परिशिष्ट : भारतीय प्राचीन गणितीय पद्धति

B2NPKH

- गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त, वर्ग सूत्र एक न्यूनेन पूर्वण, एकाधिकेन पूर्वेण, वर्गमूल विलोकनम्
- भाग-निखिलम् (आधार 10, 100) भाग के बीजांक से जाँच
- भाग परावर्त्य (आधार 10, 100) बीजांक से जाच
- भाग - ध्वजांक विधि (भाजक दो अंकों का ध्वजांक 5 या 5 से छोटा हो)
- भाग - ध्वजांक विधि (बीजांक से जाँच)
- घनसूत्र आनुप्येण, घनमूल विलोकनम्

14.1 गणितज्ञ आर्यभट (प्रथम)

प्राचीन भारत के महान खगोलशास्त्री और गणितज्ञ आर्यभट का जन्म 476 ई. में हुआ था जिन्होंने 499 ई. में 23 वर्ष की आयु ''आर्यभट्टीय'' नामक एक अनुपम ग्रन्थ की रचना संस्कृत के श्लोकों में की। इस ग्रंथ में कुल 5 अध्याय हैं जिनमें से 4 अध्याय ज्योतिष पर तथा एक अध्याय गणित पर है। विश्व के ये प्रथम खगोलशास्त्री हैं, जिन्होंने बताया कि सूर्य स्थिर है और पृथ्वी उसका एक पूरा चक्कर 365 दिन, 5 घण्टे और 12 सेकेण्ड में लगाती है। यही सामान्य वर्ष की सम्पूर्ण अवधि है। सूर्य का चक्कर लगाते समय पृथ्वी अपनी धुरी पर घूमती रहती है जिसके कारण दिन और रात होते हैं। चन्द्रमा के पास स्वयं का प्रकाश नहीं है, वह सूर्य से प्रकाशित होकर ही प्रकाशमान होता है। सूर्य ग्रहण और चन्द्रग्रहण खगोलीय घटनाएँ हैं। गणित के क्षेत्र में उन्होंनें (π) का मान दशमलव के चार अंकों तक बिल्कुल सही ज्ञात किया। उन्होंने बताया कि 20000 इकाई व्यास वाले वृत्त की परिधि 62832 इकाई के बराबर होगी और

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

उन्होंने गणित के क्षेत्र में (π) के अतिरिक्त शून्य, ज्या और कोटिज्या की भी विवेचना की है। भारतीय गणित के इतिहास में उन्हें बीजगणित का संस्थापक मानते हैं तथा बीजगणित में उन्होंने श्रेणी का भी उल्लेख किया है। उन्होंने वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ ज्ञात किया, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है, जो सर्वमान्य है।

सर्वप्रथम आर्यभट्ट ने ही समान्तर श्रेणी $a + (a + d) + (a + 2d) + ...$ पदों तक

के योगफल के लिए सूत्र $S = n\left[a + \frac{(n-1)}{2}d\right]$

प्रस्थापित किया जो आज

$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ के रूप में उल्लिखित होती है। (यहाँ a = प्रथम पद, d = सार्वअन्तर तथा n कुल पदों की संख्या है।)

भाग विधि से घनमूल ज्ञात करने का श्रेय भी आर्यभट्ट को ही है। यह कहना अतिशयोक्ति नहीं होगी कि आर्यभट्ट (प्रथम) गणित, विज्ञान ओर खगोलशास्त्र के जाज्ज्वल्यमान नक्षत्र रहे हैं, जो आज भी अपनी प्रतिभा एवं वैज्ञानिक खोजों के लिए सबके आदरणीय बने हुए हैं। भारत सरकार ने इन्हीं को सम्मान प्रदान करते हुए इनके नाम पर अपना प्रथम उपग्रह "आर्यभट्ट" सोवियत संघ की भूमि से दिनांक 19 अप्रैल 1975 को अन्तरिक्ष में स्थापित किया। ये भविष्य में भी विश्व के विज्ञान एवं गणित वेत्ताओं के लिए प्रेरणा के श्रोत बने रहेंगे।

