15

रैखिक प्रोगामन
(Linear Programming)

15.01 भूमिका (Introduction)

मानव, जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में उपस्थित समस्याओं का समाधान तत्कालीन परिस्थितियों में अपने लिए अनुकूलतम प्रकार से करना चाहता है। एक प्रान्त का आदर्श मुख्यमंत्री सदैव उपलब्ध संसाधनों से अपने प्रान्त के निवासियों के लिए अधिकाधिक खुशहाली प्राप्त करने के लिए प्रयत्नशील रहता है, एक कंपनी का अध्यक्ष उसे उपलब्ध संसाधनों से हमेशा अपनी कंपनी के लिए अधिकाधिक संभव लाभ प्राप्त करने की उम्मीद करता है, एक सेनाध्यक्ष उसे उपलब्ध संसाधनों को ध्यान में रखते हुए सदैव अपनी सेना को इस प्रकार गठित करने का प्रयास करता है ताकि उसकी आक्रामक शक्ति अधिकतम हो, एक उत्पादन प्रबंधक सदैव इस दिशा में प्रयास करता है कि उत्पाद की कीमत किस प्रकार यथासंभव कम की जा सकती है। व्यापार अथवा उद्योग में कई ऐसी परिस्थितियाँ आती है जबकि व्यापारी को अपने सीमित संसाधनों को दो या दो से अधिक प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में इस प्रकार से आवंटित करना होता है जिससे वह लागत को न्यूनतम रखते हुए लाभ को अधिकतम कर सके। रैखिक प्रोगामन का उपयोग सरकारी, व्यापारिक व अन्य विकसित औद्योगिक प्रतिष्ठानों द्वारा अनेक प्रकार की व्यावहारिक समस्याओं का अनुकूलतम हल निकालने के लिए किया जाता है।

परिभाषा (Definition)

रैखिक प्रोगामन एक ऐसी गणितीय प्रविधि है जो उपलब्ध सीमित साधनों का परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिए प्रयुक्त की जाती है जबकि प्रयुक्त सभी चरों के मध्य रेखीय संबंध हो।

15.02 रैखिक प्रोगामन समस्या और उसका गणितीय संरूपण (Linear programming problem and its mathematical formulation)

एक व्यावहारिक उदाहरण की सहायता से रैखिक प्रोगामन समस्या तथा इसके गणितीय संरूपण को समझने का प्रयास करते है।

उदाहरण: एक उत्पादक दो प्रकार के उत्पाद P_1 व P_2 दो मशीनों M_1 व M_2 की सहायता से बनाता है। उत्पाद P_1 की एक इकाई तैयार करने के लिए मशीन M_1 पर 1 घण्टा तथा मशीन M_2 पर 3 घण्टे कार्य करना होता है तथा उत्पाद P_2 की एक इकाई तैयार करने के लिए प्रत्येक मशीन पर 2 घण्टे कार्य करना होता है। यदि P_1 व P_2 के प्रति इकाई लाभ क्रमशः ₹ 60 व ₹ 50 हो तथा मशीन M_1 व M_2 एक सप्ताह में क्रमशः 40 व 60 घण्टे तक कार्य कर सकती हो, तो दोनों उत्पादों की कितनी–कितनी इकाईयाँ बनानी चाहिए, ताकि कुल लाभ अधिकतम हो। इस उदाहरण से यह स्पष्ट है कि

(i) उत्पादक, केवल उत्पाद P_1 या उत्पाद P_2 या दोनों के उचित संयोजनों में उत्पादन कर सकता है। इस प्रकार वह उत्पादन की विभिन्न योजनात्मक संयोजनों से विभिन्न लाभ अर्जित कर सकता है।

(ii) इस समस्या में कुछ अन्य महत्वपूर्ण स्थितियों या व्यवरोधों का भी समावेश है जैसे मशीन M_1 व M_2 एक सप्ताह में क्रमशः 40 व 60 घण्टे तक ही कार्य कर सकती है।

माना कि उत्पादक केवल P_1 प्रकार के उत्पाद बनाने का निश्चय करता है तब वह P_1 प्रकार के केवल 20 इकाई ही बना सकता है तथा इस अवस्था में उसका सकल लाभ $60 \times 20 =$ ₹ 1200 होगा।

माना कि उत्पादक केवल P_2 प्रकार के उत्पाद बनाने का निश्चय करता है तब वह P_2 प्रकार के केवल 20 इकाई ही बना सकता है तथा इस अवस्था में उसका सकल लाभ $50 \times 20 =$ ₹ 1000 होगा।

ऐसी और भी बहुत सारी संभावनाएँ है। अतः हम ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि उत्पादक विभिन्न चयन विधियों के द्वारा विभिन्न उत्पादन संयोजन प्राप्त कर सकता है तथा विभिन्न प्रकार का लाभ अर्जित कर सकता है। अब समस्या यह है कि उत्पादक को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए किस प्रकार के उत्पाद संयोजन का चयन करना चाहिए? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम इस समस्या का गणितीय संरूपण करने का प्रयास करते है।

15.03 समस्या का गणितीय संरूपण (Mathematical formulation of the problem)

माना अनुकूलतम हल के लिए उत्पाद P_1 व P_2 की वांछित निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या क्रमशः x व y है। अब समस्या में दिए हुए आँकड़ों को निम्न तालिका के रूप में व्यक्त करते है–

मशीन	उत्पाद		उपलब्धता
	P_1	P_2	
M_1	1 घण्टा	2 घण्टे	40 घण्टे
M_2	3 घण्टे	2 घण्टे	60 घण्टे
लाभ	₹ 60	₹ 50	

चूँकि उत्पाद P_1 व P_2 पर प्रति इकाई लाभ क्रमशः ₹ 60 व ₹ 50 है अतः P_1 प्रकार की x इकाईयाँ तथा P_2 प्रकार की y इकाईयाँ बनाने पर कुल लाभ

$$Z = 60x + 50y$$

इस प्रकार कुल लाभ को चरों x तथा y में एक रेखीय संबंध द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। उत्पादक कुल लाभ को अधिकतम करना चाहता है अतः उद्देश्य फलन अधिकतम

$$Z = 60x + 50y$$

मशीन M_1 व M_2 के लिए व्यवरोधः यह ज्ञात है कि उत्पाद प्रति इकाई P_1 व P_2 के निर्माण के लिए मशीन M_1 पर क्रमशः 1 व 2 घण्टे कार्य करना होता है। अतः x इकाई P_1 व y इकाई P_2 के निर्माण के लिए मशीन M_1 पर कुल कार्य घण्टे $x+2y$ होंगे। साथ ही मशीन M_1 की कुल उपलब्धता 40 घण्टे की ही है

अतः $$x + 2y \le 40$$

इसी प्रकार मशीन M_2 के लिए $$3x + 2y \le 60$$

ऋणेतर व्यवरोधः चूंकि x तथा y निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या है जो कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $$x \ge 0,\ \ y \ge 0$$

अतः प्रदत्त समस्या का गणितीय संरूपण निम्न होगा

अधिकतमीकरण (Maximize) $$Z = 60x + 50y$$

व्यवरोध $$x + 2y \le 40$$
$$3x + 2y \le 60$$

तथा $$x \ge 0, y \ge 0$$

अब हम कुछ पदों को परिभाषित करेंगे जिनका प्रयोग रैखिक प्रोगामन समस्याओं में किया जाता है:

उद्देश्य फलन (Objective function): यदि $c_1, c_2, \ldots, c_n$ अचर तथा $x_1, x_2, \ldots, x_n$ चर हो तो रैखिक फलन $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है, **उद्देश्य फलन** कहलाता है।

