு 2.13

இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை மூன்று இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம் ?

தீர்வு

ஒரு மூன்று இலக்க எண்ணின் மூன்று இலக்கங்களை மூன்று காலியிடங்களைக் கொண்டு குறிப்போம்.

100வது இடம்	10வது இடம்	ஒன்றாவது இடம்
□	□	□
1	2	3

படம் 2.3

எந்த ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணையும் பூச்சியத்தில் தொடங்க இயலாது. ஆதலால், நூறாவது இலக்கத்தினை 1லிருந்து 9 வரை உள்ள இலக்கங்களை பயன்படுத்தி 9 வழிகளில் நிரப்பலாம். இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்த இயலாது.ஆதலால் 10 வது இலக்கத்தினை, 0 உட்பட மீதம் உள்ள இலக்கங்களை கொண்டு 9 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம். இவ்வாறே ஒன்றாவது இலக்கத்தினை 8 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம்.

பெருக்கல் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி, மொத்த மூன்றிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை $= 9\times9\times8 = 648$ எண்கள் ஆகும்.

2.2.3 கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை

இக்கொள்கையை விளக்குவதற்கு, மற்றுமொரு சூழ்நிலையைக் கருதுவோம். ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்களும், 8 மாணவிகளும் உள்ளனர். மேற்கண்ட மாணவர்களின் வகுப்பாசிரியர், அந்த வகுப்பின் சார்பாக ஒரு மாணவன் அல்லது ஒரு மாணவியை ஒரு விழாவிற்கு அனுப்ப விரும்புகிறார். எத்தனை வழிகளில் இருபாலரில் ஒருவரைத் தேர்வு செய்து அனுப்பலாம் என்பதற்கான தீர்வைக் காண்போம்.

கீழ்கண்ட இரு வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை வகுப்பாசிரியர் தேர்வு செய்யலாம்.

(i) 10 மாணவர்களில் இருந்து ஒருவரை பத்து வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் (அல்லது)

(ii) 8 மாணவிகளில் இருந்து ஒருவரை எட்டு வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்

10 மாணவர்களிலிருந்து ஒருவரை 10 வழிகளிலும், 8 மாணவிகளிலிருந்து ஒருவரை 8 வழிகளிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். விழாவிற்கு ஒருவரை தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $10+8 = 18$ வழிகள்.

இவ்வகை கணக்குகளை, தீர்ப்பதற்கான கொள்கை "கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை" எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை எனப்படும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே **கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

புத்தக விற்பனை கடையில், 6 வணிகவியல் புத்தகமும், 5 கணக்குப்பதிவியல் புத்தகமும் உள்ளன. புத்தகம் வாங்க விரும்பும் ஒரு மாணவன் புத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை எத்தனை வழிகளில் வாங்கலாம்?

தீர்வு

6 வணிகவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 6 வழிகளில் வாங்கலாம்.

5 கணக்குப் பதிவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 5 வழிகளில் வாங்கலாம். கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைபடி இவ்விரு பாடபுத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை 5+6=11 வழிகளில் வாங்கலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$ எனில் x– ன் மதிப்பைக் காண்க

2. $n = 5$ மற்றும் $r = 2$ எனும்பொழுது $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ – ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. If $(n+2)! = 60[(n-1)!]$, எனில் n – ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. 0 முதல் 9 வரை உள்ள இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி 67 என்ற எண்ணில் தொடங்குமாறு எந்த இலக்கமும் ஒரு தடவைக்கு மேல் திரும்ப தோன்றாமல், எத்தனை 5 இலக்க தொலைபேசி எண்களை உருவாக்க முடியும்??

5. 5, 6, 7, 8 மற்றும் 9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு. இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு, 1000க்கும் குறைவான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

2.2.4 வரிசை மாற்றங்களின் வரையறை (Permutations)

ஓர் உதாரணத்திற்கு, “ஆப்பிள், திராட்சை, மற்றும் வாழைப்பழங்கள்” ஆகிய கனிகளால் உருவாக்கப்பட்ட “கனித்துண்டுகளின் கலவை” (Fruit salad) எடுத்துக்கொள்வோம். கனித்துண்டுகளின் கலவையில் பழத்துண்டுகள் எந்த வரிசையில் சேர்க்கப்படுகின்றன என்பது முக்கியமல்ல. எந்த வரிசையில் இப்பழத்துண்டுகள் சேர்க்கப்பட்டாலும் நாம் ஒரே மாதிரி சுவையுள்ள கனித்துண்டுகளின் கலவையையே பெறுவோம்.

ஆனால், எண்குறியீடு 395 உள்ள ஒரு எண் பூட்டை (number lock) எடுத்துக் கொள்வோம்.எண்குறியீட்டை மூன்று முறைக்கு மேல் தவறாக முயற்சித்தால், பூட்டானது நிரந்தரமாக பூட்டிக்கொள்ளும்.இச்சூழ்நிலையில், 395 என்ற எண்குறியீட்டின் வரிசை மிகவும் முக்கியமானது.

395 என்ற குறியீட்டிற்கு பதிலாக, 3 – 5 – 9 அல்லது 9-5-3 என்று இலக்கங்களின் வரிசையை மாற்றி உள்ளீடு செய்தால் பூட்டைத் திறக்க முடியாது. எண்குறியீட்டை மிகச் சரியாக 3 - 9 - 5 என உள்ளீடு செய்தால் மட்டுமே, எண் பூட்டை திறக்க முடியும்.

நடைமுறை வாழ்க்கையில், மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை போன்ற சூழ்நிலைகளை எதிர்கொள்ள **வரிசைமாற்றங்கள்** (permutation) பற்றி அறிந்துகொள்வோம்.

வரையறை 2.3

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் விதங்களின் எண்ணிக்கையை n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் **வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை** எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 2, 3 என்ற மூன்று இலக்கங்களைக்கொண்டு உருவாக்கப்படும் மூன்று இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட மூன்றிலக்க எண்கள் பின்வருமாறு

123, 132, 231, 213, 312, 321

குறியீடு $0 \leq r < n$, எனுமாறு உள்ள n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $P(n, r)$ (அல்லது) nP_r என குறிக்கப்படுகிறது.

நிரூபணமின்றி கீழ்கண்ட தேற்றத்தை நாம் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் : $$np_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

$5P_3$ மற்றும் $P(8, 5)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

$$\begin{aligned} P(8, 5) &= 8P_5 \\ &= \frac{8!}{(8-5)!} \\ &= \frac{8!}{3!} \\ &= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = 6720 \end{aligned}$$

முடிவுகள்

(i) $0! = 1$

(ii) $np_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

(iii) $np_1 = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(iv) $np_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

(v) $np_r = n(n-1)\,(n-2)\,...\,[n-(r-1)]$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பு காண்க : (i) $8P_3$ (ii) $5P_4$

தீர்வு

(i) $8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$

(ii) $5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை எத்தனை வழிகளில் பொருத்தலாம் ?

தீர்வு

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை பொருத்துவது என்பது, ஏழு படங்களில் ஒரே நேரத்தில் ஐந்து படங்களை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$= 7P_5 = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2520$ வழிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18

"LOGARITHMS" என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி, (எழுத்துக்களை மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு அர்த்தம் உள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற) 4 எழுத்து வார்த்தைகள் எத்தனை அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

LOGARITHMS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை 10

எனவே $n = 10$

4 எழுத்து வார்த்தைகளை நாம் காணவேண்டி உள்ளதால், $r = 4$

எனவே தேவையான வார்த்தைகள் $np_r = 10\,p_4$

$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$

$= 5040.$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$nP_r = 360$, எனில் $n,\ r$ –ன் மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு

$$nP_r = 360 = 36 \times 10$$

$$= 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2$$

$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 6P_4$$

எனவே $n = 6$ மற்றும் $r = 4$.

மீண்டும், மீண்டும் வருகின்ற பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்:

n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களினை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும்பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 2.20

1, 2, 3, …… 9, வரையுள்ள ஒன்பது இலக்கங்களைக் கொண்டு, இலக்கங்கள் திரும்ப இடம்பெறுமாறு எத்தனை மூன்றிலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

இங்கு இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 9

எனவே $n = 9$ மற்றும் $r = 3$

தேவைப்படும் மூன்றிலக்க எண்கள் $= n^r$

$= 9^3 = 729$ எண்கள்

பலமுறை வரும் வெவ்வேறு பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள் :

n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இங்கு $p + q = n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p!\,q!}$

பொதுவாக n பொருட்களில் p_1 பொருட்கள் முதல் வகையாகவும், p_2 பொருள்கள் இரண்டாம் வகையாகவும், p_3 பொருள்கள் மூன்றாம் வகையாகவும், ... p_k பொருள்கள் k^{th} வகையாகவும் இருப்பதாக கொள்வோம். மேலும் $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. எனில், அனைத்து பொருள்களையும் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = $\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_k!}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.21

(i) MISSISSIPPI (ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தைகளில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி, எத்தனை வார்த்தைகள் அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

(i) MISSISSIPPI என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

இந்த வார்த்தையில்

M என்ற எழுத்து ஒருமுறையும்

I என்ற எழுத்து 4 முறையும்

S என்ற எழுத்து 4 முறையும்

P என்ற எழுத்து 2 முறையும் இடம்பெறுகிறது.

அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $n = \frac{11!}{4!\,4!\,2!}$

(ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

M என்ற எழுத்து 2 முறையும்

T என்ற எழுத்து 2 முறையும்

A என்ற எழுத்து 2 முறையும்

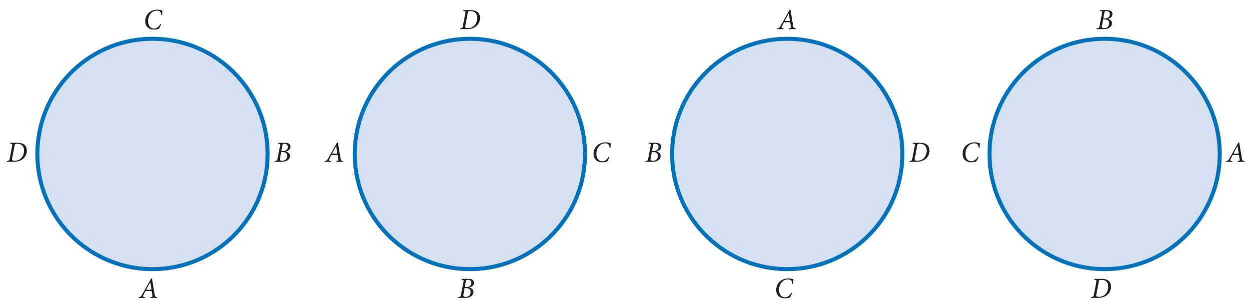
எனவே அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$

2.2.5 வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் (Circular permutation)

சென்ற பிரிவில், நேர்கோட்டின் மீதான n பொருள்களின் வரிசை மாற்றங்களை பற்றிய விவரங்களை பயின்றோம். அவைகள் நேரிய வரிசை மாற்றங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றது. தற்பொழுது $n!$ பொருட்களின், வட்டத்தின் மீதான வரிசை மாற்றங்களைக் காண்போம். இவை வட்ட வரிசை மாற்றம் எனப்படுகிறது.

A, B, C, D என்ற நான்கு எழுத்துக்களை கருதுவோம். இந்த நான்கு எழுத்துக்களின் நேர் கோட்டின் மீதான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 4! ஆகும். இந்த 4! வரிசைமாற்றங்களில் கீழ்கண்ட நேர்கோட்டின் மீதான நான்கு வரிசைப்படுத்துதலைக் கருதுக, ABCD, BCDA, CDAB,

DABC என்பனவற்றை வட்டத்தின் மீது வரிசைப்படுத்தினால் இவை அனைத்தும் ஒரே வரிசைப் படுத்துதலை குறிக்கும் என்பதை கீழ்கண்ட படத்தின்மூலம் காணலாம்.



படம். 2.4

எனவே, '4' பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{4!}{4} = 3!$

பொதுவாக, n வெவ்வேறு பொருள்களின் அனைத்து பொருள்களையும் ஒரே நேரத்தில் எடுத்துக்கொண்டால், அமைக்கப்படும் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = $(n-1)!$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

8 மாணவர்களை எத்தனை வழிகளில்

(i) நேர்க்கோட்டின் மீது (ii) வட்டவடிவில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

தீர்வு

(i) 8 மாணவர்களின் நேர்கோட்டின் மீதான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 8P_8 = 8!$ வழிகள்

(ii) மாணவர்கள், வட்டத்தின் மீதான வரிசை படுத்தும்போது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(8-1)! = 7!$ (இங்கு வலச்சுற்றுக்கும், இடச்சுற்றுக்கும் வேறுபாடு காண இயலும்)

எடுத்துக்காட்டு 2.23

ஒரே மாதிரியான 10 சாவிகளை, ஒரு வளையத்தில் எத்தனை வகைகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்?

தீர்வு

சாவிகள் அனைத்தும் ஒரே மாதிரியானது. ஆதலால் வளையத்தில் வரிசைப்படுத்தும் பொழுது, வலச்சுற்றுக்கும் இடச்சுற்றிற்கும் வேறுபாடுகளை காண இயலாது. எனவே, சாவிகளின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{(n-1)!}{2} = \frac{(10-1)!}{2} = \frac{9!}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.24

ஆங்கில அகராதியில் உள்ள 'RANK' என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.

தீர்வுs

'RANK' என்ற ஆங்கில வார்த்தையைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும், வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $4!$

இந்த வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் A, K, N, R என வரிசைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

A-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை$=3!=6$

K-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $=3!=6$

N-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $=3!=6$

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
>
> **அகராதியில் உள்ள வார்த்தையின் தரம்**
>
> கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஆங்கில வார்த்தையின், தரம் காண்பதற்கு, ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் வரிசைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.
> தரம் காணும்பொழுது உருவாக்கப்படும் வார்த்தைகள் அர்த்தம் உள்ளதாகவோ, அர்த்தமற்றதாகவோ இருக்கலாம்

RAKஎனத் தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $=1! = 1$

RANK என்ற வார்த்தை $=0! = 1$

$\therefore$ கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி RANK என்ற வார்த்தையின் தரம்
$$6 + 6 + 6 + 1+1 = 20$$

பயிற்சி 2.3

1. $nP_4 = 12(nP_2)$, எனில், n –ன் மதிப்பு காண்க,

2. இரண்டு சிறுமிகள் சேர்ந்து அமராதவாறு, 5 சிறுவர்கள் மற்றும் 3 சிறுமிகளை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம் ?

3. 0 முதல் 9 வரை உள்ள 10 இலக்கங்களைக் கொண்டு, 35 என்ற எண்ணில் தொடங்கும், 6 இலக்க தொலைபேசி எண்களில், இலக்கங்கள் மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு, எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

4. “ASSASSINATION” என்ற வார்த்தையில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்கலாம் ?

5. (a) ஒரே வகையான 8 மணிகளை எத்தனை வழிகளில், ஆபரண மாலையில் கோர்க்கலாம்?

   (b) 8 சிறுவர்களைக் கொண்டு எத்தனை வளையங்களை உருவாக்கலாம்?

6. ஆங்கில அகராதியில் ‘CHAT’ என்ற வார்த்தையின் தரத்தைக் காண்க

2.3 சேர்வுகள் (Combinations)

சேர்வுகள் என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் வரிசையை கணக்கில் கொள்ளாமல் பொருட்களை ஒரு தொகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுப்பதாகும். அதாவது பொருட்களின் வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் செயலாகும். நான்கு நபர்கள் A, B, C மற்றும் D என்க. இவர்களில் A மற்றும் B யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும், B மற்றும் A யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும் இரு வேறு தேர்வாக கருத முடியாது. தேர்வு செய்யப்படும் நபர்களின் வரிசை முக்கியமல்ல. கொடுக்கப்பட்ட நான்கு நபர்களில் 2 அலுவலக ஊழியர்களை 6 வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவை AB, AC, AD, BC, BD, CD என்பனவாகும். மேற்கண்டவாறு செயல்படுத்தப்படும் பல்வேறு தேர்வுகளில் செயல்முடிவுகள் சேர்வுகள் எனப்படும். அதாவது, $4C_2 = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$

திரும்பத் திரும்ப வராத பல்வேறு தேர்வுகளின் முறை என்பது சேர்வுகள் என வழங்கப்படும்

வரையறை 2.4

சேர்வுகள் என்பது n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் திரும்பத் திரும்ப வராமல் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையாகும்.

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை nC_r வழிகளில் தேர்ந்து எடுக்கலாம். இங்கு $n \neq 0$ ஆனால் $r = 0$ ஆக இருக்கலாம்.

nC_r –ன் மதிப்பு

$$nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \le r < n$$

உதாரணத்திற்கு 5 பந்துகளில் இருந்து 3 பந்துகளை $5C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$$5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \left(\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\right) = 10$$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$8C_2$ –ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$8C_2 = \frac{8\times 7}{2\times 1} = 28$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

வரிசை மாற்றங்கள் என்பது பட்டியல் படுத்துவது (வரிசை அவசியம்) சேர்வுகள் என்பது குழுவிற்கானது (வரிசை அவசியம் அற்றது))

பண்புகள்

(i) $nC_0 = nc_n = 1.$

(ii) $nC_1 = n.$

(iii) $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$

(iv) $nC_x = nC_y,$
எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n.$

(v) $nC_r = nC_{n-r}.$

(vi) $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r.$

(vii) $nC_r = \frac{np_r}{r!}$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$nC_4 = nC_6$ எனில் $12C_n$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$nC_x = nC_y$, எனில் $x + y = n$ என்ற பண்பின்படி

$nC_4 = nC_6$ எனில்,

$$n = 4 + 6 = 10$$

$$12C_n = 12C_{10}$$

$$= 12C_2$$

$$= \frac{12\times 11}{1\times 2} = 66$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$nP_r = 720$ மற்றும் $nC_r = 120$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$nC_r = \frac{nP_r}{r!} \text{ என்ற தொடர்பின்படி}$$

$$120 = \frac{720}{r!}$$

$$r! = \frac{720}{120} = 6 = 3\,!$$

$$\Longrightarrow \quad r = 3.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

$15C_{3r} = 15C_{r+3}$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$15C_{3r} = 15C_{r+3}$$

$nC_x = nC_y \Longrightarrow x + y = n$, என்ற பண்பிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$3r + r + 3 = 15$$

$$\Longrightarrow \quad r = 3.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

32 மாணவர்களை கொண்ட ஒரு வகுப்பிலிருந்து நான்கு மாணவர்கள், ஒரு போட்டித் தேர்வில் பங்கேற்க தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள். இவர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

தீர்வு

32 மாணவர்களிலிருந்து 4 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 32C_4$$

$$= \frac{32!}{4!\,(32-4)!}$$

$$= \frac{32!}{4!\,(28)!}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

ஒரு வினாத்தாளில் பிரிவு (அ), பிரிவு (ஆ) என்ற இரு பிரிவுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் 10 வினாக்கள் உள்ளன. வினாத்தாளுக்கு விடையளிக்கும் ஒரு மாணவன், பகுதி அ –விலிருந்து 8 வினாக்களுக்கும், பகுதி (ஆ) –விலிருந்து 5 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும் எனில், எத்தனை வகைகளில், அம்மாணவர், வினாக்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

தீர்வு

வினாத்தாளில் பகுதி (அ) –விலிருந்து 8 வினாக்களை $10C_8$ வழிகளிலும். பகுதி (ஆ)–வில் உள்ள 10 வினாக்களிலிருந்து 5 வினாக்களை $10C_5$ வழிகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே பெருக்கல் கொள்கை விதிப்படி மொத்த தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$10C_8 \times 10C_5 = 10C_2 \times 10C_5$$

$$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11340 \text{ வழிகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.31

4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் (wicket keeper) உள்ளடக்கிய 16 கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவிலிருந்து குறைந்தது 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் அணி உருவாக்கப்படுகிறது. குறைந்தது 3 பந்து வீச்சாளர்கள் மற்றும் குறைந்தது ஒரு இலக்கு நிலை காப்பாளர் கொண்ட 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

11 விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை கீழ்க்கண்ட வழிகளில் அமைக்கலாம்.

(i) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 7 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு

$4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

$$4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7 = 4C_1 \times 2C_1 \times 10C_3$$

$= 960$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(ii) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு

$$4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6$$

$$4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6 = 4C_1 \times 2C_2 \times 10C_4$$

$= 840$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iii) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_4 \times 2C_1 \times 10C_6$

$4C_4 \times 2C_1 \times 10C_4 = 420$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iv) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 5 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு

$$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5$$

$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5 = 252$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

கூட்டலின் எண்ணுதல் கொள்கைப்படி, கிரிக்கெட் குழுவை அமைக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை = 960+840+420+ 252 = 2472 வழிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.32

$4(nC_2) = (n+2)C_3$, எனில் n – ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned}
4(nC_2) &= (n+2)C_3 \\
4\frac{n(n-1)}{1\times 2} &= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{1\times 2\times 3} \\
12(n-1) &= (n+2)\,(n+1) \\
12(n-1) &= (n^2+3n+2) \\
n^2-9n+14 &= 0 \\
(n-2)(n-7) &= 0 \Rightarrow n = 2, n = 7
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

$(n+2)C_n = 45$ எனில் n – ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned}
(n+2)C_n &= 45 \\
(n+2)C_{n+2-n} &= 45 \\
(n+2)C_2 &= 45 \\
\frac{(n+2)(n+1)}{2} &= 45 \\
n^2+3n-88 &= 0 \\
(n+11)(n-8) &= 0 \\
n &= -11, 8
\end{aligned}$$

n, குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$$\therefore \quad n = 8$$

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

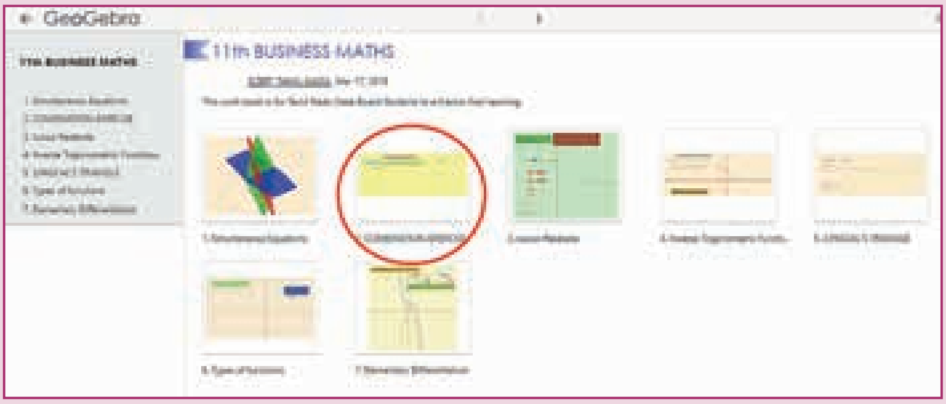
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

“11th BUSINESS MATHS” எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **“Combination Exercise”** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

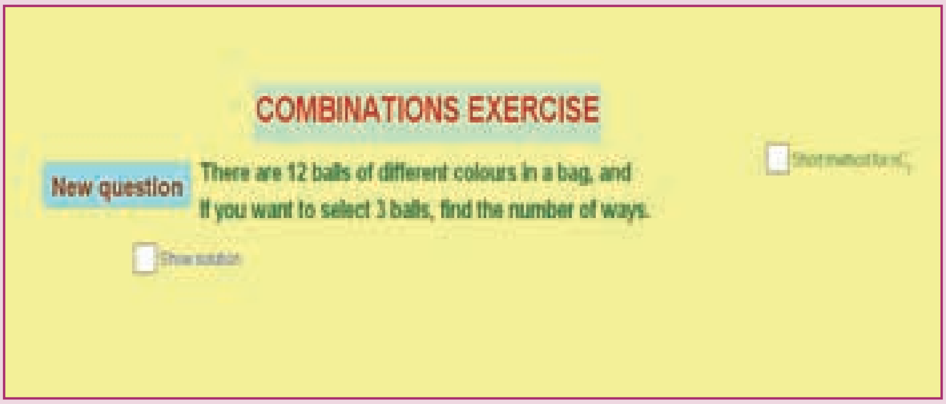
படி - 2

நீங்களாக தீர்வைக் கண்டு பிடித்து “Show solution” பெட்டியைச் சொடுக்கி கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். மேலும் “Short method” பெட்டியைச் சொடுக்கி எளிய முறையினைக் காண்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 2.4

1. $nP_r = 1680,\ nC_r = 70$ எனில் n மற்றும் r –ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. $8C_4 + 8C_3 = 9C_4$ என்பதை சரிபார்.

3. வட்டத்தின் மீதுள்ள 21 புள்ளிகள் வழியாக எத்தனை நாண்கள் வரையலாம்?

4. ஓர் அறுகோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளை இணைத்து எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

5. 7 ஆங்கில மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் 4 ஆங்கில உயிரெழுத்துகளிலிருந்து, 3 மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் இரண்டு உயிரெழுத்துகளை தேர்ந்தெடுத்து, எத்தனை வார்த்தைகள் உருவாக்கலாம்?

6. 4 பகடைகள் உருட்டப்படுகிறது எனில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பகடையாவது 2 என்ற எண் தோன்றுமாறு கிடைக்கபெறும் அனைத்துவிதமான சாத்தியக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

7. ஒரு விருந்தில் 18 விருந்தினர்கள் கலந்து கொள்கிறார்கள். ஒரு நீண்ட மேசையில் இருபுறமும், பக்கத்திற்கு 9 பேர் வீதம் அமரவைக்கப்படுகிறார்கள், அவர்களில் குறிப்பிட்ட 3 பேர் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கத்திலும், மேலும் இரண்டு பேர் மேசையின் மற்றொரு பக்கத்திலும் அமர விரும்புகிறார்கள் எனில் எத்தனை வழிகளில் விருந்தினர்களை அமர வைக்கலாம்?

8. ஒரு பலகோணம் 44 மூலை விட்டங்களைப் பெற்றிருப்பின் அப்பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி?

9. 15 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவில் இருந்து 11 பேர் அடங்கிய குழுவை கீழ்க்கண்டவாறு எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

   (i) வீரர்களை தேர்வு செய்வதில் எந்த வித நிபந்தனைகளும் இல்லை.

   (ii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறுவார்.

   (iii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறமாட்டார்.

10. 6 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களிலிருந்து 5 பேர் அடங்கிய குழு, கீழ்க்கண்டவாறு

    (i) குழுவில் குறைந்தது இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

    (ii) குழுவில் அதிகபட்சம் இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

    எத்தனை வகைகளில் அமைக்கலாம்.

2.4 கணிதத் தொகுத்தறிதல் (Mathematical induction)

n என்ற மிகை முழுக்கள் எண்களைக் கொண்டு அமைக்கும் பல்வேறு கணிதக் கூற்றினை நிரூபிக்கப் பயன்படும் ஒரு உத்தியே கணிதத் தொகுத்தறிதல் எனப்படும்.

இயற்கணிதம், வடிவியல், மற்றும் பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றின் கூட்டுதலின் உண்மை தன்மையை நிறுவ, கணித்தொகுத்தறிதல் முறை பயன்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கை:

ஒவ்வொரு இயல் எண் n – க்கும் தகுந்த ஒரு கூற்றினை $P(n)$ என்க.

(i) **ஆரம்பநிலை:** $n = 1$ எனும்பொழுது $P(1)$ என்பது உண்மையாகும். (ஏதேனும் நிலையான இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும்) மற்றும்

(ii) **தொகுத்தறிதல் நிலை:** $n = k$ எனும்பொழுது கூற்று உண்மையெனில் (இங்கு k என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட, ஆனால் தன்னிச்சையான இயல் எண்)

$n = k + 1$ என்பதற்கும் இக்கூற்று உண்மையாகும்.

அதாவது, கூற்று $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ ம் உண்மையாக இருக்கும். ஆகவே $P(n)$ என்பது அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும் என்பது கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.34

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்ற கூற்று கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$n \in N$ க்கு $P(n) = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்க.

படி 1: $n = 1$ என பிரதியிடவும்

$$\text{P}(1) \text{ ன் LHS} = 1$$

$$\text{P}(1) \text{ ன் RHS} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மையாகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

i.e., $P(k)$ என்பது உண்மையாகும்.

$P(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ என்பது உண்மையாகும்.

படி 3: $P(k+1)$ என்பது உண்மையென நிரூபிக்க

$$\text{LHS} = P(k+1) = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots + k + (k+1)$$

$$= P(k) + k + 1$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \text{RHS}$$

$\therefore\ P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்

இவ்வாறாக $P(k)$ என்பது உண்மையெனில் $P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்.

$\therefore\ P(n)$ என்பது அனைத்து $n \in N$ க்கும் உண்மையாகும்.

ஆகவே $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, n \in N$ என்ற கூற்று உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.35

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் $1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1) = n^2$ (அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1) = n^2$ என்க.

$n = 1$ எனும் பொழுது

$P(1)$ ன் LHS $= 1$

$P(1)$ ன் RHS $= 1^2$

$= 1$

LHS $=$ RHS

$\therefore\ P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

i.e., $P(k) = 1 + 3 + 5 \ldots + (2k-1) = k^2$

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$P(k+1)$ ன் LHS= $1+3+5\ldots+(2k-1)+(2k+1) = P(k)+(2k+1)$

$$= k^2+2k+1$$

$$= (k+1)^2 = \text{RHS}$$

$P(k)$ உண்மையெனில் $P(k+1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ தொகுத்தறிதலின் விதிப்படி n ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.36

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் படி $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது குறிக்கும் கூற்று : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என்க

$n = 1$ என பிரதியிட

$P(1)$ ன் LHS $= 1^2$

$= 1$

$P(1)$ ன் RHS $= \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

$= 1$

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதை உண்மை என எடுத்துக்கொள்க

$P(k) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$P(k+1)$ ன் LHS $= 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = p(k)+(k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \text{RHS}$$

$\therefore$ $P(k)$ உண்மையென்றால் $P(k+1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ அனைத்து இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.37

$2^{3n}-1$ என்பது "7 ஆல் வகுபடும்" (அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 2^{3n}-1$ என்க

படி 1: $n = 1$ என பிரதியிட

$\therefore \quad P(1) = 2^3 - 1$

$= 7$ (7 ஆல் வகுபடும் எண்)

i.e., $P(1)$ உண்மை ஆகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

i.e., $P(k) = 2^{3k} - 1$ 7 ஆல் வகுபடும் எண் என்க.

ஏதேனும் ஒரு $m \in N$ க்கு $2^{3k} - 1 = 7m$ என்க. ... (1)

படி 3: $P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்

$$P(k+1) = 2^{3(k+1)} - 1$$

$$= 2^{(3k+3)} - 1$$

$$= 2^{3k} \cdot 2^3 - 1$$

$$= 2^{3k} \cdot 8 - 1$$

$$= 2^{3k} \cdot (7+1) - 1$$

$$= 2^{3k} \cdot 7 + (2^{3k} - 1)$$

$$= 2^{3k} \cdot 7 + 7m = 7(2^{3k} + m) \quad \Rightarrow \text{ 7 ஆல் வகுபடும் எண்}$$

எனவே, $P(k+1)$ ம் உண்மை ஆகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ ம் உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n ன் அனைத்து இயல் மதிப்புகளுக்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.38

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி $n^2 + n$ ஒரு "இரட்டைப் படை எண்" (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது "$n^2 + n$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$n = 1$ என பிதியிடவும்

$P(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$, ஒரு இரட்டைப்படை எண்.

$P(k)$ என்பது உண்மை என்க.

i.e., $P(k) = k^2 + k$ ஓர் "இரட்டை படை எண்" என்பது உண்மையாகும்

$\therefore \quad P(k) = k^2 + k = 2m, \quad m \in N \qquad \ldots(1)$

$P(k + 1)$ உண்மை என நிரூபிக்க

$P(k + 1) = (k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$

$= k^2 + k + 2k + 2$

$= 2m + 2(k + 1)$ by (1)

$= 2(m + k + 1)$ (ஓர் இரட்டை படை எண்)

$\therefore \quad (k + 1)^2 + (k + 1)$ ஓர் இரட்டைப் படை எண்

$\therefore \quad P(k)$ உண்மை எனில் $P(k + 1)$ உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

பயிற்சி 2.5

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் அனைத்து $n \in N$ க்கும் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n+1)$.
4. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

5. $3^{2n}-1$ என்பது 8ஆல் வகுபடும்.

6. $a^n - b^n$ என்பது $a - b$ ஆல் வகுபடும்.

7. $5^{2n}-1$ என்பது 24 ஆல் வகுபடும்.

8. $n(n+1)(n+2)$என்பது 6 ஆல் வகுபடும்.

9. அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் $2^n > n$.

2.5 ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial theorem)

கூடுதல் அல்லது கழித்தல் என்ற செயலிகளால் இணைக்கப்பட்ட இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையானது ஒரு ஈருறுப்புக்கோவை (Binomial) என அழைக்கப்படுகிறது.

$(x+y), (5a-2b), \left(x+\frac{1}{y}\right), \left(p+\frac{5}{p}\right), \left(\frac{7}{4}+\frac{1}{y^2}\right)$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைக்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

ஈருறுப்பு அடுக்குகளை விரிவாக்குதல் என்பது ஈருறுப்புத் தேற்றம் அல்லது ஈருறுப்பு கோவை எனப்படும்.

$(x+y)^n$ என்பதனை ax^by^c என்ற அமைப்பில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதலாக விரிவாக்கம் செய்ய முடியும். இங்கு b மற்றும் c என்ற அடுக்குகள் $b+c=n$ எனுமாறு உள்ள மிகைமுழுக்களாகும். ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள a என்ற மிகை முழுக்கெழு என்பது ஈருறுப்புக் கெழு என வழங்கப்படும்.