14.1.1 विनकुलम एवं उनके अनुप्रयोग

(पहाड़ा एवं मिश्रित गणना में)

(*a*) पहाड़ा

सामान्यतः 1 से 5 तक पहाड़ा लिखन सरल होता है किन्तु उन संख्याओं का पहाड़ा लिखना (जिनमें प्रयुक्त अंक 5 से बड़े होते हैं) कुछ कठिन होता है। ऐसी संख्याओं में यदि 5 से बड़े अंकों को विनकुलम में बदल दें तो पहाड़ा लिखना सरल हो जाता है। इसके प्रयोग से किसी भी संख्या का पहाड़ा लिख सकते हैं तथा दसवें स्तर से भी आगे के स्तरों पर भी लिख सकते हैं। निम्नांकित उदाहरण देखिए -

उदाहरण 1 : 789 का पहाड़ा लिखिए।

हल : 789 को विनकुलम संख्या के रूप में परिवर्तित करने पर

789 $= 1\bar{2}\bar{1}\bar{1}$ (क्योंकि $1\bar{2}\bar{1}\bar{1} = 1000 - 200 - 10 - 1 = 789$)

प्रथम स्तर	=	$1\bar{2}\bar{1}\bar{1}$	=	1000 − 211	=	789
द्वितीय स्तर	=	$2\bar{4}\bar{2}\bar{2}$	=	2000 − 422	=	1578
तृतीय स्तर	=	$3\bar{6}\bar{3}\bar{3}$	=	3000 − 633	=	2367
चतुर्थ स्तर	=	$4\bar{8}\bar{4}\bar{4}$	=	4000 − 844	=	3156
पंचम स्तर	=	$4\bar{0}\bar{5}\bar{5}$	=	4000 − 55	=	3945
छठा स्तर	=	$5\bar{2}\bar{6}\bar{6}$	=	5000 − 266	=	4734
सातवाँ स्तर	=	$6\bar{4}\bar{7}\bar{7}$	=	6000 − 477	=	5523
आठवाँ स्तर	=	$7\bar{6}\bar{8}\bar{8}$	=	7000 − 688	=	6312
नौवाँ स्तर	=	$8\bar{8}\bar{9}\bar{9}$	=	8000 − 899	=	7101
दसवाँ स्तर	=	$8\bar{1}\bar{1}\bar{0}$	=	8000 − 110	=	7890
ग्यारहवाँ स्तर	=	$9\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	=	9000 − 321	=	8679

(*b*) मिश्रित गणना में विनकुलम का अनुप्रयोग

द्रष्टव्य है कि यह आवश्यक नहीं है कि विनकुलम संख्या में सभी अंक 5 या 5 से न्यून हों। ये अंक 9 तक कोई भी हो सकते हैं। अब ऐसी विनकुलम संख्याओं का योग एवं घटना करना हम सीखेंगे जिनके अंक 1 से लेकर 9 तक हो सकते हैं :

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{lr} & 8\bar{3}\bar{7}6\bar{2} \\ + & 3\bar{4}\bar{5}\bar{8}1 \\ \hline \text{योगफल} & 11\bar{8}\bar{2}\bar{2}\bar{1} \\ \hline \end{array} = 101779 \text{ उत्तर}$$

ध्यान दें, सैकड़े के स्थान पर $\bar{7}$ और $\bar{5}$ का योग $\overline{12}$ आता है, अतः सैकड़े के स्थान $\bar{2}$ लिखते हैं एवं $\overline{12}$ के दहाई वाला अंक हजार वाले स्तम्भ में हासिल के रूप में ले जाते हैं, इसी कारण हजार वाले स्थान पर अंकों का योग $\bar{3} + \bar{4} + \bar{1} = \bar{8}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{lr} & 9\bar{8}\bar{6}5\bar{1} \\ - & (7\bar{5}\bar{9}\bar{4}2) \\ \hline & 2\bar{3}39\bar{3} \\ \hline \end{array} = 17387 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 3 :

$$\begin{array}{lr} & 4\bar{6}\bar{7}2\bar{9} \\ + & 5\bar{8}\bar{3}4\bar{2} \\ - & (7\bar{5}\bar{6}\bar{8}\bar{7}) \\ + & 9\bar{7}\bar{8}\bar{2}\bar{5} \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