उपरोक्त उदाहरण में Z = 60x + 50y एक उद्देश्य फलन है। चर x व y **निर्णायक चर** कहलाते हैं।

व्यवरोध (Constraints): किसी रैखिक प्रोगामन समस्या में प्रयुक्त चरों पर लगी हुई शर्तों को समस्या के व्यवरोध कहते हैं। इन्हें एकघातीय समीकरणों या असमिकाओं के रूप में व्यक्त किया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में $x + 2y \le 40$ तथा $3x + 2y \le 60$ व्यवरोध है। साथ ही $x \ge 0, y \ge 0$ ऋणेतर व्यवरोध (non-negative restriction) कहलाते हैं।

हलः चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिए गए रैखिक प्रोगामन समस्या के व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता है, हल कहलाता है।

सुसंगत हल (Feasible solution): चरों के मानों का एक ऐसा समुच्चय जो दिए गए रैखिक प्रोगामन समस्या के सभी व्यवरोधों के अतिरिक्त ऋणेतर व्यवरोधों को भी संतुष्ट करता हो, सुसगंत हल कहलाता है।

इष्टतम हल (Optimal solution): किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल वह सुसंगत हल है जिसके लिए समस्या के उद्देश्य फलन का मान उच्चतम या निम्नतम होता है।

टिप्पणी: रैखिक प्रोगामन समस्या के 'हल' से तात्पर्य प्रायः इष्टतम हल से ही होता है।

15.04 रैखिक प्रोगामन समस्याओं का हल ज्ञात करने की आलेखीय विधि (Graphical method to solve linear programming problems)

किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने की सबसे आसान विधि आलेखीय विधि है। आलेखीय विधि का उपयोग केवल तभी संभव है जबकि रैखिक प्रोगामन समस्या में केवल दो निर्णायक चर हो।

कोनीय बिन्दु विधि (Corner point method)

यह विधि मूलभूत चरम बिन्दु प्रमेय (Fundamental extreme point theorem) पर आधारित है जिसका कथन निम्न प्रकार है **"किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल, यदि विद्यमान हो, तो समस्या के सभी सुसंगत हलों के समुच्चय से निर्मित अवमुख बहुभुज के एक चरम (कोनीय) बिन्दु पर होता है।"**

एक रैखिक प्रोगामन समस्या जिसमें दो निर्णायक चर हो, को हल करने के लिए कोनीय बिन्दु विधि द्वारा आलेखीय हल किए जाने की क्रियाविधि निम्न हैं–

1. दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण कीजिए यदि यह इस रूप में नहीं दी गई हो।
2. व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है तथा उनके आलेख खींचते है। रैखिक समीकरण का आलेख खींचने के लिए समीकरण में $y=0$ रखकर x- अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात करते है। इसी प्रकार $x=0$ रखते हुए y- अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात करते है। इन दोनों बिन्दुओं को मिलाने पर समीकरण का आलेख प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक असमिका को दर्शाने हेतु क्षेत्र का निर्धारण कीजिये। इस हेतु प्रत्येक असमिका में x तथा y दोनों को शून्य रखते है, यदि असमिका वैध कथन में समानीत होती है तब दी गई असमिका को दर्शाने वाला क्षेत्र वह क्षेत्र होगा जिसमें मूल बिन्दु स्थित है। अन्यथा, दी गई असमिका को दर्शाने वाला क्षेत्र वह क्षेत्र होगा जिसमें मूल बिन्दु स्थित नहीं है।
4. सभी बिन्दुओं को समाहित करने वाला क्षेत्र xy - समतल में प्राप्त करते है जो सभी व्यवरोधों (ऋणेतर व्यवरोध सहित) को एक साथ सन्तुष्ट करता है। इस प्रकार प्राप्त क्षेत्र सुसगंत हल क्षेत्र कहलाता है।
5. इस प्रकार प्राप्त अवमुख बहुभुज के शीर्षो (कोनीय बिन्दुओं) के निर्देशांक ज्ञात करते है।
6. प्रत्येक शीर्ष पर उद्देश्य फलन के मान ज्ञात करते है। वह बिन्दु जहाँ पर उद्देश्य फलन इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान ग्रहण करता है, दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल (optimal solution) कहलाता है।

अब हम 15.03 में लिए गए उदाहरण को आलेखीय विधि से हल करते है जहाँ समस्या निम्न है।–

अधिकतम $Z=60x+50y$

व्यवरोध $x+2y\le 40$

$3x+2y\le 60$

तथा $x\ge 0, y\ge 0$

सर्वप्रथम व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x+2y=40 \qquad (1)$$

$$3x+2y=60 \qquad (2)$$

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर $y=20$

तथा समीकरण (1) में $y=0$ रखने पर $x=40$

अतः दो बिन्दु A (40, 0) तथा B (0, 20) प्राप्त होते है। इसी प्रकार समीकरण (2) में क्रमशः $x=0$ तथा $y=0$ रखने पर बिन्दु C (0, 30) तथा D (20, 0) प्राप्त होते है। बिन्दुओं A तथा B व C तथा D को मिलाने पर रेखाओं (1) व (2) के आलेख प्राप्त होते है।

$x+2y=40$

x	40	0
y	0	20

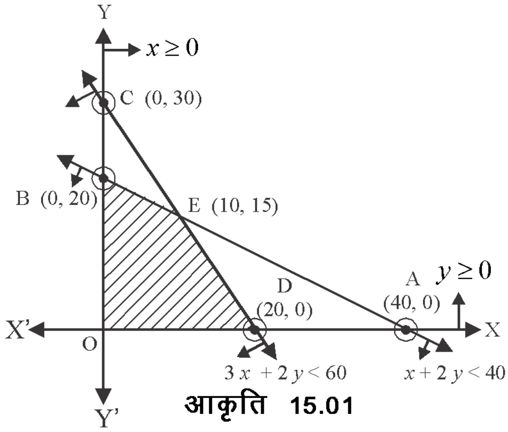
$A(40, 0); B(0,20)$

$3x+2y=60$

x	0	20
y	30	0

$C(0, 30); D(20,0)$

असमिका $x+2y \le 40$ का क्षेत्र निर्धारित करने के लिए x तथा y को शून्य के बराबर रखने पर असमिका $(0)+2(0) \le 40$ सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र भी मूल बिन्दु की ओर होगा। इसी प्रकार असमिका $3x+2y \le 60$ में भी x व y को शून्य के बराबर रखकर जाँच करने पर $3(0)+2(0) = 0 \le 60$ सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र भी मूल बिन्दु की ओर होगा।



आकृति 15.01

छायांकित क्षेत्र ODEB उन सभी संभव हलों का समुच्चय है जो दोनों व्यवरोधों तथा ऋणेत्तर व्यवरोध को एक साथ सन्तुष्ट करते हैं। इस क्षेत्र के बाहर स्थित कोई भी बिन्दु संभावित हल नहीं हो सकता। अब हमारा अगला चरण क्षेत्र ODEB के उन अनगिनत सुसंगत हलों में से एक ऐसे हल को चुनना है, जिससे हमें इष्टतम हल प्राप्त हो सके। सुसंगत हलों के समुच्चय का निरीक्षण करने पर यह स्पष्ट है कि कोई भी ऐसा बिन्दु जो छायांकित क्षेत्र के अन्दर का बिन्दु है, अर्थात् सीमा रेखाओं पर स्थित नहीं है, इष्टतम हल प्रदान नहीं करता है।