கிரேக்க கணிதமேதை யூக்ளிட் என்பரால் பொ.ஆ.மு. 4 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x+a)^2$ –ன் விரிவு வழங்கப்பட்டுள்ளது. பொ.ஆ.மு. 6 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x+a)^3$ –ன் விரிவு இந்தியாவில அறியப்பட்டதற்கான ஆதாரம் உள்ளது. 1544– ஆம் ஆண்டு 'மைக்கேல் ஸ்டிபெல்' (Michael Stifle) என்பவரால் 'ஈருறுப்புக் கெழு' என்ற பதம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

பிளேஸ் பாஸ்கல் (Blaise Pascal) (19 ஜுன் 1623 – 19 ஆகஸ்ட் 1662) என்பவர் பிரான்ஸ் நாட்டு கணித மேதை, இயற்பியலாளர், எழுத்தாளர் மற்றும் கத்தோலிக்க இறையியலாளர். இவர் 1652 ஆம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்ட "எண்கணித முக்கோணம்" என்ற பதிவில் ஈருறுப்புக் கெழுக்களை முக்கோண வடிவில் வடிவமைத்துள்ளார். இதுவே தற்பொழுது பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் $(x+a)^n$ –ன் விரிவை, அனைத்து விகிதமுறு எண் 'n' க்கும் உகந்ததாக மாற்றி பொதுவாக அமைத்தவர் சர் ஐசக் நியூட்டன் அவர்கள்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி)

$(x+a)^n$ $n \in N$ ற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை இங்கு நாம் காண்போம் (நிரூபணமின்றி)

x, 'a' என்பன இரு மெய்யெண்கள் எனில், அனைத்து $n \in N$ க்கும் $(x+a)^n$ ன் விரிவு

$$(x+a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots$$

$$+ nC_{n-1} x^1 a^{n-1} + nC_n x^0 a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_r x^{n-r} a^r$$

குறிப்பு

$n = 0$ எனில் $(x+a)^0 = 1$

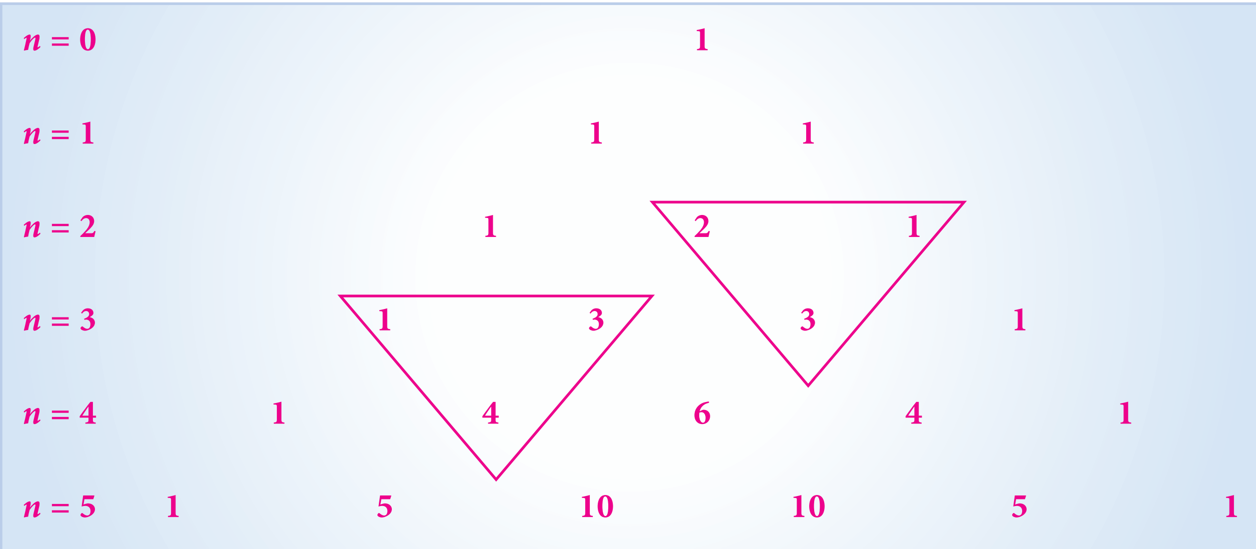
$n = 1$ எனில் $(x+a) = 1C_0 x + 1C_1 a = x + a$

$n = 2$ எனில் $(x+a)^2 = 2C_0 x^2 + 2C_1 x^a + 2C_2 a^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$n = 3$ எனில் $(x+a)^3 = 3C_0 x^3 + 3C_1 x^2 a + 3C_2 xa^2 + 3C_3 a^3$

$$= x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 \ \ldots$$

$(x+a)^n$ – ன் விரிவில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் முக்கோண வடிவில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. இதுவே பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.



படம். 2.5

குறிப்பு

(i) $(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் $n+1$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) $(x+a)^n$ ன் விரிவில், ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள x மற்றும் a ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்

(iii) $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3, \ldots nC_r, \ldots nC_n$ என்பன ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும். இவைகள் $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_r, \ldots, C_n$, எனவும் குறிக்கப்படும்.

(iv) $nC_r = nC_{n-r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ ஆகிவற்றிற்கான பண்பின்படி $(x + a)^n$ - ன் விரிவில் இருபுறத்திலிருந்தும் சம தூரத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும்.

(v) ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^n$

(vi) $(1+x)^n$, என்பதன் விரிவாக்கத்தில் ஒற்றைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் 2^{n-1}

(vii) $(x+a)^n$ ன் விரிவில் உள்ள பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$

$(x+a)^n$ ன் நடு உறுப்பு காணுதல்

வகை (i) $(x+a)^n$ ன் விரிவில் n – இரட்டைப்படை எனில் ($n+1$ ஒற்றைப்படை ஆகும்) இந்த விரிவில் உள்ள ஒரே நடு உறுப்பு $t_{\frac{n}{2}+1}$ ஆகும்.

வகை (ii) $(x+a)^n$–ல் n ஒற்றைப்படை எனில் ($n+1$ இரட்டைப்படை ஆகும்) இதன் விரிவில் இரண்டு நடு உறுப்புகள் இருக்கும். அவை $t_{\frac{n+1}{2}}$ மற்றும் $t_{\frac{n+3}{2}}$ ஆகும்.

சில வேளைகளில் $(x + a)^n$ – ன் விரிவாக்கத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு தேவைப்படுகிறது. இதற்கு நாம் முதலில் t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பை எழுத வேண்டும். t_{r+1} என்கிற தேவையான உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு r ன் மதிப்பை காண முடியும். x ன் தனி உறுப்பை காண்பதற்கு t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பின் x ன் அடுக்கை பூச்சியத்துடன் சமன்செய்து கிடைக்கும் r ன் மதிப்பை t_{r+1} பிரதியிட x ன் தனிமதிப்பை நாம் பெறமுடியும்.

குறிப்பு

$$(x+a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n \quad \ldots.(1)$$

(i) $(x-a)^n$ ல், a க்கு பதில் $-a$ யை பிரதியிட

$$(x-a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1}(-a) + nC_2 x^{n-2}(-a)^2 + \ldots + nC_r x^{n-r}(-a)^r + \ldots + (-a)^n$$

$$= nC_0 x^n a^0 - nC_1 x^{n-1}(a) + nC_2 x^{n-2}(a)^2 + \ldots + (-1)^r nC_r x^{n-r}(a)^r + \ldots + (-1)^n (a)^n \quad \ldots\ldots(2)$$

மேற்கண்ட விரிவாக்கத்திலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் குறிகள் மிகை அல்லது குறையாக மாறி மாறி இருக்கும்.

(ii) $a = 1$ என்று (1) ல் பிரதியிட

$$(1+x)^n = 1 + nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r x^r + \ldots + nC_n x^n \quad \ldots\ldots(3)$$

(iii) $x = -x$ என்று (3) ல் பிரதியிட

$$(1-x)^n = 1 - nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r (-1)^r x^r + \ldots + nC_n (-1)^n x^n$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(2x+3y)^5$ ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$(x+a)^n = nC_0x^na^0 + nC_1x^{n-1}a^1 + nC_2x^{n-2}a^2 + \ldots + nC_rx^{n-r}a^r + \ldots$$
$$+nC_{n-1}x^1a^{n-1} + nC_nx^0a^n$$

$$(2x+3y)^5 = 5C_0(2x)^5 + 5C_1(2x)^4(3y) + 5C_2(2x)^3(3y)^2 + 5C_3(2x)^2(3y)^3 +$$
$$5C_4(2x)(3y)^4 + 5C_5(3y)^5$$
$$= 32x^5 + 5(16)x^4(3y) + \frac{5\times4}{2\times1}(8x^3)(9y^2) + \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}4x^2(27y^3) +$$
$$5(2x)81y^4 + 243y^5$$
$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4 = (x^2)^4 + 4C_1(x^2)^3\frac{1}{x^2} + 4C_2(x^2)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 4C_3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 4C_4\left(\frac{1}{x^2}\right)^4$$
$$= x^8 + 4x^4 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(101)^5$ –ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

$$(101)^5 = (100+1)^5$$
$$= (100)^5 + 5C_1(100)^4 + 5C_2(100)^3 + 5C_3(100)^2 + 5C_4(100) + 5C_5$$
$$= 10000000000 + 5(100000000) + 10(1000000) + 10(10000) + 5(100) + 1$$
$$= 10000000000 + 500000000 + 10000000 + 100000 + 500 + 1$$
$$= 10510100501$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$ ஆகும். ... (1)

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ ன் 5வது உறுப்பைக் காண சமன்பாடு (1) –ல் n – க்கு 10யையும் r க்கு 4 யையும்

பிரதியிட $t_{4+1} = t_5 = 10C_4 (x)^6 \left(-\frac{3}{x^2}\right)^4$ (இங்கு $n = 10$, $x = x$, $a = -\frac{3}{x^2}$)

$$= 10C_4 (x)^6 \frac{3^4}{x^8}$$

$$= \frac{17010}{x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ ன் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$ ஆகும். ... (1)

நடு உறுப்பைக் காண

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிட

$n = 10$, $x = x^2$, $a = -\frac{2}{x}$ மற்றும் $r = 5$ என 1ல் பிரதியிட

$$t_{5+1} = t_6 = 10C_5 (x^2)^5 \left(\frac{-2}{x}\right)^5$$

$$= 10C_5 x^{10} \frac{(-2)^5}{x^5} = -8064x^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ –ன் விரிவில் நடுஉறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக $n = 9$ எனில் பத்து உறுப்புகளை (இரட்டை படை) நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ இதன் விரிவில் உள்ள இரண்டு நடு உறுப்புகள் முறையே

$\therefore$ $t_{\frac{n+1}{2}}$, $t_{\frac{n+3}{2}}$ அதாவது $t_{\frac{9+1}{2}}$, $t_{\frac{9+3}{2}}$ ஆகும்.

ஆகவே, t_5 மற்றும் t_6 என்பன நடு உறுப்புகளாகும்.

$(x+a)^n$ ன் விரிவில் பொது உறுப்பு

$$t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r \qquad \ldots (1)$$

$r = 4$ என (1) ல் பிரதியிட $t_{4+1} = t_5 = 9C_4\left(\frac{x}{3}\right)^5 \cdot (9y)^4$

$$= 9C_4 \frac{x^5}{3^5} \cdot 9^4 y^4$$

$$= \frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 9^4 y^4$$

$$= 3402\, x^5 y^4$$

$r = 5$என (1) ல் பிரதியிட $t_{5+1} = t_6 = 9C_5\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot (9y)^5$

$$= 9C_5 \frac{x^4}{3^4} \cdot 9^5 y^5$$

$$= 91854\, x^4 y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{11}$ –ன் விரிவில் x^{10}–ன் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$– ன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r \qquad \ldots (1)$

$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{11}$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக

$$t_{r+1} = 11C_r (2x^2)^{11-r} \left(\frac{-3}{x}\right)^r$$

$$= 11C_r 2^{11-r} x^{2(11-r)} (-3)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= 11C_r 2^{11-r} (-1)^r \cdot 3^r x^{22-3r}$$

x^{10} –ன் கெழுவைக்காண $22-3r = 10$ என்க.

$\Rightarrow \qquad r = 4$

$r = 4$ என (1) ல் பிரதியிட, $t_5 = 11C_4 2^{11-4} 3^4 x^{10} = 11C_4 \cdot 2^7 3^4 x^{10}$

$\therefore\ x^{10}$ – ன் கெழு $11C_4 2^7 3^4$.

எடுத்துக்காட்டு 2.46

$\left(2x + \frac{1}{2x^2}\right)^9$ – ன் விரிவில் x யைச் சாராத உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

$(x + a)^n$ – ன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$

$\left(2x+\frac{1}{2x^2}\right)^9$ என்பதனை $(x + a)^n$ ஒப்பிடுக.

$$\therefore \quad t_{r+1} = 9C_r (2x)^{9-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r$$

$$= 9C_r 2^{9-r} x^{9-r} \frac{1}{3^r} x^{-2r}$$

$$t_{r+1} = 9C_r \frac{2^{9-r}}{3^r} \cdot x^{9-3r} \qquad \ldots (1)$$

x – யை சாராத உறுப்பைக் காண x ன் அடுக்கை ‘ 0 ’ விற்கு சமன்படுத்த

$$9 - 3r = 0$$

$$\therefore \quad r = 3$$

$r = 3$ ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$t_{3+1} = 9C_3 \frac{2^{9-3}}{3^5} \cdot x^0 = 9C_3 \frac{2^6}{3^5} = 1792$$

பயிற்சி 2.6

1. ஈருறுப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்துக.

   (i) $(2a-3b)^4$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$ (iii) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$

2. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க:

   (i) $(101)^4$ (ii) $(999)^5$

3. $(x–2y)^{13}$என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

4. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

   (i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{11}$ (ii) $\left(3x+\frac{x^2}{2}\right)^8$ (iii) $\left(2x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{10}$

5. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் x – ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க

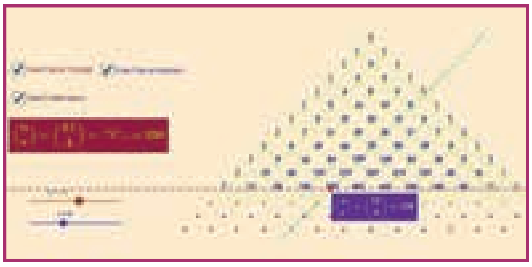
   (i) $\left(x^2-\frac{2}{3x}\right)^9$ (ii) $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ (iii) $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ன் விரிவில் x – ஐச் சாராத உறுப்பு $\frac{1\cdot 3\cdot 5...,(2n-1)2^n}{n!}$ என நிறுவுக.

7. $(1+x)^{2n}$ – ன் விரிவில் நடு உறுப்பு $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)2^n x^n}{n!}$ எனக் காண்பி.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

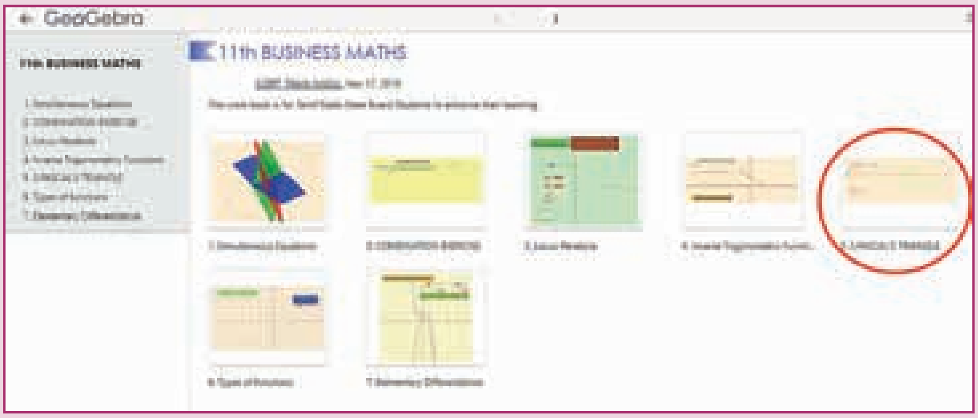
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Pascal's Triangle"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

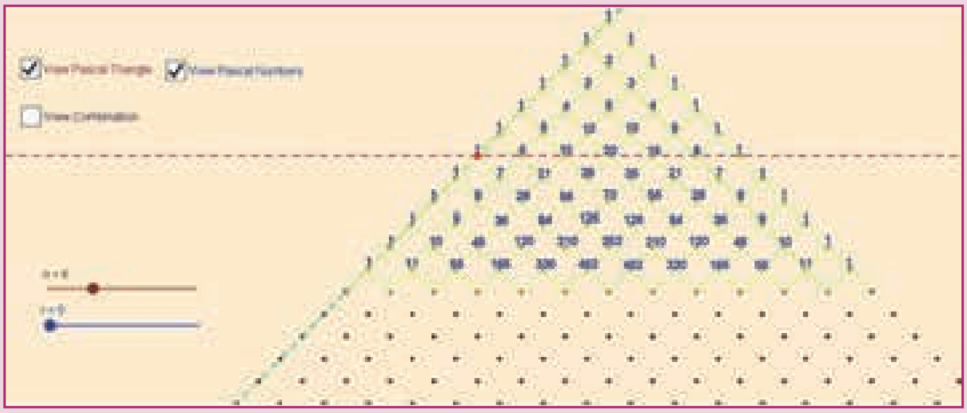
படி - 2

"Pascal's Triangle" க்கான பணித்தாளில், "View Pascal Triangle" மற்றும் "View Pascal's Numbers" பெட்டிகளைச் சொடுக்கி பாஸ்கல் எண்களைக் கவனிக்கவும், இப்பொழுது "view Combination" பெட்டியைச் சொடுக்கினால் nCr–இன் மதிப்பு தோன்றும். கணக்கீடு செய்து ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒப்பீடு செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 2.7

9YBQX8

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. $nC_3 = nC_2$ எனில் nc_4 ன் மதிப்பு

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2. $np_2 = 20$ எனும் பொழுது n – ன் மதிப்பு

(a) 3 (b) 6 (c) 5 (d) 4

3. 5 விளையாட்டு வீரர்களிலிருந்து நான்கு 4 பேரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

(a) 4! (b) 20 (c) 25 (d) 5

4. $nP_r = 720(nC_r)$, எனில் r –ன் மதிப்பு

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

5. ஒரு நாணயம், ஐந்துமுறை சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் அனைத்து சாத்திய கூறுகளின் எண்ணிக்கை

(a) 2^5 (b) 5^2 (c) 10 (d) $\frac{5}{2}$

6. n – பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை

(a) nC_2 (b) $nC_2 - 2$ (c) $nC_2 - n$ (d) $nC_2 - 1$

7. அனைத்து $n \in N$ க்கு $n(n+1)(n+2)(n+3)$ – ஐ வகுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய மிகை முழு எண் ஆனது

(a) 2 (b) 6 (c) 20 (d) 24

8. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(a) n (b) $n + 1$ (c) $n - 1$ (d) $2n$

9. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $nC_1 + nC_2 + nC_3 + \ldots\ldots\ldots + nC_n$ ன் மதிப்பு

(a) 2^n (b) $2^n - 1$ (c) n^2 (d) $n^2 - 1$

10. $(x-2y)^7$ என்பதன் விரிவில், x^3 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

(a) 3வது (b) 4வது (c) 5வது (d) 6வது

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவின் நடு உறுப்பு ஆனது

(a) $10C_4\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $10C_5$ (c) $10C_6$ (d) $10C_7 x^4$

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{6}$ ன் விரிவின் மாறிலி உறுப்பு

(a) 156 (b) 165 (c) 162 (d) 160

13. $(3+\sqrt{2})^8$ என்பதன் விரிவின் கடைசி உறுப்பு

(a) 81 (b) 16 (c) $8\sqrt{2}$ (d) $27\sqrt{3}$

14. $\frac{kx}{(x+4)(2x-1)}=\frac{4}{x+4}+\frac{1}{2x-1}$ எனில் k ன் மதிப்பு

(a) 9 (b) 11 (c) 5 (d) 7

15. எழுத்துக்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில் NUMBER என்ற வார்த்தையிலிருந்து அமைக்கப்படும் மூன்று எழுத்து வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 206 (b) 133 (c) 216 (d) 300

16. நான்கு இணை கோடுகள், மற்றொரு மூன்று இணை கோடுகளோடு வெட்டிக் கொள்ளும் தொகுப்பிலிருந்து உருவாக்கப்படும் இணைகரங்களின் எண்ணிக்கை

(a) 18 (b) 12 (c) 9 (d) 6

17. ஒரு தேர்வின் வினாத்தாளின் சரியா அல்லது தவறா என்ற வகையில் 10 வினாக்கள் உள்ளன. அவை விடையளிக்கப்படும் வழிகள்

(a) 240 (b) 120 (c) 1024 (d) 100

18. $(5C_0+5C_1)+(5C_1+5C_2)+(5C_2+5C_3)+(5C_3+5C_4)+(5C_4+5C_5)$ ன் மதிப்பு

(a) 2^6-2 (b) 2^5-1 (c) 2^8 (d) 2^7

19. வெவ்வேறு இலக்கங்களை உடைய 9 இலக்க எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

(a) 10! (b) 9! (c) $9\times 9!$ (d) $10\times 10!$

20. " CHEESE " என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துக்களை கொண்டு அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 120 (b) 240 (c) 720 (d) 6

21. 13 விருந்தினர்கள் ஓர் இரவு விருந்தில் கலந்து கொள்கிறார்கள், அவ்விருந்தில் நடைபெறும் கைக்குலுக்கள்களின் எண்ணிக்கை

(a) 715 (b) 78 (c) 286 (d) 13

22. எழுத்துக்கள் திரும்ப வராத நிலையில் " EQUATION " , என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கப்படும், பொருள்படும் (அல்லது) பொருள்படா வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 7! (b) 3! (c) 8! (d) 5!

23. ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தின் ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல் 256 எனில், அவ்விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 9

24. பொருட்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில், வெவ்வேறான n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை ஒரே நேரத்தில் தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

(a) r^n (b) n^r (c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) $\frac{n!}{(n+r)!}$

25. ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல்

(a) 2^n (b) n^2 (c) $2n$ (d) $n+17$

இதரக் கணக்குகள்

1. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$

2. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{x-4}{x^2-3x+2}$

3. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2}$

4. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$

5. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை காண்க

(i) $\frac{7!}{6!}$ (ii) $\frac{8!}{5!}$ (iii) $\frac{9!}{6!\,3!}$

6. A, B, C , D, E, F என்ற 6 எழுத்துகளிலிருந்து 5 எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வகை குறியீடுகளை அமைக்க முடியும்? a) திரும்பி வராமை b) திரும்பி வரக்கூடியவை c) திரும்பி வராமை ஆனால் E என்ற எழுத்திலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும் d) திரும்பி வராமை ஆனால் $C\ A\ B$ ல் முடிவடைய வேண்டும்.

7. 20 பரிசு சீட்டுகள் கொண்ட தொப்பியிலிருந்து, 4 சீட்டுகள் வரிசையாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. முதல் சீட்டை எடுப்பவர் காரைப் பரிசாகப் பெறுகிறார். இரண்டாவது சீட்டுக்கு இரு சக்கர வாகனமும், மூன்றாவது சீட்டுக்கு மிதிவண்டியும் மற்றும் நான்காவது சீட்டுக்கு இரு சக்கரங்களை கொண்ட உந்து வண்டி பரிசாக கிடைக்கிறது. இந்த பரிசுகள் எத்தனை வழிகளில் வழங்கப்படுகிறது?

8. 9 கணிதம், 8 பொருளாதாரம் மற்றும் 7 வரலாற்று புத்தகங்களின் தொகுப்பில் இருந்து எத்தனை வழிகளில் 2 கணிதம், 2 பொருளாதாரம் மற்றும் 2 வரலாற்று புத்தகங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

9. 3 சிவப்பு, 2 மஞ்சள் மற்றும் 2 பச்சை நிற சமிக்கைகு (signal) கொடிகள் உள்ளன. செங்குத்தான கொடிக்கம்பத்தில் கொடிகளைப் பயன்படுத்தி நாம் விரும்பும் எத்தனை வகையான பல்வேறு சமிக்ஞைகளை பெற முடியும்?

10. $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{17}$ என்ற விரிவாக்கத்தில் x^{11} ன் கெழுவைக் காண்க.

தொகுப்புரை

- ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கம் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகும். இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என குறிக்கப்படுகிறது.
- n என்ற இயல் எண்ணுக்கு $n! = n(n-1)\ (n-2)\ldots 3\times 2\times 1$
- $0!=1$
- இரண்டு பணிகளில் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி m மற்றும் n வழிகளில் செயல்படுத்தப்படுகிறது எனில் இரண்டு பணிகளும் $(m+n)$ வழிகளில் செயல்படுத்த முடியும்.
- n பொருள்களின் r என்ற பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் எடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை என்பது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையாகும்.
- $np_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- $np_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$
- $np_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$
- $np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
- $np_r = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$
- n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும் பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்

- $\frac{n!}{p!\,q!}$ என்பது n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.இங்கு $p+q=n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை வட்ட வரிசை மாற்றத்தில் வலச்சுற்று (clock wise) இடச்சுற்று (anti-clockwise) ஆகியவற்றிற்கான வேறுபாடு காணமுடிந்தால், பொருள்களிள் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n-1)!$ ஆகும்

- வட்ட வரிசைமாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களில் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.

- n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்வு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை சேர்வுகள் ஆகும்.
- n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகள் nc_r ஆகும்.
- $nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r < n$
- $nC_n = 1 = nC_0$.
- $nC_1 = n.$
- $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$
- $nC_x = nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n.$
- $nC_r = nC_{n-r}$.
- $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r$
- $(x+a)^n = nC_o x^n a^o + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + nC_{n-1} x^1 a^{n-1}$
  $+ nC_n x^0 a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_r x^{n-r} a^r$
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவில் $n+1$ என்ற உறுப்புகள் இருக்கும்.

- இந்த விரிவாக்கத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்புகளில் உள்ள x மற்றும் a ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்.

- $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3 \ldots\ldots nC_r \ldots nC_n$ ஆகியவைகளில் $C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_r \ldots C_n$ எனவும் குறிக்கப்படும். அவைகள் ஈருறுப்புக் கெழுக்கள்.

- $r = 0, 1, 2, \ldots n$ ஆகியவற்றிற்கு $nC_r = nC_{n-r}$, எனவே $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் இரு முனைகளிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் சமமானவையாகும். மேலும் , $nC_0 = nC_n, nC_1 = nC_{n-1}, nC_2 = nC_{n-2}$

- ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் 2^n ஆகும்.
- ஒற்றைப்படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டை படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$.

கலைச்சொற்கள்	
ஈருறுப்பு	Binomial
எண்ணுதலின் கொள்கை	Principle of counting
எண்ணுதலின் பெருக்கல் கொள்கை	Multiplication Principle of counting
ஒரு படிக்காரணி	Linear factor
கணிதத் தொகுத்தறிதல்	Mathematical Induction
காரணீயப் பெருக்கம்	Factorial
கெழு	Coefficient
சாரா உறுப்பு	Independent term
சேர்வு	Combination
பகுதிப் பின்னங்கள்	Partial fractions
பாஸ்கலின் முக்கோணம்	Pascal's Triangle
மைய உறுப்பு	Middle term
வட்ட வரிசை மாற்றம்	Circular Permutation
வரிசை மாற்றங்கள்	Permutations
விகிதமுறு கோவை	Rational Expression

அத்தியாயம் 3

பகுமுறை வடிவியல்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- இயங்குவரை
- இருகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்
- ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகளின் கருத்துரு
- இரட்டை நேர்க்கோடுகள்
- ஒருவட்டத்தின் பொதுவடிவ மற்றும் துணையலகு சமன்பாடுகள்
- வட்டத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டின் மையம் மற்றும் ஆரம்
- ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல்
- ஒரு வட்டத்திற்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு
- கூம்புவெட்டியின் வகைகளை அறிதல்
- பரவளையத்தின் திட்டச்சமன்பாடு, குவியம், இயக்குவரை பரவளையத்தின் செவ்வகலம் மற்றும் வணிகப் பயன்பாடுகள்

9YKLYV

அறிமுகம்

"Geometry" என்ற சொல்லானது கிரேக்க மொழியின் "geo" மற்றும் "metron" என்ற சொற்களிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டது. "geo" என்றால் பூமி என்றும், "metron" என்றால் அளப்பது என்றும் பொருளாகும்.

ரானே டெகார்டே
(1596-1650)

வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், கோடுகள், வளைவுகள், மேற்பரப்பு போன்றவைகளையும், அவைகளின் பண்புகளையும் பற்றியப் படிப்பாகும். வடிவியல் வளைவரைகளுக்கும், இயற்கணித சமன்பாடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை வலியுறுத்துவது, பகுமுறை வடிவியலின் முக்கியப் பங்காகும்.

புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு தத்துவ மேதையும், கணித மேதையுமான, ரானே டெகார்டே (1596-1650), இயற்கணிதத்தை பயன்படுத்தி, வடிவியலை கற்பது தொடர்பான, முறையான கற்றலை முதன்முதலில் தன்னுடைய நூலான "la Geometry" ல் 1637ல் பிரசுரித்தார். இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியலின் சேர்வு, தற்போது பகுமுறை வடிவியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதனால் அவர் பகுமுறை வடிவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார்.

விமானம் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலையில் பகுமுறை வடிவியல் பெருமளவில் பயன்படுகிறது. குறிப்பாக விமானப் பாகங்களின் வடிவங்கள் சார்ந்த துறையில் பெருமளவில் பயன்படுகிறது.

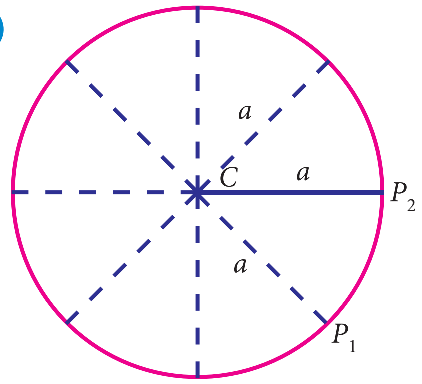
3.1 நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை (Locus)

வரையறை 3.1

ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவ கணித விதியின் அல்லது விதிகளின் அடிப்படையில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை அதன் இயங்குவரை அல்லது நியமப்பாதை எனப்படும்.

3.1.1 இயங்குவரையின் சமன்பாடு (Equation of a locus)

இயங்குவரையில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவுகளால் ஈடு செய்யப்படும் x, y – ல் உள்ள எந்த ஒரு தொடர்பும் இயங்குவரைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

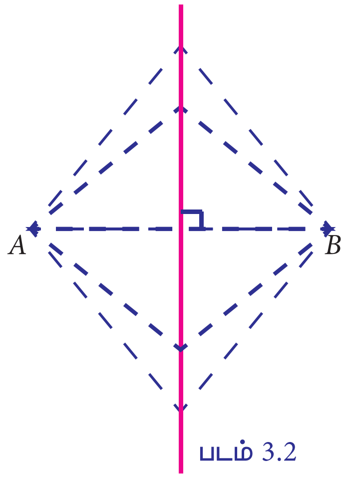


படம் 3.1

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) $C(h, k)$ என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதுூரத்தில் உள்ள $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை, அப்புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டமாகும். நிலையான புள்ளி c ஐ வட்டத்தின் மையம் என்போம்.

(ii) A, B என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளியின் இயங்குவரை AB க்கு மையக் குத்துக்கோடாகும்.



படம் 3.2

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரே நேர் திசையில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி ஆதியிலிருந்து உள்ள தொலைவு அப்புள்ளியின் y- அச்சிலிருந்து அதன் தொலைவைப் போல் மூன்று மடங்கெனில் அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து Y -அச்சிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி A என்க.

$$\text{OP} = 3\ \text{AP} \quad \text{கொடுக்கப்பட்டுள்ளது}$$

$$\text{OP}^2 = 9\text{AP}^2$$

$$(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = 9x_1^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 9x_1^2$$

$$8x_1^2 - y_1^2 = 0$$

$\therefore\ P(x_1, y_1)$ ன் இயங்குவரை $8x^2 - y^2 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$(2, -3)$ மற்றும் $(3, -4)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும் ஒரு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை $A(2, -3)$ மற்றும் $B(3, -4)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$PA = PB \quad \text{கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 3)^2 = (x_1 - 3)^2 + (y_1 + 4)^2$$

$$x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2 + 6y_1 + 9 = x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 + 8y_1 + 16$$

i.e., $\quad 2x_1 - 2y_1 - 12 = 0$

i.e., $\quad x_1 - y_1 - 6 = 0$

$P(x_1, y_1)$ ன் இயங்குவரை $x - y - 6 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$(-5, 1)$ மற்றும் $(3, 2)$ என்ற புள்ளிகளுடன் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் வகையில் நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $\text{A}(-5, 1)$ மற்றும் $\text{B}(3, 2)$ என்க.

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$\angle APB = 90^{o}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது ΔAPB ஓர் செங்கோண முக்கோணமாகும்

$$BA^2 = PA^2+PB^2$$

$$(3+5)^2 + (2-1)^2 = (x_1+5)^2+(y_1-1)^2+(x_1-3)^2+(y_1-2)^2$$

$$65 = x_1^2+10x_1+25+y_1^2-2y_1+1+x_1^2-6x_1+9+y_1^2-4y_1+4$$

அதாவது $2x_1^2+2y_1^2+4x_1-6y_1+39-65 = 0$

அதாவது $x_1^2+y_1^2+2x_1-3y_1-13 = 0$

எனவே $P(x_1, y_1)$ ன் இயங்குவரை $x^2+y^2+2x-3y-13=0$

பயிற்சி 3.1

1. $(1, 3)$ என்ற புள்ளிக்கும், x-அச்சுக்கும், சமதொலைவில் உள்ள ஒரு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

2. $(3, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் 4 அலகு தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

3. ஒரு நகரும் புள்ளி, $(2,1)$ மற்றும் $(1,2)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து உள்ள தொலைவுகள் $2:1$ என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருகிறதெனில், அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

4. $(7, -6)$ மற்றும் $(3,4)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில், x - அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியைக் காண்க.

5. $A(-1, 1)$ மற்றும் $B(2, 3)$ என்பன இரு நிலைப்புள்ளிகள் எனில் முக்கோணம் APB ன் பரப்பளவு 8 ச.அலகுகள் என்றவாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் காண்க.

3.2 நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு (System of straight lines)

3.2.1 நினைவு கூறுதல் – நேர்க்கோடுகள்

முந்தைய வகுப்புகளில், பகுமுறை வடிவியல் பற்றிய அடிப்படை கருத்துருக்களை, அறிந்துள்ளோம். தூர வாய்பாடு, பிரிவு வாய்பாடு, முக்கோணத்தின் பரப்பு காணும் வாய்பாடு மற்றும் கோடுகளின் சாய்வு முதலியனவற்றை கீழ்வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். நேர்கோடுகளின் பலவகை சமன்பாடுகளை, 10 ஆம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். 11 ஆம் வகுப்பின் புதிய கருத்துக்களையும், புதிய வரையறைகளையும் நன்கு புரிந்து கொள்ள, நினைவு கூறுதல் அவசியமாகிறது.

நேர்க்கோடுகளின் பல்வேறு வடிவங்கள்:

(i) சாய்வு– வெட்டுதுண்டுவடிவம்

சாய்வு m மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு c உடைய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx+c$ ஆகும்

(ii) புள்ளி– சாய்வு வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்வதும் சாய்வு m உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(iii) இருபுள்ளிகள் வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ஆகும்.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு அணிக்கோவை வடிவில்

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(iv) வெட்டுதுண்டு வடிவம்

x-அச்சு வெட்டுதுண்டு a மற்றும் y-அச்சு வெட்டுத்துண்டு b எனில், நேர்க்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ஆகும் .

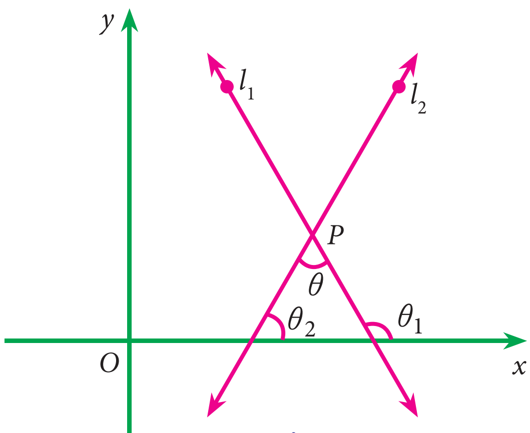
(v) பொதுவடிவம்

நேர்க்கோட்டின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ ஆகும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள் . மேலும் a, b என்பன ஒரே சமயத்தில் பூச்சியமற்ற மாறிலிகள் ஆகும்.