हल : घटाने वाली संख्या को 'परावर्त्य योजयेत'' सूत्र का प्रयोग कर उपर्युक्त प्रश्न को निम्नवत् हल करेंगे।

$$\begin{array}{lr} & 4\bar{6}\bar{7}2\bar{9} \\ + & 5\bar{8}\bar{3}4\bar{2} \\ + & \bar{7}5687 \\ + & 9\bar{7}\bar{8}\bar{2}\bar{5} \\ \hline & 10\bar{7}\bar{1}2\bar{9} \\ \hline \end{array} = 92911 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 4 - निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए।

$8936 - 7219 + 5673 + 4698 - 7522 + 3211$

हल - विनकुलम का प्रयोग करने पर उपर्युक्त का मान =

$$\begin{array}{r} 8\,9\,3\,6 \\ +\bar{7}\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{9} \\ +5\,6\,7\,3 \\ +4\,6\,9\,8 \\ +\bar{7}\,\bar{5}\,\bar{2}\,\bar{2} \\ +3\,2\,1\,1 \\ \hline 7\,7\,7\,7 \\ \hline \end{array}$$

14.2 गुणा (निखिल विधि - आधार-उपाधार)

हम जानते हैं कि आधार 10 का कोई घात होता है, जैसे 10, 100, 1000, ...। उपाधार, आधार का कोई अपवर्तक होता है, जैसे 50 आघार 100का एक अपवर्तक है।

किन्हीं दों संख्याओं का परस्पर गुणा आधार एवं उपाधार के उचित चयन से सरल हो जाता है। इसे हम निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 5 : 57 में 63 का गुणा कीजिए।

हल : यहाँ आधार 100लेने पर विचलन पर्याप्त बड़ी संख्या होगी अतः यदि 100 का उपाधार 50 का चयन करें तो विचलन छोटी संख्या होगी। अतः उपाधार लेकर ही गुणा करना सरल होगा,

अतः उपाधार $50 = \frac{1}{2} \times 100$

$$\begin{array}{ll} 57 & +7 \\ 63 & +13 \\ \hline \frac{1}{2}(70) & /\ 91 \end{array}$$

= 3591 उत्तर।

टिप्पणी : गुणा के दायें भाग में दो अंक होंगे क्योंकि उपाधार 50 के आधार 100 में इकाई, दहाई के अंक 0 हैं।

वैकल्पिक हल : यदि आधार 10 हो तो 50, 10 का एक अपवर्त्य है। यहाँ $50 = 10 \times 5$ अतः गुणा निम्नवत् होगा।

$$\begin{array}{r} 57 \quad +7 \\ 63 \quad +13 \\ \hline 5 \times 70 \,/\, 9/1 \\ = 3500 \\ +\;\; 91 \\ \hline 3591 \end{array}$$ उत्तर

उदाहरण 6 : 247 × 253 का मान ज्ञात कीजिए।

हल - आधार 1000 लेने पर, उपर्युक्त संख्याएँ 250 के करीब हैं। अतः उपाधार 250 लेना ठीक होगा।

अब उपाधार = $\frac{1}{4}$ × आधार

आधार 1000

अतः
$$\begin{array}{r} 247 \quad -3 \\ 253 \quad +3 \\ \hline \frac{1}{4} \times 250 \,/\, 000 \\ /\, -(009) \\ = 62500 \\ -\;\; 9 \\ \hline 62491 \end{array}$$ उत्तर