उदाहरण के लिए यदि हम क्षेत्र के अन्दर कोई बिन्दु (4,4) ले तो इस बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान $Z = 60\times 4 + 50\times 4 = 240 + 200 = 440$ प्राप्त होता है जबकि छायांकित क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं D(20, 0) E (10, 15) तथा B (0, 20) पर उद्देश्य फलन के मान क्रमशः 1200, 1350 तथा 1000 प्राप्त होते है जो बिन्दु (4,4) पर प्राप्त मान से अधिक ही है।

अतः इष्टतम हल प्रदान करने वाला बिन्दु छायांकित क्षेत्र ODEB की सीमा पर स्थित कोई बिन्दु ही होगा। अब सुसंगत हल क्षेत्र ODEB में कोनीय बिन्दुओं O,D,E व B पर उद्देश्य फलन के मानों को सारणीबद्ध किया जाता है।

कोनीय बिन्दु	x-निर्देशांक	y-निर्देशांक	उदद्देश्य फलन $Z = 60x + 50y$
O	0	0	$Z_0 = 0$
D	20	0	$Z_D = 1200$
E	10	15	$Z_E = 1350$
B	0	20	$Z_B = 1000$

उपरोक्त तालिका से यह स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु E (10, 15) पर सर्वाधिक है अतः कोनीय बिन्दु E के द्वारा प्रदत्त हल ही इष्टतम हल होगा। अधिकतम लाभ के लिए उत्पादक को उत्पाद P_1 की 10 तथा उत्पाद P_2 की 15 इकाईयों का निर्माण करना चाहिए।

टिप्पणीः (i) यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध हो अर्थात् यह एक अवमुख बहुभुज बनाता हो तब अवमुख बहुभुज के कोनीय बिन्दुओं में से किसी एक बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम (माना M) तथा किसी अन्य बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम (माना m) प्राप्त होता है।

(ii) कुछ स्थितियों में यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध अवमुख बहुभुज नहीं होता है अर्थात् यह किसी भी दिशा में अनन्त विस्तृत किया जा सके, तब सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध कहलाता है। यदि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है तो इस हल क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। माना इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः M व m है। अब निम्न दो स्थितियों पर विचार करते हैं–

स्थिति–I: सरल रेखा $Z = ax + by = M$ खींचते है तथा विवृत अर्धतल $ax + by > M$ ज्ञात करते हैं। यदि $ax + by > M$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम मान M है। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान नहीं है।

स्थिति–II: सरल रेखा $Z = ax + by = m$ खींचते है तथा $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल ज्ञात करते है। यदि $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का निम्नतम मान m हैं। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई निम्नतम मान नहीं है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = 5x + 3y$

व्यवरोध $3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।

$$3x + 5y = 15 \quad (1)$$

$$5x + 2y = 10 \quad (2)$$

असमिका $3x + 5y \le 15$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $3x + 5y = 15$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (5, 0) तथा B (0, 3) बिन्दुओं पर मिलती है।

3x + 5y = 15

x	5	0
y	0	3
	A(5, 0),	B (0, 3)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 5(0) = 0 \le 15$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $5x + 2y \le 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $5x + 2y = 10$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C (2,0) तथा D (0,5) बिन्दुओं पर मिलती है।

$5x + 2y = 10$

x	2	0
y	0	5

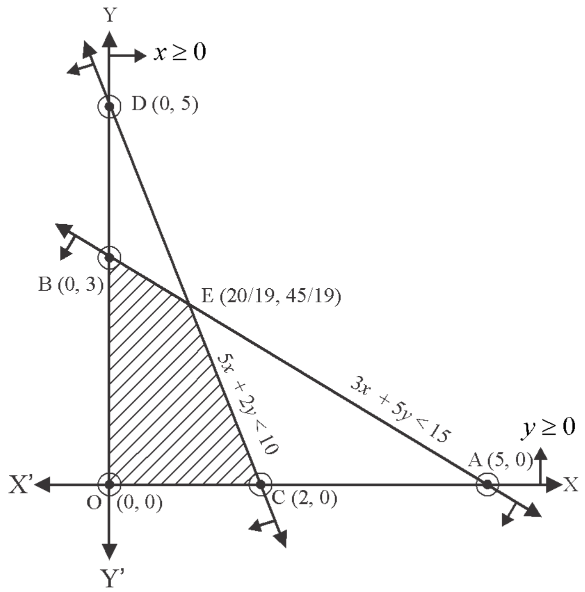
बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0,0) को प्रतिस्थापित करने पर 5 (0) + 2 (0) $= 0 \le 10$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र की दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है।

छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक 0 (0, 0), C(2, 0), $E(20/19,\ 45/19)$ तथा B(0, 3) है। जहाँ बिन्दु E दोनों रेखाओं $3x + 5y = 15$ तथा $5x + 2y = 10$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है।



आकृति 15.02

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 5x + 3y$
O	0	0	$Z_0 = 5(0) + 3(0) = 0$
C	2	0	$Z_C = 5(2) + 3(0) = 10$
E	20 / 19	45 / 19	$Z_E = 5(20/19) + 3(45/19) = 235/19$
B	0	3	$Z_B = 5(0) + 3(3) = 9$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु $E(20/19,\ 45/19)$ पर अधिकतम है। अतः $x = 20/19, y = 45/19$ दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल है तथा अधिकतम मान 235 / 19 है।

उदाहरण-2. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

निम्नतम $\quad Z = 200x + 500y$

व्यवरोध $\quad x + 2y \geq 10$

$3x + 4y \leq 24$

तथा $\quad x \geq 0,\ y \geq 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x + 2y = 10 \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 24 \qquad (2)$$

असमिका $x + 2y \geq 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा x + 2y = 10 निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (10, 0) तथा B (0,5) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + 2y = 10

x	10	0
y	0	5

A (10, 0) ; B (0, 5)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु को प्रतिस्थापित करने पर $(0) + 2(0) = 0 \geq 10$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $3x + 4y \leq 24$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

रेखा $3x + 4y = 24$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(8, 0) तथा D (0, 6) बिन्दुओं पर मिलती है।

3x + 4y = 2y

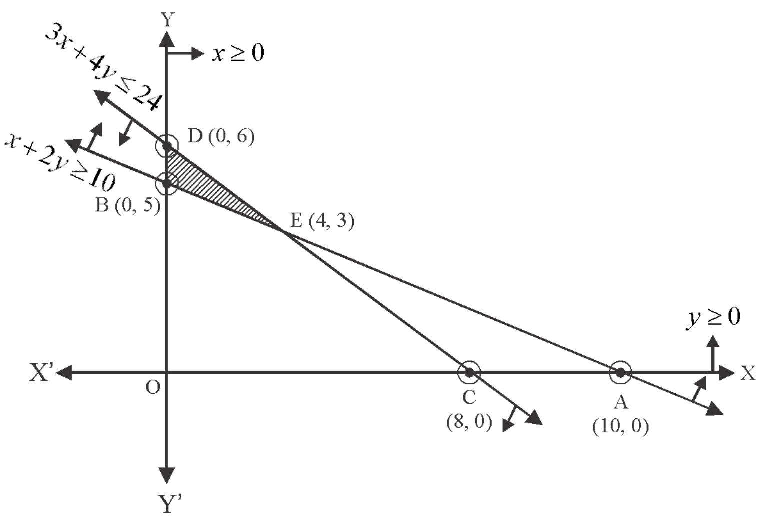
x	8	0
y	0	6

C (8, 0) ; D (0, 6)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 4(0) = 0 \leq 24$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.03