3.2.2 இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் (Angle between two straight lines)

l_1 மற்றும் l_2 என்பன, P-யில் வெட்டிக் கொள்ளும் $l_1 : y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $l_2 : y = m_2 x + c_2$ என்ற சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படும் இருகோடுகள் என்க.

θ_1 மற்றும் θ_2 என்பன l_1 மற்றும் l_2 கோடுகளால் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் கோணங்கள் என்க. எனவே



படம் 3.3

கோடுகளின் சாய்வுகள் $m_1 = \tan\theta_1$ மற்றும் $m_2 = \tan\theta_2$ என்க.

கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \theta_1 - \theta_2$ (படம் 3.3)

$$\therefore \quad \tan\theta = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$$

$$= \left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

குறிப்பு

(i) இங்கு $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ என்பது மிகை (>0) எனில், l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைபட்ட கோணம் θ என்பது குறுங்கோணமாகும். $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ –ன் மதிப்பு குறை (<0) எனில், θ என்பது விரிகோணமாக இருக்கும்

(ii) இருகோடுகள் இணையாக இருப்பதற்கான தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு அவற்றின் சாய்வுகள் சமம். அதாவது $m_1 = m_2$.

(iii) இருகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதற்கான, தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு, அந்தக் கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆக இருக்க வேண்டும், அதாவது $m_1 \; m_2 = -1$. (இங்கு m_1 மற்றும் m_2 என்பன முடிவுறு எண்ணாகும்)

உங்களுக்கு தெரியுமா?

x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து, ஆனால் இவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $m_1 m_2 = -1$ என்பது உண்மையல்ல. ஏனெனில் x-அச்சின் சாய்வு $m_1 = 0$, y- அச்சின் சாய்வு m_2 முடிவிலி.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 என்பன $2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ ன் சாய்வுகள் என்க.

இங்கு $m_1 = 2, m_2 = -1$

θ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{2+1}{1+2(-1)}\right| = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

3.2.3 ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு (Distance of a point from a line)

(i) $P(l,m)$ என்றபுள்ளியிருந்து $ax+by+c=0$ –ன் செங்குத்துதூரம் $d = \left|\frac{al+bm+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

(ii) ஆதி $(0, 0)$ விலிருந்து $ax+by+c=0$ –ன் செங்குத்து தொலைவு $d = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$x-y+5=0$ என்ற கோடு ஆதியிலிருந்தும் $P(2,\ 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்தும் சம தொலைவில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $x-y+5=0$

$P(2,\ 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து உள்ள செங்குத்து தொலைவு $= \left|\frac{2-2+5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

$$= \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$(0,\ 0)$ விலிருந்து உள்ள தொலைவு $= \left|\frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$

கொடுக்கப்ட்ட கோடு $(0,\ 0)$ மற்றும் $(2,\ 2)$ புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளது

எடுத்துக்காட்டு 3.6

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{4}$, மேலும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு 3, எனில் மற்றோர் கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவகைளை சாய்வுகளாக உடைய நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

இங்கு $m_1 = 3$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{3-m_2}{1+3m_2}\right|$$

$$1 = \left(\frac{3-m_2}{1+3m_2}\right)$$

$$1+3m_2 = 3-m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{2}$$

மற்றோர் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{2}$.

3.2.4 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் (Concurrence of lines)

l_1 மற்றும் l_2 என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் பொதுவான புள்ளி 'P' எனில், P என்பது கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி எனப்படும். கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களின் சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதன் மூலம், வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு பொதுவான புள்ளியை பெற்றிருக்கும் எனில், அக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனப்படும். அந்த பொதுவான புள்ளி, கோடுகளின் ஒருங்கமைப் புள்ளி எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் புள்ளி வழிக் கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2 = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3 = 0 \quad \rightarrow (3)$$

என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று கோடுகள் என்க. இக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

$3x-4y-13=0, 8x-11y=33$ மற்றும் $2x-3y-7=0$ என்பன ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் எனக்காட்டுக. மேலும் அக்கோடுகளின் ஒருங்கமை புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $3x-4y-13 = 0 \quad \ldots (1)$

$$8x-11y = 33 \quad \ldots (2)$$

$$2x-3y-7=0 \qquad \ldots (3)$$

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -13 \\ 8 & -11 & -33 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 3(77-99) + 4(-56+66) - 13(-24+22)$$

$$= -66 + 40 + 26 = 0$$

$\Rightarrow$ கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் ஆகும்.

ஒருங்கமைப் புள்ளியைக் காண

சமன்பாடு $(1) \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6x-8y=26$

சமன்பாடு $(3) \times 3 \quad \Rightarrow \quad 6x-9y=21$

$$y = 5$$

$y=5$ எனும்பொழுது சமன்பாடு (2) லிருந்து $8x = 88$

$$x = 11$$

$\therefore$ ஒருங்கமைப் புள்ளி $(11, 5)$

எடுத்துக்காட்டு 3.8

$3x-5y-11=0, 5x+3y-7=0$ மற்றும் $x+ky=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில், k-ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -11 \\ 5 & 3 & -7 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1(35+33) - k(-21+55) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 34k = 68. \quad \therefore k = 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு தனியார் நிறுவனம், 2012 ஆம் ஆண்டு ஒரு எழுத்தரை ₹20,000/– ஊதியத்திற்கு, பணியில் அமர்த்துகிறது. 2017 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியம் ₹25,000 ஆக உயர்த்தப்படுகிறது. எனில்,

(i) மேற்பட்ட விவரங்களை y-எழுத்தரின் ஊதியம் மற்றும் x-அவரது பணி ஆண்டாக கொண்டு x, y -ல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக எழுதுக.

(ii) 2020 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியத்தை கணக்கிடுக.

தீர்வு

இங்கு y என்பது எழுத்தரின் ஊதியம் எனவும், x-யை எழுத்தரின் பணி ஆண்டு எனவும் கொள்க.

ஆண்டு (x)	ஊதியம் (y)
$2012(x_1)$	$20{,}000(y_1)$
$2017(x_2)$	$25{,}000(y_2)$
2020	?

மேற்பட்ட விவரங்களிலிருந்து x, y- ன் ஒரு படிச்சமன்பாடானது

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-20{,}000}{25{,}000-20{,}000} = \frac{x-2012}{2017-2012}$$

$$\frac{y-20{,}000}{5000} = \frac{x-2012}{5}$$

$$y = 1000x - 2012000+20{,}000$$

$$y = 1000x - 19{,}92{,}000$$

2020 ஆம் ஆண்டு அவரது சம்பளம்

$$y = 1000(2020)-19{,}92{,}000$$

$$y = ₹28000$$

பயிற்சி 3.2

1. சாய்வுகள் $\frac{1}{2}$ மற்றும் 3 உடைய நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

2. (4, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x-4y+12=0$ என்ற கோடு உள்ள செங்குத்து தூரத்தைக் காண்க.

3. $x+y-4=0, 3x+2=0$ மற்றும் $3x-3y+16=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனக்காட்டு.

4. $3x+4y=13; 2x-7y=-1$ மற்றும் $ax-y-14=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில் 'a' ன் மதிப்புக் காண்க.

5. ஒரு தனியார் உற்பத்தி நிறுவனம் 80 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை, ₹2,20,000 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது. மேலும் 125 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை ₹2,87,500 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது என்க. செலவு–வளைவரை ஒரு நேர்கோடு எனில், மேற்பட்ட விவரங்களுக்கான செலவு–வளைவரையைக் காண்க. மேலும் 95 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவை கணக்கிடுக.

3.3 இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines)

3.3.1 இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு (Combined equation of the pair of straight lines)

$l_1x+m_1y+n_1=0$ மற்றும் $l_2x+m_2y+n_2=0$ என்பன இரு தனித்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க.

அந்த நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(l_1x+m_1y+n_1)\ (l_2x+m_2y+n_2)=0$$

$$l_1l_2x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+m_1m_2y^2+(l_1n_2+l_2n_1)x+(m_1n_2+m_2n_1)y+n_1n_2=0$$

இது,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

என்ற இருபடி பொதுவடிவ சமன்பாட்டின் அமைப்பில் உள்ளது. (இங்கு a, b, c, f, g, h மாறிலிகள்) எனவே இதனை இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

3.3.2 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines passing through the origin)

x, y ன் இரண்டாம் படி சமபடித்தான சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2=0 \quad \ldots (1)$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர்க்கோடுகளின் தனித்த சமன்பாடுகள்

$y=m_1x$ மற்றும் $y=m_2x$ என்க.

அவற்றின் சேர்ப்பு சமன்பாடானது

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) ஆகியவை ஒரே இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன.

$$\therefore \frac{a}{m_1 m_2} = \frac{2h}{-(m_1 + m_2)} = \frac{b}{1}$$

$\Rightarrow \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $= \frac{a}{b}$

$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் கூடுதல் $= -\frac{2h}{b}$

3.3.3 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between pair of straight lines passing through the origin)

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

இதன் தனித்த கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 என்க .

$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ மற்றும் $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$.

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

'θ' ஐ ஒரு குறுங்கோணமாக எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\therefore \qquad \theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$$

குறிப்பு

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$

(ii) நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனில் $h^2 = ab$.

(iii) நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை எனில், $a + b = 0$

அதாவது x^2 ன் கெழு + y^2 ன் கெழு = 0

3.3.4 பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு (The condition for general second degree equation to represent the pair of straight lines)

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இருபடி பொதுச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

குறிப்பு

இதனை அணிக்கோவை வடிவில்

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$2x+y-1=0$, $x+2y-5=0$ என்ற தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(2x+y-1)(x+2y-5)=0$$

அதாவது $2x^2+xy-x+4xy+2y^2-2y-10x-5y+5=0$

$$2x^2+5xy+2y^2-11x-7y+5=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$ இதனை

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$a=2, b=3, h=\frac{5}{2}, g=3, f=\frac{7}{2}$ மற்றும் $c=4$

இரட்டை நேர்க்கோட்டிற்கான கட்டுப்பாடு

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=24+\frac{105}{2}-\frac{49}{2}-27-25=0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

இரட்டை நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ‘θ’ என்க.

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}-6}}{5}\right]$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப்போல இரண்டு மடங்கு எனில் $8h^2=9ab$ என நிறுவுக.

தீர்வு

m_1 , m_2 என்பன

$ax^2+2hxy+by^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

$$\therefore \quad m_1+m_2 = -\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1m_2=\frac{a}{b}$$

கணக்கின்படி $m_2=2m_1$

$$\therefore \quad m_1+2m_1 = -\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1\cdot 2m_1=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad m_1 = -\frac{2h}{3b} \text{ மற்றும் } 2m_1^2=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8h^2}{9b^2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad 8h^2 = 9ab$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$ இதனை

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, உடன் ஒப்பிடும்போது

$$a=2,\ b=3,\ h=\frac{7}{2},\ g=\frac{5}{2},\ f=\frac{5}{2},\ c=2$$

$$\text{ie.,} \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(6-\frac{25}{4}\right)-\frac{7}{2}\left(9-\frac{25}{4}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{35}{4}-\frac{15}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{21}{8}+\frac{25}{8} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

$$2x^2+7xy+3y^2 = 2x^2+6xy+xy+3y^2$$

$$= 2x(x+3y)+y(x+3y)$$

$$= (x+3y)(2x+y)$$

$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2 = (x+3y+l)(2x+y+m)$ என்க.

x –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த, $2l+m=5$ (1)

y –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த, $l+3m=5$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஐ தீர்க்க நமக்கு கிடைப்பது $m=1$ மற்றும் $l=2$

எனவே, இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு

$x+3y+2=0$ மற்றும் $2x+y+1=0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$

இங்கு $a=4, b=9, \quad h=-6$

$$h^2-ab=36-36=0$$

எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையாகும்.

$$4x^2-12xy+9y^2 = (2x-3y)^2$$

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$ என்பதை

$\Rightarrow \quad (2x-3y)^2+9(2x-3y)+8 = 0$ என எழுதலாம்.

$2x-3y = z$ என்க.

$$z^2+9z+8 = 0$$

$$(z+1)(z+8) = 0$$

$$z+1 = 0 \qquad z+8 = 0$$

$$2x-3y+1 = 0 \qquad 2x-3y+8 = 0$$

எனவே இரட்டை இணை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்

$2x-3y+1 = 0$ மற்றும் $2x-3y+8 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

$x^2+4xy+y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2+4xy+y^2=0$

இங்கு $a = 1, b = 1$ மற்றும் $h = 2$.

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'θ' என்க

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{4-1}}{2}\right|\right]$$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

k-ன் எம்மதிப்பிற்கு $2x^2+5xy+2y^2+15x+18y+k=0$ என்பது இரட்டை நேர்க் கோடுகளைக் குறிக்கும்?

தீர்வு

இங்கு $a = 2,\ b = 2,\ h = \frac{5}{2},\ g = \frac{15}{2},\ f = 9,\ c = k.$

கொடுக்கப்பட்ட கோடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிப்பதால்,

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = 0$$

i.e., $$4k+\frac{675}{2}-162-\frac{225}{2}-\frac{25}{4}k = 0$$

$$\Rightarrow \quad 16k+1350-648-450-25k = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9k = 252 \qquad \therefore\ k = 28$$

பயிற்சி 3.3

1. $ax^2 + 5xy - 6y^2 + 12x + 5y + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் a மற்றும் c -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 14x - 5y + 2 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

3. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

4. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

3.4 வட்டங்கள் (Circles)

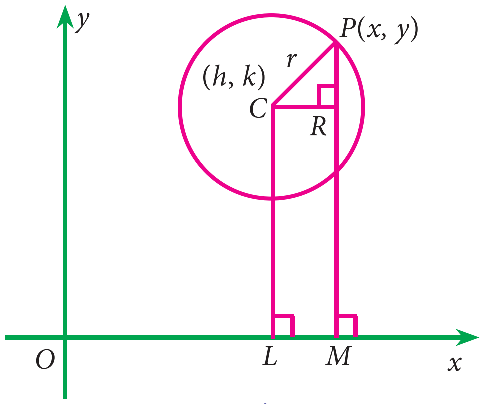
வரையறை 3.2

ஒரு நிலையானப் புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் மாறாத தூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்டம் எனப்படும். நிலையான புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் எனவும், மாறாத தூரத்தை அதன் ஆரம் எனவும் கூறுவர்.

3.4.1 மையம், ஆரம் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல் (The equation of a circle when the centre and radius are given)

வட்டத்தின் மையம் $C(h, k)$ எனவும், ஆரம் 'r' எனவும் கொள்க.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.



படம் 3.4

$$CP = r$$

$$CP^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$ இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பாக மையம் ஆதி எனில் $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

மையம் $(3, -1)$ மற்றும் ஆரம் 4 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

இங்கு $(h, k) = (3, -1)$ மேலும் $r = 4$

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 16$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = 16$$

$$x^2+y^2-6x+2y-6 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

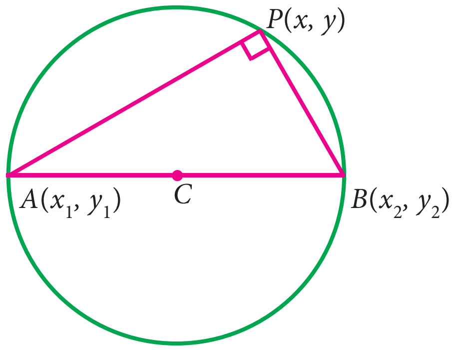
ஆதியை மையமாகவும், ஆரம் 3 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$ இங்கு $r = 3$

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = 9$

3.4.2 இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல் (Equation of a circle when the end points of a diameter are given)



படம் 3.5

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ என்பன விட்டத்தின் இரு முனைப்புள்ளிகள் என்க

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் $\angle APB = 90^\circ$

$\therefore$ (AP ன் சாய்வு) (BP ன் சாய்வு) $= -1$

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\times\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இதுவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$(2, 4), (3, -2)$ என்பன ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இங்கு $(x_1, y_1) = (2, 4)$ மற்றும் $(x_2, y_2) = (3, -2)$

$$\therefore (x-2)(x-3)+(y-4)(y+2) = 0$$

$$x^2+y^2-5x-2y-2 = 0$$

3.4.3 வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு (General equation of a circle)

வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்பதாகும்,

இங்கு g, f, c என்பன மாறிலிகள்.

$$x^2+y^2+2gx+2fy = -c$$

$$x^2+2gx+g^2-g^2+y^2+2fy+f^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2-g^2+(y+f)^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2 = g^2+f^2-c$$

$$[x-(-g)]^2+[y-(-f)]^2 = [\sqrt{g^2+f^2-c}]^2$$

இதனை $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது

வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$ என்றும், ஆரம் $\sqrt{g^2+f^2-c}$ என்றும் கிடைக்கும்.

குறிப்பு

பொது வடிவ இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டத்தை குறிப்பதற்கு கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்

(i) $a = b$ (அதாவது) x^2 ன் கெழு $= y^2$ ன் கெழு.

(ii) $h = 0$ (அதாவது) xy -ன் கெழு $=0$ (xy உறுப்பு கிடையாது).

எடுத்துக்காட்டு 3.20

$x^2+y^2-8x+6y-24=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-8x+6y-24=0$

இங்கு $g=-4$, $f=3$, $c=-24$

மையம் $= C(-g,-f)=C(4,-3)$

ஆரம் $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$=\sqrt{16+9+24}=7$ அலகு.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

a, b களின் எம்மதிப்புகளுக்கு $(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$ எனும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும்? வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$

கட்டுப்பாட்டின்படி,

(i) xy ன் கெழு $=0 \Rightarrow b-2=0$

$\therefore \quad b=2$

(ii) x^2 ன் கெழு $=y^2$ ன் கெழு $\Rightarrow a-2=b$

$a-2=2 \Rightarrow a=4$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $2x^2+2y^2+4x+4y-1=0$

எடுத்துக்காட்டு 3.22

$x^2+y^2+ax+by=0$ என்ற வட்டமானது $(1,2)$ மற்றும் $(1,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனில் 'a' மற்றும் 'b' -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$x^2+y^2+ax+by=0$ என்ற வட்டமானது $(1,2)$ மற்றும் $(1,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால்

$1 + 4 + a + 2b = 0$ மற்றும் $1 + 1 + a + b = 0$

$\Rightarrow \quad a + 2b = -5 \quad (1)$

மற்றும் $\quad a + b = -2 \quad (2)$

(1) மற்றும் (2) –ஐ தீர்ப்பதன் மூலம் நமக்கு கிடைப்பது $a = 1, b, = -3$.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $ax + 2y + 2 = 0$ என்ற கோட்டின் மீது அமையுமெனில் 'a'-ன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு

வட்ட மையம் $C(-1, 3)$

இது $\quad ax + 2y + 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளது.

எனவே $-a + 6 + 2 = 0$

$a = 8$

எடுத்துக்காட்டு 3.24

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ என்ற வட்டம் $(7, -5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக்காட்டு. மேலும் இப்புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையைக் காண்க.

தீர்வு

$A(7, -5)$ என்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

$(7, -5)$ ஐ பிரதியிட

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 7^2 + (-5)^2 - 6(7) + 4(-5) - 12$$

$$= 49 + 25 - 42 - 20 - 12 = 0$$

$\therefore \quad (7, -5)$ ஆனது வட்டத்தின் மேல் அமைகிறது

இங்கு $\quad g = -3$ மற்றும் $f = 2$

$\therefore \quad$ மையம் $= C(3, -2)$

விட்டத்தின் மறுமுனை $B(x, y)$ என்க.

AB ன் மையம் $= \left(\frac{x+7}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = C(3,-2)$

$\frac{x+7}{2} = 3$	$\frac{y-5}{2} = -2$
$x+7=6$	$y-5=-4$
$x=-1$	$y=1$

$\therefore$ விட்டத்தின் மறுமுனை $(-1, 1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

$(0,0), (1,2)$ மற்றும் $(2,0)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்க.

வட்டமானது $(0, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$c = 0 \qquad \ldots (1)$$

வட்டமானது $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$1^2+2^2+2g(1)+2f(2)+c = 0$$

$$2g + 4f + c = -5 \qquad \ldots (2)$$

வட்டமானது $(2, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$2^2+0+2g(2)+2f(0)+c = 0$$

$$4g + c = -4 \qquad \ldots (3)$$

(1) ஐ (3) ல் பிரதியிட

$4g = -4 \quad \Rightarrow g = -1$

சமன்பாடுகள் $(1), (2)$ மற்றும் (3) –ஐ தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது

$g=-1, \quad f=-\frac{3}{4}, c = 0$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2(-1)x+2\left(\frac{-3}{4}\right)y+0=0$

அதாவது, $2x^2+2y^2-4x-3y = 0$

3.4.4 வட்டத்தின் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of a circle)

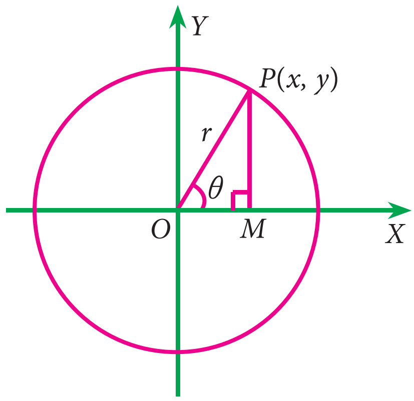
ஆதியை மையமாகவும் r ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x,y)$ வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. x -அச்சின் மிகை திசையோடு OP என்ற நேர்கோடு θ என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்க.

x -அச்சுக்கு செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.

படத்திலிருந்து, $\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் ஆகும். இங்கு 'θ' என்பது துணையலகு மற்றும் $0 \le \theta \le 2\pi$.



படம் 3.6

எடுத்துக்காட்டு 3.26

$x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow x = 5\cos\theta,\ y = 5\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

பயிற்சி 3.4

1. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாடு காண்க.

   (i) மையம் $(3,5)$ மற்றும் ஆரம் 5 அலகுகள்

   (ii) மையம் $(0, 0)$ மற்றும் ஆரம் 2 அலகுகள்

2. பின்வரும் வட்டங்களின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க

   (i) $x^2 + y^2 = 16$

   (ii) $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$

   (iii) $5x^2 + 5y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$

   (iv) $(x+2)(x-5) + (y-2)(y-1) = 0$

3. 16π அலகினை சுற்றளவாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மையம் $(-3, -2)$ எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

4. $(1,4)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகவும் $(2,3)$ ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. $(0,1),(4,3)$ மற்றும் $(1, -1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

6. $(1, 0), (0, 1)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும் $x+y = 1$ என்ற கோட்டின் மேல் மையத்தையும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. $x+y=6$ மற்றும் $x+2y = 4$ ஆகியவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்டதும் $(2, 6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

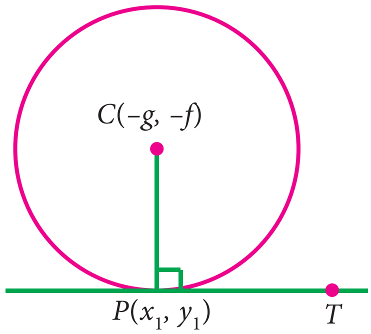
8. $(4, 7)$ மற்றும் $(-2, 5)$ என்பவை ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x = 3\cos\theta, y=3\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$ என்பன ஒரு வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் எனில், வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு காண்க.

3.4.5 தொடுகோடுகள் (Tangents)

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்தில் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$ ஆகும்.



படம் 3.7

கிளைமுடிவு:

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ல் x^2 ஐ xx_1 எனவும், y^2 ஐ yy_1 எனவும் x ஐ $\frac{x+x_1}{2}$ எனவும் மேலும் y ஐ $\frac{y+y_1}{2}$ எனவும் பிரதியிட (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

$(-2, 5)$ என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2+3x-8y+17=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + 3 \times \frac{1}{2}(x + x_1) - 8 \times \frac{1}{2}(y + y_1) + 17 = 0$$

இங்கு $(x_1, y_1) = (-2, 5)$

$$-2x + 5y + \frac{3}{2}(x - 2) - 4(y + 5) + 17 = 0$$

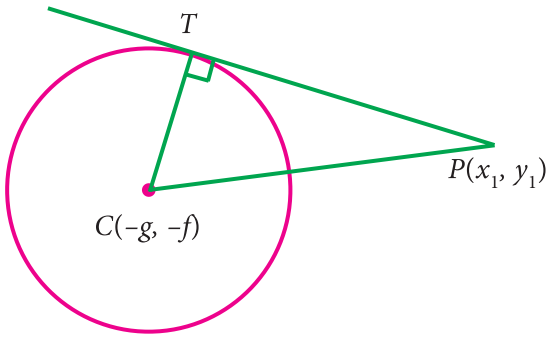
$$-2x + 5y + \frac{3}{2}x - 3 - 4y - 20 + 17 = 0$$

$$-4x + 10y + 3x - 6 - 8y - 40 + 34 = 0$$

தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x - 2y + 12 = 0$ ஆகும்.

வட்டத்திற்கான தொடுகோட்டின் நீளம் (Length of the tangent to the circle)

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் $PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$



படம் 3.8

குறிப்பு

(i) P என்ற புள்ளி வட்டப் பரிதியின் மேல் இருந்தால் $PT^2 = 0$

(ii) P என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், $PT^2 > 0$

(iii) $PT^2 < 0$ எனில் P யானது வட்டத்திற்கு உள்ளே அமையும்

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$x^2+y^2+8x+4y+8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு $(2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

அதாவது தொடுகோட்டின் நீளம் $= \sqrt{x_1^2+y_1^2+8x_1+4y_1+8}$

$= \sqrt{2^2+3^2+8(2)+4(3)+8}$ [இங்கு $(x_1,y_1)=(2,3)$]

$= \sqrt{49}$

தொடுகோட்டின் நீளம் $= 7$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

$P(0,1)$, $Q(5,9)$, $R(-2, 3)$ மற்றும் $S(2, 2)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x+4y-8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-4x+4y-8 = 0$

$$PT^2 = x_1^2+y_1^2-4x_1+4y_1-8$$

$P(0, 1)$ என்ற புள்ளியில் $PT^2 = 0+1+0+4-8 = -3 < 0$

$Q(5, 9)$ என்ற புள்ளியில் $QT^2 = 25+81-20+36-8 = 114 > 0$

$R(-2, 3)$ என்ற புள்ளியில் $RT^2 = 4+9+8+12-8 = 25 > 0$

$S(2, 2)$ என்ற புள்ளியில் $ST^2 = 4+4-8+8-8 = 0$

எனவே P என்பது வட்டத்திற்கு உள்ளேயும், Q மற்றும் R என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயும், S வட்டத்தின் மேலேயும் அமைகிறது.

முடிவு

$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையானக் கட்டுப்பாடு $c^2=a^2(1+m^2)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30

$3x+4y-k=0$ என்ற கோடானது $x^2+y^2-64 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனில் k ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் $x^2+y^2-64=0$ மற்றும் $3x+4y-k=0$

தொடுகோடாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு $c^2=a^2(1+m^2)$

இங்கு $a^2=64$, $m=\frac{-3}{4}$, $c=\frac{k}{4}$

$$c^2=a^2(1+m^2)\Rightarrow\frac{k^2}{16}=64\left(1+\frac{9}{16}\right)$$

$$k^2=64\times25$$

$$k=\pm 40$$

பயிற்சி 3.5

1. $(-2,-2)$ என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு காண்க.

2. $P(1,0)$, $Q(2,1)$ மற்றும் $R(2,3)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?

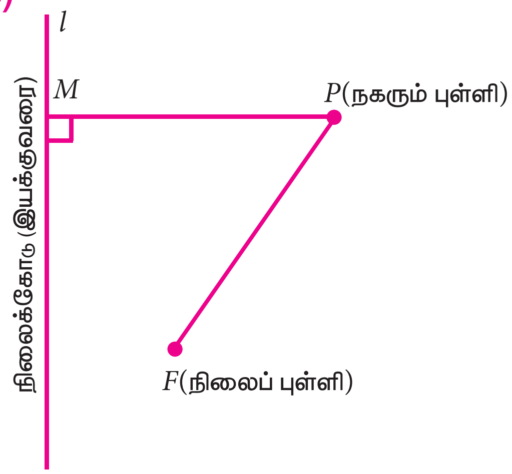
3. $(1,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x+4y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

4. $3x+4y-P=0$ என்ற கோடு $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு எனில் P யின் மதிப்புக் காண்க.

3.5 கூம்பு வெட்டு முக வளைவரைகள் (Conics)

வரையறை 3.3

ஒரு தளத்தில், நகரும் புள்ளியானது, நிலையானக் கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியின் செங்குத்து தூரமும், நிலையான புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரமும் மாறாத விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்கு பாதை கூம்பு வெட்டு முக **வளைவரை** எனப்படும்.



படம் 3.9

படத்தில் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். நிலையான கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். P என்பது நகரும் புள்ளி எனில், $\frac{FP}{PM}=e$, மாறிலி எனுமாறு இயங்கும் P –ன் இயங்குபாதை கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை எனப்படும். இங்கு 'e' என்பது மையத் தொலைத் தகவு எனப்படும்.

மையத் தொலைத்தகவின் மதிப்பின் அடிப்படையில் கூம்பு வெட்டு முக வளைவரையை கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தலாம்,

a) $e = 1$, எனில், கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை பரவளையம் எனப்படும்

b) $e < 1$, எனில், இவ்வளைவரை நீள்வட்டம் எனப்படும்.

c) $e > 1$, எனில், இவ்வளைவரை அதிபரவளையம் எனப்படும்.

பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது,

(i) இரட்டைக் கோடுகளை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ ஆகும்.

(ii) வட்டத்தை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $a = b$ மற்றும் $h = 0$ ஆகும்.

மேற்கண்ட இரு கட்டுப்பாடுகள், நிறைவு செய்யப்படவில்லை எனில், $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில்

(i) $h^2 - ab = 0$ எனில், ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்

(ii) $h^2 - ab < 0$ எனில், ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(iii) $h^2 - ab > 0$ எனில், ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

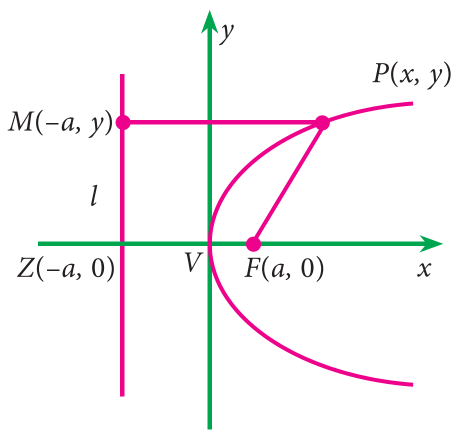
3.5.1 பரவளையம் (Parabola)

வரையறை 3.4

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தும், நிலையானக் கோட்டிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை, பரவளையம் எனப்படும்.

$y^2 = 4ax$ என்பது பரவளையத்தின் திட்ட வடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இது வலப்பக்கம் திறப்புடையது.

3.5.2 பரவளையத்துடன் தொடர்புடைய வரையறைகள் (Definitions regarding a parabola) $y^2 = 4ax$



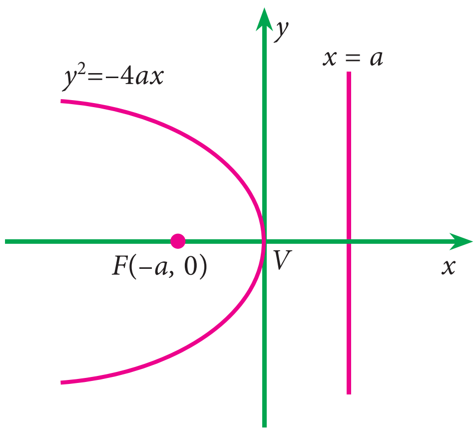
படம் 3.10

குவியம்	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். இங்கு $F(a,0)$ என்பது குவியம் ஆகும்.
இயக்குவரை	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையனக் கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். இங்கு இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -a$.
அச்சு	பரவளையத்தின் அச்சானது பரவளையத்தின் சமசீர் அச்சாகும். $y^2 = 4ax$ வளைவரை x -அச்சை பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது. எனவே x -அச்சு அல்லது $y = 0$ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் அச்சு ஆகும்.
முனை	பரவளையம், அதன் அச்சை வெட்டும் புள்ளி, பரவளையத்தின் முனை எனப்படும். இங்கு $V(0,0)$ என்பது பரவளையத்தின் முனை எனப்படும்.
குவியதூரம்	பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி, அதன் குவியத்தில் இருந்து உள்ள தொலைவு, குவிய தூரம் எனப்படும்.
குவிய நாண்	ஒரு பரவளையத்தின் குவியம் வழிச் செல்லும் நாண். குவிய நாண் எனப்படும்.
செவ்வகலம்	பரவளையத்தின், அச்சுக்கு செங்குத்தான குவியநாண், செவ்வகலம் எனப்படும். இங்கு செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = a$. செவ்வகலத்தின் நீளம் $4a$

3.5.3 பரவளையத்தின் பிற திட்ட வடிவங்கள் (Other standard parabolas)

1. இடப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $y^2 = -4ax[a > 0]$

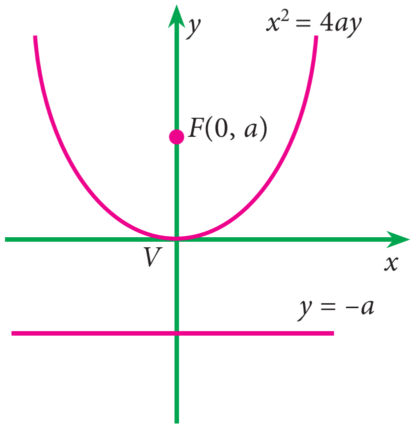
$x > 0$, எனும் பொழுது, y ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $x \leq 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.



படம் 3.11

2. **மேல்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = 4ay[a > 0]$**

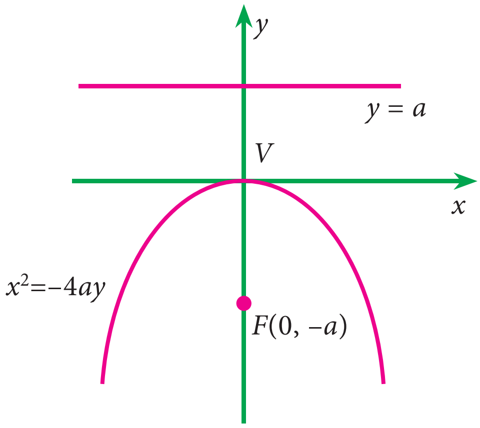
$y < 0$ எனும் பொழுது x ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $y \geq 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.



படம் 3.12

3. **கீழ்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = -4ay[a > 0]$**

$y > 0$ எனும் பொழுது, x கற்பனை ஆகிறது. எனவே $y \leq 0$ வளைவரை அமைகிறது.