आधार 1000 होने के कारण गुणा के दायें भाग में तीन अंक होंगे।

वैकल्पिक विधि

आधार 100 चुनने पर उपाधार 250= $\frac{5}{2}$ × 100

$$\begin{array}{ll} 247 & -3 \\ 253 & +3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{5}{2} \times 250 \;/\; 000$$

$$/ - (0009)$$

$$\begin{array}{rr} = & 62500 \\ - & 9 \\ \hline & 62491 \end{array}$$ उत्तर

टिप्पणी : आधार, उपाधार में ''अनुरूप्येण'' सूत्र से यह स्पष्ट है कि उनमें आनुपातिक सम्बन्ध होता है, अतः यदि आधार-उपाधार एक दूसरे के अपवर्त्य अथवा अपवर्तक हों तो गणना सुगम हो जायेगी। उपर्युक्त उदाहरण में आधार 1000 तथा उपाधार 250 लेना अधिक उपयुक्त है क्यों उपाधार 250, आधार का एक अपवर्तक है, आधार 100 लेने पर उपाधार 250 आधार का अपवर्त्य नहीं है। अपितु उसका ढाई गुना है। दोनों में 2 : 5 का अनुपात है, जिसके कारण प्रश्न का हल सही है, इसमें कोई संशय नहीं है।

14.3 गुणा (*i*) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण

यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने में प्रयुक्त होता है, जिनके इकाई का अंक 5 है। यहाँ हम केवल एक उदाहरण लेकर इसे समझते हैं।

उदाहरण : 245 का वर्ग कीजिए

हल : 245 में इकाई अंक 5 है, अतः इसमें 'एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र का प्रयोग कर 245 का वर्ग ज्ञात करेंगे। 245 में 5 को छोड़कर संख्या का शेषभाग 24 है।

अतः एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से वर्ग का

बायाँ भाग = 24 × (24 + 1) = 24 × 25 = 600

तथा वर्ग का दायाँ भाग $= 5^2 = 25$

अतः $(245)^2 = 600 / 25$

$= 60025$

गुणा (*ii*) सूत्र ''एक न्यूनेन पूर्वेण''

जब किसी संख्या में किसी ऐसी संख्या का गुणा करना होता है, जिसके सभी अंक 9 हों, तब इस सूत्र का प्रयोग करते हैं। जैसे 245 × 9999 का यदि मान ज्ञात करना हो, तब उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करेंगे। इस

गुणनफल में

बायाँ पक्ष	= (245 − 1)	(गुण्यक - 1)
तथा दायाँ पक्ष	= 9999 − (245 − 1)	(गुणक - गुणनफल का बायाँ पक्ष)
	= 9999 − 244	
	= 9755	
अतः गुणनफल	= बायाँ पक्ष / दायाँ पक्ष	
	= 244 / 9744	
	= 2449755 उत्तर	
उत्तर की जाँच	= 245 × 9999	= 245 × (10000 − 1)
	= 2450000 − 245	
	= 2449755	

अभ्यास कीजिए

1. 8756 × 99999 का मान बताइए।
2. 15673 × 999999 का मान बताइए।

14.4 गुणा (i) ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम (अंकगणित)

यह विधि गुणा के सब प्रकार के प्रश्नों में प्रयुक्त कर सकते हैं। "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" का अर्थ है "ऊर्ध्वाधर और तिर्यक"। इस विधि को निम्नांकित उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 1 : 6 में 8 का गुणा कीजिए

हल : $6 \times 8 = \begin{array}{c}6\\ \updownarrow\\ 8\end{array} = 48$ (यहाँ गुणन ऊर्ध्वाधर है)

एक अंक वाली संख्याओं के गुणनफल इसी विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 2 : 37 में 83 का गुणा कीजिए।

हल :

(अ)	यहाँ पर गुणा का प्रथम चरण (ऊर्ध्वाधर)	=	3 × 7 = 21
(ब)	गुणा का द्वितीय चरण (तिर्यक)	=	3 × 3 + 8 × 7
		=	9 + 56 = 65

(स) गुणा का तृतीय चरण (उर्ध्वाधर) = $8 \times 3 = 24$

गुणनफल = 24 / 65 / 21

```
  21
 65
24
----
3071
----
```
उत्तर

उदाहरण 3 - 123 में 124 का गुणा कीजिए।

हल -

1 2 3   1 2 3

1 2 4   1 2 4

(अ) गुणनफल का प्रथम चरण (उर्ध्वाधर) $= 4 \times 3 = 12$

(ब) गुणनफल का द्वितीय चरण (तिर्यक) $= 4 \times 2 + 2 \times 3 = 14$

(स) गुणनफल का तृतीय चरण (तिर्यक, तिर्यक, उर्ध्वाधर) $= 4 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 2$ $= 11$