छायांकित क्षेत्र BED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यही क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक B(0, 5), E (4, 3) तथा D (0, 6) है। जहाँ बिन्दु E दोनों रेखाओं 3x + 4y = 24 तथा x + 2y = 10 के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये है–

बिन्दु	***x* निर्देशांक**	***y* निर्देशांक**	**उद्देश्य फलन Z = 200*x* + 500*y***
B	0	5	$Z_B = 200(0) + 500(5) = 2500$
E	4	3	$Z_E = 200(4) + 500(3) = 2300$
D	0	6	$Z_D = 200(0) + 500(6) = 3000$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु E (4, 3) पर निम्नतम है। अतः x = 4, y = 3 दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल है तथा निम्नतम मान 2300 है।

उदाहरण-3. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = y + \frac{3}{4}x$

व्यवरोध $x - y \geq 0$

$-x/2 + y \leq 1$

तथा $x \geq 0, y \geq 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x - y = 0 \quad (1)$$

$$-x/2 + y = 1 \quad (2)$$

असमिका $x - y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ द्वारा प्राप्त बिन्दु निम्न प्रकार है–

x = y

x	0	1
y	0	1

O (0, 0) ; A (1, 1)

बिन्दुओं O तथा A को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। इस असमिका के दाहिने पक्ष में शून्य होने के कारण हम मूल बिन्दु तथा इस रेखा पर स्थित बिन्दुओं के अतिरिक्त कोई भी बिन्दु इस असमिका में प्रतिस्थापित कर हल क्षेत्र ज्ञात करते हैं।

माना बिन्दु (2, 3) है तब $2 - 3 = -1 \geq 0$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है तब असमिका का हल क्षेत्र बिन्दु (2, 3) के विपरीत ओर होगा।

असमिका $-x/2 + y \leq 1$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

असमिका $-x/2 + y = 1$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः B(–2,0) तथा C(0,1) बिन्दुओं पर मिलती है।

$-x/2 + y = 1$

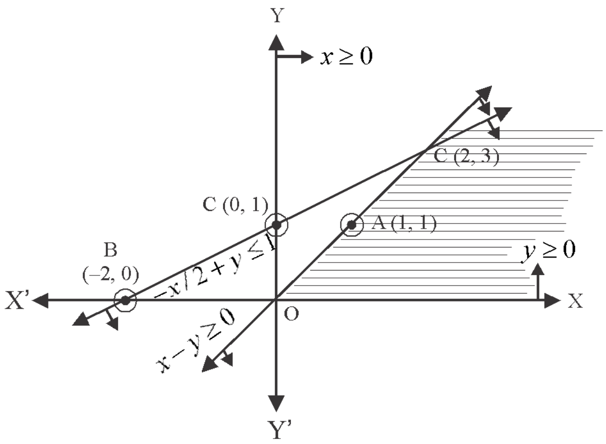
x	–2	0
y	0	1

B(–2, 0) ; C(0, 1)

बिन्दुओं B तथा C को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $-(0)/2+0=0\leq 1$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.04

इस समस्या में सुसंगत क्षेत्र के बिन्दु को समाहित करते हुये उद्देश्य फलन की रेखा को अनिश्चित बढ़ाया जा सकता है। अतः इस समस्या का कोई परिमित अधिकतम मान नहीं है। ऐसी समस्यायें जिनमें उद्देश्य फलन का मान अनिश्चित बढ़ाया जा सकता हो, वह अपरिबद्ध हल वाली समस्यायें कहलाती है।

उदाहरण-4. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $\qquad Z=3x+4y$

व्यवरोध $\qquad x+y\leq 3$

$\qquad 2x+2y\leq 12$

तथा $\qquad x\geq 0,\ y\geq 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x+y=3 \qquad (1)$$

$$2x+2y=12 \qquad (2)$$

असमिका $x + y \leq 3$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=3$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (3, 0) तथा B (0, 3) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 3

x	3	0
y	0	3

A (3, 0) ; B (0, 3)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0+0=0\leq 3$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

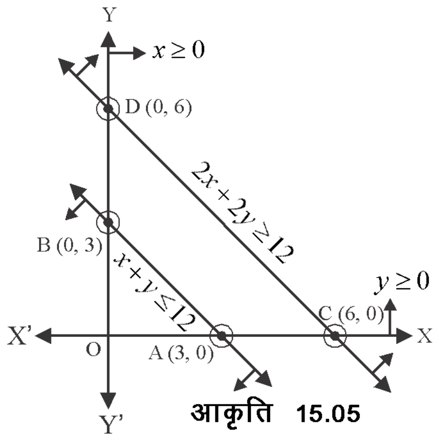
असमिका $2x + 2y \geq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x+2y=12$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(6, 0) तथा D(0, 6) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + 2y = 12

x	6	0
y	0	6

C (6, 0) ; D (0, 6)



आकृति 15.05

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0)+2(0)=0\ngeq 12$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या के आलेख से स्पष्ट है कि ऐसा कोई बिन्दु अथवा क्षेत्र नहीं है जो दिये गये सभी व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता हो अर्थात् सुसंगत हल क्षेत्र रिक्त है। अतः दी गई समस्या का कोई सुसंगत हल नहीं है।

उदाहरण-5. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = 2x + 3y$

व्यवरोध $4x + 6y \le 60$

$2x + y \le 20$

तथा $x \ge 0, \ \ y \ge 0$

हल: व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$4x + 6y = 60 \qquad (1)$$

$$2x + y = 20 \qquad (2)$$

असमिका $4x + 6y \le 60$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $4x + 6y = 60$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (15, 0) तथा B(0,10) बिन्दुओं पर मिलती है।

4x + 6y = 60

x	15	0
y	0	10

A(15, 0) ; B (0, 10)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $4(0) + 6(0) = 0 \le 60$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $2x + y \le 20$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $2x + y = 20$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(10, 0) तथा D(0, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + y = 20

x	10	0
y	0	20

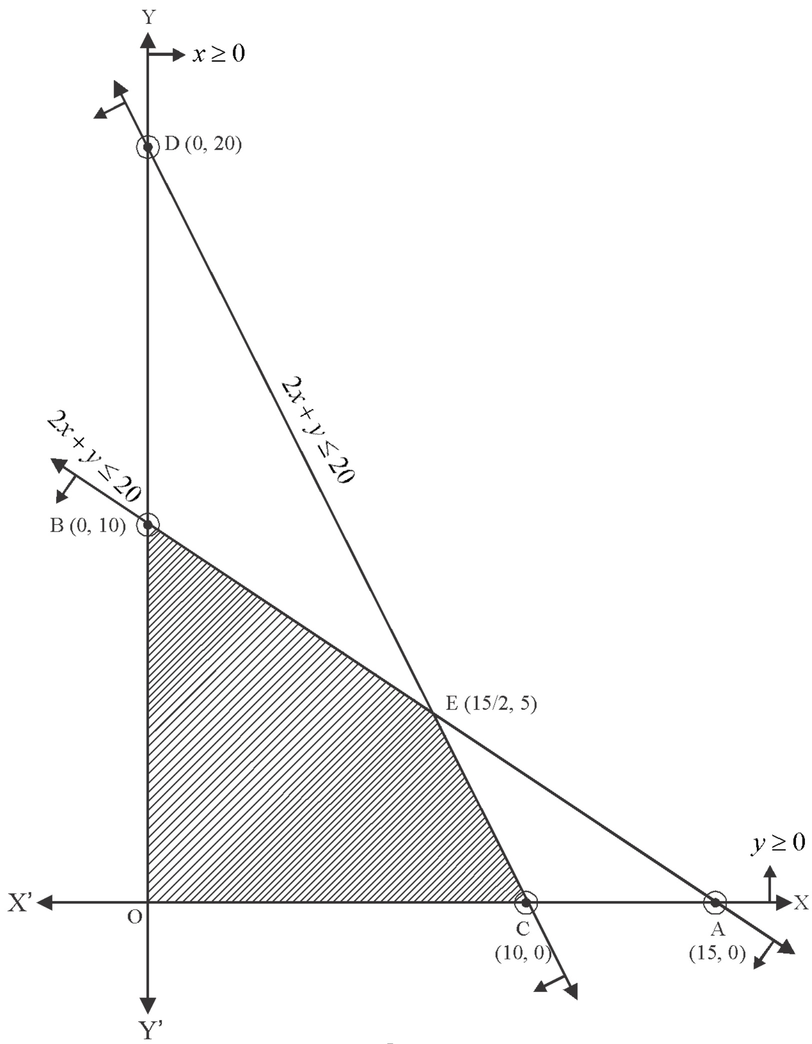
C (10, 0) ; D (0, 20)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + (0) = 0 \le 20$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O(0, 0), C (10, 0), $E(15/2, 5)$ तथा B (0, 10) है।