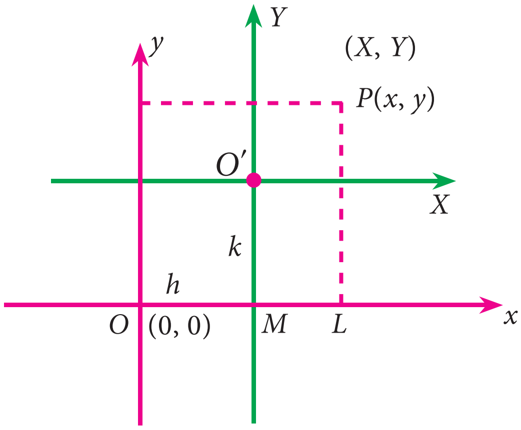


படம் 3.13

சமன்பாடுகள்	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
அச்சு	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
முனை	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$
குவியம்	$F(a, 0)$	$F(-a, 0)$	$F(0, a)$	$F(0, -a)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$

ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் அல்லது அச்சுக்களை இடப்பெயர்ச்சி செய்யும் முறை (The process of shifting the origin or translation of axes)

xoy அமைப்பில் x –அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக. $(X$ -அச்சு என்க$)$ மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக $(Y$- அச்சு என்க$)$. P(x,y) என்ற புள்ளியை xoy அமைப்பில் எடுத்துக்கொள்க. அதே புள்ளி $XO'Y$ அமைப்பில் $P(X,Y)$ என்க.



படம் 3.14

xoy -இன் அமைப்பில் O' -ன் அச்சுத்தூரங்கள் (h, k) என்க.

xoy அமைப்பில் P-ன் புதிய அச்சுத் தூரங்கள் :

$$OL = OM + ML$$

$$= h + X$$

$$\text{i.e) } x = X + h$$

இதே போல் $y = Y + k$

$\therefore$ $XO'Y$ அமைப்பில் P -ன் புதிய ஆய அச்சுத் தூரங்கள்.

$X = x - h$ மற்றும் $Y = y - k$

குறிப்பு

முனை (h, k) எனில், பொது வடிவம் பெற x-ஐ $x-h$ ஆகவும் மற்றும் y-ஐ $y-k$ ஆகவும் மாற்றம் செய்க.

3.5.4 பரவளையத்தின் திட்டச்சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்–வலது புறம் திறப்புடையது (அதாவது முனை ஆதியில் அமையாதது) (General form of the standard equation of a parabola, which is open rightward (i.e., the vertex other than origin) :

XOY அமைப்பில் முனை $V(0, 0)$ இருக்குமாறு ஒரு பரவளையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம், இதன் அச்சுத் தூரம் xoy அமைப்பில் (h, k) என்க.

இந்த பரவளையம் XOY அமைப்பில் வலதுபுறம் திறப்புடையது. எனவே இதன் சமன்பாடு $Y^2 = 4aX$ ஆகும்.

ஆதியை இடமாற்றம் செய்வதால்

$X = x - h$ மற்றும் $Y = y - k$ என மாறுகிறது. xoy அமைப்பில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

இதுவே வலதுபுறம் திறப்புடைய பரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும். இதேபோல் மற்ற பொது வடிவங்கள்

$(y-k)^2 = -4a(x-h)$ (இடதுபக்கம் திறப்புடையது)

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ (மேல்பக்கம் திறப்புடையது)

$(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (கீழ்பக்கம் திறப்புடையது)

எடுத்துக்காட்டு 3.31

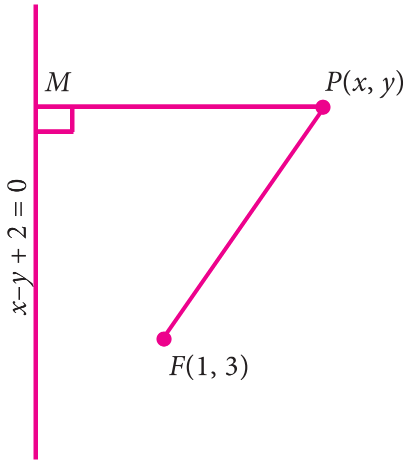
$x - y + 2 = 0$ என்ற இயக்குவரையும் $(1,3)$ என்ற குவியத்தையும் உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

கணக்கின்படி குவியம் $F(1, 3)$ மற்றும்

இயக்குவரை $x - y + 2 = 0$

$x - y + 2 = 0$



படம் 3.15

$P(x,y)$ என்பது பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி என்க.

பரவளையத்தின் வரையறைப்படி

$$\frac{FP}{PM} = 1$$

$$FP = PM$$

$$FP^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$$

$$PM = \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{2}}$$

$$PM^2 = \frac{(x-y+2)^2}{2} = \frac{x^2+y^2+4-2xy-4y+4x}{2}$$

$$FP^2 = PM^2$$

$$2x^2+2y^2-4x-12y+20 = x^2+y^2-2xy-4y+4x+4$$

பரவளையத்தின் தேவையான சமன்பாடு

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy-8x-8y+16 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.32

$y^2 = -12x$ என்ற பரவளையத்தின், குவியம், முனை, இயக்குவரையின் சமன்பாடு, அச்சு செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் $y^2 = -4ax$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

இங்கு $4a = 12,\quad a = 3.$

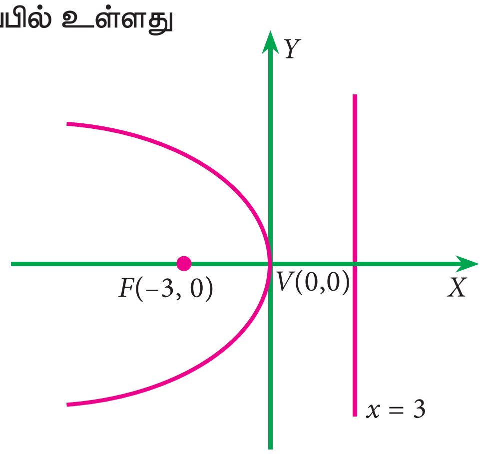
பரவளையம் இடப்புறம் திறப்புடையது. எனவே குவியம்

$$F(-a,o) = F(-3,0)$$

முனை $\quad V(h,k) = V(0,0)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = a$

i.e., $\quad x = 3$



படம் 3.16

பரவளையத்தின் அச்சு x -அச்சு இதன் சமன்பாடு $y = 0$.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $= 4a = 12$

எடுத்துக்காட்டு 3.33

$x = 10p - 20 - p^2$ என்ற தேவைச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக்காட்டு. மேலும் விலையானது பரவளையத்தின் முனையில் உச்சத்தை அடையும் எனக்காட்டு.

தீர்வு

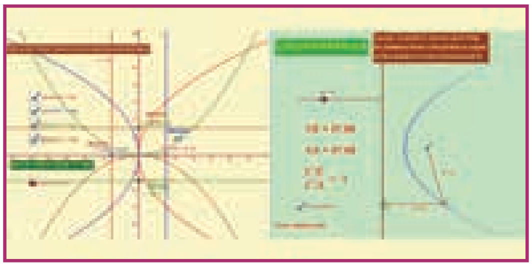
$$x = 10p - 20 - p^2$$

$$= -p^2 - 20 + 10p + 5 - 5$$

$$x - 5 = -p^2 + 10p - 25$$

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

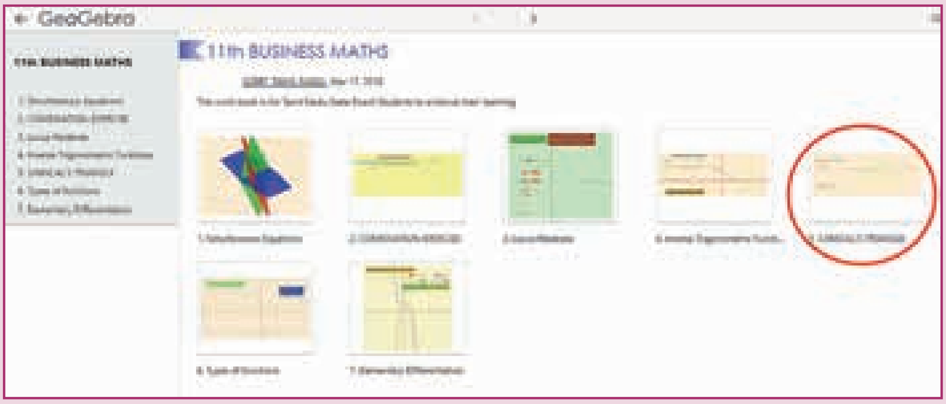
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

“11th BUSINESS MATHS” எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **“Locus-Parabola”** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

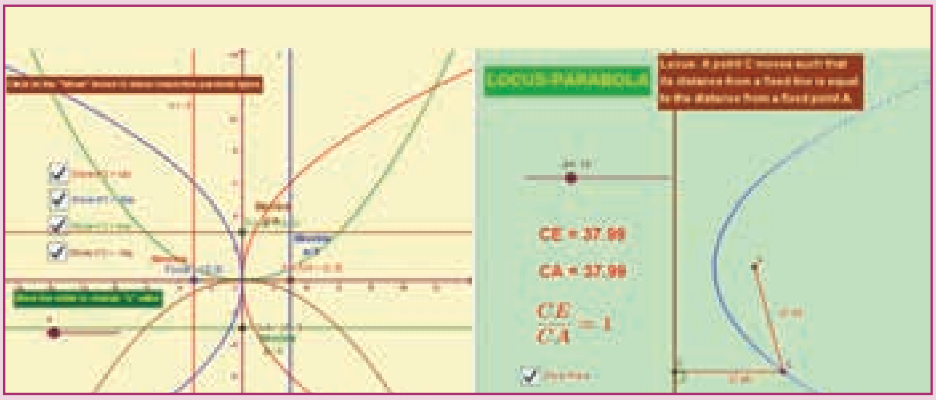
படி - 2

“Locus-Parabola” க்கான பணித்தாளில் இடப்பக்கம் உள்ள தேர்வுப்பெட்டிகளில் தேவையான பரவளையைத் தேர்வு செய்து 4 வகையான பரவளை, இயக்குவரை மற்றும் குவியம் ஆகியவற்றை ஆராய்ந்து பார்க்கவும். இடப் பக்கம் கீழே உள்ள நழுவலை நகர்த்தி “a” இன் மதிப்பை மாற்றலாம். மேலும் வலப் பக்கத்தில் பரவளையின் நியமபாதையையும் வரையறை நிபந்தனையையும் காண play/pause பொத்தானைச் சொடுக்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

$$=-\left(p^2-10p+25\right)$$

$$=-(p-5)^2$$

$X=x-5$ மற்றும் $P=p-5$ என்க.

$X=-P^2$ அதாவது $P^2=-X$

இது கீழ்ப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம்.

$\therefore$ மேலும் $x=5$ விலை $P=5$ அதாவது பரவளையத்தின் முனையில் விலை உச்சமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$x^2+6x-4y+21=0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு

$$4y = x^2+6x+21$$

$$4y = (x^2+6x+9)+12$$

$$4y-12 = (x+3)^2$$

$$(x+3)^2 = 4(y-3)$$

$X=x+3, Y=y-3$

$x=X-3$ மற்றும் $y=Y+3$

$$X^2 = 4Y$$

$X^2=4aY$ உடன் ஒப்பிட $4a=4$

$$a=1$$

	(X, Y) ஐ பொறுத்து	(x, y) ஐ பொறுத்து $x=X-3,\ y=Y+3$
அச்சு $y=0$	$Y=0$	$y=3$
முனை $V(0,0)$	$V(0,0)$	$V(-3,3)$
குவியம் $F(0, a)$	$F(0, 1)$	$F(-3, 4)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு $(y=-a)$	$Y=-1$	$y=2$
செவ்வகலத்தின் நீளம் $(4a)$	$4(1)=4$	4

எடுத்துக்காட்டு 3.35

பொருளின் அளிப்புக்கும், விலைக்கும் உள்ள தொடர்பு $x=\sqrt{5P-15}$ என கொடுக்கப்படுகிறது. அந்த அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

அளிப்பு விலை தொடர்பானது $x^2 = 5p - 15$

$$= 5(p-3)$$

$\Rightarrow \quad X^2 = 4aP$ இங்கு $X = x,\ P = p-3$

$\therefore$ அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் இதன் முனை $(X=0, P=0)$

இங்கு $V(0, 3)$ என்பது முனையாகும்.

பயிற்சி 3.6

1. $F(-1,-2)$ என்ற குவியத்தையும், $4x-3y+2=0$ என்ற இயங்குவரையையும் உடைய பரவளையத்தைக் காண்க.

2. $y^2 = kx$ என்ற பரவளையம் $(4,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில் பரவளையத்தின் குவியம் மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் காண்க.

3. $y^2-8y-8x+24=0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

4. கீழ்காணும் பரவளையங்களின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

   (a) $y^2 = 20x$ (b) $x^2 = 8y$ (c) $x^2 = -16y$

5. விலை மதிப்பு மிக்க உலோகத்தை தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் ஒருமாத உற்பத்தி x டன்களின் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு $\frac{1}{5}x^2-6x+100$ என கொடுக்கப்படுகிறது, எனில் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டு. மேலும் பரவளையத்தின் முனையில், உற்பத்தியின் அளவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியற்றைக் காண்க.

6. x மாதங்களில் ஈட்டப்பட்ட இலாபம் ₹ y (ஆயிரங்களில்) என்க. மேலும் $y=-x^2+10x-15$ எனில், செயல்திட்டத்தை, முடிப்பதற்கான மிகச் சிறந்த காலத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 3.7

9YUI1I

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1 , m_2 எனில், $m_1 + m_2$ மதிப்பு

   (a) $\frac{2h}{b}$ (b) $-\frac{2h}{b}$ (c) $\frac{2h}{a}$ (d) $-\frac{2h}{a}$

2. $x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

   (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{33}}\right)$

3. $2x - 3y - 5 = 0$ மற்றும் $3x - 4y - 7 = 0$ என்ற கோடுகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள் எனில், அவ்வட்டத்தின் மையம்

   (a) $(-1, 1)$ (b) $(1,1)$ (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, -1)$

4. $3x + 2y - 1 = 0$ என்ற கோட்டின் x -வெட்டுத்துண்டு

   (a) 3 (b) 2 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

5. $7x + 5y - 8 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

   (a) $\frac{7}{5}$ (b) $-\frac{7}{5}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $-\frac{5}{7}$

6. ஆய அச்சுகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

   (a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = -x$ (c) $y = x$ (d) $y = \frac{-1}{x}$

7. $x + 2y + 7 = 0$ என்ற கோட்டிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதொலைவில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

   (a) $x + 2y + 2 = 0$ (b) $x - 2y + 1 = 0$ (c) $2x - y + 2 = 0$ (d) $3x + y + 1 = 0$

8. $kx^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ என்பது செங்குத்து இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிக்குமெனில் $k =$

   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) -2

9. $x^2 + y^2 + ax + by - 4 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $(1, -2)$ எனில் அதன் ஆரம்

   (a) 3 (b) 2 (c) 4 (d) 1

10. $(4, 5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

   (a) 4 (b) 5 (c) 16 (d) 25

11. $x^2 = 16y$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம்

(a) (4 ,0) (b) (–4 , 0) (c) (0, 4) (d) (0, –4)

12. $y^2 =- 25x$ பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்.

(a) 25 (b) –5 (c) 5 (d) –25

13. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம்

(a) (1 ,1) (b) (–1, –1) (c) (–1,1) (d) (1, –1)

14. ஆதிவழிச் செல்வதும், x -அச்சின் மீது மையத்தை கொண்டதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ (b) $y^2 - 2ay + x^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ (d) $x^2 - 2ay + y^2 = 0$

15. வட்டத்தின் மையம் (–a, –b) மற்றும் ஆரம் $\sqrt{a^2 - b^2}$ எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2b^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2b^2 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2b^2 = 0$

16. ஆய அச்சுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

(a) $x^2 - y^2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = 0$ (c) $xy = c$ (d) $xy = 0$

17. $ax^2 + 4xy + 2y^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு இணையான இரட்டைக் கோடுகளை குறிக்குமெனில் 'a'ன் மதிப்பு

(a) 2 (b) –2 (c) 4 (d) –4

18. $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டின், y வெட்டுத்துண்டு(கள்)

(a) 4 (b) 16 (c) ±4 (d) ±16

19. ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு 8π அலகுகள் மற்றும் மையம் (2, 2) எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு ___________

(a) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ (b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

(c) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ (d) $x^2 + y^2 = 4$

20. (3, –4) ஐ மையமாக கொண்ட வட்டம் x அச்சைத் தொடுமானால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ (b) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$

(c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ (d) $x^2 + y^2 = 16$

21. ஒரு வட்டம், x -அச்சு, y -அச்சு மற்றும் $x = 6$ என்ற நேர்க்கோடு ஆகியவற்றைத் தொடுகிறது எனில், அவ்வட்டத்தின் விட்டத்தின் நீளம்

(a) 6 (b)3 (c)12 (d) 4

22. பரவளையத்தின் மையத்தொலைத்தகவு

(a) 3 (b)2 (c) 0 (d) 1

23. குவியம் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் என்பது

(a) குவியநாண் (b) செவ்வகலம் (c) இயக்குவரை (d) அச்சு

24. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரைக்கும் குவியத்திற்கும் இடைப்பட்டத் தூரம்

(a) a (b)$2a$ (c) $4a$ (d) $3a$

25. $y^2 =- x$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு

(a) $4x+1=0$ (b) $4x-1=0$ (c) $x-4=0$ (d) $x+4=0$

இதரக் கணக்குகள்

1. நகரும் புள்ளி P, $(2,3)$ மற்றும் $(1, 5)$ ஆகியவை ஒரு கோடமை புள்ளிகள் எனில் P இன் நியமப்பாதை காண்க

2. உற்பத்தி பொருட்களின் எண்ணிக்கை 500 லிருந்து 1000 ஆக உயரும்போது உற்பத்தி செலவு ₹6000 லிருந்து ₹9000 ஆக உயருகிறது. x, y க்கு இடைப்பட்ட தொடர்பு ஓர் ஒருபடிச் சார்பெனில் செலவு (y) மற்றும் தயாரிக்கப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை (x) இவற்றுக்கிடைப்பட்ட தொடர்பினை காண்க.

3. $4x+3y=10$, $3x–4y=–5$ மற்றும் $5x+y=7$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.

4. $8px+(2-3p)y+1=0$ மற்றும் $px+py-7=0$ என்ற கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் p யின் மதிப்பைக் காண்க

5. $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றொன்று போல் 3 மடங்கு எனில் $3h^2=4ab$ என நிறுவுக

6. $(a-1)x^2+by^2+(b-8)xy+4x+4y-1=0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனில் a, b யின் மதிப்பு காண்க

7. $(-1,-2), (1,0)$ மற்றும் $(-3,-4)$ என்ற புள்ளிகள் $3x+2y+7=0$ என்ற கோட்டிற்கு மேல், கீழ் அல்லது கோட்டின் மீது உள்ளதா என தீர்மானிக்க

8. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒரு முனை $(4, 1)$ எனில் மற்றொரு முனை காண்க.

9. x -அச்சை பொறுத்து சமச்சீரான பரவளையம் $(-2, -3)$ வழிச் செல்கிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

10. $(y-2)^2=4(x-1)$ என்ற பரவளையத்திற்கு அச்சு, முனை, குவியம் இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தொகுப்புரை

- $y=m_1x+c_1$ மற்றும் $y=m_2x+c_2$ என்ற வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\tan^{-1}\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$
- $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ மற்றும் $a_3x+b_3y+c_3=0$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதற்கான கட்டுப்பாடு $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$
- x, y–ல் பொதுவான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ என்பதாகும்.
- $ax^2+2hxy+by^2=0$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.
- $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் எனில் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் $=\dfrac{a}{b}$ சாய்வுகளின் கூடுதல் பலன் $=\dfrac{-2h}{b}$.
- $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\tan^{-1}\left[\left|\dfrac{\pm 2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$.
- மையம் (h,k), ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
- மையம் ஆதிப்புள்ளி, ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=r^2$.
- (x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாக உடைய விட்டத்தைக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு : $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.
- $x^2+y^2=r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $0\le\theta\le 2\pi$

- (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ ஆகும். (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$.

- $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$.

- $y=mx+c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையான கட்டுப்பாடு $c^2=a^2(1+m^2)$.

- பரவளையத்தின் திட்ட வடிவம் $y^2=4ax$

கலைச்சொற்கள்	
ஆதி	Origin
ஆரம்	Radius
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இயக்குவரை	Directix
இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	Pair of straight lines
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	Concurrent Lines
ஒருங்கமை புள்ளி	Point of concurrency
குவியத்தூரம்	Focal distance
குவியம்	Focus
கூம்பு வெட்டிகள்	Conics
சமன்பாடு	Equation
செங்குத்துக் கோடு	Perpendicular line
செவ்வகலம்	Latus rectum
துணையலகு	Parameter
தொடுகோடு	Tangent
தொடுகோட்டின் நீளம்	Length of the tangent
நாண்	Chord
நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை	Locus
நேர்கோடு	Straight line
பரவளையம்	Parabola
முனை	Vertex
மையம்	Centre
வட்டம்	Circle
விட்டம்	Diameter
வெட்டும் புள்ளி	Point of intersection

அத்தியாயம் 4

திரிகோணமிதி

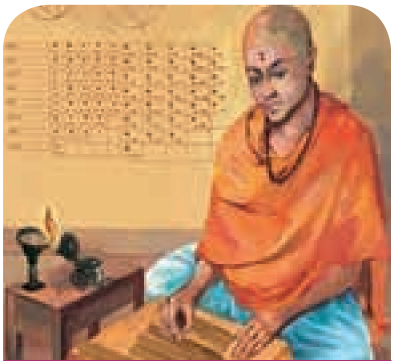
கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு மாணாக்கர்கள் பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- திரிகோணமிதியின் கோண விகிதங்கள்
- கூட்டல் சூத்திரம், பெருக்கல் மற்றும் உட்பெருக்கல் கோணங்கள்
- கூடுதல், பெருக்கலாக உருமாற்றம் மற்றும் மறுதலை
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள்
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் பண்புகள்

9Z4E36

அறிமுகம்


பிரம்மகுப்தா

திரிகோணமிதி என்ற வார்த்தை கிரேக்க வார்த்தைகளான டிரிகோணா (trigona) மற்றும் மெட்ரான் (metron) என்ற வார்த்தைகளிலிருந்து உருவாக்கப்பட்டது. உண்மையிலேயே திரிகோணமிதி என்பது ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் மற்றும் கோணங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புப் பற்றி அறிவது ஆகும். ஏறத்தாழ இரண்டாம் நூற்றாண்டில் A.D. ஜார்ஜ் ரீடீகஸ் என்பவர் முதன்முதலில் செங்கோணங்களைப் பொறுத்து திரிகோணமிதி சார்புகளை வரையறுத்தார். பழங்கால இந்தியாவின் கணிதவியலாளர்கள் ஆரியபட்டா, பிரம்மகுப்தா, பாஸ்கரா–I மற்றும் பாஸ்கரா–II ஆகியோர், திரிகோணமிதி சம்பந்தமான சில முக்கியமான முடிவுகளை அளித்தார்கள். பாஸ்கரா–I என்பவர் 90 பாகைக் கோணங்களுக்கு அதிகமான மதிப்புகளின் sine விகிதங்களை காணுவதற்கான வாய்ப்பாடுகளைக் கண்டுபிடித்தார். முற்காலத்தில் திரிகோணமிதி கடற்படையியல், நில அளவையியல் மற்றும் வானவியல் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தப்பட்டது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

தற்காலத்தில் திரிகோணமிதி மின் வரைபடம், அணுக் கொள்கை விரிவாக்கம், கடலில் எழும் அலைகளின் உயரத்தை கணிப்பது, இசைக் குரலைப் பகுப்பாய்வு செய்வது போன்ற பல பகுதிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மீள் பார்வை

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ 2. $\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ 4. $\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

5. $\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$ 6. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

திரிகோணமிதி விகிதங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பு

1. $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ அல்லது $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

2. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ அல்லது $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

4. $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்

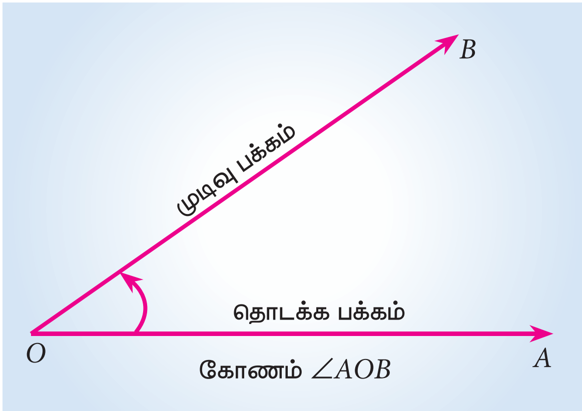
1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

3. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta.$

கோணம்

ஒரு கதிர் அதன் தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து சுழலும் அளவைக் கோணம் என்கிறோம். கதிர் ‘OA’ யை தொடக்க பக்கம் என்றும் கதிர் ‘OB’ யின் முடிவு நிலை கோணத்தின் முடிவு பக்கம் என்றும் அழைக்கலாம். புள்ளி ‘O’ ஐ சுழலும் கதிரின் முனை என்பர்.



படம் 4.1

இச்சுழற்சி கடிகார சுழற்சிக்கு எதிர்திசையில் இருந்தால், கோணத்தை மிகைக்கோணம் என்றும் மற்றும் சுழற்சியானது கடிகார சுழற்சி திசையில் இருந்தால், கோணத்தை குறைக்கோணம் என்றும் கூறலாம்.

கோணங்களின் அளவு

கோணங்களின் அளவுகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒன்று பாகை அளவு மற்றொன்று ரேடியன் அளவு.

பாகை அளவு

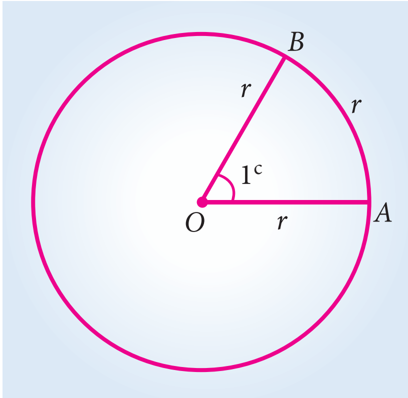
ஒரு கோணத்தின் அளவு தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை $\left(\frac{1}{360}\right)$ ஆவது மடங்கு சுழற்சிக்குச் சமமாக இருந்தால் அந்த கோணம் ஒரு பாகை அளவை கொண்டுள்ளது எனக் கூறலாம். மேலும் அதனை 1^{o} பாகை (one degree) என எழுதலாம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை 90^{o} சமப்பகுதியாக பிரித்தால் அவை ஒரு பாகை எனப்படும். பாகையை கலைகளாகவும் மற்றும் கலைகளை விகலைகளாகவும் பிரிக்கலாம்.

1 பாகை = 60 கலைகள் (minutes) $60'$

1 கலை = 60 விகலைகள் (seconds) $(60'')$

ரேடியன் அளவு

ஆரத்திற்கு சமமான வட்டவில், அதன் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும் இதை 1^{c} எனக் குறிக்கிறோம்.



படம் 4.2

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் வட்டவில் அதன் மையத்தில் தாங்கக் கூடிய கோணத்தின்

$$\text{ரேடியன் அளவு} = \frac{\text{வில்லின் நீளம்}}{\text{ஆரம்}}$$

$\therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$ இங்கு θ என்பது வட்ட மைய கோணம் s வட்ட வில்லின் நீளம் r வட்டத்தின் ஆரம்.

பாகைகளுக்கும் ரேடியன்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

ஒரு அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π என்பதனை நாம் அறிவோம். ஆரமானது ஒரு முழுச்சுற்று எடுத்துக் கொள்ளும் போது உருவாகும் கோணம் 2π ரேடியன்கள் ஆகும். வட்டம் அதன் மையப் பகுதியில் உருவாக்கும் கோணம் 360°.

$$2\pi \text{ ரேடியன்} = 360^{\circ}$$

$$\pi \text{ ரேடியன்} = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ ரேடியன்} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.1

(i) 160° யை ரேடியனாக மாற்றுக (ii) $\frac{4\pi}{5}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

தீர்வு

(i) $160^\circ = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{9}\pi$

(ii) $\frac{4\pi}{5}$ ரேடியன் $= \frac{4}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$

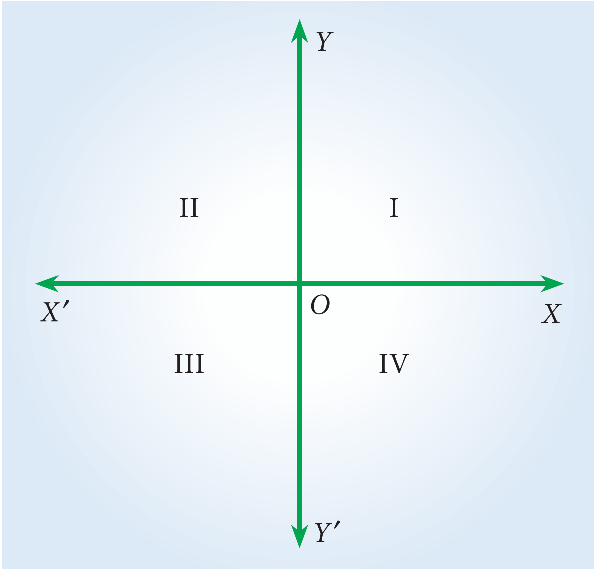
(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியன் $= \frac{1}{4}\frac{180}{\pi} = \frac{1}{4} \times 180 \times \frac{7}{22} = 14^\circ 19' 5''$

4.1 திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of trigonometric ratios)

4.1.1 கால் பகுதிகள் (Quadrants)

படத்தில் உள்ளபடி $X'OX$ மற்றும் $Y'OY$ என்பவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளாகும். $X'OX$ ஐ X -அச்சு என்றும், $Y'OY$ ஐ Y -அச்சு என்றும் அழைக்கின்றோம்.

இந்த அச்சுக்கள், முழு தளத்தையும் 4 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. அவைகள் கால்பகுதிகள் ("Quadrants") என்று அழைக்கப்படுகின்றன. XOY, YOX', $X'OY'$ மற்றும் $Y'OX$ என்பவைகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் கால்பகுதி என அறியப்படுகின்றன.



படம் 4.3

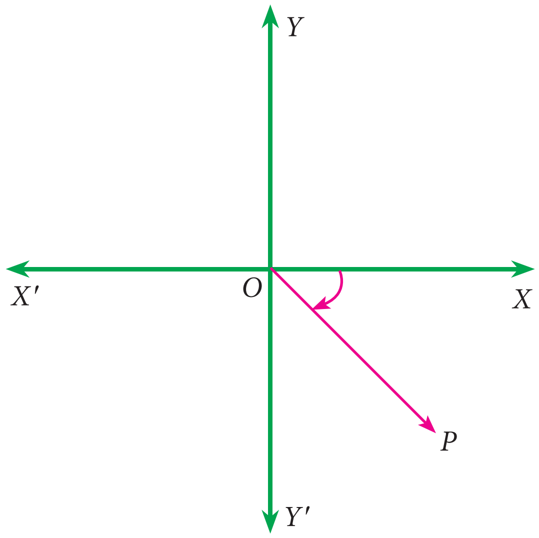
எடுத்துக்காட்டு 4.2

கீழ்க்காணும் கோணங்களின் முடிவு நிலை எந்தக் கால்பகுதியில் அமையும் எனக் காட்டுக.

(i) -70° (ii) -320° (iii) 1325°

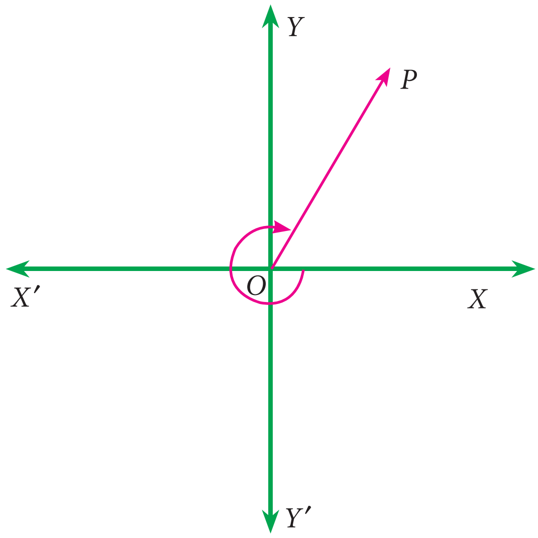
தீர்வு (i)

1. (i) -70° யின் முடிவு நிலை நான்காம் கால்பகுதியில் அமைகிறது.



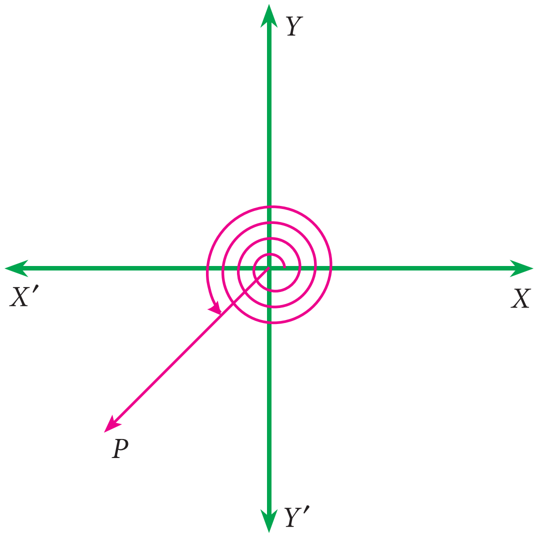
படம் 4.4

(ii) -320° யின் முடிவு நிலை முதல் கால் பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 4.5

(iii) $1325^{\circ} = (3 \times 360) + 180^{\circ} + 65^{\circ}$ –யின் முடிவு நிலை மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைகிறது

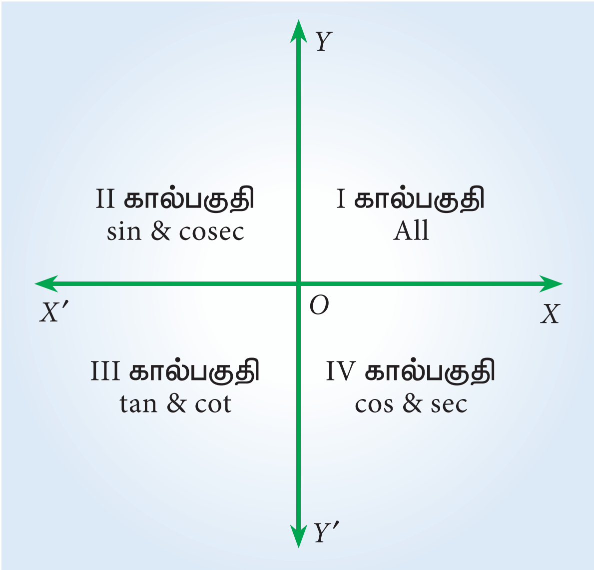


படம் 4.6

4.1.2 0^{o} விருந்து 360^{o} வரை மாறுபடுகின்ற கோணம் θ வின் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of the trigonometric ratios of an angle θ as it varies from 0^{o} to 360^{o})

முதல் கால் பகுதியில் x, y இரண்டும் மிகை குறியாக இருக்கின்றன. ஆகவே எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும் மிகையாக இருக்கும். இரண்டாம் கால் பகுதியில் $(90^{\circ} < \theta < 180^{\circ})$ x குறை குறியாகவும், y மிகை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே $\sin\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ மிகையாக இருக்கும். மூன்றாம் கால்பகுதியில், $(180^{\circ} < \theta < 270^{\circ})$ x மற்றும் y ஆகிய இரண்டும் குறைகுறி உடையதாக இருக்கின்றன. ஆகவே $\tan\theta$ மற்றும் $\cot\theta$ மிகையாக இருக்கும். நான்காம் கால்பகுதியில் $(270^{\circ} < \theta < 360^{\circ})$ x மிகை குறியாகவும், y குறை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ மிகையாக இருக்கும்.