(द) गुणनफल का चतुर्थ चरण (तिर्यक) $= 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$

(द) गुणनफल का प्रचम चरण (उर्ध्वाधर) $= 1 \times 1 = 1$

गुणनफल = 1 / 4 / 11 / 14 / 12

= 1 5 2 5 2

```
    12
   14
  11
  4
 1
-----
15252
-----
```

उदाहरण 4 - 7824 में 2638 का गुणा कीजिए।

दायें से बायें के क्रम में गुणा चरण-संकेत

ह   ह सै   ह सै द   ह सै द इ   सै द इ   द इ   इ

ह   ह सै   ह सै द   ह सै द इ   सै द इ   द इ   इ

(इ = इकाई, द = दहाई, सै = सैकड़ा, ह = हजार)

गुणा	7	8	2	4
	2	6	3	8

2×7 / $6\times7+2\times8$ / $3\times7+2\times2+6\times8$ / $8\times7+2\times4+3\times8+6\times2$ / $8\times8+6\times4+2\times3$ / $2\times8+3\times4$ / 4×8

	दसला.	लाख.	द.ह.	ह.	सै.	द.	इ.
=	14 /	58 /	73 /	100 /	94 /	28 /	32

= 2 0 6 3 9 7 1 2 उत्तर

```
         32
        28
       94
     100
     73
    58
   14
  ---------------
  2 0 6 3 9 7 1 2
```

उपर्युक्त की भाँति हम दो संख्याओं के गुणा "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" सूत्र से कर सकते हैं।

अभ्यासार्थ प्रश्न

गुणनफल ज्ञात कीजिए

(अ) 67×68 (ब) 329×532 (स) 425×123

(द) 1324×1235 (य) 2875×1463

गुणा (*ii*) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (बीजगणित)

दो बीजगणितीय व्यंजकों के गुणनफल में "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" सूत्र का ही प्रयोग करते हैं। एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण : $(2x+y-2z)$ में $(3x+2y+4z)$ का गुणा कीजिए।

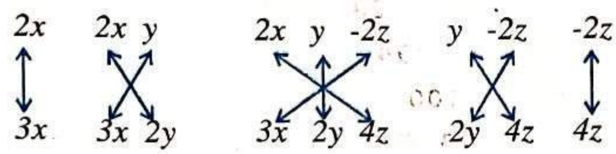
हल :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x & +y & -2z & \\
 & & \times\ 3x & +2y & +4z & \\
\hline
 & & 8xz & +4yz & -8z^2 & \\
 & 4xy & +2y^2 & -4yz & & \\
6x^2 & +3xy & -6xz & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$6x^2 + 7xy + 2y^2 + 2xz + 0yz - 8z^2$$

$$= 6x^2 + 7xy + 2y^2 + 2xz - 8z^2$$

गुणनसंकेत



दायें से बायें गुणनफल का प्रथम पद $= 4zx(-2z) = -8z^2$

दायें से बायें गुणनफल का द्वितीय पद $= 4yz - 4yz = 0\,yz$

दायें से बायें गुणनफल का तृतीय पद $= 8xz - 6xz + 2y^2 = 2xz + 2y^2$

दायें से बायें गुणनफल का चतुर्थ पद $= 4xy + 3xy = 7xy$

दायें से बायें गुणनफल का पंचम पद $= 2x \times 3x = 6x^2$

अतः गुणनफल $= 6x^2 + 7xy + 2y^2 + 2xz + 0yz - 8z^2$

$= 6x^2 + 7xy + 2y^2 + 2xz - 8z^2$

14.5 वर्ग सूत्र

(1) एक न्यूनेन पूर्वेण ($9^2, 99^2, 999^2, \ldots$)

इस विधि से 9, 99, 999, 9999, ... (जो कि अपने आधार से ठीक 1 कम हैं, का वर्ग करते हैं। क्रियाविधि निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 99 का वर्ग कीजिए।