आकृति 15.06

जहाँ बिन्दु E को दोनों रेखाओं $2x+y=20$ तथा $4x+6y=60$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया गया है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	***x* निर्देशांक**	***y* निर्देशांक**	**उद्देश्य फलन $Z = 2x + 3y$**
O	0	0	$Z_O = 2(0) + 3(0) = 0$
C	10	0	$Z_C = 2(10) + 3(0) = 20$
E	15 / 2	5	$Z_E = 2(15/2) + 3(5) = 30$
B	0	10	$Z_B = 2\,(0) + 3(10) = 30$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान दो कोनीय बिन्दुओं $E(15/2,\ 5)$ तथा $B(0,\ 10)$ पर अधिकतम प्राप्त होता है। उद्देश्य फलन का यही अधिकतम मान बिन्दुओं E तथा B को मिलाने वाले रेखाखण्ड के प्रत्येक बिन्दु पर भी प्राप्त होता है। अतः इस समस्या के अनन्त हल है।

टिप्पणीः इस समस्या के अनन्त हल होने के कारण उद्देश्य फलन रेखा $Z=2x+3y$ का व्यवरोध रेखा $4x+6y=60$ के समान्तर होना है।

प्रश्नमाला 15.1

निम्न रैखिक प्रोगामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

1. निम्नतम $Z=-3x+4y$
   व्यवरोध $x+2y\le 8$
   $3x+2y\le 12$
   तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
2. अधिकतम $Z=3x+4y$
   व्यवरोध $x+y\le 4$
   तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
3. निम्नतम $Z=-50x+20y$
   व्यवरोध $2x-y\ge -5$
   $3x+y\ge 3$
   $2x-3y\le 12$
   तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
4. निम्नतम $Z=3x+5y$
   व्यवरोध $x+3y\ge 3$
   $x+y\ge 2$
   तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
5. निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
   जहाँ $Z=3x+9y$
   व्यवरोध $x+3y\le 60$
   $x+y\ge 10$
   तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$

6. निम्नतम $Z = x + 2y$

व्यवरोध $2x + y \geq 3$

$x + 2y \geq 6$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

7. निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

जहाँ $Z = 5x + 10y$

व्यवरोध $x + 2y \leq 120$

$x + y \geq 60$

$x - 2y \geq 0$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

8. अधिकतम $Z = x + y$

व्यवरोध $x - y \leq -1$

$-x + y \leq 0$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

9. निम्नतम $Z = 3x + 2y$

व्यवरोध $x + y \geq 8$

$3x + 5y \leq 15$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

10. अधिकतम $Z = -x + 2y$

व्यवरोध $x \geq 3$

$x + y \geq 5$

$x + 2y \geq 6$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

15.05 रैखिक प्रोगामन समस्या के विभिन्न प्रकार (Different types of linear programming problem)

इस अनुच्छेद में हम कुछ महत्वपूर्ण प्रकार की रैखिक प्रोगामन समस्याओं जैसे–आहार सम्बन्धी समस्याओं, उत्पादन सम्बन्धी समस्याओं तथा परिवहन समस्याओं का संरूपण तथा हल प्रस्तुत करेंगे।

आहार सम्बन्धी समस्याएँ

इस प्रकार की समस्याओं में हम यह ज्ञात करते है कि विभिन्न प्रकार के संघटको/पोषक तत्वों का समावेश आहार में किस मात्रा में किया जाये जिससे उसमें सभी पोषक तत्वों/संघटकों की न्यूनतम आवश्यक मात्रा कम से कम लागत पर प्राप्त हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. एक मनुष्य को सन्तुलित भोजन के लिये दो प्रकार के विटामिन (विटामिन A व विटामिन B) की निश्चित मात्राओं में आवश्यकता होती है। ये विटामिन दो भिन्न–भिन्न प्रकार की खाद्य सामग्रियों (F_1 व F_2) में मिलते है। प्रत्येक खाद्य सामग्री की एक इकाई में विद्यमान विटामिनों की इकाइयों की संख्या, सन्तुलित भोजन के लिये उसकी न्यूनतम आवश्यकता व खाद्य सामग्रियों का प्रति इकाई मूल्य निम्नलिखित तालिका में दिया जाता है–

माना अनुकूलतम हल के लिए उत्पाद P_1 व P_2 की वांछित निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या क्रमशः x व y है। अब समस्या में दिए हुए आँकड़ों को निम्न तालिका के रूप में व्यक्त करते है–

तालिका

विटामिन	खाद्य सामग्री		दैनिक आवश्यकता
	F_1	F_2	
A	2	4	40
B	3	2	50
प्रति इकाई मूल्य (रू. में)	3	2.5	

दोनों खाद्य सामग्रियों की कितनी–कितनी इकाईयों का प्रयोग किया जाये ताकि न्यूनतम मूल्य में सन्तुलित भोजन के लिए विटामिन की न्यूनतम आवश्यक मात्रा अवश्य प्राप्त हो सके?

हल: माना विटामिनों की न्यूनतम आवश्यक मात्रा की पूर्ति के लिए खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई व खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई की आवश्कता होती है। तब खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई का मूल्य क्रमशः ₹ $3x$ तथा ₹ $2.5y$ होगा। अतः मिश्रित खाद्य सामग्री का कुल मूल्य ₹ $3x + 2.5y$ होगा जिसका निम्नतम मान ज्ञात करना है।

उद्देश्य फलन निम्नतम $Z = 3x + 2.5y$

विटामिन A के लिए व्यवरोध: खाद्य सामग्री F_1 व F_2 की प्रति इकाई से क्रमशः 2 व 4 इकाई विटामिन A की प्राप्ति होती है। अतः खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई से कुल विटामिन A की प्राप्ति $2x + 4y$ होगी। निश्चित ही यह मात्रा न्यूनतम आवश्यक मात्रा के बराबर या उससे अधिक होनी चाहिये। अतः $2x + 4y \geq 40$

विटामिन B के लिये व्यवरोध: खाद्य सामग्री F_1 व F_2 की प्रति इकाई से क्रमशः 3 व 2 इकाई विटामिन B की प्राप्ति होती है। अतः खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई से कुल विटामिन B की प्राप्ति $3x + 2y$ होगी। निश्चित ही यह मात्रा न्यूनतम आवश्यक मात्रा के बराबर या उससे अधिक होनी चाहिये। अतः $3x + 2y \geq 50$

चूँकि आवश्यक खाद्य सामग्री की इकाईयों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है, अतः ऋणेतर व्यवरोध