$f(x)$ என்பது ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = -f(x)$ ஆகும். $\sin\theta, \tan\theta, \cot\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ ஆகியவை ஒற்றைப்படைச் சார்புகளாகும் . $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = f(x)$ ஆகும். $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ க்கள் இரட்டைப்படைச் சார்புகளாகும்.



All Silver Tea Cups (ASTC)

படம் 4.7

4.1.3 துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of allied angles)

இரு கோணங்களின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்கள் பூச்சியக் கோணமாகவும் அல்லது 90° பெருக்கங்களாகவும் இருக்கும்போது அவ்விருகோணங்கள் துணைக் கோணங்கள் எனக் கூறப்படும். கோணங்கள் $-\theta$, $90^\circ\pm\theta$, $180^\circ\pm\theta$, $360^\circ\pm\theta$ ஆகியன θ வின் துணைக் கோணங்கள் ஆகும். துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி விகிதங்களையும் நாம் காண முடியும்.

கோணம் / விகிதம்	$-\theta$	$90^\circ-\theta$ or $\frac{\pi}{2}-\theta$	$90^\circ+\theta$ or $\frac{\pi}{2}+\theta$	$180^\circ-\theta$ or $\pi-\theta$	$180^\circ+\theta$ or $\pi+\theta$	$270^\circ-\theta$ or $\frac{3\pi}{2}-\theta$	$270^\circ+\theta$ or $\frac{3\pi}{2}+\theta$	$360^\circ-\theta$ or $2\pi-\theta$	$360^\circ+\theta$ or $2\pi+\theta$
Sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
Cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
cotangent	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
secant	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
cosecant	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$

அட்டவணை 4.1

எடுத்துக்காட்டு 4.3

கீழ்க்காணும் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 150^\circ$ (ii) $\cos(-210^\circ)$ (iii) $\operatorname{cosec} 390^\circ$

(iv) $\tan(-1215^\circ)$ (v) $\sec 1485^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ)$

அதாவது 150° இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்

$$\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

(ii) $\cos(-210^o) = \cos 210^o$ என்க

அதாவது 210^o மூன்றாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்,

$$\cos 210^o = \cos(180^o + 30^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $\operatorname{cosec} 390^o = \operatorname{cosec}(360^o + 30^o) = \operatorname{cosec} 30^o = 2$

(iv) $\tan(-1215^o) = -\tan(1215^o) = -\tan(3\times 360^o + 135^o)$

$$= -\tan 135^o = -\tan(90^o + 45^o) = -(-\cot 45^o) = 1$$

(v) $\sec 1485^o = \sec(4\times 360^o + 45^o) = \sec 45^o = \sqrt{2}$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$\sin 600^o \cos 390^o + \cos 480^o \sin 150^o = -1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin 600^o = \sin(360^o+240^o) = \sin 240^o = \sin(180^o + 60^o) = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 390^o = \cos(360^o + 30^o) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 480^o = \cos(360^o + 120) = \cos 120^o$$

$$= \cos(180^o - 60^o) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

இப்போது $\sin 600^\circ \cos 390^\circ + \cos 480^\circ \sin 150^\circ$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-3-1}{4} = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$$\frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)\cot(360^\circ-\theta)\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)} = 1$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{L.H.S} = \frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)\cot(360^\circ-\theta)\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)}$$

$$= \frac{(-\sin\theta)\cot\theta(-\sec\theta)}{(-\sin\theta)(-\cot\theta)\sec\theta} = 1$$

பயிற்சி 4.1

1. கீழ்கண்ட கோணங்களின் அளவுகளை ரேடியன் அளவில் மாற்றுக

   (i) 60° (ii) 150° (iii) 240° (iv) -320°

2. கீழ்கண்ட ரேடியன் அளவுகளை கோணங்களாக மாற்றுக.

   (i) $\frac{\pi}{8}$ (ii) $\frac{9\pi}{5}$ (iii) -3 (iv) $\frac{11\pi}{18}$

3. கீழ்கண்ட கோணங்கள் எந்த கால்பகுதியில் அமையும்.

   (i) 380° (ii) -140° (iii) 1195°

4. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\sin 300^\circ$ (ii) $\cos(-210^\circ)$ (iii) $\sec 390^\circ$ (iv) $\tan(-855^\circ)$

   (v) $\operatorname{cosec} 1125^\circ$

5. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

   (i) $\tan(-225^\circ)\cot(-405^\circ) - \tan(-765^\circ)\cot(675^\circ) = 0$

   (ii) $2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

   (iii) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) = -1$

6. A, B, C, D என்பன வட்ட நாற்கரத்தின் கோணங்கள் எனில்

$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ என நிறுவுக.

7. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(i) $$\frac{\sin(180^\circ-\theta)\cos(90^\circ+\theta)\tan(270^\circ-\theta)\cot(360^\circ-\theta)}{\sin(360^\circ-\theta)\cos(360^\circ+\theta)\sin(270^\circ-\theta)\operatorname{cosec}(-\theta)} = -1$$

(ii) $$\sin\theta\cdot\cos\theta\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\operatorname{cosec}\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sec\theta\right\} = 1$$

8. $\cos 510^\circ \cos 330^\circ + \sin 390^\circ \cos 120^\circ = -1$ என நிறுவுக.

9. நிறுவுக : (i) $\tan(\pi+x)\cot(x-\pi)-\cos(2\pi-x)\cos(2\pi+x) = \sin^2 x$

(ii) $$\frac{\sin(180^\circ+A)\cos(90^\circ-A)\tan(270^\circ-A)}{\sin(540^\circ-A)\cos(360^\circ+A)\operatorname{cosec}(270^\circ+A)} = -\sin A\cos^2 A$$

10. $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\varphi=\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ எனில், $8\tan\theta-\sqrt{5}\sec\varphi$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

4.2 கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of compound angles)

கூட்டுக் கோணங்கள் (Compound angles)

கோணங்களின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் முடிவானது கூட்டுக்கோணம் எனப்படும். அதாவது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோணங்களின் இயற்கணிதக் கூடுதல் கூட்டுக்கோணங்கள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, A, B மற்றும் C ஆகியன மூன்று கோணங்கள் எனில், $A+B$, $A-B$, $A+B+C$, $A-B+C$ என்பன கூட்டுக் கோணங்களாகும்.

4.2.1 sine, cosine மற்றும் tangent என்பனவற்றின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் சூத்திரங்கள் (Sum and difference formulae of sine, cosine and tangent)

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(v) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(vi) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

எடுத்துக்காட்டு 4.6

$\cos A = \frac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < A, B < 2\pi$, எனில்

(i) $\sin(A-B)$ (ii) $\cos(A+B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க..

தீர்வு

அதாவது $\frac{3\pi}{2} < A, B < 2\pi$, A மற்றும் B ஆகியன நான்காம் கால் பகுதியில் அமைகிறது எனில், $\sin A$ மற்றும் $\sin B$ ஆகியவை குறைகுறி உடையதாக இருக்கும்.

$\cos A = \frac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \frac{12}{13}$,

ஆகவே,

$$\sin A = -\sqrt{1-\cos^2 A} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Sin B} = -\sqrt{1-\cos^2 B} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\frac{5}{13}$$

(i)
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$

(ii)
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$= \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7

திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos(-105^\circ)$ (iii) $\tan 75^\circ$ (iv) $-\sec 165^\circ$

தீர்வு

(i)
$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $\cos(-105^o) = \cos 105^o$

$= \cos(60^o + 45^o)$

$= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 75^o = \tan(45^o + 30^o)$

$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$

(iv) $\cos 165^o = \cos(180^o - 15^o)$

$= -\cos 15^o$

$= -\cos(60^o - 45^o)$

$= -(\cos 60^o \cos 45^o + \sin 60^o \sin 45^o)$

$= -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \quad -\sec 165^o = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

$\tan A = m \tan B$ எனில் , $\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{m+1}{m-1}$ என நிறுவுக.

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
>
> கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதி:
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, எனில், $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

தீர்வு

$\tan A = m \tan B$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\frac{\sin A}{\cos A} = m\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B} = m$$

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதியைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது

$$\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B} = \frac{m+1}{m-1}$$ ஆகும்.

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{m+1}{m-1}$$ என நிறுவப்பட்டது.

4.2.2 மடங்கு கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of multiple angles)

$\sin2A$, $\cos2A$, $\tan2A$, $\sin3A$ etc. ஆகியன மடங்கு கோணங்களின் விகிதங்கள் ஆகும்.

அவற்றின் முற்றொருமைகள்,

(i) $\sin 2A = \sin(A+A) = \sin A\cos A+\cos A\sin A = 2\sin A\cos A.$

(ii) $\cos 2A = \cos(A+A) = \cos A\cos A-\sin A\sin A = \cos^2 A-\sin^2 A$

(iii) $\sin 3A = \sin(2A+A)$

$= \sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$

$= (2\sin A\cos A)\cos A+(1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A\cos^2 A+\sin A-2\sin^3 A$

$= 2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$

$= 3\sin A-4\sin^3 A$

இவ்வாறாக நாம் கீழ்க்கண்ட மடங்கு கோணங்களின் சூத்திரங்களை பெற்றிருக்கின்றோம்

1. (i) $\sin2A = 2\sin A\cos A$

(ii) $\sin2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

2. (i) $\cos2A = \cos^2A - \sin^2A$

(ii) $\cos2A = 2\cos^2A-1$

(iii) $\cos2A = 1-2\sin^2A$

(iv) $\cos2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

4. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

5. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

6. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

குறிப்பு

(i) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ (அல்லது) $\cos A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}$

(ii) $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$ (அல்லது) $\sin A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$\tan 60^{\circ}$ மதிப்பினை இரட்டை கோணங்களின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$A = 30^{\circ}$ என பிரதியிட கிடைக்கப் பெறுவது,

$$\tan 60^{\circ} = \frac{2\tan 30^{\circ}}{1-\tan^2 30^{\circ}}$$

$$= \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.11

$\tan A = \frac{1}{7}$ and $\tan B = \frac{1}{3}$ எனில், $\cos 2A = \sin 4B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}} = \frac{48}{49}\times\frac{49}{50} = \frac{24}{25} \quad \ldots (1)$$

இப்போது $\sin 4B = 2\sin 2B \cos 2B$

$$= 2\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B}\times\frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B} = \frac{24}{25} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$\cos 2A = \sin 4B$ என கிடைக்கப்பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

$\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ எனில், $\tan 2A = \tan B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\frac{1-\cos B}{\sin \mathrm{B}} = \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \tan\frac{B}{2}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்

$\tan \mathrm{A} = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$= \tan\frac{B}{2}$$

$$A = \frac{B}{2}$$

$$2A = B$$

$\therefore \quad \tan 2A = \tan B$

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ மற்றும் $\tan\beta = \frac{1}{7}$ எனில், $(2\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$2\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

பயிற்சி 4.2

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பு காண்க :

   (i) $\operatorname{cosec} 15^\circ$ (ii) $\sin(-105^\circ)$ (iii) $\cot 75^\circ$

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க

   (i) $\sin 76^\circ \cos 16^\circ - \cos 76^\circ \sin 16^\circ$ (ii) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$

   (iii) $\cos 70^\circ \cos 10^\circ - \sin 70^\circ \sin 10^\circ$ (iv) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

3. $\sin A=\frac{3}{5}, 0<A<\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\cos B=\frac{-12}{13}, \pi<A<\frac{3\pi}{2}$ எனில், கீழ்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

   (i) $\cos(A+B)$ (ii) $\sin(A-B)$ (iii) $\tan(A-B)$

4. $\cos A = \frac{13}{4}$ மற்றும் $\cos B = \frac{1}{7}$ A, B குறுங்கோணங்கள் எனில், $A-B = \frac{\pi}{3}$ என நிறுவுக.

5. $2\tan 80^\circ = \tan 85^\circ - \tan 5^\circ$ என நிறுவுக.

6. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$, $\sec \beta = \frac{-5}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ எனில் $\tan(\alpha+\beta)$ ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் $(\alpha+\beta)$ என்பது எந்தக் கால்பகுதியில் அமையும் ?

7. $A+B=45^\circ$ எனில், $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ ன் மதிப்பைக் காண்க

8. (i) $\sin(A+60^\circ)+\sin(A-60^\circ)=\sin A$ என நிறுவுக.

   (ii) $\tan 4A \tan 3A \tan A + \tan 3A + \tan A - \tan 4A = 0$ என நிறுவுக.

9. (i) $\tan\theta = 3$ எனில், $\tan 3\theta$ வின் மதிப்பை காண்க.

   (ii) $\sin A = \frac{12}{13}$ எனில், $\sin 3A$ ன் மதிப்பை காண்க.

10. $\sin A = \frac{3}{5}$ எனில், $\cos 3A$ மற்றும் $\tan 3A$ ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0$ என நிறுவுக.

12. $\tan A - \tan B = x$ மற்றும் $\cot B - \cot A = y$ எனில் $\cot(A-B)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ என நிறுவுக.

13. $\sin\alpha+\sin\beta=a$ மற்றும் $\cos\alpha+\cos\beta=b$ எனில், $\cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2-2}{2}$ என நிறுவுக.

14. $\tan\frac{\pi}{8}$ ன் மதிப்புக் காண்க.

15. $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ எனில், $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $0 < \beta < \frac{\pi}{2})$ என நிறுவுக.

4.3 உருமாற்று சூத்திரங்கள் (Transformation formulae)

இரண்டு வகையான உருமாற்று சூத்திரங்கள் கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

4.3.1 பெருக்கலை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவமாக மாற்றுதல் (Transformation of the products into sum or difference)

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B) \quad \ldots (1)$$

$$\sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B) \quad \ldots (2)$$

$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B) \quad \ldots (3)$$

$$\cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B) \quad \ldots (4)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது,

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

(1) லிருந்து (2) ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

(3) மற்றும் (4) சமன்பாடுகளைக் கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

(4) லிருந்து (3) ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

இவ்வாறு நாம் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பெறுகிறோம்;

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

மேலும் $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

4.3.2 திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தலை பெருக்கலாக மாற்றுதல் (Transformation of sum or difference into product)

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.14

கீழ்கண்டவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta$ (ii) $2\cos 3\theta\cos\theta$ (iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta$

(iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta$ (v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}$ (vi) $\cos 9\theta\sin 6\theta$

(vii) $2\cos 13A\sin 15A$

தீர்வு

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta = \sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta)$

$$= \sin 3\theta + \sin\theta$$

(ii) $2\cos 3\theta\cos\theta = \cos(3\theta+\theta)+\cos(3\theta-\theta)$

$$= \cos 4\theta + \cos 2\theta$$

(iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta = \cos(4\theta-2\theta)-\cos(4\theta+2\theta)$

$$= \cos 2\theta - \cos 6\theta$$

(iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta = \frac{1}{2}[\cos(7\theta+5\theta)+\cos(7\theta-5\theta)]$

$$= \frac{1}{2}[\cos 12\theta + \cos 2\theta]$$

(v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3A}{2}+\frac{5A}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A}{2}-\frac{5A}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{8A}{2}+\cos\left(\frac{-2A}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4A + \cos(-A)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4A + \cos A]$$

(vi) $\cos 9\theta \sin 6\theta = \frac{1}{2}[\sin(9\theta + 6\theta) - \sin(9\theta - 6\theta)]$

$$= \frac{1}{2}[\sin(15\theta) - \sin 3\theta]$$

(vii) $2\cos 13A \sin 15A = \sin(13A + 15A) - \sin(13A - 15A)$

$$= \sin 28A + \sin 2A$$

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \sin 20^\circ \sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \sin 20^\circ[\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ]$$

$$= \sin 20^\circ\left[\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right] = \sin 20^\circ\left[\frac{3 - 4\sin^2 20^\circ}{4}\right]$$

$$= \frac{3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ}{4}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{4} = \frac{\sqrt{3}/2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \sin 60^\circ \sin 20^\circ \sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\left(\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\sin 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16} = \text{RHS}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$\cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + \cos^2(A-120^\circ) = \frac{3}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + \cos^2(A-120^\circ)$$

$$= \cos^2 A + \cos^2(A+120^\circ) + (1-\sin^2(A-120^\circ)) \quad (\text{அதாவது } \cos^2 A = 1-\sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A + 1 + (\cos^2(A+120^\circ) - \sin^2(A-120^\circ))$$

$$= \cos^2 A + 1 + \cos[(A+120^\circ)+(A-120^\circ)]\cos[(A+120^\circ)-(A-120^\circ)]$$

$$= \cos^2 A + 1 + \cos 2A \cos 240^\circ \quad (\text{அதாவது } \cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B))$$

$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\cos(180^\circ + 60^\circ) \quad (\text{அதாவது } 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A)$$

$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)(-\cos 60^\circ)$$

$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \cos^2 A + 1 - \cos^2 A + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.18

கீழ்க்கண்டவற்றைத் திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பெருக்கல் வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

(i) $\sin 9A + \sin 7A$ (ii) $\sin 7\theta - \sin 4\theta$ (iii) $\cos 8A + \cos 12A$

(iv) $\cos 4\alpha - \cos 8\alpha$ (v) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$ (vi) $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ$

(vii) $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$

தீர்வு

(i)
$$\sin 9A + \sin 7A = 2\sin\left(\frac{9A+7A}{2}\right)\cos\left(\frac{9A-7A}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{16A}{2}\right)\cos\left(\frac{2A}{2}\right)$$
$$= 2\sin 8A \cos A$$

(ii)
$$\sin 7\theta - \sin 4\theta = 2\cos\left(\frac{7\theta+4\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{7\theta-4\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{11\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

(iii)
$$\cos 8A + \cos 12A = 2\cos\left(\frac{8A+12A}{2}\right)\cos\left(\frac{8A-12A}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{20A}{2}\right)\cos\left(\frac{-4A}{2}\right)$$
$$= 2\cos 10A \cos(-2A)$$
$$= 2\cos 10A \cos 2A$$

(iv) $$\cos 4\alpha - \cos 8\alpha = -2\sin\left(\frac{4\alpha + 8\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha - 8\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{12\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin 6\alpha \sin 2\alpha$$

(v) $$\cos 20^\circ - \cos 30^\circ = -2\sin\left(\frac{20^\circ + 30^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{20^\circ - 30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{50^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{10^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin 25^\circ \sin 5^\circ$$

(vi) $$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos\left(\frac{75^\circ + 45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 45^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60^\circ \cos 15^\circ$$

(vii) $$\cos 55^\circ + \sin 55^\circ = \cos 55^\circ + \sin(90^\circ - 35^\circ)$$
$$= \cos 55^\circ + \cos 35^\circ$$
$$= 2\cos\left(\frac{55^\circ + 35^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{55^\circ - 35^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos 45^\circ \cos 10^\circ = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot \cos 10^\circ$$
$$= \sqrt{2}\cos 10^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 4.19

கோணங்கள் A, B மற்றும் C என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன எனில், $\cot B = \dfrac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A} = \frac{2\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \cot\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$= \cot B$ (A,B,C என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்பதால் $B = \dfrac{A+C}{2}$)

எடுத்துக்காட்டு 4.20

$\dfrac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{aligned}\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} &= \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}\\ &= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}\\ &= \frac{2\sin 3x(\cos 2x - 1)}{-2\sin 3x\sin 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\\ &= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.21

$\sin 105^{o} + \cos 105^{o}$ ன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு

$\sin 105^{o} + \cos 105^{o}$

$$\begin{aligned}&= \sin(90^{o} + 15^{o}) + \cos 105^{o}\\ &= \cos 15^{o} + \cos 105^{o}\\ &= \cos 105^{o} + \cos 15^{o} = 2\cos\left(\frac{105^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\\ &= 2\cos 60^{o}\ \ \cos 45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{..........(1)}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

$(1)^2 + (2)^2$

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine அல்லது cosine ஆகியவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக:

   (i) $\sin\frac{A}{8}\sin\frac{3A}{8}$ (ii) $\cos(60^\circ+A)\sin(120^\circ+A)$

   (iii) $\cos\frac{7A}{3}\sin\frac{5A}{3}$ (iv) $\cos 7\theta\sin 3\theta$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine மற்றும் cosine ஆகியவற்றின் பெருக்கல் வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\sin A + \sin 2A$ (ii) $\cos 2A + \cos 4A$

   (iii) $\sin 6\theta - \sin 2\theta$ (iv) $\cos 2\theta - \cos\theta$

3. (i) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ (ii) $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ = \sqrt{3}$ என நிறுவுக.

4. (i) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ என நிறுவுக.

   (ii) $\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(60^\circ-A) = \frac{1}{4}\sin 3A$ என நிறுவுக.

5. நிறுவுக :

   (i) $\sin(A-B)\sin C+\sin(B-C)\sin A+\sin(C-A)\sin B = 0$

   (ii) $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13} = 0$

6. (i) $\frac{\cos 2A-\cos 3A}{\sin 2A-\sin 3A} = \tan\frac{A}{2}$ என நிறுவுக.

   (ii) $\frac{\cos 7A+\cos 5A}{\sin 7A-\sin 5A} = \cot A$ என நிறுவுக.

7. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ என நிறுவுக.

8. மதிப்பிடுக.

   (i) $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$ (ii) $\sin 50^\circ-\sin 70^\circ+\sin 10^\circ$

9. $\cos A+\cos B = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\sin A+\sin B = \frac{1}{4}$ எனில், $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

10. $\sin(y+z-x), \sin(z+x-y), \sin(x+y-z)$ என்பன கூட்டுத்தொடரில் (A.P) உள்ளன எனில், $\tan x$, $\tan y$ மற்றும் $\tan z$ என்பன கூட்டுத்தொடரில் உள்ளது என நிறுவுக.

11. $\text{cosec}A + \sec A = \text{cosec}B + \sec B$ எனில், $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan A \tan B$ என நிறுவுக.

4.4 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

4.4.1 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ ... போன்ற அளவைகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

$\sin\theta = x$, எனவே $\theta = \sin^{-1}x$. நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் சார்பகம் (domain) மற்றும் வீச்சகம் (range) ஆகியவற்றின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

சார்பு	சார்பகம் x	வீச்சகம் y
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$R = (-\infty, \infty)$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\text{cosec}^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \neq 0$
$\sec^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \neq \frac{\pi}{2}$
$\cot^{-1}x$	R	$(0, \pi)$

அட்டவணை 4.2

4.4.2 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பண்புகள் (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

பண்பு (1)

(i) $\sin^{-1}(\sin x) = x$

(ii) $\cos^{-1}(\cos x) = x$

(iii) $\tan^{-1}(\tan x) = x$

(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$

(v) $\sec^{-1}(\sec x) = x$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec } x) = x$

பண்பு (2)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}(x)$

(iv) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}(x)$

(vi) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(x)$

பண்பு (3)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

(iv) $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}(x)$

பண்பு (4)

(i) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\sec^{-1}(x) + \text{cosec}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

பண்பு (5)

(i) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(ii) $\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

பண்பு (6)

$$\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(y) = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23

கீழ்க்காண்பவைகளின் முதன்மை மதிப்பு காண்க.

(i) $\sin^{-1}(1/2)$ (ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

தீர்வு

(i) $\sin^{-1}(1/2) = y$ இங்கு $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ என்க

$\therefore \quad \sin y = (1/2) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$y = \frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}(1/2)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$ இங்கு $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ என்க

$$\therefore \quad \tan y = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = -\frac{\pi}{3}$$

$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக : (i) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$ (ii) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$

தீர்வு

(i) $\sin^{-1}\frac{5}{13} = \theta$ என்க ... (1)

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{25}{169}}$$

$$= \frac{12}{13} \quad \dots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\therefore \cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right) = \cos\theta = \frac{12}{13}$$

(ii) $\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \theta$ என்க

$$\cos\theta = \frac{8}{17}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{64}{289}}$$

$$= \frac{15}{17} \quad \dots (2)$$

$$\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.25

நிறுவுக: (i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

தீர்வு

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{13}\right)}\right]$

$= \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$ என்க. எனவே $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

இப்பொழுது $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

மதிப்பிடுக : $\tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

தீர்வு

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ என்க

எனவே $\tan\theta = \frac{1}{8}$

$\therefore \tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$

$= \frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{7}{9}$

எடுத்துக்காட்டு 4.27

தீர்க்க : $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

தீர்வு:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2x^2-4}{-3} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2x^2-4 = -3$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

சுருக்குக : $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

தீர்வு

$$\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y) = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{9}}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க : $\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

தீர்வு

$$\tan^{-1}\left[\frac{(x+2)+(2-x)}{1-(x+2)(2-x)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{4}{1-(4-x^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-6 = 12$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 9$$

$$\therefore \quad x = \pm 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

$\tan(x + y) = 42$ மற்றும் $x = \tan^{-1}(2)$ எனில், y ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan(x+y) = 42$$
$$x + y = \tan^{-1}(42)$$
$$\tan^{-1}(2)+y = \tan^{-1}(42)$$
$$y = \tan^{-1}(42) - \tan^{-1}(2)$$
$$= \tan^{-1}\left[\frac{42-2}{1+(42\times 2)}\right]$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{40}{85}\right)$$
$$y = \tan^{-1}\left[\frac{8}{17}\right]$$

பயிற்சி 4.4

1. பின்வருவனவற்றின் முதன்மை மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$ (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$

2. நிறுவுக :

   (i) $2\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

   (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என நிறுவுக.

4. தீர்க்க : $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

5. தீர்க்க : $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$

6. மதிப்பிடுக : (i) $\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$ (ii) $\sin\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$

7. $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$ ன் மதிப்பு காண்க.

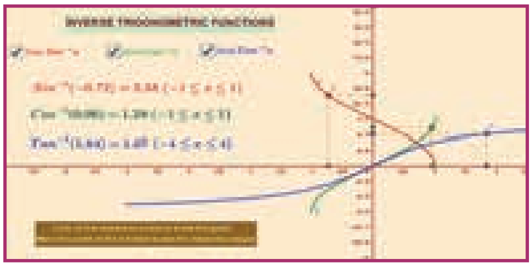
8. $\tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

9. $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{8}{17}\right) = \cos^{-1}\frac{84}{85}$ என நிறுவுக.

10. $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x}{1-\sin x}\right], -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ என்பதனை எளிய வடிவில் விவரிக்கவும்.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

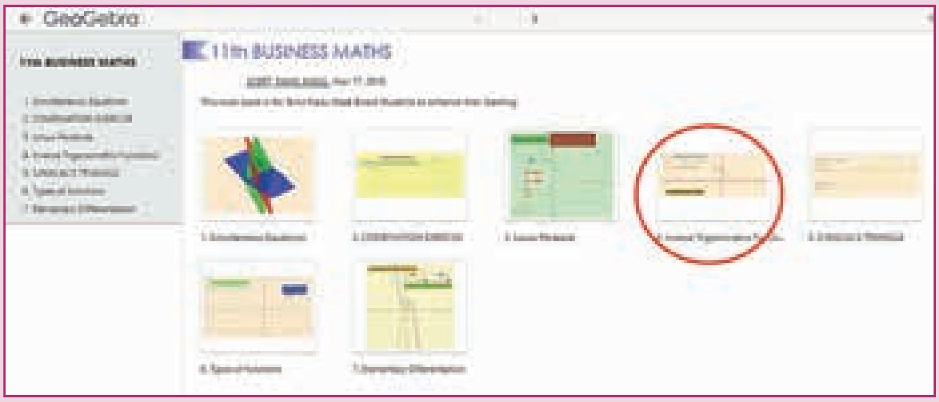
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHS" எனும் **GeoGebra** பணிப்புத்தகத்தில் **"Inverse Trigonometric Functions"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

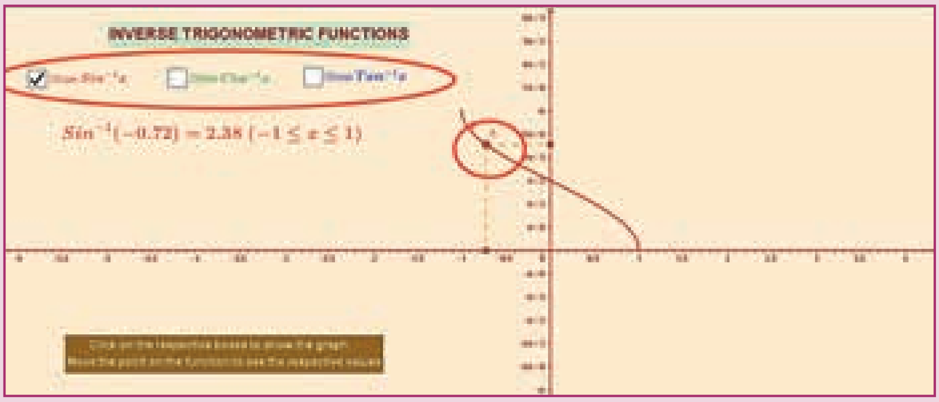
படி - 2

"Inverse Trigonometric Functions" க்கான பணித்தாளில் இடப் பக்கம் உள்ள தேர்வுப் பெட்டிகளில் தேவையான நேர்மாற்று திரிகோணச் சார்புகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கி வரைபடத்தில் காணலாம். மேலும் சார்புகளின் வரைபடத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியினை நகர்த்தி x மற்றும் y அச்சுகளில் மதிப்புகளைக் கண்டு மீளாய்வு செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 4.5

9ZDA4T

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\frac{\pi}{8}$ ன் கோண மதிப்பு

(a) $20^\circ 60'$ (b) $22^\circ 30'$ (c) $22^\circ 60'$ (d) $20^\circ 30'$

2. $37^\circ 30'$ –ன் ரேடியன் அளவு

(a) $\frac{5\pi}{24}$ (b) $\frac{3\pi}{24}$ (c) $\frac{7\pi}{24}$ (d) $\frac{9\pi}{24}$

3. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ மற்றும் θ முதல் கால்பகுதியில் அமைகிறது எனில் $\cos\theta$ ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{6}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

4. $\sin 15^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

5. $\sin(-420^\circ)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

6. $\cos(-480^\circ)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

7. $\sin 28^\circ \cos 17^\circ + \cos 28^\circ \sin 17^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1 (c) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

8. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

9. $\sec A \sin(270^\circ + A)$ -ன் மதிப்பு

(a) -1 (b) $\cos^2 A$ (c) $\sec^2 A$ (d) 1

10. $\sin A + \cos A = 1$ எனில் $\sin 2A =$

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

11. $\cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $1-2\sin^2 45^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 0

13. $4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

14. $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

15. $\sin A = \frac{1}{2}$ எனில் $4\cos^3 A - 3\cos A =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

16. $\frac{3\tan 10^\circ - \tan^3 10^\circ}{1-3\tan^2 10^\circ}$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

17. $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

18. $\sec^{-1}\frac{2}{3} + \operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{3} =$

(a) $\frac{-\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $-\pi$

19. α, β என்பன 0 மற்றும் $\frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் உள்ளது, மேலும் $\cos(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}$ மற்றும் $\sin(\alpha-\beta) = \frac{3}{5}$ எனில் $\sin 2\alpha =$

(a) $\frac{16}{15}$ (b) 0 (c) $\frac{56}{65}$ (d) $\frac{64}{65}$

20. $\tan A = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\tan B = \frac{1}{3}$ எனில், $\tan(2A+B)$ ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

21. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ க்கு சமமானது.

(a) $\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$ (b) $\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$ (c) $1-\tan x$ (d) $1+\tan x$

22. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ ன் மதிப்பு

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

23. $\frac{1}{\operatorname{cosec}(-45^\circ)}$ ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $-\sqrt{2}$

24. $p\sec 50^\circ = \tan 50^\circ$ எனில், p ன் மதிப்பு

(a) $\cos 50^\circ$ (b) $\sin 50^\circ$ (c) $\tan 50^\circ$ (d) $\sec 50^\circ$

25. $\left(\frac{\cos x}{\operatorname{cosec} x}\right) - \sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{1-\cos^2 x}$ க்குச் சமமானது.

(a) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (b) $\sin^2 x - \cos^2 x$ (c) 1 (d) 0

இதரக் கணக்குகள்

1. நிறுவுக : $\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

2. நிறுவுக : $\sqrt{3}\operatorname{cosec} 20^\circ - \sin 20^\circ = 4$

3. நிறுவுக : $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$.

4. $\tan x = \frac{3}{4},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$ எனில், $\sin\frac{x}{2}$ and $\cos\frac{x}{2}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{3\pi}{4} = 10$ என நிறுவுக.

6. மதிப்பிடுக : (i) $\sin 75^\circ$ (ii) $\tan 15^\circ$

7. $\sin A = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{1}{4}$ எனில், $\sin(A+B)$ –ன் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு, A, B குறுங்கோணங்கள்.

8. $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ என நிறுவுக.

9. $\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$ எனில் $\sin(\alpha-\beta) = \frac{5}{13}$ இங்கு $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha-\beta$ குறுங்கோணங்கள் எனில் $\tan 2\alpha$ ஐக் காண்க.

10. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), 0 < x < \pi$ என்பதனை எளிய வடிவில் எழுதுக.

தொகுப்புரை

- ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r, வில்லின் நீளம் l, மையத்தில் தாங்கக்கூடிய கோணம் θ ரேடியன் எனில் $l = r\theta$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $\cot^2 x + 1 = \text{cosec}^2 x$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$
- $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\quad \sin x\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

- $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

கலைச்சொற்கள்	
உருமாற்று சூத்திரங்கள்	Transformation formulae
கால் பகுதிகள்	Quadrants
கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சமம்	Componendo and dividendo.
கூட்டுக் கோணங்கள்	Compound angles
கோணம்	Angle
திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்	Trignometric identities
திரிகோணமிதி விகிதங்கள்	Trignometry Ratios
துணைக் கோணங்கள்	Allied angles
நேர்மாறு சார்பு	Inverse function
பாகை அளவை	Degree measure
மடங்கு கோணங்கள்	Multiple angles
ரேடியன் அளவு / ஆரையன் அளவு	Radian measure
வில்லின் நீளம்	Length of the arc.

அத்தியாயம் 5

வகை நுண்கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி பற்றிய கருத்துரு
- எல்லைக்கான சூத்திரம் மற்றும் தொடர்ச்சி சார்புகளின் வரையறைகள்
- வகையீடுகளின் அடிப்படைக் கருத்துரு
- முதன்மைக் கோட்பாட்டு கொள்கையின் மூலம் வகையீடு காணும் முறை
- சார்புகளின் வகையீடுகளை சில நேரடி சூத்திரங்களின் வழியாக காணுதல் மற்றும் அதன் பயன்பாடு
- உயர் வரிசை வகையீடு காணும் முறை

9ZM66G

அறிமுகம்

கணக்கிடுவதற்காக பயன்படுத்தப்படும் கூழாங்கல் அல்லது ஒரு சிறிய கல் என்பதன் பொருளமைந்த லத்தீன் வார்த்தை நுண்கணிதம் ஆகும். மேலும், கணக்கிடுதல் என்ற வார்த்தை லத்தின் வார்த்தையிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டதாகும். நுண்கணிதமென்பது மாற்றங்களுடன் தொடர்புடைய ஒரு முதன்மையான கணிதவியல் கருவியாகும். வகையிடலின் கருத்துருவாக்கம் என்பது நுண்கணித அறிவியலின் அடிப்படைக் கருவியாகும். நுண்கணிதம் என்பது தனித்த மாறியைப் பொறுத்து சார்ந்த மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதத்தை கணக்கிடக் கூடிய ஒரு முக்கியமான பகுதியாகும். சர். ஐசக் நீயூட்டன் (1642 – 1727 பொ.ஆ.) மற்றும் ஜெர்மனியின் கணிதமேதை G.W. லீப்னிட்ஸ் (1646 – 1716 பொ.ஆ.) ஆகிய இருவரும் தனித்தனியாக மற்றும் ஒரே நேரத்தில் இப்பாடத்தைக் கண்டுபிடித்து மேம்படுத்தினார்கள்.