हल : 99 का आधार 100 है। यह आधार से 1 कम है,

अतः 99 के वर्ग का प्रथम भाग अर्थात्

बायाँ भाग $= (99-1) = 98$

अब अभीष्ट वर्ग का दायाँ भाग $= (-1)^2 = 01$

ध्यान दें, आधार 100 होने के कारण दायें भाग में दो अंक होंगे।

अतः $99^2 = (99-1) / 01 = 9801$ उत्तर

उदाहरण 2 : 999 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : $999^2 = (999-1)\ /\ (-1)^2$

$= (999-1)\ /\ 001$

(आधार 1000 होने के कारण वर्ग के दायें भाग में 3 अंक होंगे)

$= 998001$ उत्तर

इसी प्रकार हम आधार के ठीक 1 न्यून वाली संख्याओं का वर्ग उपर्युक्त विधि से कर सकते हैं।

(2) यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्

इस सूत्र का अर्थ है कि जिस संख्या का वर्ग करना है, उस संख्या की आधार से जितनी कमी है, ठीक उतना ही उस संख्या से कम कर दें (यह वर्ग का बायाँ भाग होगा) और पुनः उस कमी का वर्ग करके वर्ग का दायाँ भाग प्राप्त करें, उसे बायें भाग के साथ संयुक्त करें। इसे निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 8 का वर्ग कीजिए।

हल : स्पष्टतः संख्या 8 की आधार से कमी $= 10 - 8 = 2$

अतः वर्ग का बायाँ भाग $= (8 - 2) = 6$

अब वर्ग का दायाँ भाग $= (2)^2 = 4$

अतः 8 का वर्ग $= 6\ /\ 4 = 64$

(टिप्पणी : आधार 10 होने के कारण वर्ग के दायें भाग में केवल एक अंक होगा।)

उदाहरण 2 : 97 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 97 की आधार से कमी $= 100 - 97 = 3$

अत : $(97)^2$ का बायाँ भाग $= (97 - 3)$

तथा दायाँ भाग $= (3)^2 = 09$

यहाँ आधार 100 होने के कारण दायें पक्ष में दो अंक होंगे।

इसी कारण $(3)^2 = 9 = 09$ है।

$\therefore$ $97^2 = (97 - 3)\ /\ 09 = 9409$ उत्तर।

उदाहरण 3 : 994 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 1000 से 994 की न्यूनता $= 1000 - 994 = 6$.

अतः $(994)^2 = (994 - 6)\ /\ (6)^2$

$= 988/\ 036$

$= 988036$ उत्तर।

टिप्पणी : ध्यान दें, यदि संख्या आधार से बड़ी है, तब उस स्थिति में आधार से संख्या के विचलन को धनात्मक लेंगे और तब उसे उस संख्या में जोड़ेंगे। इसे उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 4 : 14 का वर्ग कीजिए

हल : यहाँ (आधार 10 से विचलन = 4)

$(14)^2 = (14+4) / (4)^2$

$= 18 \diagup_{1} 6 = 196$ उत्तर

उदाहरण 5 : 108 का वर्ग कीजिए।

हल : 108 का आधार 100 से विचलन = 8

$(108)^2 = (108 + 8) / (8)^2$ (दायें भाग में दो अंक होंगे)

$= 116 / 64$

$=11664$ उत्तर

उदाहरण 6 : 1021 का वर्ग कीजिए।

हल : $(1021)^2 = (1021 + 21) / (21)^2$

$= 1042441$ उत्तर

बीजांक से वर्ग की जाँच

उदाहरण (6) को देखें।

जिस संख्या का वर्ग करते है, उसका बीजांक

अर्थात् 1021 का बीजांक $= 1 + 0 + 2 + 1 = 4$

अब 4 का वर्ग $= 16$

16 का बीजांक $= 1 + 6 = 7$

(1021) के वर्ग 1042441 का बीजांक $= 1+0+4+2+4+4+1 = 16 = 1+6= 7$

जो कि संख्या 1021 के बीजांक 4 के वर्ग 16 के बीजांक के बराबर है।

अतः उत्तर शुद्ध है।

इसी प्रकार किसी संख्या के वर्ग के सही उत्तर की शुद्धता की जाँच बीजांक द्वारा कर सकते हैं।