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न होगा–

निम्नतम $Z = 3x + 2.5y$

व्यवरोध $2x + 4y \geq 40$

$3x + 2y \geq 50$

तथा $x \geq 0, \quad y \geq 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$2x + 4y = 40 \qquad (1)$$

$$3x + 2y = 50 \qquad (2)$$

असमिका $2x + 4y \geq 40$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

रेखा $2x + 4y = 40$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(20, 0) तथा B(0, 10) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + 4y = 40

x	20	0
y	0	10

A(20, 0) ; B (0, 10)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + 4(0) = 0 \geq 40$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $3x + 2y \geq 50$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

असमिका $3x + 2y \geq 50$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः $C(50/3, 0)$ तथा D (0, 25) बिन्दुओं पर मिलती है।

$3x + 2y = 50$

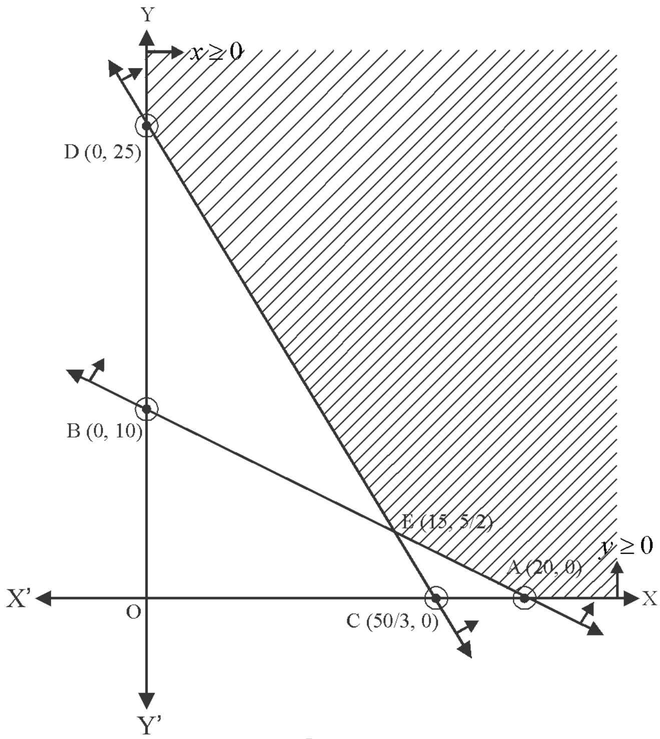
x	50/3	0
y	0	25

$C(50/3, 0)$; D (0, 25)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0)+2(0)=0 \geq 50$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.07

छायांकित क्षेत्र AED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अपरिबद्ध सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक A (20, 0) ; $E(15, 5/2)$ तथा D (0, 25) है। जहाँ बिन्दु E को दोनों रेखाओं $2x+4y=40$ व $3x+2y=50$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया गया है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 3x + 2.5y$
A	20	0	$Z_A = 3(20) + 2.5(0) = 60$
E	15	5 / 2	$Z_E = 3(15) + 2.5\ (5/2) = 51.25$
D	0	25	$Z_D = 3(0) + 2.5\ (25) = 62.5$

सारणी में बिन्दु $E(15, 5/2)$ पर उद्देश्य फलन का मान निम्नतम ₹ 51.25 है। चूँकि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है अतः हमें $3x+2.5y<51.25$ का आलेख खींचना पड़ेगा। असमिका $3x+2.5y<51.25$ द्वारा निर्धारित परिणामी खुला अर्धतल, सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं रखता है। अतः बिन्दु $E(15, 5/2)$ पर दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का निम्नतम मान ₹ 51.25 है। अतः अनुकूलतम हल के लिए खाद्य सामग्री F_1 की 15 इकाई व खाद्य सामग्री F_2 की 2.5 इकाई लेनी चाहिये।

उत्पादन सम्बन्धी समस्याएँ

इस प्रकार की समस्याओं में हमें विभिन्न उत्पादों की संख्या ज्ञात करनी होती है जोकि एक उत्पादक द्वारा उत्पादित कर बेची जाए जबकि उत्पादों की इकाईयों को उत्पादित करने में एक निश्चित जनशक्ति, यांत्रिक समय, प्रत्येक इकाई के उत्पादन में खर्च, श्रमिक समय, गोदाम में उत्पाद भंड़ारण के लिए स्थान आदि को दृष्टिगत रखते हुए अधिकतम लाभ कमाया जा सके।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक फर्म दो तरह के विद्युत उपकरणों A तथा B का उत्पादन करती है। A तथा B की प्रति इकाई पर लाभ क्रमशः ₹ 20 व ₹ 30 है। उपकरण A की प्रति इकाई में 3 मोटर व 2 ट्रांसफॉर्मर और उपकरण B की प्रति इकाई में 2 मोटर व 4 ट्रांसफॉर्मर लगाने आवश्यक है। एक महीने में कुल 210 मोटर और 300 ट्रांसफॉर्मर प्राप्त किये जा सकते हैं। उपकरण B, जो निर्यात मॉडल है, की प्रत्येक इकाई में वोल्टता स्थिर रखने का एक यन्त्र लगाना आवश्यक है। ऐसे यन्त्र 1 मास में 65 प्राप्त किये जा सकते है। अधिकतम लाभ के लिये रैखिक प्रोगामन समस्या का सूत्रीकरण कीजिए और रेखाचित्र द्वारा इसका हल ज्ञात कीजिये।

हलः माना अधिकतम लाभ के लिए फर्म उपकरणों A तथा B की क्रमशः x तथा y इकाईयों का निर्माण करती है। उपकरणों A तथा B की प्रति इकाई पर लाभ क्रमशः ₹ 20 व ₹ 30 है। अतः उपकरणों A तथा B की क्रमशः x तथा y इकाइयों से प्राप्त लाभ $= 20x + 30y$

अतः उद्देश्य फलन अधिकतम $\quad Z = 20x + 30y$

मोटर के लिये व्यवरोध

उपकरण A की x इकाईयों तथा उपकरण B की y इकाईयों के निर्माण के लिए क्रमशः $3x$ व $2y$ मोटरों की आवश्यकता होगी। एक महीने में कुल 210 मोटर प्राप्त की जा सकती है अतः

$$3x + 2y \le 210$$

ट्रांसफॉर्मर के लिये व्यवरोध

उपकरण A की x इकाइयों तथा उपकरण B की y इकाइयों के निर्माण के लिए क्रमशः $2x$ व $4y$ ट्रांसफॉर्मरों की आवश्यकता होगी। तथा एक महीने में कुल 300 ट्रांसफॉर्मर प्राप्त किये जा सकते है। अतः

$$2x + 4y \le 300$$

वोल्टता स्थिर रखने का यन्त्र केवल उपकरण B में लगाया जाता है तथा ऐसे यंत्र एक मास में 65 प्राप्त किये जा सकते है। अतः $y \le 65$ निर्मित इकाइयों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $\quad x \ge 0, \; y \ge 0$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है।

अधिकतम $\quad Z = 20x + 30y$

व्यवरोध $\quad 3x + 2y \le 210$

$$2x + 4y \le 300$$

$$y \le 65$$

तथा $\quad x \ge 0, \; y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$3x + 2y = 210 \qquad (1)$$

$$2x + 4y = 300 \qquad (2)$$

$$y = 65 \qquad (3)$$

असमिका $3x + 2y \le 210$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $3x + 2y = 210$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(70, 0) तथा B(0, 105) बिन्दुओं पर मिलती है।