சர். ஐசக் நீயூட்டன்

G.W. லீப்னிட்ஸ்

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள், எல்லை, வகையிடல் மற்றும் வகையிடல் உத்திகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.

5.1 சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள் (Functions and their graphs)

சில அடிப்படை கருத்துருக்கள்

5.1.1 அளவு (Quantity)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் போன்ற அடிப்படை கணித செயல்முறைகள் கொண்டு பயன்படுத்தக் கூடிய அனைத்தும் அளவு எனப்படும்.

5.1.2 மாறிலி (Constant)

ஒரு அளவு, கணக்கீடுகளின் போது ஒரே மதிப்பை தக்க வைத்துக் கொண்டு இருந்தால் அவ்வளவை மாறிலி எனப்படும்.

அடிப்படையில் மாறிலி அளவைகள் இரு வகைப்படும்.

(i) **முழுமையான மாறிலிகள்:** முழுமையான மாறிலிகள் என்பது எந்வொரு கணித ஆய்வின் போதும் அதனுடைய மதிப்புகள் மாறாமல் இருக்கும். மற்றொரு வாக்கியத்தில், இவைகள் எப்பொழுதும் நிலையானவை.
உதாரணமாக: $3, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

(ii) **தன்னிச்சை மாறிலிகள்:** தன்னிச்சை மாறிலிகள் என்பது ஒரு கணக்கிடுதலில் முழுவதுமாக ஒரே மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். ஆனால் வெவ்வேறு தீர்வுகளைப் பெறுவதற்கு வெவ்வேறுவிதமான மதிப்புகளை வழங்கலாம். தன்னிச்சை மாறிலிகள் $a, b, c, \ldots$ போன்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக: $y=mx+4$, என்ற சமன்பாட்டில் m என்பது தன்னிச்சை மாறிலியாகும்.

5.1.3 மாறி (Variable)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கீட்டின் போது (எந்த ஒன்று பன்மதிப்பு கொண்டதாக அமைகிறதோ) வெவ்வேறான மதிப்புகளை பெறக்கூடிய ஒரு அளவானது மாறி ஆகும். மாறிகள் பொதுவாக x, y, z என்ற ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டில் x மற்றும் y ஆகியவை மாறிகள். ஏனெனில் அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் அச்சு தொலைத்தூரங்களை நிர்ணயிக்கிறது. இங்கு a மற்றும் b என்பன, அச்சுக்களின் வெட்டு மதிப்புகள் ஆகும். அவைகள் தன்னிச்சையானவை.

மாறிகளின் இருவகைகள்:

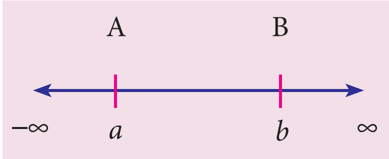
(i) **சாரா மாறி:** ஒரு மாறி என்பது தன்னிச்சையான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் போது அம்மாறி சாரா மாறி எனப்படும்.

(ii) **சார்ந்த மாறி:** ஒரு மாறி மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகளைச் சார்ந்து இருக்கும் போது அம்மாறி சார்ந்த மாறி எனப்படும்.

உதாரணமாக: $y = 5x^2 - 2x + 3$ என்ற சமன்பாட்டில் x என்பது சாரா மாறி, y என்பது சார்ந்த மாறி மற்றும் 3 என்பது மாறிலி

5.1.4 இடைவெளிகள் (Intervals)

மெய்யெண்களை வடிவக் கணிதத்தில் ஒரு எண்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகளாக குறிக்கப்படும் கோடு, மெய்கோடு (real line) என்றழைக்கப்படும்.



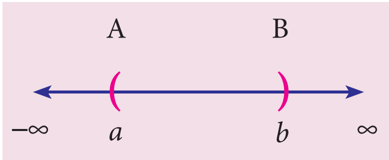
படம். 5.1

R என்ற குறியீடு மெய்யெண்களின் தொகுதி அல்லது மெய்க்கோட்டினைக் குறிக்கும். ஒரு மெய்க்கோட்டின் உட்கணமானது இடைவெளி எனப்படும். இது குறைந்தது இரண்டு எண்களையும் அதற்கு இடையேயுள்ள அனைத்து மெய்யெண்களையும் பெற்றிருக்கும்.

(i) திறந்த இடைவெளி (Open interval)

$\{x : a < x < b\}$ என்ற கணம் திறந்த இடைவெளியாகும். இதனை (a, b) எனக் குறிக்கலாம்.

இந்த இடைவெளியில், a மற்றும் b ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகள் உள்ளடங்காது.



படம். 5.2

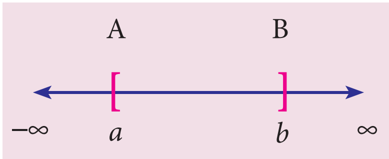
உதாரணத்திற்கு, $(4, 7)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில், 4–ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் அல்ல. ஆனால் 4.001 -ம் மற்றும் 6.99 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் ஆகும்.

(ii) மூடிய இடைவெளி (Closed interval)

$\{x : a \leq x \leq b\}$ என்ற கணம் மூடிய இடைவெளியாகும்.

இதனை $[a, b]$ எனக் குறிக்கலாம்.

இந்த இடைவெளியில், a மற்றும் b ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகள் உள்ளடங்கும்.



படம். 5.3

உதாரணத்திற்கு, $[4, 7]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில், 4 -ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகளாகும்.

மேலும் பாதி மூடிய, பாதி திறந்த இடைவெளிகளைப் பற்றி நாம் இங்கு குறிப்பிட வேண்டியுள்ளது.

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ என்பது இடப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ என்பது வலப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது.

சீராக அனைத்து நிலைகளிலும் $b - a = h$ என்பது இடைவெளியின் நீளம் என அழைக்கப்படுகிறது.

5.1.5 ஒரு புள்ளியின் அண்மையகம் (Neighbourhood of a point)

'a' என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் மற்றும் $\varepsilon > 0$ என்பது ஒரு மிக மிகச் சிறிய மெய்யெண் என எடுத்துக்கொள்வோம். $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ என்ற திறந்த இடைவெளி, புள்ளி 'a'யின் ε–அண்மையகம் என அழைக்கப்படும். இதனை $N_{a,\varepsilon}$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

உதாரணமாக,

$$N_{5,\frac{1}{4}} = \left(5-\frac{1}{4}, 5+\frac{1}{4}\right) = \left\{x: \frac{19}{4} < x < \frac{21}{4}\right\}$$

$$N_{2,\frac{1}{7}} = \left(2-\frac{1}{7}, 2+\frac{1}{7}\right) = \left\{x: \frac{13}{7} < x < \frac{15}{7}\right\}$$

5.1.6 சார்பு (Function)

X மற்றும் Y என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரண்டு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. X லுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் Y லுள்ள ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் f என்ற விதியானது கணம் X லிருந்து Y க்கான சார்பு ஆகும். இதனை $f: X \longrightarrow Y$ என எழுதலாம்.

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
>
> *1734 - 1735* ஆம் ஆண்டில் லியோனார்ட் ஆய்லரால் முதன் முதலில் சார்பின் குறியீடாக $y = f(x)$ பயன்படுத்தப்பட்டது.

கணம் X–னை, சார்பு f–ன் சார்பகம் என்றும், கணம் Y–னை f–ன் துணைச் சார்பகம் என்றும் கூறுவோம். மேலும், $f(X) = \{f(x) / x \in X\}$ என்பது f–ன் வீச்சகம் எனப்படும். இங்கு $f(X) \subseteq Y$ என்பது தெளிவு.

x இன் சார்பு என்பது பொதுவாக $f(x)$, என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

5.1.7 சார்பின் வகைப்பாடுகள் (Classification of functions)

சார்புகளை இருவகைப்படுத்தலாம் அவை,

(i) **இயற்கணிதச் சார்பு** (Algebric function)

நான்கு அடிப்படை கணக்கீட்டு செயலிகள், மாறிலிகள் மற்றும் x என்ற மாறியில் வெவ்வேறு அடுக்குகளைக் கொண்டு அமையும் தொகுப்பு இயற்கணிதச் சார்பாகும்.

உதாரணமாக : $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$, $y = \dfrac{2x^3 + 7x - 3}{x^3 + x^2 + 1}$, $y = \sqrt{3x^2 + 6x - 1}$ ஆகியன இயற்கணித சார்புகள் ஆகும்.

(a) $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$ என்ற சார்பு பல்லுறுப்பு கோவை (அல்லது)

விகிதமுறுமுழுவெண் சார்பு ஆகும்

(b) $y = \dfrac{2x^3 + 7x - 3}{x^3 + x^2 + 1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறுச் சார்பாகும்.

(c) $y = \sqrt{3x^2 + 6x - 1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறாச் சார்பு ஆகும்.

(ii) **விஞ்சிய சார்பு (Transcendental function)**

இயற்கணிதமற்ற சார்பு விஞ்சிய சார்பு எனப்படும்.

உதாரணமாக: $\sin x, \sin^{-1}x, e^x, \log_a x$ ஆகியன விஞ்சிய சார்புகள் ஆகும்.

(a) $\sin x, \tan 2x, \ldots$ போன்ற சார்புகள் திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்.

(b) $sin^{-1}x, cos^{-1}x, \ldots$ போன்ற சார்புகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்

(c) $e^x, 2^x, x^x, \ldots$ போன்ற சார்புகள் அடுக்குச் சார்புகள் எனப்படும்.

(d) $log_a x, log_e(sin\, x), \ldots$ போன்ற சார்புகள் மடக்கைச் சார்புகள் எனப்படும்.

5.1.8 இரட்டைச் சார்புகள் மற்றும் ஒற்றைச் சார்புகள் (Even and odd functions)

$f(-x) = f(x)$ எனில், $f(x)$ ஆனது **இரட்டைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்

$f(-x) = -f(x)$ எனில் $f(x)$ ஆனது **ஒற்றைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்.

உதாரணங்கள்:

$f(x)= x^2$ மற்றும் $f(x) = cos\, x$
என்பன இரட்டைச் சார்புகளாகும்.

$f(x) = x^3$ மற்றும் $f(x) = sin\, x$
என்பன ஒற்றைச் சார்புகளாகும்

குறிப்பு

$f(x) = x^3 + 5$ என்பது இரட்டைச் சார்பும் அல்ல, ஒற்றைச்சார்பும் அல்ல.

5.1.9 வெளிபடு மற்றும் உட்படு சார்புகள் (Explicit and implicit functions)

ஒரு சார்பில் சார்ந்த மாறியானது சில சாரா மாறிகளைக் கொண்டு வெளிப்படையாக வடிவமைக்கப்பட்டிருந்தால், அச்சார்பு **வெளிபடுச் சார்பு** எனப்படும்.

உதாரணமாக: $y = x^2 + 3$ மற்றும் $y = e^x + e^{-x}$ என்பன x-ல் அமைந்த வெளிப்படு சார்புகள் ஆகும்.

x மற்றும் y என்ற மாறிகள், $f(x,y) = 0$ என்ற சார்பில் தொடர்பு படுத்தப்பட்டு எந்த ஒரு மாறியும் நேரிடையாக மீதமுள்ள மாறிகளால் வடிவமைக்கப்படாமல் இருந்தால், சார்பு **உட்படு சார்பு** எனப்படும்

உதாரணமாக: $x^3 + y^3 - xy = 0$ என்பது உட்படு சார்பு ஆகும்.

5.1.10 மாறிலிச் சார்பு (Constant function)

k என்பது ஒரு நிலையான மெய் எண் எனில் அனைத்து $x \in R$ க்கும், $f(x) = k$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பானது மாறிலிச்சார்பு என அழைக்கப்படும்.

உதாரணமாக: $y = 3,\ f(x) = -5$ என்பன மாறிலிச் சார்புகள் ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$y = f(x)$ என்ற மாறிலிச் சார்பின் வரைபடம் x–அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடு ஆகும்

5.1.11 சமனிச் சார்பு (Identity function)

ஒரு சார்பில் அதன் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதே மெய்யெண்ணுடன் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் அது சமனிச்சார்பு என்போம். இது I என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

அதாவது, அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=x$, எனுமாறு வரையறுக்கப்படின் f–ஐ சமனிச் சார்பு என்போம்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

மெய்யெண்களின் மீதான சமனிச் சார்பின் வரைப்படமானது, ஆதியின் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஆகும். இது x-அச்சின் மிகை திசையுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

உதாரணமாக: $A=\{1, 2, 3\}$ மற்றும் $f : A \rightarrow A$ இன் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணம் $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ஓர் சமனிச் சார்பு ஆகும்.

5.1.12 மட்டுச் சார்பு (Modulus function)

$f(x) = |x|$ இங்கு,

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$ என்று வரையறுக்கப்படின்,

$f(x)$ ஆனது மட்டுச்சார்பு எனப்படும். இதனை எண்ணளவைச் சார்பு என்றும் அழைக்கலாம்.

குறிப்பு

$|5| = 5, \ |-5| = -(-5) = 5$

மேற்குறிப்பு இதன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $[0, \infty)$ ஆகும்.

5.1.13 குறிச் சார்பு (Signum function)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$ என வரையறுக்கப்படின் $f(x)$ ஆனது குறிச் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு இதன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $\{-1, 0, 1\}$ ஆகும்

5.1.14 படிச் சார்பு (Step function)

(i) மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு (Greatest integer function)

ஒரு மெய்யெண் x இடத்து x ஐ விட மிகைப்படாத மீப்பெரு முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீப்பெரு முழு எண் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lfloor x \rfloor$ என குறிப்போம்.

குறிப்பு

$\lfloor 2.5 \rfloor = 2, \ \lfloor -2.1 \rfloor = -3,$
$\lfloor 0.74 \rfloor = 0, \ \lfloor -0.3 \rfloor = -1,$
$\lfloor 4 \rfloor = 4.$

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீப்பெரு முழு எண் சார்பு எனப்படும்.

(ii) மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு (Least integer function)

ஒரு மெய்யெண் x இடத்து x ஐ விட குறையாத மீச்சிறு முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீச்சிறு முழு எண் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lceil x \rceil$ என குறிப்போம்.

குறிப்பு

$\lceil 4.7 \rceil = 5, \lceil -7.2 \rceil = -7,$
$\lceil 5 \rceil = 5, \lceil 0.75 \rceil = 1.$

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு $f(x) = \lceil x \rceil$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீச்சிறு முழு எண் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு இச்சார்பின் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் Z [முழுக்களின் கணம்] ஆகும்.

5.1.15 விகிதமுறுச்சார்பு (Rational function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை ஒரு விகிதமுறுச் சார்பு எனலாம்.

உதாரணமாக: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}, x \neq 3$ ஒரு விகிதமுறு சார்பு ஆகும்.

5.1.16 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு (Polynomial function)

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ என வரையறுப்பின் f–ஐ ஒரு n–படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு எனலாம். இங்கு $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$; $a_0 \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள், மற்றும் n ஒரு குறைவிலா முழு எண்.

உதாரணமாக: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 7$ ஆனது முப்படிகொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சார்பாகும்.

5.1.17 நேர்கோட்டுச் சார்பு (Linear function)

a $\neq 0$ மற்றும் a, b இவையிரண்டும் மெய்யெண்களாயின் $f(x) = ax + b$ ஐ நேரியல் சார்பு என்போம்.

உதாரணமாக: $y = 2x + 3$ ஒரு நேரியல் சார்பு ஆகும்.

5.1.18 இருபடிச் சார்பு (Quadratic function)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c மற்றும் $a \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு இருபடிச்சார்பு எனப்படும்.

உதாரணமாக: $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ ஓர் இருபடிச் சார்பாகும்.

5.1.19 அடுக்குச் சார்பு (Exponential function)

அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு அடுக்குச் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு	சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$ மேலும் $(0, 1)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

உதாரணமாக: $e^{2x}, e^{x^2+1}, 2^x$ ஆகியவை அடுக்குச் சார்புகள் ஆகும்.

5.1.20 மடக்கைச் சார்பு (Logarithmic function)

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ ஐ மடக்கைச் சார்பு என்போம்.

மேற்குறிப்பு	சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் R மேலும் $(1, 0)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

உதாரணமாக: $f(x) = \log_e(x+2), f(x) = \log_e(\sin x)$ என்பன மடக்கைச் சார்புகள் ஆகும்.

5.1.21 இரு சார்புகளின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற சார்புகளின் சார்பகங்கள், மற்றும் துணைச் சார்பகங்கள் முறையே சமமாக இருப்பின்

(i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(ii) $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

(iv) $(cf)(x) = cf(x)$, c ஒரு மாறிலி.

5.1.22 சார்பின் வரைபடம் (Graph of a function)

$(x, f(x))$ என்ற புள்ளிகளின் தொகுப்பு சார்பின் வரைபடமாகும். இங்கு x என்பது சார்பின் சார்பகத்தின் மதிப்புகளாகவும், $f(x)$ என்பது சார்பின் வீச்சகத்தின் மதிப்புகளாகவும் இருக்கும்.

குறிப்பு

ஒரு சார்பின் வரைபடத்திற்கான வரைபடத்தை வெள்ளைத் தாளில் வரைந்தால் போதுமானது.

சார்பின் வரைபடம் வரையும்போது, தேவையான அளவுக்கு $(x, f(x))$ என்ற வரிசைச்ஜோடிகளை சார்பின் மீது கணக்கிட்டு, அதனை படத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

$f(x) = 2x^2-1$ மற்றும் $g(x) = 1-3x$ என்ற சார்புகள் சமம் எனில் அதன் சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = g(x) \quad \text{(கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 1 = 1-3x$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(x+2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore \quad x = -2,\ x = \frac{1}{2}$$

சார்பகம் $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$f(x) = ax+b$ என்ற சார்பில் $f = \{(1, 1), (2, 3)\}$ என அமைந்தால் a மற்றும் b யின் மதிப்பினைக் காண்க

தீர்வு

$$f(x) = ax + b,\ f(1) = 1 \text{ மற்றும் } f(2) = 3 \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி)}$$

$$\therefore \quad a + b = 1 \text{ மற்றும் } 2a + b = 3$$

$$\Rightarrow \quad a = 2 \text{ மற்றும் } b = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ எனில், $[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$ என நிறுவுக

தீர்வு

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\quad f(x^3) = x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ மற்றும் } f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

இப்போது, $LHS = [f(x)]^3$

$$= \left[x + \frac{1}{x}\right]^3$$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= f(x^3) + 3f(x) = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= RHS$$

எடுத்துக்காட்டு 5.4

$f(x) = x - 5$ மற்றும் $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x+5} & \text{if } x \neq -5 \\ \lambda & \text{if } x = -5 \end{cases}$ எனுமாறு f, g வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேலும் $f(x) = g(x), \; \forall \; x \in R$ எனில் λ வின் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$f(x) = g(x), \;\; \forall x \in R$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\therefore \quad f(-5) = g(-5)$$

$$-5 - 5 = \lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = -10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$f(x) = 2^x$ எனில், $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ என நிறுவுக

தீர்வு

$f(x) = 2^x$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\therefore \quad f(x+y) = 2^{x+y}$$

$$= 2^x \cdot 2^y$$

$$= f(x) \cdot f(y)$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ எனில், $f[f(x)] = -\dfrac{1}{x}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\therefore \quad f\left[f(x)\right] = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}, \;\; 0 < x < 1$ எனில், $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$. என நிறுவுக

தீர்வு

$$f(x) = \log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{(கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}$$

$$= \log\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}$$

$$= \log\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$$

$$= 2\log\frac{1+x}{1-x} = 2f(x).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$f(x) = x$ மற்றும் $g(x) = |x|$ எனில் ,

(i) $(f+g)(x)$ (ii) $(f-g)(x)$ (iii) $(fg)(x)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + |x|$

$$= \begin{cases} x+x & , x \geq 0 \\ x-x & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - |x|$

$$= \begin{cases} x-x & , x \geq 0 \\ x-(-x) & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$$

(iii) $(fg)(x) = f(x)\,g(x) = x\,|x|$

$$= \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

ஐம்பது பேர்கள் அமரக்கூடிய பேருந்து ஒன்றை மாணவர்கள் குழு ஒரு கல்வி சுற்றுலாவிற்காக வாடகைக்கு அமர்த்த விரும்பியது. பேருந்து நிறுவனம் குறைந்தது 35 மாணவர்களாவது விருப்பம் தெரிவித்தால்தான் பேருந்தை வாடகைக்கு விடும். மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 45 பேர்கள் வரை என்றால் ஒரு மாணவனுக்கு ₹ 200 எனவும், 45 பேர்களுக்கு மேற்ப்படின் ₹200 லிருந்து 45 க்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையில் $\frac{1}{5}$ பாகத்தை கழித்து கட்டணமாக வசூலிக்கும். மொத்த செலவை சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வாயிலாக ஒரு சார்பாக காணவும். மேலும், இதன் மதிப்பகத்தை காண்க.

தீர்வு

சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை 'x' எனக் கொள்க.

$\therefore\ 35 \le x \le 50$, x ஒரு மிகை முழு ஆகும்

சூத்திரம்: மொத்தச் செலவு = (ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம்) x (மாணவர்களின்எண்ணிக்கை)

(i) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 35 க்கும் 45 க்கும் இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம் ₹200

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = 200x$.

(ii) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 46 க்கும் 50 க்கும் இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம் ₹ $\left\{200 - \frac{1}{5}(x-45)\right\} = 209 - \frac{x}{5}$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = \left(209 - \frac{x}{5}\right)x = 209x - \frac{x^2}{5}$

$$\therefore \quad y = \begin{cases} 200x & ;\ 35 \le x \le 45 \\ 209x - \frac{x^2}{5} & ;\ 46 \le x \le 50 \end{cases},$$

சார்பகம் = $\{35, 36, 37, ..., 50\}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக

தீர்வு

$$y = f(x) = |x|$$

$$= \begin{cases} x & , x \ge 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

x க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து y இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

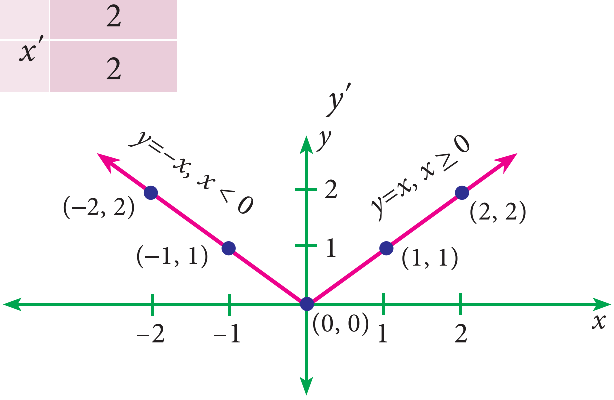
இவ்வாறாக கீழ்கண்ட அட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

அட்டவணை 5.1

$(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்.

$f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.4 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 5.4

எடுத்துக்காட்டு 5.11

$f(x) = x^2 - 5$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

$y = f(x) = x^2 - 5$ என்க.

x க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து y இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

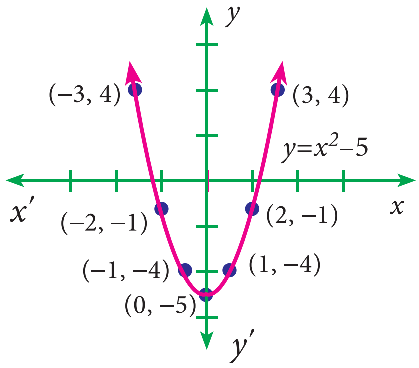
இவ்வாறாக கீழ்கண்ட அட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	-1	-4	-5	-4	-1	4

அட்டவணை : 5.2

$(-3, 4), (-2, -1), (-1, -4), (0, -5), (1, -4), (2, -1), (3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்

$\therefore$ $f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.5 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.5

எடுத்துக்காட்டு 5.12

$f(x) = a^x, a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ க்கு வரைபடம் வரைக

தீர்வு

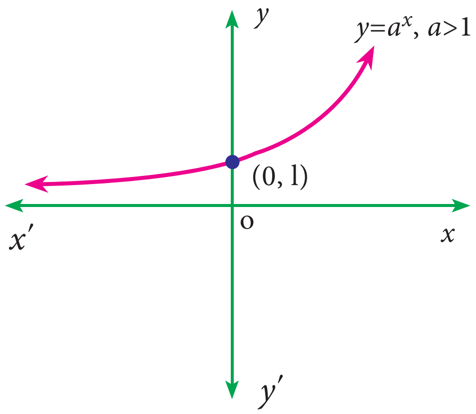
$f(x)$ இன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$ மேலும் இதன் வளைவரையானது $(0, 1)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

வகை (i) $a > 1$ எனில்,

$$y = f(x) = a^x$$
$$= \begin{cases} < 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ > 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு x இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது, y இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

∴ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



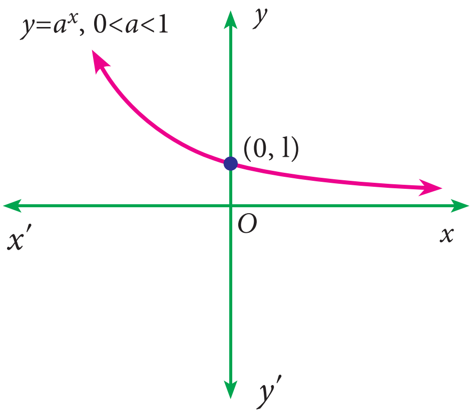
படம் 5.6

வகை (ii) $0 < a < 1$ எனில்

$$y = f(x) = a^x = \begin{cases} > 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ < 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு x ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது y ன் மதிப்பு குறைகிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

∴ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.7

குறிப்பு

(i) e-ன் மதிப்பானது 2 க்கும், 3 க்கும் இடையில் அமையும் i.e. $2 < e < 3$

(ii) $f(x) = e^x$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$, $a > 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும். மேலும், $f(x) = e^{-x}$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ இன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

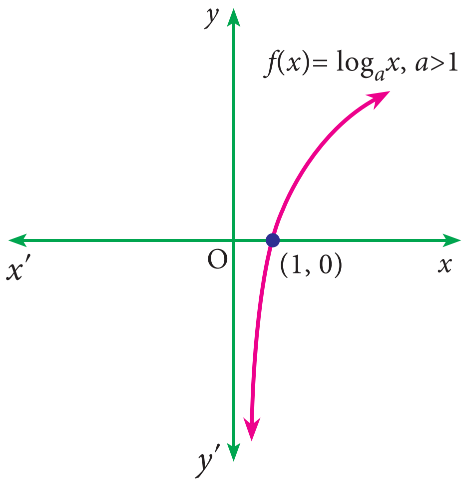
$f(x)$ இன் சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் R மேலும் இதன் வளைவரையானது $(1, 0)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

வகை (i) $a > 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்,

$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} < 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ > 0 & , x > 1 \end{cases}$$

இங்கு x–ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $f(x)$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.8 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



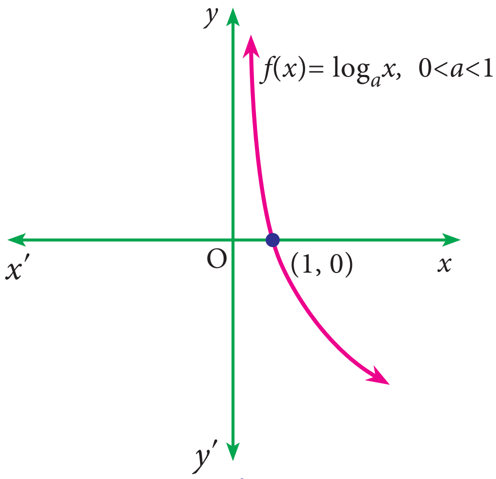
படம் 5.8

வகை (ii) $0 < a < 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்

$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} > 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ < 0 & , x > 1 \end{cases}$$

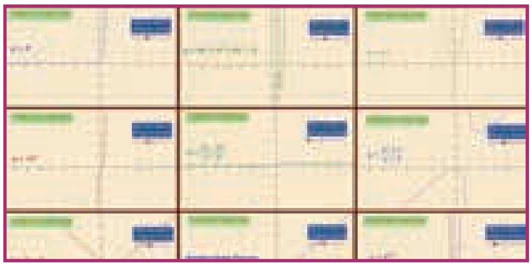
இங்கு x இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது , $f(x)$ இன் மதிப்பு குறைகிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.9 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.9

இணையச் செயல்பாடு



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

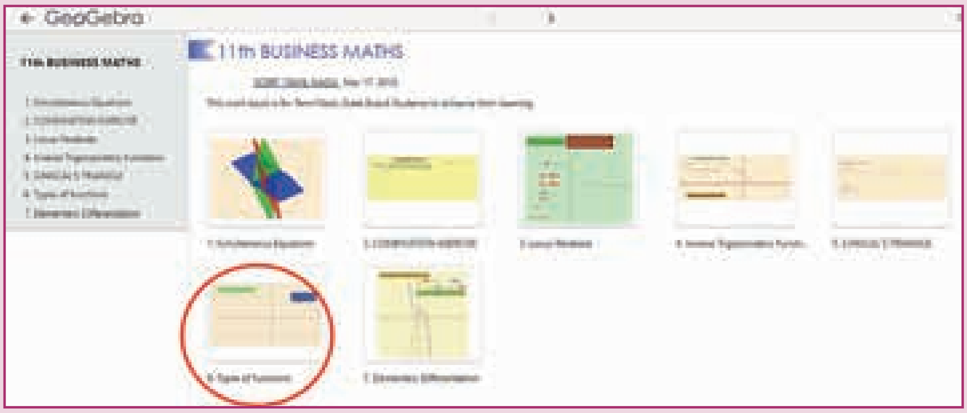
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

“11th BUSINESS MATHS” எனும் GeoGebra பணிப் புத்தகத்தில் “Types of Functions” க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

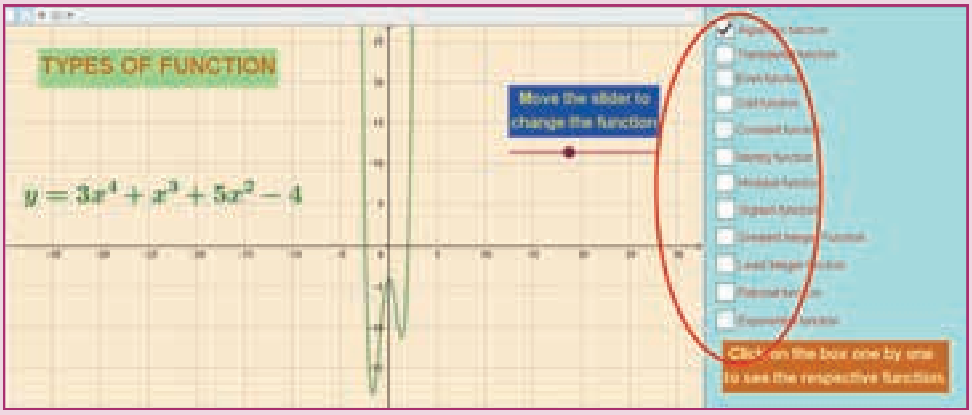
படி - 2

“Types of Functions” க்கான பணித்தாளில் வலப் பக்கம் காணப்படும் சார்புகளின் வகைகளின் தேர்வுப் பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கினால் இடப் பக்கத்தில் அதற்கான வரைபடங்கள் தோன்றும். மேலும் இடப் பக்கம் உள்ள நழுவலை நகர்த்தி சார்புகளை மாற்றி மீளாய்வு செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் சார்புகள் ஒற்றைச் சார்பா? அல்லது இரட்டை சார்பா? எனக் காண்க

   (i) $f(x) = \left(\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}\right)$ (ii) $f(x) = \log\left(x^2 + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

   (iii) $f(x) = \sin x + \cos x$ (iv) $f(x) = x^2 - |x|$ (v) $f(x) = x + x^2$

2. $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x,\ x \in R.$ என்ற சார்பு ஒற்ற சார்பு எனில் k இன் மதிப்பு யாது ?

3. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ எனில், $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ எனில், $f(f(x)) = x$ என நிறுவுக.

5. $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+1}$ எனில், $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ மற்றும் $\dfrac{1}{f(x)}$ இன் சார்பை எழுதுக.

6. $f(x) = e^x$ மற்றும் $g(x) = \log_e x$ எனில்,

   (i) $(f+g)(1)$ (ii) $(fg)(1)$

   (iii) $(3f)(1)$ (iv) $(5g)(1)$ ஐக் காண்க.

7. பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக:

   (i) $f(x) = 16 - x^2$ (ii) $f(x) = |x - 2|$ (iii) $f(x) = x|x|$

   (iv) $f(x) = e^{2x}$ (v) $f(x) = e^{-2x}$ (vi) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

5.2 எல்லைகள் மற்றும் வகைக்கெழுக்கள் (Limits and derivatives)

இப்பகுதியில் நாம் சார்பின் எல்லை, சார்பின் தொடர்ச்சி, வகைக்கெழு குறித்தும் மற்றும் முதன்மைக் கோட்பாடு முறை கொள்கைகளிலிருந்து வகைக் கெழுவைக் காணும் முறை குறித்தும் பயில்வோம். எல்லை என்பது ஒரு மாறுகின்ற அளவையில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நிலையான மதிப்பிற்கு மிகவும் அருகாமையில் அளவையின் மதிப்பினைக் காண பயன்படுகிறது.

வரையறை 5.1

f என்பது மெய் மதிப்புகளை கொண்ட x இல் அமைந்த சார்பு என்க. l மற்றும் a என்பன இரு நிலை எண்கள் என்க. x ஆனது a எனும் நிலையெண்ணை நெருங்கும் போது $f(x)$ ஆனது l ஐ நெருங்குமானால், l ஐ $f(x)$ இன் எல்லை என்போம்.

இதனை $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ என எழுதுவோம்

குறியீடுகள்:

(i) $L[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் இடக்கை எல்லை என்போம்.

(ii) $R[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் வலக்கை எல்லை என்போம்.

5.2.1 எல்லையின் உள்ளமைத்தன்மை (Existence of limit)

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow$ $L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவை காணத் தக்கதாகவும் சமமாகவும் இருக்க வேண்டும்.

i.e., $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow L[f(x)]_{x=a} = R[f(x)]_{x=a}$.

குறிப்பு

$L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவற்றை $L[f(a)]$ மற்றும் $R[f(a)]$ எனவும் குறியிடலாம்.

5.2.2 இடமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $L[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ஐ எழுதுக.

(ii) $x=a-h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x \to a^-$ க்கு பதிலாக $h \to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x = a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான இடக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

5.2.3 வலமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $R[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ஐ எழுதுக.