(3) सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण

यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने में प्रयोग करते हैं, जिनके इकाई का अंक 5 है। यहाँ क्रिया-विधि निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 45 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ 45 में इकाई का अंक 5 है।

इस को छोड़ बायीं ओर 4 का अंक है।

अब सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण' से ''पूर्व से एक अधिक'' अर्थात् 4 से 1 अधिक का गुणा 4 में करेंगे।

अतः 45 के वर्ग का बायाँ भाग $= (4+1) \times 4$

तथा 45 के वर्ग का दायाँ भाग $= (5)^2 = 25$

अतः $(45)^2 = (4+1)\times 4/25$

$= 2025$ उत्तर

उदाहरण 2 : 125 का वर्ग कीजिए।

हल : इकाई का अंक 5 है। 5 को छोड़कर शेष अंकों वाली सख्या 12 है। अब एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से

$(125)^2$ का बायाँ भाग $= (12+1)\times 12$

$= 156$

$(125)^2$ का दायां भाग $= (5)^2 = 25$

$\therefore \quad (125)^2 = 156/25 = 15625$ उत्तर

14.6 विभाजनीयता (19, 29, 39.... से)

जैसा कि पूर्व कक्षा में उल्लेख किया जा चुका है कि जिन भिन्नों के अंतिम अंक 9 हैं, उनके आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा।

(अ) अतः $\frac{1}{19}$ के आवर्ती का अंतिम अंक 1 होगा तथा हर 19 का प्रचालक 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से $1+1 = 2$ होगा।

अब पूर्व कक्षा के उदाहरणों में वर्णित (प्रदर्शित) क्रिया विधि का अनुसरण करते हुए, $\frac{1}{19}$ के आवर्ती का अंतिम अंक 1 होगा।

1 के ठीक बायें का अंक $= 1 \times 2$ (प्रचालक) $= 2$

2 के ठीक बायें का अंक $= 2 \times 2 = 4$

4 के ठीक बायें का अंक $= 4 \times 2 = 8$

8 के ठीक बायें का अंक $= 8 \times 2 = 16$ के इकाई वाला अंक 6, 1 हासिल के रूप में अगले गुणनफल, जो $6 \times 2 = 12$ होगा उसमें जोड़कर 6 के ठीक बायें का अंक 3 प्राप्त करेंगे और योगफल 13 के दहाई वाला अंक 1 पूर्ववत अगले गुणनफल ($2\times 3=6$) में जोड़कर 3 के ठीक बायाँ वाला अंक 7 प्राप्त करेंगे। इसी प्रकार दायें से बायें तब तक बढ़ते चले जायेंगे जब तक कि 1 का अंक पुनः न प्राप्त हो जाय।

अतः $\frac{1}{19} = \ldots 5_1\ 7_1\ 8\ 9_1\ 4\ 7_1\ 3_1\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1$

इसी प्रकार पूर्वोक्त कथनानुसार दायें से बायें तब तक बढ़ेंगे, जब तक कि 1 न प्राप्त हो जाय। अतः

$$\frac{1}{19} = 1\ 0\ \ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1$$

अतः $\quad \dfrac{1}{19} = 0.\dot{0}52631578947368421\dot{}$

(ब) अब हम $\dfrac{1}{39}$ को उपर्युक्त विधि से आवर्ती दशमलव में बदलते हैं।

स्पष्टतः हर 39 का प्रचालक = 3 + 1 = 4

तथा आवर्ती का अंतिम अंक = 1

अतः 1 में प्रचालक 4 क गुणा करने पर 1 के ठीक बायाँ वाला अंक = 1× 4 = 4 होगा।

अब 4 के ठीक बायाँ वाला अंक 6 होगा। (क्योंकि 4 × 4 = 16)

पुनः 6 के ठीक बायें वाला अंक 5 होगा (क्योंकि 6 × 4 + 1 = 25)