3x + 2y = 210

x	70	0
y	0	105

A (70, 0) ; B (0, 105)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0)+2(0)=0\le 210$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $2x + 4y \le 300$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x+4y=300$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(150, 0) तथा D(0, 75) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + 4y = 300

x	150	0
y	0	75

C (150, 0) ; D (0, 75)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0)+4(0)=0\le 300$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \le 65$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x+y=65$ बिन्दुओं E (5, 65) तथा F(10, 65) पर मिलती है।

0x + y = 65

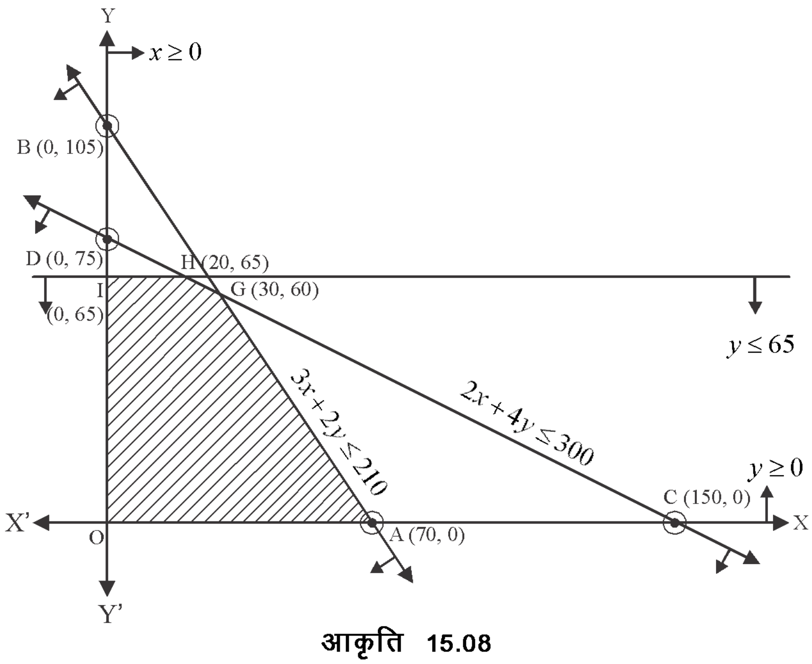
x	5	10
y	65	65

E (5, 65) ; F (10, 65)

बिन्दुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0\le 65$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\ge 0$ तथा $y\ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.08

छायांकित क्षेत्र OAGHI उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O(0,0), A(70,0), G(30, 60), H (20, 65) तथा I(0, 65) है। जहाँ बिन्दुओं G तथा H को क्रमशः रेखाओं $2x+4y=300$ व $3x+2y=210$ तथा रेखाओं $y=65$ व $2x+4y=300$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किये जाते है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 20x + 30y$
O	0	0	$Z_O = 20(0) + 30(0) = 0$
A	70	0	$Z_A = 20(70) + 30(0) = 1400$
G	30	60	$Z_G = 20(30) + 30(60) = 2400$
H	20	65	$Z_H = 20(20) + 30(65) = 2350$
I	0	65	$Z_I = 20(0) + 30(65) = 1950$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु G(30, 60) पर अधिकतम है। अतः अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये उपकरण A की 30 तथा उपकरण B की 60 इकाइयों का निर्माण किया जाना चाहिए जिससे अधिकतम लाभ ₹ 2400 प्राप्त हो सके।

परिवहन सम्बन्धी समस्याएँ–

इस प्रकार की समस्याओं में हमें वस्तुओं को विभिन्न संयंत्रों या कारखानों से विभिन्न स्थानों पर स्थित विभिन्न बाजारों में प्रत्येक बाजार की मांग तथा प्रत्येक संयंत्र या कारखाने के लिए आपूर्ति को ध्यान में रखते हुए परिवहन प्रारूप ज्ञात करना होता है ताकि परिवहन लागत न्यूनतम हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. P व Q दो स्थानों पर कारखाने स्थापित है। इन कारखानों से A, B तथा C पर स्थित तीन ड़िपों में वस्तुएँ भेजी जाती है। इन डिपों की साप्ताहिक आवश्यकताएँ क्रमशः 5, 5 व 4 इकाइयों की है। जबकि P तथा Q कारखानों की उत्पादन क्षमता क्रमशः 8 व 6 इकाईयाँ है। प्रति इकाई परिवहन लागत नीचे सारणीबद्ध है।

को / से	लागत (₹ में)		
	A	B	C
P	16	10	15
Q	10	12	10

वस्तुओ की कितनी इकाईयाँ प्रत्येक कारखाने से प्रत्येक डिपो को भिजवाई जानी चाहिए जिससे परिवहन लागत न्यूनतम हो। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए हल कीजिये।

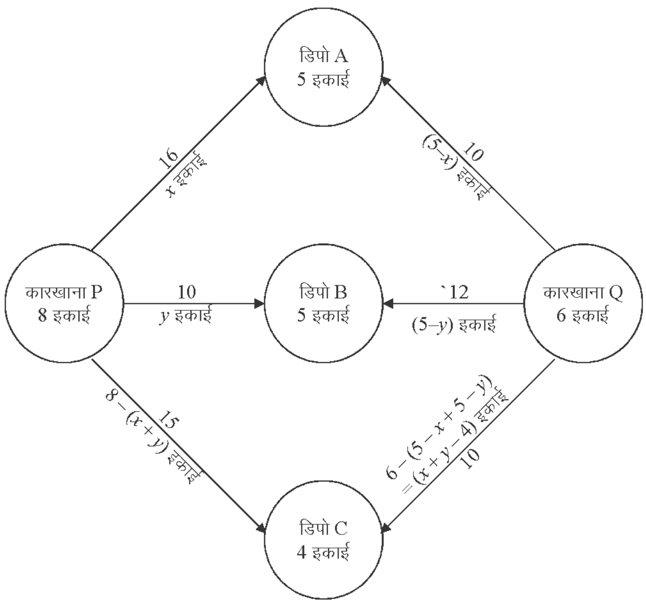
हलः इस समस्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

माना P पर स्थित कारखाना, A तथा B पर स्थित ड़िपो को क्रमशः वस्तुओं की x तथा y इकाइयाँ भेजता है। चूँकि कारखाने P की उत्पादन क्षमता 8 इकाई की है अतः शेष $(8 - x - y)$ इकाइयाँ डिपो C को भेजी जायेगी। चूँकि आवश्यकताएँ कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है अतः

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{तथा} \quad 8 - x - y \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{तथा} \quad x + y \leq 8$$

A पर स्थित डिपो की साप्ताहिक आवश्यकता 5 इकाई की है तथा कारखाने P से वस्तु की x इकाई का परिवहन कर दिया गया है अतः शेष $(5 - x)$ इकाईयों का परिवहन कारखाने Q से किया जाना है। इसी प्रकार B पर स्थित डिपो को कारखाने Q से $(5 - y)$ इकाइयों का परिवहन किया जायेगा। परन्तु कारखाने Q की उत्पादन क्षमता केवल 6 इकाइयों की है अतः



आकृति 15.09

शेष $6-(5-x+5-y)=(x+y-4)$ इकाइयों का परिवहन डिपो C को किया जाएगा। चूँकि डिपो A, B तथा C की आवश्यकताएँ ऋणात्मक नहीं हो सकती है,

अतः $5-x \geq 0, \quad 5-y \geq 0$ तथा $x+y-4 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \leq 5, \quad y \leq 5$ तथा $x+y \geq 4$