(ii) $x = a+h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x \to a^+$ க்கு பதிலாக $h \to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x = a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான வலக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , x \neq 3 \\ 0 & , x = 3 \end{cases}$ எனும் சார்புக்கு $x = 3$ இல் இடக்கை மற்றும் வலக்கை எல்லை மதிப்புக்களை காண்க.

தீர்வு

$$L[f(x)]_{x=3} = \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(3-h), x = 3-h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|(3-h)-3|}{(3-h)-3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -1$$

$$= -1$$

$$R[f(x)]_{x=3} = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(3+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|(3+h)-3|}{(3+h)-3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

குறிப்பு

இங்கு, $L[f(3)] \neq R[f(3)]$ எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை. அதாவது $\lim_{x \to 3} f(x)$ இன் மதிப்பு காணத்தக்கதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & ,0 < x \le 1 \\ 4x^3-3 & ,1 < x < 2 \end{cases}$ க்கு $\lim_{x \to 1} f(x)$ மதிப்பு காணத் தக்கதா என ஆராய்க.

தீர்வு

$$L[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(1-h), x = 1-h$$

$$= \lim_{h \to 0} [5(1-h)-4]$$

$$= \lim_{h \to 0} (1-5h) = 1$$

$$R[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(1+h), x = 1+h$$

$$= \lim_{h \to 0} [4(1+h)^3 - 3(1+h)]$$

$$= 4(1)^3 - 3(1) = 1$$

தெளிவாக, $L[f(1)] = R[f(1)]$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ஆனது மதிப்பு காணத் தக்கது மற்றும் இதனுடைய மதிப்பு 1 ஆகும்.

குறிப்பு

$f(x)$ என்ற சார்புக்கு a என்ற புள்ளியியல் சார்பின் எல்லை மதிப்பு மற்றும் சார்பின் மதிப்பு காணும் போது பின் வரும் நிலைகள் ஏற்படலாம்.

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ஐ காண இயலும் ஆனால் $f(a)$ ஐ காண இயலாது.

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ஐ காண இயலாது ஆனால் $f(a)$ ஐ காண இயலும்.

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ ஐ காண இயலும் ஆனால் அவை சமமற்றவையாக இருக்கும்.

(iv) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ காண இயலும் மற்றும் அவை சமமாக இருக்கும்.

5.2.4 எல்லைகளின் சில முடிவுகள்

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ஐ காண இயலுமாயின்

(i) $\lim\limits_{x\to a} (f\pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$, இங்கு k ஒரு மாறிலி.

5.2.5 மதிப்பிடமுடியாத வடிவங்கள் மற்றும் எல்லை மதிப்புக் காணல் (Indeterminate forms and evaluation of limits)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன எல்லை மதிப்புகள் காணத்தக்க இரு சார்புகள் என்க.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ எனில், $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ ஆனது $\dfrac{0}{0}$ என்ற வடிவத்தில் அமைவதால் அது அர்த்தமற்றதாகிறது. ஆனால் $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்பது அர்த்தமற்றது எனக் கூற இயலாது.

பல நேரங்களில் இம்மாதிரியான மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களுக்கு நிலையான ஒரு எல்லை மதிப்பினை காண இயலும். இந்த மாதிரி வடிவங்களுக்கு எல்லை மதிப்பிடுதல் முறையில் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களின் மதிப்பிடல் என்போம்.

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ மற்றும் 1^∞ இல் அமைந்த வடிவங்கள் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்கள் ஆகும். இவற்றுள் $\frac{0}{0}$ என்ற வடிவம் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களில் அடிப்படை வடிவம் ஆகும்.

5.2.6 இயற்கணித எல்லையின் வரம்புகளை (மதிப்பை) மதிப்பிடும் முறைகள்

(i) நேரடி பிரதியிடல்

(ii) காரணிப்படுத்தல்

(iii) பகுத்தறிவு முறை

(iv) சில எல்லைகளின் திட்ட வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டு காணல்

5.2.7 சில திட்ட எல்லை வாய்பாடுகள்

(i) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n \in Q$

(ii) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$, θ ரேடியனில்.

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a, \quad a>0$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(vi) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 4x - 5)$.

தீர்வு

$\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 4x - 5)$

$= 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 6}{x + 2}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+6}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+6)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}$$

$$= \frac{(2)^2-4(2)+6}{2+2} = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.18

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{5\sin 2x-2\cos 2x}{3\cos 2x+2\sin 2x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{5\sin 2x-2\cos 2x}{3\cos 2x+2\sin 2x} = \frac{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(5\sin 2x-2\cos 2x)}{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\cos 2x+2\sin 2x)}$$

$$= \frac{5\sin\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}}{3\cos\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{5(1)-2(0)}{3(0)+2(1)} = \frac{5}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

தீர்வு

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

$$= (1)^2+1+1 = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + x - 2}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}}$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{3}{5}}}{x - a}}{\frac{x^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}}}{x - a}}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}(a)^{-\frac{2}{5}}}{\frac{1}{5}(a)^{-\frac{4}{5}}} = 3a^{\frac{-2}{5}+\frac{4}{5}} = 3a^{\frac{2}{5}} \quad .$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{3x \times \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \times \frac{\sin 5x}{5x}} \right\}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.23

மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to \infty} \frac{6 - 5x^2}{4x + 15x^2}$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6 - 5x^2}{4x + 15x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - 5}{\frac{4}{x} + 15}$$

$$= \frac{0 - 5}{0 + 15} = -\frac{1}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.24

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x \to \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

தீர்வு

$y = \frac{1}{x}$ என்க. $x \to \infty$ எனும்பொழுது $y \to 0$ ஆகும்.

$$\lim_{x \to \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\tan y}{y} = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.25

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sum n^2}{n^3}$.

தீர்வு

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \to \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(1)(2)$$

$$= \frac{1}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.26

மதிப்பிடுக $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^3)}{\sin^3 x} = 1.$

தீர்வு

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^3)}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \left\{\frac{\log(1 + x^3)}{x^3} \times \frac{x^3}{\sin^3 x}\right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^3)}{x^3} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+2}{x+1}$ (ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+5}{x^2+3x+9}$ (iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sum n}{n^2}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$ (v) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^{\frac{5}{8}}-a^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$ (vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^9+a^9}{x+a} = \lim\limits_{x \to 3}(x+6)$ எனில் , a யின் மதிப்பை காண்க.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^n-2^n}{x-2} = 448$ எனில், n–ன் மீச்சிறு மிகை முழு எண்ணை காண்க.

4. $f(x) = \dfrac{x^7-128}{x^5-32}$ எனில், $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ஐ காண்க.

5. $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ எனில், $f(-2) = 0$ என நிறுவுக.

வகைக்கெழு (Derivative)

இப்பகுதியை பற்றி தெரிந்து கொள்வதற்கு முன் நாம் ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை பற்றி இங்கு விரிவாக தெரிந்து கொள்வோம். சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியுடையது எனில் அதன் வளைவரை $x = a$ இல் முறிவு ஏதும் கிடையாது என்பதாகும்.

மேலும், $x = a$ இல் வளவரை முறிவை பெறுமாயின் சார்பு அப்புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை கொண்டது எனலாம்.

சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சித் தன்மையை பெற்றிருந்தால் அந்த குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மையை கொண்டதாகும்.

5.2.8 தொடர்ச்சி சார்பு (Continuous function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில், பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(a)$ காணத்தக்கது.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

கூர்நோக்கு

மேற்கூறிய வரையறையின் நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிபந்தனைகள் $x = a$–ல் பொருந்தவில்லை எனில் சார்பு $f(x)$, தொடர்ச்சி தன்மை அற்றது எனலாம்

5.2.9 தொடர் சார்புகளின் சில பண்புகள்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற மெய் மதிப்புகளை கொண்ட சார்புகள் $x = a$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டதாக இருக்கும்போது,

(i) $f(x) \pm g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $f(x)\, g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(iii) $kf(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது, k ஓர் மெய்யெண்.

(iv) $f(a) \neq 0$ எனில், $\frac{1}{f(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(v) $g(a) \neq 0$ எனில், $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(vi) $|f(x)|$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

$f(x) = \begin{cases} 5x - 4, & , 0 < x \le 1 \\ 4x^3 - 3x, & , 1 < x < 2 \end{cases}$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $x = 1$ இல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

தீர்வு

$$L[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(1-h), \quad x = 1-h$$

$$= \lim_{h \to 0} [5(1-h) - 4]$$

$$= 5(1) - 4 = 1$$

$$R[f(x)]_{x=1} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(1+h), \quad x = 1+h$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[4(1+h)^3 - 3(1-h)\right]$$

$$= 4(1)^3 - 3(1)$$

$$= 4 - 3 = 1$$

இப்போது, $f(1) = 5(1) - 4 = 5-4 = 1$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1),$$

$x = 1$ ல் சார்பு $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ 2+x, & x \geq 2 \end{cases}$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f இன் தொடர்ச்சித் தன்மையை $x = 2$ ல் ஆராய்க .

தீர்வு

$$L[f(x)]_{x=2} = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(2-h), \quad x = 2 - h$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \{2-(2-h)\}$$

$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$R[f(x)]_{x=2} = \lim_{x+2^+} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(2+h), \quad x = 2 + h$$

$$= \lim_{h \to 0} \{2+(2+h)\}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

மேலும், $f(2) = 2+2 = 4.$

இங்கு $\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$

$\therefore f(x)$ என்ற சார்பானாது $x = 2$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை அற்றது ஆகும் .

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$f(x) = \begin{cases} \alpha(x) & , \quad x < a \\ k & , \quad x = a \\ \beta(x) & , \quad x > a \end{cases}$ எனில்

$$L[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} \alpha(x)$$

$$R[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} \beta(x)$$

$x = a$ என்ற புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் சார்புக்கு வெவ்வேறு வரையறைகள் இருக்கும் போது மட்டுமே இது பொருந்தும்

கூர்நோக்கு

(i) மாறிலிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(ii) சமனிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iii) பல்லுறுப்புக் கோவை சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iv) மட்டுச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(v) அடுக்குக் குறிச் சார்பு a^x, $a>0$ எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(vi) மடக்கைச் சார்பு அதன் அரங்கத்தில் தெடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

(vii) அனைத்து விகிதமுறுச் சார்புகளும் அதன் அரங்கத்தில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளிடத்தும் தெடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

பயிற்சி 5.3

1. கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ள புள்ளியில் சார்புகளின் தெடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & , x \neq 2 \\ 0, & , x = 2 \end{cases}$ எனில் $x = 2$–ல்

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & , x \neq 3 \\ 6, & , x = 3 \end{cases}$ எனில் $x = 3$–ல்

2. $f(x) = |x|$ என்ற சார்பானது $x = 0$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது என நிறுவுக.

5.2.10 ஒரு புள்ளியில் வகையீடு காணல் (Differentiability at a point)

(a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது மெய்மதிப்புளை கொண்ட சார்பு மற்றும் $c \in (a, b)$ எனக் கொள்க.

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ காணத்தக்கதாக இருந்தால் $f(x)$ ஆனது $x = c$ –ல், வகையிட தக்கதாகும்.

இவ்வாறாக காணப்படும் எல்லை மதிப்பை, சார்பு $f(x)$க்கு $x = c$ –ல் வகைக்கெழு மதிப்பு என்போம். இதனை $f'(c)$ அல்லது $D f(c)$ அல்லது $\left[\dfrac{d}{dx}(f(x))\right]_{x=c}$ என குறிப்பிடுவோம்.

ஆதலால், $$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x \to c}.$$

5.2.11 இடக்கை மற்றும் வலக்கை வகையீடு

(i) $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது $\lim_{h \to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் இடக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^-)$ அல்லது $L[f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

(i) $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் வலக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^+)$ அல்லது $R[f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

முடிவு $x= c$ இல் சார்பு $f(x)$ வகையிடத்தக்கது $\Longleftrightarrow L\left[f'(c)\right] = R\left[f'(c)\right]$

மேற்குறிப்பு:

(i) $L\left[f'(c)\right] \neq R\left[f'(c)\right]$ எனில், $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிடத்தக்கது அல்ல.

(ii) $x = c$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனில், அப்புள்ளியில் சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

ஒரு புள்ளியிடத்து தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்ட சார்பு, அப்புள்ளியிடத்து வகையிடத்தக்கதாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.29

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பு $x = 0$ இல் வகையிடத் தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

தீர்வு

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

$$L[f'(0)] = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{0-h-0}, \quad x = 0-h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|-h|-|0|}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-1)$$

$$= -1$$

$$R[f'(0)] = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{0 + h - 0}, \quad x = 0+h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

இங்கு, $L[f'(0)] \neq R[f'(0)]$

$\therefore f(x)$ ஆனது $x = 0$ இல் வகையிடத்தக்கதல்ல

எடுத்துக்காட்டு 5.30

$x=1$ இல் $f(x) = x^2$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனக் காட்டுக மற்றும் $f'(1)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = x^2$$

$$L[f'(1)] = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{1 - h - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2 - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h + 2)$$

$$= 2$$

$$R[f'(1)] = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2)$$

$$= 2$$

இங்கு, $L[f'(1)] = R[f'(1)]$

$\therefore$ $x = 1$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது ஆகும். மேலும் $f'(1) = 2$

5.2.12 முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் (Differentiation from first principle)

$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என்பதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காணும் முறையை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகையீடு காணல் எனலாம். $f'(x)$ என்பதனை $\frac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கலாம்

5.2.13 சில சார்புகளின் வகைக்கெழுவை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து காணல்

1. $x \in R$ க்கு $\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$

நிரூபணம்:

$f(x) = x^n$ என்க

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{(x+h)-x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{z^n-x^n}{z-x} \text{ இங்கு,}$$

$z = x + h$ மற்றும் $h \to 0$ எனும்போது $z \to x$ ஆகும்.

$$= nx^{n-1} \qquad \left[\because \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

i.e., $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

நிரூபணம்:

$f(x) = e^x$ என்க

$$f(x+h) = e^{x+h}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \left[\frac{e^h-1}{h}\right]$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \left[\frac{e^h-1}{h}\right]$$

$$= e^x \times 1 \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \left[\frac{e^h-1}{h}\right] = 1\right]$$

$$= e^x$$

i.e., $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

நிரூபணம்:

$f(x) = \log_e x$ என்க

$f(x+h) = \log_e(x+h)$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times 1 \qquad \left[\because \lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.31

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(x^3)$ ஐ காண்க.

தீர்வு

$f(x) = x^3$ என்க

$f(x+h) = (x+h)^3$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.32

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(e^{3x})$ ன் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு

$f(x) = e^{3x}$ எனில்

$f(x+h) = e^{3(x+h)}$ ஆகும்.

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}\cdot e^{3h} - e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}\left(e^{3h}-1\right)}{h}$$

$$= 3e^{3x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}$$

$$= 3e^{3x}\times 1 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\right]$$

$$= 3e^{3x}$$

பயிற்சி 5.4

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகைக் கெழு காண்க.

(i) x^2 (ii) e^{-x} (iii) $\log(x+1)$

5.3 வகையிடல் உத்திகள் (Differentiation techniques)

இப்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களை காண பயன்படுத்தப்படும் வெவ்வேறு முறைகளை பற்றி விவாதிப்போம்.

5.3.1 சில திட்டமான முடிவுகள் (வாய்பாடுகள்)

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(k) = 0$, k ஒரு மாறிலி

4. $\frac{d}{dx}(kx) = k$, k ஒரு மாறிலி

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

6. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

8. $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

9. $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$

10. $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2x\,e^{-x^2}$

11. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

12. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

13. $\frac{d}{dx}\log_e(x+a) = \frac{1}{x+a}$

14. $\frac{d}{dx}\left(\log_e(ax+b)\right) = \frac{a}{(ax+b)}$

15. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log_e a}$

16. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

17. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

18. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

19. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

20. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

21. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\mathrm{cosec} x \cot x$

5.3.2 வகைக்கெழுக்களுக்கான பொது விதிகள்

(i) **கூட்டல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

(ii) **கழித்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

(iii) **பெருக்கல் விதி**

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$ (அல்லது)

$u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$

(iv) **வகுத்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$ (அல்லது)

$u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

(v) **பெருக்கு சார்பலனின் வகைக் கெழு**

$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$ இதில், c ஒரு மாறிலி

(vi) **சங்கிலி விதி:**

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(அல்லது)}$$

$y = f(t)$ மற்றும் $t = g(x)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$

இங்கு, வகைக்கெழுவின் சில திட்டமான முடிவுகளைக் கொண்டும் பொது விதிகளைக் கொண்டும் பின் வரும் வெளிப்படு சார்புகளுக்கு வகைகெழுக்களை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.33

பின் வரும் சார்புகளை x ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $x^{\frac{3}{2}}$ (ii) $7e^x$ (iii) $\dfrac{1-3x}{1+3x}$

(iv) $x^2 \sin x$ (v) $\sin^3 x$ (vi) $\sqrt{x^2+x+1}$

தீர்வு

(i) $$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(ii) $$\frac{d}{dx}(7e^x) = 7\frac{d}{dx}(e^x) = 7e^x$$

(iii) $y = \dfrac{1-3x}{1+3x}$ என்ற சார்பை x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+3x)\frac{d}{dx}(1-3x)-(1-3x)\frac{d}{dx}(1+3x)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{(1+3x)(-3)-(1-3x)(3)}{(1+3x)^2} = \frac{-6}{(1+3x)^2}$$

(iv) $y = x^2 \sin x$ என்ற சார்பை x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2\cos x + 2x\sin x$$

$$= x(x\cos x + 2\sin x)$$

(v) $y = \sin^3 x$ (or) $(\sin x)^3$

$u = sin\ x$ எனில் $y = u^3$ ஆகும்.

$u = \sin x$ என்ற சார்பை x ஐ பொறுத்து வகையிட

நாம்பெறுவது, $\dfrac{du}{dx} = \cos x$

$y = u^3$ என்ற சார்பை u ஐ பொறுத்து வகையிட

நாம்பெறுவது, $\dfrac{dy}{du} = 3u^2 = 3\sin^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

(vi) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$u = x^2 + x + 1$ எனில் $y = \sqrt{u}$ ஆகும்.

$u = x^2 + x + 1$ என்ற சார்பை x ஐ பொறுத்து வகையிட

நாம் பெறுவது, $\dfrac{du}{dx} = 2x + 1$

$y = \sqrt{u}$ என்ற சார்பை u ஐ பொறுத்து வகையிட,

நாம் பெறுவது, $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot (2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

- ★ $\dfrac{d}{dx}(\sin(\log x)) = \dfrac{d}{d(\log x)}(\sin(\log x))\dfrac{d}{dx}(\log x)$
- ★ $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)^5 = \dfrac{d}{d(x^2 + 3x + 1)}(x^2 + 3x + 1)^5 \dfrac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)$
- ★ $\dfrac{d}{dx}(e^{(x^3 + 3)}) = \dfrac{d}{d(x^3 + 3)}(e^{(x^3 + 3)})\dfrac{d}{dx}(x^3 + 3)$

எடுத்துக்காட்டு 5.34

$f(x) = x^n$ மற்றும் $f'(1) = 5$ எனில் , n இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = x^n$$

$$\therefore \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(1) = n(1)^{n-1}$$

$$f'(1) = n$$

$$f'(1) = 5 \text{ (கணக்கின்படி)}$$

$$\Longrightarrow \quad n = 5$$

எடுத்துக்காட்டு 5.35

$y = \frac{1}{u^2}$ மற்றும் $u = x^2 - 9$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க.

தீர்வு

$$y = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{u^3}$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{(x^2-9)^3} \qquad (\because u = x^2 - 9)$$

$$u = x^2 - 9$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

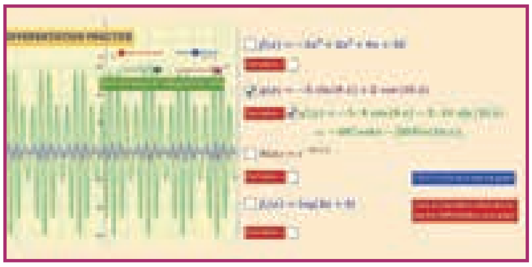
இப்போது, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$= -\frac{2}{(x^2-9)^3} \cdot 2x$$

$$= -\frac{4x}{(x^2-9)^3}.$$

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

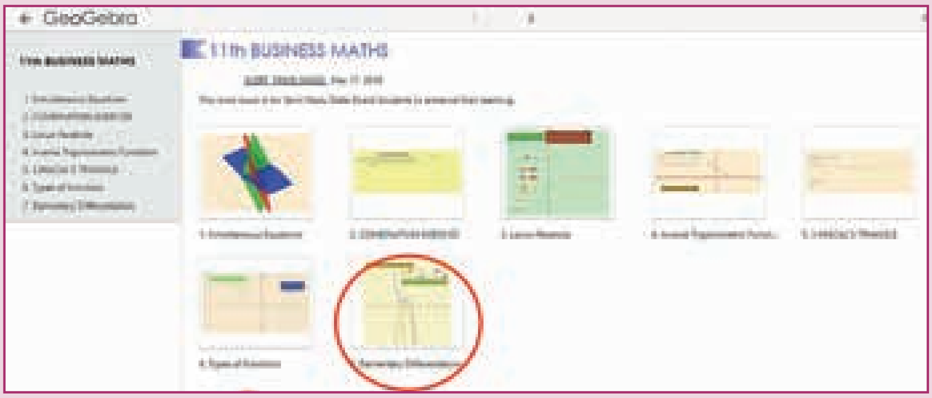
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

“11th BUSINESS MATHS” எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **“Elementary Differentiation”** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

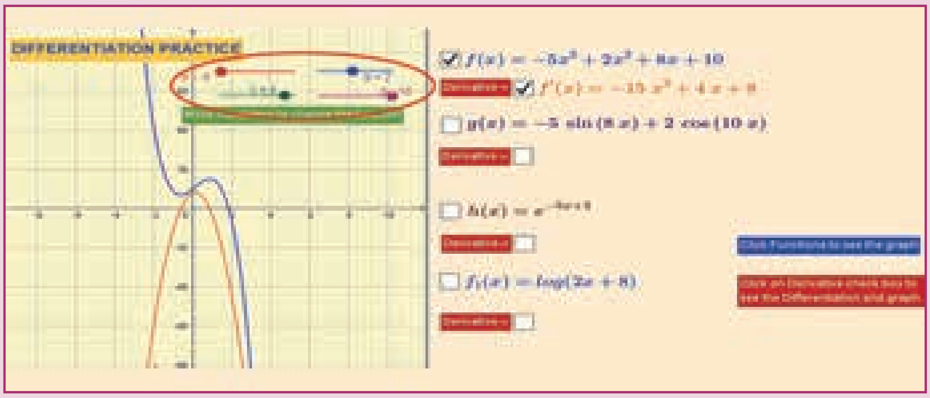
படி - 2

“Elementary Differentiation” க்கான பணித்தாளில் வணிகப் பாடத்தின் அடிப்படையான 4 வகைக்கெழு கணக்குகளை வலப் பக்கத்தில் காணலாம். அருகில் உள்ள தேர்வுப் பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கினால் இடப் பக்கத்தில் அதற்கான வரைபடங்கள் தோன்றும். ஒவ்வொரு கணக்காக வகைக்கெழுவைக் கணக்கிட்டு விடையினைச் சரிபார்க்கவும். மேலும் இடப் பக்கத்தில் உள்ள a, b, c, d எனும் நழுவல்களை நகர்த்தி புதிய சார்புகளை அமைக்கலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் சார்புகளை x ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $3x^4 - 2x^3 + x + 8$ (ii) $\frac{5}{x^4} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x}$ (iii) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^x$

(iv) $\frac{3 + 2x - x^2}{x}$ (v) $x^3 e^x$ (vi) $(x^2 - 3x + 2)(x + 1)$

(vii) $x^4 - 3\sin x + \cos x$ (viii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

2. பின்வரும் சார்புகளை x ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $\frac{e^x}{1+x}$ (ii) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ (iii) $\frac{e^x}{1 + e^x}$

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

(i) $x \sin x$ (ii) $e^x \sin x$ (iii) $e^x(x + \log x)$

(iv) $\sin x \cos x$ (v) $x^3 e^x$

4. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

(i) $\sin^2 x$ (ii) $\cos^2 x$ (iii) $\cos^3 x$

(iv) $\sqrt{1 + x^2}$ (v) $(ax^2 + bx + c)^n$ (vi) $\sin(x^2)$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

5.3.3 உட்படு சார்புகளுக்கான வகையீடு (Derivative of implicit functions)

$f(x, y) = 0$, என்ற உட்படு சார்பில் உள்ள y யை x இல் அமையும் சார்பாக கருதி x க்கு வகையீடு கண்டு, அதில், $\frac{dy}{dx}$ அடங்கிய பகுதிகளை இடப்புறமும், மீதமுள்ள பகுதிகளை வலப்புறமும் இடம்பெறுமாறு மாற்றி எழுதியபின் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

குறிப்பு

$f(x, y) = 0$ என்ற சார்பு உட்படு சார்பாக இருக்கும் போது $\frac{dy}{dx}$ ஆனது x மற்றும் y உறுப்புகளைக் கொண்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.36

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க.

9ZH284

தீர்வு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

இருபுறமும் x ஐ பொறுத்து வகையீடு காண,

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2ax + 2hy + 2g) + (2hx + 2by + 2f)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.37

$x^3 + y^3 = 3axy$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க.

தீர்வு

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

இருபுறமும் x ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(3axy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left[x\frac{dy}{dx} + y\right]$$

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = ax\frac{dy}{dx} + ay$$

$$(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = (ay - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.38

$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,1)$ ல், $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு

$$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10$$

இருபுறமும் x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d}{dx}\left[2x^2 + 3xy + 5y^2\right] = \frac{d}{dx}[10]$$

$$4x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x+10y)\frac{dy}{dx} = -3y - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(3y+4x)}{(3x+10y)}$$

$$\therefore \quad (1,1) \text{ இல் } \frac{dy}{dx} = -\frac{3+4}{3+10}$$

$$= -\frac{7}{13}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.39

$\sin y = x \sin(a+y)$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin y = x \sin(a+y)$$

$$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

y ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cdot \cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

பயிற்சி 5.6

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க

   (i) $xy = \tan(xy)$ (ii) $x^2 - xy + y^2 = 7$ (iii) $x^3 + y^3 + 3axy = 1$

2. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0, x \neq y$ எனில், $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$ என நிறுவுக

3. $4x + 3y = \log(4x - 3y)$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க.

5.3.4 மடக்கையை பயன்படுத்தி வகைக்கெழு காணல் (Logarithmic differentiation)

சில சமயங்களில் சார்புகளானது, பெருக்கல், வகுத்தல் மற்றும் அடுக்குகள் கொண்டும், மற்றும் சார்புகளின் அடுக்குகளில் மாறிகள் கொண்டும் அமையலாம். இவ்வகையான சார்புகளை மடக்கையை பயன்படுத்தி எளிய முறையில் மாற்றி வகையீடு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.40

பின்வருவனவற்றை x ஐ பொறுத்து வகையீடு காண்க.

(i) x^x (ii) $(\log x)^{\cos x}$

தீர்வு

(i) $y = x^x$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log y = x \log x$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y[1+\log x]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x[1+\log x]$$

(ii) $y = (\log x)^{\cos x}$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\therefore \quad \log y = \cos x \ \log(\log x)$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} + [\log(\log x)](-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \ \log(\log x)\right]$$

$$= (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \log(\log x)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 5.41

$x^y = e^{x-y}$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$x^y = e^{x-y}$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$y \log x = (x-y)$$

$$y(1+\log x) = x$$

$$y = \frac{x}{1+\log x}$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)(1)-x\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.42

வகைக் கெழு காண் : $\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$

தீர்வு

$$y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}} = \left[\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}\right]^{\frac{1}{2}}$$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log(x-3)+\log(x^2+4)-\log(3x^2+4x+5)\right]$$

$\left[\because \log ab = \log a+\log b\right.$ மற்றும் $\left.\log\frac{a}{b} = \log a-\log b\right]$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

பயிற்சி 5.7

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x ஐ பொறுத்து வகைகெழு காண்.

(i) $x^{\sin x}$ (ii) $(\sin x)^x$ (iii) $(\sin x)^{\tan x}$ (iv) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2+x+1)}}$

2. $x^m\cdot y^n = (x+y)^{m+n}$ எனில் , $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனக் காட்டுக.

5.3.5 துணையலகு சார்புகளின் வகையீடு (Differentiation of paramatric functions)

x மற்றும் y எனும் மாறிகள் மூன்றாவது மாறி t ன் சார்புகளாக இருப்பின் அவை துணையலகுச் சார்புகள் எனப்படும். t என்பது சார்பின் துணையலகு எனப்படும்.

$x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

5.3.6 ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பை பொறுத்து வகையிடல் காணல் (Differentiation of a function with respect to another function)

$u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ என்பன x ன் மீதான இரு சார்புகள் எனில் $g(x)$ –ஐ பொறுத்து $f(x)$ ன் வகைக்கெழுவானது,

$$\frac{d\left(f(x)\right)}{d\left(g(x)\right)} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.43

பின்வரும் துணையலகு சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க

(i) $x = at^2$, $y = 2at$ (ii) $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

தீர்வு

(i) $x = at^2$ | $y = 2at$

$\frac{dx}{dt} = 2at$ | $\frac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

(ii) $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$ | $\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 5.44

$x = a\theta$ மற்றும் $y = \frac{a}{\theta}$ எனில், $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$x = a\theta$	$y = \frac{a}{\theta}$
$\frac{dx}{d\theta} = a$	$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-a}{\theta^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{\theta^2}\right)}{a}$$

$$= -\frac{1}{\theta^2}$$

$$= -\frac{y}{x}$$

i.e. $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

மாற்றுமுறை :

$$xy = a\theta \cdot \frac{a}{\theta}$$ என எடுக்க

$$xy = a^2$$

x, ஐ பொறுத்து வகையிட

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.45

$\frac{x^2}{1+x^2}$ என்ற சார்பிற்கு x^2–ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு

$$u = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1+x^2)(2x) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$v = x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]}{2x}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

பயிற்சி 5.8

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க

   (i) $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$ (ii) $x = \log t,\ y = \sin t$

   (iii) $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ (iv) $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$

2. $\sin^3 x$ என்ற சார்பை $\cos^3 x$ ஐ பொறுத்து வகையிடுக

3. $\sin^2 x$ என்ற சார்பை x^2 ஐ பொறுத்து வகையிடுக

5.3.7 தொடர் வகையிடல் (Successive differentiation)

ஒரு சார்பை மீண்டும் மீண்டும் வகைப்படுத்தி அதன் வகையீடுகளை காணும் முறையை தொடர் வகையிடல் என்போம்.

(i) y என்ற சார்பின் x ஐ பொறுத்த வகையீட்டை முதலாம் வரிசை வகையிடல் என்போம். இதனை $\frac{dy}{dx}$ (அல்லது) y_1 (அல்லது) $f'(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $f'(x)$ என்பதும் வகையிடத்தக்கது எனில் x ஐ பொறுத்து $f'(x)$ ன் வகையீட்டை இரண்டாம் வரிசை வகையிடல் என்போம் இதனை $\frac{d^2y}{dx^2}$ (அல்லது) y_2 (அல்லது) $f''(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(iii) மேலும் $\frac{d^ny}{dx^n}$ (அல்லது) y_n (அல்லது) $f^{(n)}(x)$ என்பது $y = f(x)$ ன் n வது வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.

மேற்குறிப்பு	(i) $y = f(x)$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. (ii) $x = f(t)$ மற்றும், $y = g(t)$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$

எடுத்துக்காட்டு 5.46

பின்வரும் சார்புகளுக்கு x ஐ பொறுத்து இரண்டாம் வகைக் கெழுவை காண்க,

(i) $3\cos x + 4\sin x$ (ii) $x = at^2, \quad y = 2at$ (iii) $x\sin x$

தீர்வு

(i)
$$y = 3\cos x + 4\sin x$$
$$y_1 = -3\sin x + 4\cos x$$
$$y_2 = -3\cos x - 4\sin x$$
$$y_2 = -3\,(\cos x + 4\sin x)$$
$$y_2 = -y \text{ (or) } y_2 + y = 0$$

(ii) $x = at^2$, $y = 2at$

$$\frac{dx}{dt} = 2at \qquad \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{1}{t}$$

இப்பொழுது,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2at}$$
$$= -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2at}$$
$$= -\frac{1}{2at^3}$$

(iii) $$y = x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x \sin x + \cos x + \cos x$$

$$= 2 \cos x - x \sin x$$

எடுத்துக்காட்டு 5.47

$y = A \sin x + B \cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக,

தீர்வு

$$y = A \sin x + B \cos x$$

$$y_1 = A \cos x - B \sin x$$

$$y_2 = -A \sin x - B \cos x$$

$$y_2 = -y$$

$$y_2 + y = 0$$

பயிற்சி 5.9

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு y_2 ஐ காண்க

   (i) $y = e^{3x+2}$ (ii) $y = \log x + a^x$ (iii) $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

2. $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ எனில், $y_2 - 49y = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $y = 2 + \log x$ எனில், $xy_2 + y_1 = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $y = a\cos mx + b\sin mx$ எனில், $y_2 + m^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

5. $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ எனில், $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

6. $y = \sin(\log x)$ எனில், $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 5.10

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $f(x)=x^2-x+1$ எனில், $f(x+1)$ ஆனது

(a) x^2 (b) x (c) 1 (d) x^2+x+1

2. $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & , x\geq 2 \\ x+2 & , x<2 \end{cases}$ எனில், $f(5)$ இன் மதிப்பு

(a) –1 (b) 2 (c) 5 (d) 7

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & , x\geq 2 \\ x+2 & , x<2 \end{cases}$ எனில், $f(0)$ இன் மதிப்பு

(a) 2 (b) 5 (c) –1 (d) 0

4. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ எனில், $f(-x)$ =

(a) $-f(x)$ (b) $\dfrac{1}{f(x)}$ (c) $-\dfrac{1}{f(x)}$ (d) $f(x)$

5. y = 3 இன் வரைபடமானது

(a) x-அச்சுக்கு இணை (b) y-அச்சுக்கு இணை

(c) ஆதியின் வழிச் செல்லும் (d) x-அச்சை வெட்டிச் செல்லும்

6. $y=2x^2$ என்ற வரைபடம் எந்தப்புள்ளி வழியாக செல்லும்?

(a) (0,0) (b) (2,1) (c) (2,0) (d) (0,2)

7. $y=e^x$ என்ற வரைபடமும் y அச்சும் வெட்டும் புள்ளி

(a) (0, 0) (b) (1, 0) (c) (0, 1) (d) (1, 1)

8. $f(x)=|x|$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு

(a) 0 (b) –1 (c) +1 (d) $-\infty$

9. கீழ்வரும் சார்புகளில் எந்த சார்பு $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ என்ற வகையில் அமையும்

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ (b) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ (c) $f(x) = x$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

10. $f(x)=2^x$ மற்றும் $g(x)=\dfrac{1}{2^x}$ எனில் , $(fg)(x)$ இன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) 4^x (d) $\dfrac{1}{4^x}$

11. கீழ்காணும் சார்புகளில் எது ஒற்றை சார்பாகவோ மற்றும் இரட்டை சார்பாகவோ இருக்காது?