पुनः 5 के ठीक बायें वाला अंक 2 होगा। (क्योंकि 4 × 5 + 2 = 22)

और पुनः 2 के ठीक बायें वाला अंक 0 होगा। (क्योंकि 4 × 2 + 2 = 10)

इस प्रकार $\dfrac{1}{39} = \ldots\ldots \quad 1_1\ 0_2\ 2_2\ 5_1\ 6\ 4\ \dot{1}$

हम देखते हैं कि 0 के ठीक बायें वाला अंक 1 होगा (क्योंकि 0 × 4 + 1 = 1)

अतः इसके बाद दायें से बायें उपर्युक्त क्रम में अंकों की आवृत्ति होती जायेगी।

इस प्रकार $\dfrac{1}{39} = 0.\dot{0}\ 2\ 5\ 6\ 4\ \dot{1}$

उपर्युक्त की भाँति क्रियाविधि अपनाते हुए हम $\dfrac{1}{29}, \dfrac{1}{49}, \dfrac{1}{59}, \ldots$ आदि को वैदिक गणित की जादुई विधि से असांत आवर्ती दशमलव में बदल सकते हैं।

विशेष

एक बार $\dfrac{1}{19}$ के आवर्ती दशमलव पर ध्यान दें -

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}\ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ \dot{1}$$

यहाँ दायें से बायें 9वाँ अंक 9 है। आप देखते हैं कि $\dfrac{1}{19}$ के आवर्ती दशमलव में कुल 18 अंक हैं जिसका आधा 9 है। अतः दाये से बायें 9 अंकों को प्राप्त कर लेने के बाद शेष के दायें से बायें के 9 अंक क्रमशः प्रथम प्राप्त 9 अंकों के 9 के पूरक अंक हैं। यथा

दायें से बायें दसवाँ अंक	$= 9 - 1 = 8$
दायें से बायें ग्यारहवाँ अंक	$= 9 - 2 = 7$
दायें से बायें बारहवाँ अंक	$= 9 - 4 = 5$
दायें से बायें तेरहवाँ अंक	$= 9 - 8 = 1$
दायें से बायें चौदहवाँ अंक	$= 9 - 6 = 3$
दायें से बायें पन्द्रहवाँ अंक	$= 9 - 3 = 6$
दायें से बायें सोलहवाँ अंक	$= 9 - 7 = 2$
दायें से बायें सत्रहवाँ अंक	$= 9 - 4 = 5$
दायें से बायें आठरहवाँ अंक	$= 9 - 9 = 0$

जब आप $\frac{1}{29}$ को आवर्ती दशमलव में बदलेंगे तो आप देखेंगे कि उसमें 28 अंक होंगे। दायें से बायें के क्रम में ठीक चौदहवाँ अंक 9 होगा। उसके ठीक बायें के शेष 14 अंक उपर्युक्त विधि से लिखे जा सकते हैं। आप जाँच कर सकते हैं कि $\frac{1}{29} = 0.\dot{0}\,3\,4\,4\,8\,2\,7\,5\,8\,6\,2\,0\,6\,8/9\,6\,5\,5\,1\,7\,2\,4\,1\,3\,7\,9\,3\,\dot{1}$ में दायें से बायें चौदहवाँ अंक 9 है जहाँ पर एक तिर्यक रेखा खींच दी गयी है। अब इस रेखा के ठीक बायें ओर के अंक क्रमशः दायें से बायें क्रम में लिखे अंकों क्रमशः 1, 3, 9, 7....., 5, 6, 9 के पूरक अंक 8 6 0 2, ... 4 3 0 हैं।

ध्यान दें

जिन भिन्नों के हर, जिनके इकाई का अंक 9 है तथा हर अभाज्य संख्या है, उनके आवर्ती दशमलव में अंकों की संख्या अभाज्य हर वाली संख्या से 1 कम होती है। जैसे $\frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{59}, \frac{1}{79}, \frac{1}{89}$ के आवर्ती दशमलव में क्रमशः 18, 28, 58, 78 व 88 अंक होंगे। आप अभ्यास कर इसे जाँच सकते हैं।