(a) $f(x)=x^3+5$ (b) $f(x)=x^5$ (c) $f(x)=x^{10}$ (d) $f(x)=x^2$

12. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=-5$ என்பது

(a) ஒரு சமனிச் சார்பு (b) மட்டுச் சார்பு

(c) அடுக்குச் சார்பு (d) மாறிலிச் சார்பு

13. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=|x|$ ன் வீச்சகமானது

(a) $(0, \infty)$ (b) $[0, \infty)$ (c) $(-\infty, \infty)$ (d) $[1, \infty)$

14. $f(x) = e^x$ இன் வரைபடத்தை போல் ஒத்த வரைபடத்தைக் கொண்ட சார்பு

(a) $f(x)=a^x, a>1$ (b) $f(x)=a^x, a<1$

(c) $f(x)=a^x, 0<a<1$ (d) $y=ax+b, a\neq 0$

15. $f(x)=x^2$ மற்றும் $g(x)=2x+1$ எனில் , $(fg)(0)$ இன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

16. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta} =$

(a) 1 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) θ

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} =$

(a) e (b) nx^{n-1} (c) 1 (d) 0

18. x இன் எம்மதிப்புக்கு, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ தொடர்ச்சி அற்றது?

(a) -2 (b) 1 (c) 2 (d) -1

19. சார்பு $f(x)$ ஆனது $x=a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில் $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ன் மதிப்பு

(a) $f(-a)$ (b) $f\left(\frac{1}{a}\right)$ (c) $2f(a)$ (d) $f(a)$

20. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=$

(a) $-\dfrac{1}{x^2}$ (b) $-\dfrac{1}{x}$ (c) $\log x$ (d) $\dfrac{1}{x^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}(5e^x-2\log x) =$

(a) $5e^x-\dfrac{2}{x}$ (b) $5e^x-2x$ (c) $5e^x-\dfrac{1}{x}$ (d) $2\log x$

22. $y = x$ மற்றும் $z = \frac{1}{x}$ எனில் $\frac{dy}{dz}$ =

(a) x^2 (b) 1 (c) $-x^2$ (d) $-\frac{1}{x^2}$

23. $y = e^{2x}$ எனில், $x = 0$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பு

(a) 4 (b) 9 (c) 2 (d) 0

24. $y = \log x$ எனில், y_2 =

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2}$ (c) $-\frac{2}{x^2}$ (d) e^2

25. $\frac{d}{dx}(a^x)$ =

(a) $\frac{1}{x\log_e a}$ (b) a^a (c) $x\log_e a$ (d) $a^x\log_e a$

இதரக் கணக்குகள்

1. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$ எனில், $x \neq -\frac{3}{2}$ என்றிருக்கும்போது $f(f(x)) = \frac{2x+1}{2x+3}$ என நிறுவுக.

2. $y = 9-x^2$ இன் வரைபடம் வரைக.

3. $f(x)=\begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$ எனில் $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ காணத்தக்கது அல்ல எனக் காண்பி.

4. மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

5. $f(x) = 2x-|x|$ என்ற சார்பு $x=0$ இல் தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனக் காட்டுக

6. $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x<1 \\ (1-x)(2-x) & , 1\leq x\leq 2 \\ 3-x & , x>2 \end{cases}$ எனும் சார்புக்கு $x = 1$ மற்றும் $x=2$ இல் அதன் தொடர்ச்சித் தன்மை மற்றும் வகையீட்டுத் தன்மையை ஆராய்க.

7. $x^y = y^x$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{x\log y - y}{y\log x - x}\right)$ என நிறுவுக.

8. $xy^2 = 1$ எனில், $2\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ என நிறுவுக.

9. $y = \tan x$ எனில், $y_2 - 2yy_1 = 0$ என நிறுவுக.

10. $y = 2\sin x + 3\cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக.

தொகுப்புரை

- A மற்றும் B என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. A லுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் B லுள்ள ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் f என்ற விதியானது கணம் Aலிருந்து B க்கான சார்பு ஆகும்.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

- மெய்யெண் a மற்றும் $f(x)$ என்ற சார்புக்கு , $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ இன் மதிப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

- $x = a$ இல் சார்பு $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- சார்பு $f(x)$ ஒரு அரங்கத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பாக இருந்தால் அது தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

- $f(x)$,$g(x)$ என்ற இரு சார்புகள் அதன் பொதுவான அரங்கத்தில் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில் $f \pm g,\ f \cdot g,\ kf$ (k ஒரு மாறிலி) என்ற சார்புகளும் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் மற்றும் $g \neq 0$ எனில் $\dfrac{f}{g}$ ம் தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்.

- சார்பு $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ முடிவுறு எண்ணாகவும் காணத்தக்கதாகவும் அமைய வேண்டும். இதனை $f'(c)$ எனக் குறிப்போம்.

- $L[f'(c)] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h}$ மற்றும் $R[f'(c)] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

- $f(x)$ என்ற சார்பு $x = c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை

  $L[f'(c)] = R[f'(c)]$ ஆகும்.

- அனைத்து வகையிடத்தக்க சார்புகளும், தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் ஆகும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

- $y = f(x)$ எனில், $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ என்பது y ஐப் பொறுத்து x இன் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.

- $x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right\}$ அல்லது $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right\} \cdot \dfrac{dt}{dx}$

கலைச்சொற்கள்	
அடுக்கு	Exponential
அண்மையகம்	Neighbourhood
இடக்கை எல்லை	Left limit
இடைவெளி	Interval
இயற்கணித சார்புகள்	Algebric functions
உட்படு	Implict
எல்லை	Limit
குறிச் சார்பு	Signum function
சங்கிலி விதி	Chain rule
சமனி	Identity
சாரா மாறி	Independent variable
சார்ந்த மாறி	Dependent variable
சார்பகம் / அரங்கம்	Domain
சார்பு	Function
தன்னிச்சை மாறிலிகள்	Arbitrary constants
திறந்த இடைவெளி	Open interval
துணையலகு சார்புகள்	Parametric functions
தொடர் வகையிடல்	Successive differentiation
தொடர்ச்சி	Continuous
மடக்கை	Logarithmic
மட்டு	Modulus
மாறி	Variable
மாறிலி	Constant
முழுமையான மாறிலிகள்	Absolute constants
மூடிய இடைவெளி	Closed interval
வகையீடு	Derivative
வலக்கை எல்லை	Right limit
விஞ்சிய சார்புகள்	Transcendental functions
வீச்சகம்	Range
வெளிபடு	Explict

விடைகள்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள்

பயிற்சி 1.1

1.(i) $M_{11} = -1 \quad M_{12} = 0 \quad M_{21} = 20 \quad M_{22} = 5$

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = 0 \quad A_{21} = -20 \quad A_{22} = 5$

(ii) $M_{11} = -12 \quad M_{12} = 2 \quad M_{13} = 23 \quad M_{21} = -16 \quad M_{22} = -4 \quad M_{23} = 14$

$M_{31} = -4 \quad M_{32} = -6 \quad M_{33} = 11$

$A_{11} = -12 \quad A_{12} = -2 \quad A_{13} = 23 \quad A_{21} = 16 \quad A_{22} = -4 \quad A_{23} = -14$

$A_{31} = -4 \quad A_{32} = 6 \quad A_{33} = 11$

2. 20　3. $\frac{1}{2}$　4. –30　5. $\frac{13}{2}, 2$　6. 0

பயிற்சி 1.2

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$　2. $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　3.(i) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　(ii) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　(iv) $\frac{1}{151}\begin{bmatrix} -22 & -46 & -7 \\ -13 & 14 & -11 \\ 5 & -17 & -19 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$　10. $\lambda = \frac{7}{4}$　11. $p = 2, q = -3$

பயிற்சி 1.3

1. $x = 1, y = 1$　2.(i) $x = 3, y = -2, z = 1$

(ii) $x = -1, y = 2, z = 3$　(iii) $x = 1, y = -1, z = 2$　3. 17.95, 43.08, 103.85

4. 3000, 1000, 2000　5. 13,2,5　6. 700, 600, 300

பயிற்சி 1.4

1. சாத்தியமானது 2. சாத்தியமானதல்ல 3. சாத்தியமானது
4. $A = 250.36$ டன்கள் $B = 62.44$ டன்கள் 5. 181.62, 84.32
6. 34.16, 17.31, 7. 42 மற்றும் 78

பயிற்சி 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(d)	(b)	(b)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(d)	(c)	(b)	(a)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(c)	(c)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(d)	(d)	(b)	(a)	

இதரக் கணக்குகள்

1. $x = 3. x = -1$ 2. 0 6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 8. $x = 1, y = 2, z = 3$ 9. $x = 20, y = 30, z = 50$

10. ₹1200 கோடிகள், ₹1600 கோடிகள்

2. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 2.1

1. $\frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1}$
2. $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}$
3. $\frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)} - \frac{1}{3(x+2)^2}$
4. $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$
5. $\frac{-4}{9(x+2)} + \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2}$
6. $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{9}{(x-2)^2}$
7. $\frac{-7}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{2(x+2)}$
8. $\frac{1}{5(x+2)} + \frac{4(x-2)}{5(x^2+1)}$
9. $\frac{3}{16(x-1)} - \frac{3}{16(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}$
10. $\frac{1-x}{5(x^2+4)} + \frac{1}{5(x+1)}$

பயிற்சி 2.2

1. 64 2. 10 3. 3 4. 336 5. 85

பயிற்சி 2.3

1. 6 2. 14400 3. 1680 4. $\frac{13!}{4!\,3!\,2!\,2!}$

5. (a) $\frac{7!}{2}$ (b) 7! 6. CHAT என்ற வார்த்தையின் தரம் = 9.

பயிற்சி 2.4

1. 4
2. $8C_4 + 8C_3 = 9C_4 = 126$
3. 210 cards
4. 20
5. 25200
6. 15
7. $\frac{13!}{7!\,6!} \times 9! \times 9!$
8. 11

9.(i) 1365 (ii) 1001 (iii) 364

10.(i) 186 (ii) 186

பயிற்சி 2.6

1.(i) $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

(ii) $x^7 + \frac{7x^6}{y} + \frac{21x^5}{y^2} + \frac{35x^4}{y^3} + \frac{35x^3}{y^4} + \frac{21x^2}{y^5} + \frac{7x}{y^6} + \frac{1}{y^7}$

(iii) $x^6 + 6x^3 + 15 + \frac{20}{x^3} + \frac{15}{x^6} + \frac{6}{x^9} + \frac{1}{x^{12}}$

2.(i) 10, 40,60,401 (ii) 995009990004999

3. $11440\ x^9\ y^4$

4.(i) $11C_5 x$, $\frac{11C_5}{x}$ (ii) $\frac{8C_4(81)}{16}x^{12}$ (iii) $\frac{-10C_5(6)^5}{x^5}$

5.(i) $9C_6\frac{2^6}{3^6}$ (ii) $-32(15C_5)$ (iii) 7920.

பயிற்சி 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(c)	(d)	(c)	(a)	(c)	(d)	(b)	(b)	(c)	(b)	(d)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	(d)	(b)	(a)	

இதரக் கணக்குகள்

1. $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3}$
2. $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2}$
3. $\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{3}{(x-3)^2}$
4. $\frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

5.(i) 7 (ii) 336 (iii) 84

6.(a) 720 (b) 7776 (c) 120 (d) 6

7. 74 ways
8. 85 ways
9. 210
10. 544

3. பகுமுறை வடிவியல்

பயிற்சி 3.1

1. $x^2 - 2x - 6y + 10 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 - 4x - 14y + 15 = 0$
4. $\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$
5. $2x - 3y + 21 = 0$

பயிற்சி 3.2

1. 45°
2. 4 அலகுகள்
4. $a = 5$
5. $y = 1500x + 100000$, 95 தொலைகாட்சிபெட்டிகளின் விலை ₹ 2,42,500

பயிற்சி 3.3

1. $a = 6,\ c = 6$
2. $2x - y + 2 = 0$ மற்றும் $6x - 2y + 1 = 0$
3. $2x + 3y - 1 = 0$ மற்றும் $2x + 3y - 2 = 0$
4. $\theta = \tan^{-1}(7)$

பயிற்சி 3.4

1.(i) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

2.(i) $C(0, 0),\quad r = 4$ (ii) $C(11, 2),\quad r = 10$

(iii) $C\left(\frac{-2}{5}, \frac{4}{5}\right),\ r = 2$ (iv) $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),\ r = \frac{5}{\sqrt{2}}$

3. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 1 = 0$
6. $x^2 + y^2 - x - y = 0$
7. $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 32 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$
9. $x^2 + y^2 = 9$

பயிற்சி 3.5

1. $x + 2 = 0$
2. R வட்டத்தினுள் அமையும், P வட்டத்திற்கு வெளியே அமையும் Q வட்டத்தின் மேல் அமையும்.
3. $\sqrt{20}$ அலகுகள்
4. $p = \pm 20$.

பயிற்சி 3.6

1. $9x^2 + 16y^2 + 24xy + 34x + 112y + 121 = 0$
2. $k = \frac{1}{4}$, செவ்வகலத்தின் நீளம் $= 1$, குவியம் $F\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

3.

அச்சு	முனை	குவியம்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலம்
$y = 4$	$V(1, 4)$	$F(3, 4)$	$x + 1 = 0$	4 அலகுகள்

4.

கணக்கு	அச்சு	முனை	குவியம்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலம்
(a) $y^2 = 20x$	$y = 0$	$V(0, 0)$	$F(5, 0)$	$x = -5$	20 அலகுகள்
(b) $x^2 = 8y$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$F(0, 2)$	$y = -2$	8 அலகுகள்
(c) $x^2 = -16y$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$F(0, -4)$	$y = 4$	16 அலகுகள்

5. $(x-15)^2 = 5(y-55)$. முனையில் வெளியீடு மற்றும் சராசரி செலவு 15 கிலோ மற்றும் ₹ 55.

6. $x = 5$ மாதங்கள்

பயிற்சி 3.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(c)	(c)	(c)	(b)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(d)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(a)	(d)	(a)	(c)	(b)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(b)	

இதரக் கணக்குகள்

1. $2x + y - 7 = 0$ 2. $y = 6x + 3000$ 4. $p = 1, p = 2$ 6. $a = 9, b = 8$

7. $(-1, -2)$ கோட்டின் மீது, $(1, 0)$ கோட்டின் மேல்புறம் $(-3, -4)$ கோட்டின் கீழ்புறம்

8. $(-2, -7)$ 9. $y^2 = -\frac{9}{2}x$

10. அச்சு : $y = 2$, முனை : $(1, 2)$, குவியம் : $(2, 2)$,
இயக்குவரையின் சமன்பாடு : $x = 0$ மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் : 4 அலகுகள்

4. திரிகோணமிதி

பயிற்சி 4.1

1.(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{-16\pi}{9}$

2.(i) $22^\circ 30'$ (ii) $405^\circ 30'$ (iii) $-171^\circ 48'$ (iv) 110°

3.(i) முதல் கால்பகுதி (ii) மூன்றாம் கால்பகுதி (iii) இரண்டாம் கால்பகுதி.

4.(i) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{-1}{2}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iv) 1

(v) $\sqrt{2}$ 10. $\frac{-7}{2}$

பயிற்சி 4.2

1.(i) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ (ii) $-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

2.(i) $\sin 92^\circ$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\cos 80^\circ$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.(i) $\frac{-33}{65}$ (ii) $\frac{-16}{65}$ (iii) $\frac{16}{33}$

6. $\frac{2}{11}$, $\alpha+\beta$ முதல் கால்பகுதியில் அமையும் 7. $\pm\sqrt{2}-1$

9.(i) $\frac{9}{13}$ (ii) $-\frac{828}{2197}$ 10. $-\frac{44}{125}, -\frac{117}{44}$ 14. $\sqrt{2}-1$

பயிற்சி 4.3

1.(i) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{4}-\cos\frac{A}{2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\left(-\sin 2A+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) $\frac{1}{2}\left(\sin 4A-\sin\frac{2A}{3}\right)$ (iv) $\frac{1}{2}(\cos 7\theta+\cos\theta)$

2.(i) $2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}$ (ii) $2\cos 3A\cos A$

(iii) $2\sin 2\theta\cos 4\theta$ (iv) $2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

பயிற்சி 4.4

1.(i) $\frac{-\pi}{6}$ (ii) $\frac{-\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$

4. $x=\frac{1}{6}$ 5. $x=\frac{1}{2}$

6.(i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 7. $\frac{-27}{65}$ 10. $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$

பயிற்சி 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(a)	(c)	(b)	(b)	(d)	(a)	(d)	(a)	(c)	(c)	(d)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(b)	(a)	(c)	(b)	(c)	(c)	(b)	(c)	(a)	(b)	(d)	

இதரக் கணக்குகள்

4. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ மற்றும் $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ 6.(i) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

7. $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{2}}{12}$ 9. $\frac{56}{33}$ 10. $\frac{\pi}{4}-x$

5. வகை நுண்கணிதம்

பயிற்சி 5.1

1.(i) ஒற்றைச் சார்பு (ii) இரட்டைச் சார்பு

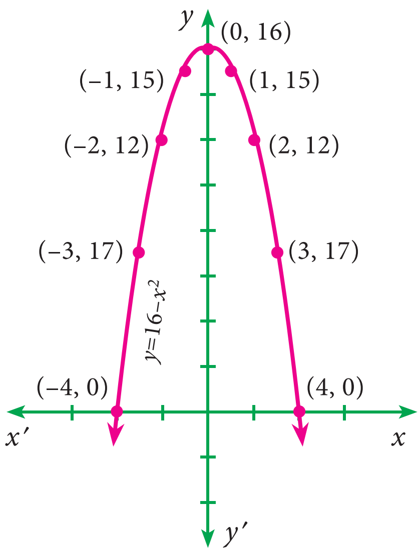
(iii) ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல மற்றும் இரட்டைச் சார்பும் அல்ல (iv) இரட்டைச் சார்பு

(v) ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல மற்றும் இரட்டைச் சார்பும் அல்ல

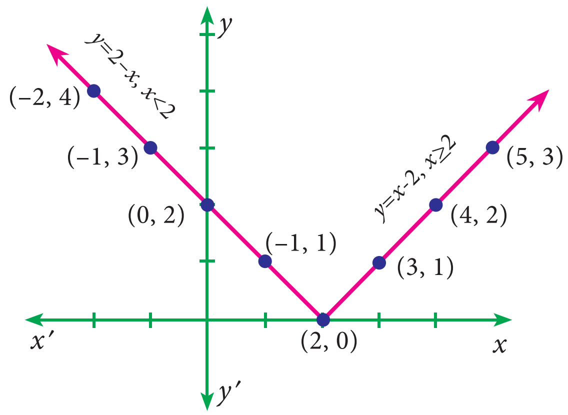
2. $k=0$ 5. $\frac{1-x}{3+x}$, $\frac{3x+1}{x-1}$

6.(i) e (ii) 0 (iii) $3e$ (iv) 0

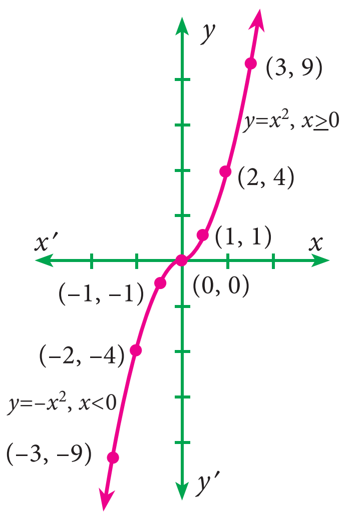
7.(i)



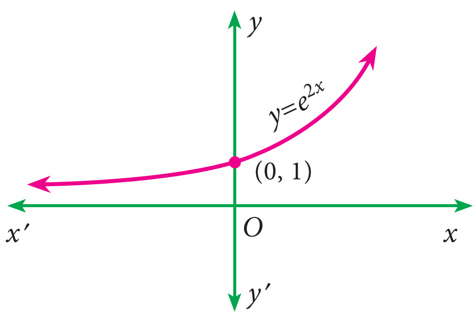
(ii)



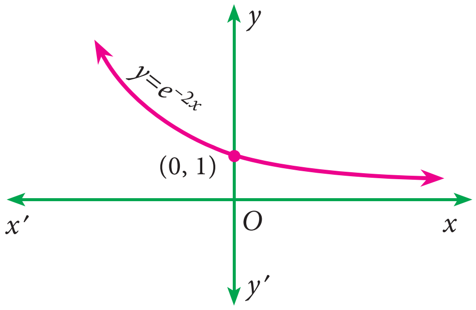
(iii)



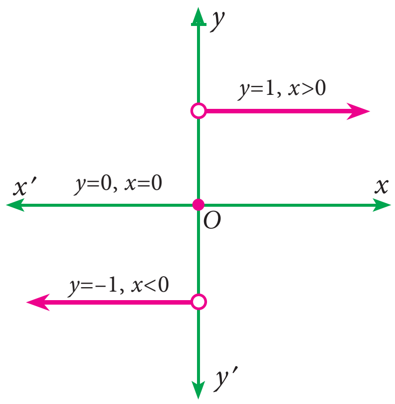
(iv)



(v)



(vi)



பயிற்சி 5.2

1.(i) $\frac{10}{3}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1

(v) $\frac{15}{16}a^{-\frac{1}{24}}$ (vi) 9

2. $a = \pm 1$ 3. $n = 7$ 4. $\frac{28}{5}$ 5. $f(-2) = 0$

பயிற்சி 5.3

1.(a) $x = 2$ –ல் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும். (b) $x = 3$ –ல் தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

பயிற்சி 5.4

(i) $2x$ (ii) $-e^{-x}$ (iii) $\frac{1}{x+1}$

பயிற்சி 5.5

1.(i) $12x^3 - 6x^2 + 1$ (ii) $\frac{-20}{x^5} + \frac{6}{x^4} - \frac{5}{x^2}$ (iii) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + e^x$

(iv) $-\frac{3+x^2}{x^2}$ (v) $x^2 e^x (x+3)$ (vi) $3x^2 - 4x - 1$

(vii) $4x^3 - 3\cos x - \sin x$ (viii) $1 - \frac{1}{x^2}$

2.(i) $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$ (ii) $\frac{2(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}$ (iii) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

3.(i) $x\cos x + \sin x$ (ii) $e^x(\sin x + \cos x)$

(iii) $e^x\left(1 + \frac{1}{x} + x + \log x\right)$ (iv) $\cos 2x$ (v) $e^x x^2 (x+3)$

4.(i) $\sin 2x$ (ii) $-\sin 2x$ (iii) $\frac{-3}{2}\cos x \sin 2x$ (iv) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(v) $n(ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax+b)$ (vi) $2x(\cos(x^2))$ (vii) $\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

பயிற்சி 5.6

1.(i) $-\dfrac{y}{x}$ (ii) $\dfrac{y-2x}{2y-x}$ (iii) $-\dfrac{(x^2+ay)}{(y^2+ay)}$ 3. $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1-4x+3y}{1+4x-3x}\right)$

பயிற்சி 5.7

1.(i) $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]$ (ii) $(\sin x)^x[x\cot x+\log(\sin x)]$

(iii) $(\sin x)^{\tan x}[1+\sec^2 x\log(\sin x)]$

(iv) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2+x+1)}}\left\{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right\}$

பயிற்சி 5.8

1.(i) $-\dfrac{1}{t^2}$ (ii) $t\cos t$ (iii) $-\tan\theta$ (iv) $\cot\dfrac{\theta}{2}$

2. $-\tan x$ 3. $\dfrac{\sin 2x}{2x}$

பயிற்சி 5.9

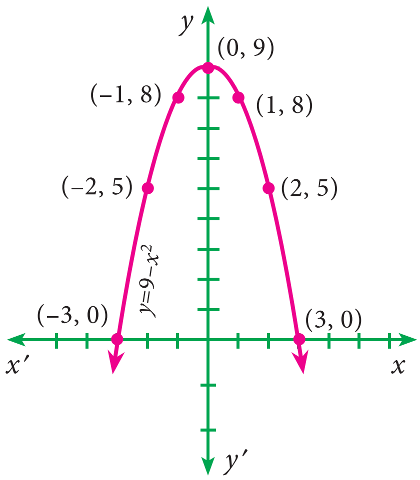
1.(i) $9y$ (ii) $-\dfrac{1}{x^2}+a^x(\log a)^2$ (iii) $-\dfrac{1}{a}\operatorname{cosec}^3\theta$

பயிற்சி 5.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(c)	(a)	(b)	(a)	(a)	(c)	(a)	(d)	(a)	(a)	(d)	(b)
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
(a)	(a)	(a)	(c)	(b)	(d)	(a)	(a)	(c)	(a)	(b)	(d)	

இதரக் கணக்குகள்

2.



4. $-\dfrac{1}{10}$

6.(i) $x = 1$ ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் வகையிடத்தக்கது

(ii) $x = 2$ ல் தொடர்ச்சியானது ஆனால் வகையிடத்தக்கதல்ல

கலைச்சொற்கள்	
அடுக்கு	Exponential
அணிக்கோவை	Determinant
அண்மையகம்	Neighborhood
ஆதி	Origin
ஆரம்	Radius
இடக்கை எல்லை	Left limit
இடைவெளி	Interval
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இணைக் காரணி	Cofactor
இயக்குவரை	Directix
இயற்கணித சார்புகள்	Algebric functions
இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	Pair of straight lines
ஈருறுப்பு	Binomial
உட்படு	Implicit
உருமாற்று சூத்திரங்கள்	Transformation formulae
உள்ளீடு	Input
எண்ணுதலின் கொள்கை	Principle of counting
எல்லை	Limit
ஒரு படிக்காரணி	Linear factor
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடு	Concurrent Line
ஒருங்கிணைவுப் புள்ளி	Point of concurrency
கணிதத் தொகுத்தறிதல்	Mathematical Induction
காரணீயப் பெருக்கம்	Factorial
கால் பகுதிகள்	Quadrants
குவியத்தூரம்	Focal distance
குவியம்	Focus
குறிச் சார்பு	Signum function
கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சமம்	Componendo and dividendo.
கூட்டுக் கோணங்கள்	Compound angles
கூம்பு வெட்டிகள்	Conics
கெழு	Coefficient
கோணம்	Angle
சங்கிலி விதி	Chain rule
சமனி (அல்லது) முற்றொருமை	Identity

சமன்பாடு	Equation
சாரா உறுப்பு	Independent term
சாரா மாறி	Independent variable
சார்ந்த மாறி	Dependent variable
சார்பகம் / அரங்கம்	Domain
சார்பு	Function
சிற்றணிக் கோவைகள்	Minors
செங்குத்து கோடு	Perpendicular line
செவ்வகலம்	Latus rectum
சேர்ப்பு அணி	Adjoint Matrix
சேர்வு	Combination
தன்னிச்சை மாறிலிகள்	Arbitrary constants
திசையிலி	Scalar
திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்	Trignometric identities
திரிகோணமிதி விகிதங்கள்	Trignometry Ratios
திறந்த இடைவெளி	Open interval
துணைக் கோணங்கள்	Allied angles
துணையலகு	Parameter
துணையலகு சார்புகள்	Parametric functions
தொடர் வகையிடல்	Successive differentiation
தொடர்ச்சி	Continuous
தொடுகோடு	Tangent
தொடுகோட்டின் நீளம்	Length of the tangent
நாண்	Chord
நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை	Locus
நிரை நிரல் மாற்று அணி	Transpose of a Matrix
நேர்க் கோடு	Straight line
நேர்மாறு அணி	Inverse Matrix
நேர்மாறு சார்பு	Inverse function
பகுதிப் பின்னங்கள்	Partial fractions
பகுப்பாய்வு	Analysis
பரவளையம்	Parabola
பாகை அளவை	Degree measure
பாஸ்கலின் முக்கோணம்	Pascal's Triangle
பூச்சியக் கோவை அணி	Singular Matrix

பூச்சியமற்றக் கோவை அணி	Non-Singular Matrix
எண்ணுதலின் பெருக்கல் கொள்கை	Multiplication Principle of counting
மடக்கை	Logarithmic
மடங்கு கோணம்	Multiple angle
மட்டு	Modulus
மாறி	Variable
மாறிலி	Constant
முக்கோண அணி	Triangular Matrix
முழுமையான மாறிலிகள்	Absolute constants
முனை	Vertex
மூடிய இடைவெளி	Closed interval
மூலை விட்ட அணி	Digonal Matrix
மைய உறுப்பு	Middle term
மையம்	Centre
ரேடியன் அளவு / ஆரையன் அளவு	Radian measure
வகையீடு	Derivative
வட்ட வரிசை மாற்றம்	Circular Permutation
வட்டம்	Circle
வரிசை மாற்றங்கள்	Permutations
வலக்கை எல்லை	Right limit
விகித முறு கோவை	Rational Expression
விஞ்சிய சார்புகள்	Transcendental functions
விட்டம்	Diameter
வில்லின் நீளம்	Length of the arc.
வீச்சகம் / வீச்சு	Range
வெட்டும் புள்ளி	Point of intersection
வெளிபடு	Explict
வெளியீடு	Output

சுருக்கங்கள்

பொ.ஆ.மு – பொது ஆண்டுக்கு முன் : கி.மு. வின் தற்போதைய பயன்பாடு
பொ.ஆ. – பொது ஆண்டு : கி.பி. யின் தற்போதைய பயன்பாடு

துணை நூற் பட்டியல்

1. Introduction to Matrices, S.P.Gupta , S.Chand & Company
2. Matrices, Shanthi Narayanan,S.Chand & Company
3. Matrices and Determinants,P.N.Arora, S.Chand & Company
4. Topics in Algebra, I.N.Herstein, Vikas Publishing Company
5. Algebra A Complete Course , R.D.Sharma, Sultan Chand & Sons
6. Analytical Geometry, T.K.Manicavachagon Pillay, S.Narayanan, S.Viswanathan Publishers
7. Analytical Geometry,P.K.Mittal, Shanthi Narayanan, Durai Pandiyan, S.Chand & Company
8. Trigonometry, R.D.Sharma, Sulatan Chand & Sons
9. A Text Book of Trigonometry, M.D Raisingania and Aggarwal
10. Trigonometry, D.C.Sharma, V.K.Kapoor, Sulatan Chand & Sons
11. Trignonometry, S.Arumugam , S.Narayanan, T.K.Manicavachagon Pillay, New Gama Publications, S.Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
12. Calculus, Mohamd Arif, S.Narayanan, T.K.Manicavachagon Pillay, S.Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
13. Differential and Integral Calculus, N.Piskunov, Mir Publishers, Moscow
14. Differential and Integral Calculus,Schamum's Outline Series,Frank Ayres
15. Calculus (Volume I & II), Tom.M.Apostol, John Wiley Publications
16. Calculus : An Historical Approach, W.M, Priestly (Springer)
17. Calculus with Analytic Geometry (Second Edition) George F.Simmons, The Mcgraw Hill
18. Application of Differentiation, S.Narayanan, T.K.Manicavachagon Pillay, , S.Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
19. Application of Differentiation,P.N.Arora, S.Arora, S.Chand & Company
20. Financial Mathematics, O.P.Malhotra, S.K.Gupta, Anubhuti Gangal, S.Chand & Company
21. Financial Mathematics ,Kashyap Trivedi, Chirag Trivedi, Pearson India Education Services Pvt. Ltd
22. Descriptive Statistics, Richard I.Levin, David S.Rubin, Prentice Hall Inc,Englewood, N.J.U.S.A
23. Statistical Methods, S.K.Gupta, Prentice Hall Inc,Englewood, N.J.U.S.A
24. Descriptive Statistics, Anderson, Sweenas, Williams, Library of Congress Cataloging in Publication Data
25. Correlation and Regression Analysis, Dr.S.P.Gupta, P.K. Gupta, Dr.Manmohan, Sultan Chand & Sons
26. Correlation and Regression Analysis, John.S.Croucher, Mc Graw-Hill Australia Pvt Limited
27. Operations Research, Dr.S.P.Gupta, P.K. Gupta, Dr.Manmohan, Sultan Chand & Sons
28. Operations Research, A.Ravindran, James J.Solberg, Willey Student Edition
29. Operations Research, Nita H.Shah, Ravi.M.Gor, Hardik Soni, Kindle Edition
30. Operations Research, Frederick S.Hilton, Gerald J.Lieberman,Mc Graw Hill Education
31. Business Mathematics, HSC First & Second Year, Tamilnadu Text Book Corporation, Reprint 2017
32. Mathematics, HSC First & Second Year, Tamilnadu Text Book Corporation, Reprint 2017

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் – மேல் நிலை முதலாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள் பெயர் பட்டியல்

பாடத் தயாரிப்புக்குழு தலைவர்

திரு. ந. இரமேஷ்,
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு), கணிதத்துறை,
அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர், மா. ரெ. சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை

முனைவர். தெ,அறிவுடைநம்பி
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை

பாடப் பொருள் வல்லுநர்கள்

முனைவர். வேணு பிரகாஷ்,
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறை தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை, மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை

முனைவர். இரா. திருமலைச்சாமி,
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை

முனைவர். ச. ஜெ. வெங்கடேசன்,
இணைப் பேராசிரியர் ,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை

திருமதி மே. திலகம்
உதவிப் பேராசிரியர் , புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை

பாடக்குழு பொறுப்பாளர்

திரு ஆ. இரவிக்குமார்
துணை இயக்குநர்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் நிறுவனம்,
சென்னை

பாட நூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு.சு.பாபு
உதவி பேராசிரியர்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் நிறுவனம்,
சென்னை

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தலைமை ஒருங்கிணைப்பாளர்
வடிவமைப்பு – ஆக்கம்

சீனிவாசன் நடராஜன்

வடிவமைப்பு

ஜாய் கிரா∴பிக்ஸ், சென்னை

Qc–

கோபு இராசுவேல்
கி. ஜெரால்டு வில்சன்
ச. தமிழ்குமரன்
ரா. ரகுபதி

அட்டை வடிவமைப்பு – கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு

ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சு

பெ. துளசி

நூலாசிரியர்கள்

திரு .தி.பி. சுவாமி நாதன்,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி பல்லாவரம் சென்னை–43

திரு .ஹரி. வெங்கடேஷ்,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சர் இராமசாமி முதலியார் மேல்நிலைப்பள்ளி,
அம்பத்தூர், சென்னை 600 053.

திரு .ஆ. மாரியப்பன்,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அறிஞர் அண்ணா நகராட்சி ஆண்கள், மேல்நிலைப் பள்ளி,
செங்கல்பட்டு, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திரு .எஸ். எப். முகமது முகைதீன் சுலைமான்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை–43

திரு .த. ராஜ சேகர்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
குரோம் பேட்டை, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திருமதி.அ. சுகன்யா,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி,
கோவிலம் பாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திரு .வெ. கணேசன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
நேரு அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
நங்கைநல்லூர், சென்னை–114

பாடப் பொருள் வாசிப்பாளர்கள்

திரு .ஜேம்ஸ் குழந்தை ராஜ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
புனித சூசையப்பர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
செங்கல்பட்டு, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திருமதி.பியுலா சுகுணா சீலி
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
P.G,கார்லி மேல்நிலைப் பள்ளி, தாம்பரம்

திருமதி S.சுபாஷினி
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
குன்றத்தூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திரு .கா. சரவணன்
கிரேஸ் மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி,
போரூர், சென்னை–600 116.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

தா. வாசுராஜ்
பட்டதாரி ஆசிரியர் (கணிதம்)
ஊ.ஒ.ந.நி. பள்ளி, கொசப்பூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம்.
எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

குறிப்பு

குறிப்பு

குறிப்பு

குறிப்பு