कारखाने P से डिपो A, B व C के लिये परिवहन लागत क्रमशः $16x$, $10y$ तथा $15(8-x-y)$ है। इसी प्रकार कारखाने Q से डिपो A, B व C के लिये परिवहन लागत क्रमशः $10(5-x)$, $12(5-y)$ तथा $10(x+y-4)$ है। अतः कुल परिवहन लागत निम्न है–

$$Z = 16x+10y+15(8-x-y)+10(5-x)+12(5-y)+10(x+y-4)$$

$$Z = x-7y+190$$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

निम्नतम $Z = x-7y+190$

व्यवरोध $x+y \leq 8$

$x+y \geq 4$

$x \leq 5$

$y \leq 5$

तथा $x \geq 0, \quad y \geq 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x+y=8 \tag{1}$$

$$x+y=4 \tag{2}$$

$$x=5 \tag{3}$$

$$y=5 \tag{4}$$

असमिका $x + y \leq 8$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=8$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (8, 0) तथा B (0, 8) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 8

x	8	0
y	0	8

A (8, 0) ; B (0, 8)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $(0)+(0) \leq 8$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x + y \geq 4$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=4$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(4, 0) तथा D(0, 4) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 4

x	4	0
y	0	4

C(4, 0) ; D(0, 4)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $(0)+(0)=0 \geq 4$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $x \leq 5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + 0y = 5$ बिन्दुओं E (5, 5) तथा F(5, 10) पर मिलती है।

x + 0y = 5

x	5	5
y	5	10

E(5, 5) ; F(5, 10)

बिन्दुओं E व F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \leq 5$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \leq 5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x + y = 5$ बिन्दुओं G(5, 5) तथा H(10, 5) पर मिलती है।

0x + y = 5

x	5	10
y	5	5

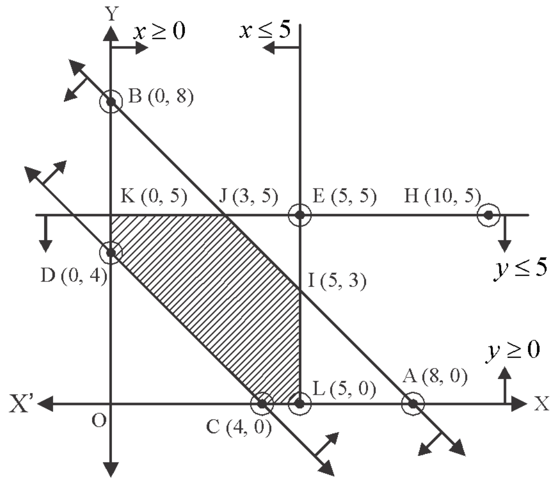
G(5, 5) ; H(10, 5)

बिन्दुओं G व H को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \leq 5$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र CLIJKD उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक C(4, 0); L(5, 0); I(5, 3); J(3, 5); K(0, 5) व D(0, 4) है। जहाँ बिन्दुओं I तथा J क्रमशः रेखाओं $x = 5$ व $x + y = 8$ तथा रेखाओं $y = 5$ व $x + y = 8$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किए जाते है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।



आकृति 15.10

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = x - 7y + 190$
C	4	0	$Z_C = (4) - 7(0) + 190 = 194$
L	5	0	$Z_L = (5) - 7(0) + 190 = 195$
I	5	3	$Z_I = (5) - 7(3) + 190 = 174$
J	3	5	$Z_J = (3) - 7(5) + 190 = 158$
K	0	5	$Z_K = (0) - 7(5) + 190 = 155$
D	0	4	$Z_D = (0) - 7(4) + 190 = 162$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु K(0, 5) पर निम्नतम प्राप्त होता है।

अतः इष्टतम परिवहन नीति कारखाने P व Q से डिपो A,B व C को क्रमशः 0, 5 व 3 इकाईयाँ तथा 5, 0 व 1 इकाई भिजवाने की होगी तथा इस अवस्था में न्यूनतम लागत ₹ 155 होगी।

प्रश्नमाला 15.2

1. एक आहार विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि प्राप्त मिश्रण में विटामिन A की कम से कम 8 इकाई तथा विटामिन C की कम से कम 10 इकाई विद्यमान हो। भोज्य I में विटामिन A, 2 इकाई प्रति किलोग्राम तथा विटामिन C, 1 इकाई प्रति किलोग्राम विद्यमान है जबकि भोज्य II में विटामिन A, 1 इकाई प्रति किलोग्राम में तथा विटामिन C, 2 इकाई प्रति किलोग्राम विद्यमान है। भोज्य I व II को प्रति किलोग्राम खरीदने की लागत क्रमशः ₹ 5 व ₹ 7 है। इस प्रकार के मिश्रण की निम्नतम लागत ज्ञात कीजिये। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए हल कीजिए।
2. एक गृहिणी दो प्रकार के भोज्यों X तथा Y को एक साथ इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन A, B तथा C की क्रमशः कम से कम 10, 12 तथा 8 इकाइयाँ विद्यमान हो। एक किलोग्राम भोज्य में विटामिन संयोजन निम्न प्रकार है–

	विटामिन A	विटामिन B	विटामिन C
भोज्य X	1	2	3
भोज्य Y	2	2	1

भोज्य X तथा Y के एक किलोग्राम की कीमत क्रमशः ₹ 6 व ₹ 10 है। इस प्रकार के भोज्य मिश्रण की न्यूनतम कीमत ज्ञात कीजिये।

3. एक प्रकार के केक को बनाने के लिए 300 ग्राम आटा तथा 15 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है, जबकि दूसरे प्रकार के केक को बनाने के लिए 150 ग्राम आटा तथा 30 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है। यह मानते हुए कि केकों को बनाने के लिये अन्य सामग्री की कमी नहीं है, 7.5 किलोग्राम आटे तथा 600 ग्राम वसा से बनाये जा सकने वाले केकों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिये। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए आलेखीय विधि से हल कीजिये।
4. एक निर्माता औद्योगिक यंत्रों के लिए नट और बोल्ट का उत्पादन करता है। एक पैकेट नटों के उत्पादन के लिए यंत्र A पर 1 घण्टा तथा यंत्र B पर 3 घण्टे काम करना पड़ता है जबकि एक पैकेट बोल्टों के उत्पादन के लिए यंत्र A पर 3 घण्टे तथा यंत्र B पर 1 घण्टा काम करना पड़ता है। निर्माता नटों तथा बोल्टों के प्रति पैकेट पर लाभ क्रमशः ₹ 2.50 तथा ₹ 1 कमाता है। यदि वह प्रतिदिन अपने यंत्रों को अधिकतम 12 घण्टे संचालित करता हो तो प्रत्येक (नट और बोल्ट) के कितने पैकेट उत्पादित किए जाने चाहिए ताकि वह अधिकतम लाभ अर्जित कर सके। समस्या का गणितीय संरूपण कर हल कीजिये।
5. एक व्यापारी पंखे तथा सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है। उसके पास निवेश करने के लिए केवल ₹ 5760 है तथा अधिकतम 20 वस्तुओं को रखने के लिए ही स्थान उपलब्ध है। एक पंखे तथा सिलाई मशीन की कीमत क्रमशः ₹ 360 व ₹ 240 है। वह एक पंखे तथा एक सिलाई मशीन को बेचने पर क्रमशः ₹ 22 व ₹ 18 लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि व्यापारी जितनी वस्तुएँ खरीदता है वे सभी वस्तुएँ वह बेच सकता है अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए उसे कितने पंखे तथा सिलाई मशीने खरीदनी चाहिए। समस्या का गणितीय संरूपण कर हल कीजिए।
6. एक कारखाना दो प्रकार के पेचों A तथा B का उत्पादन करता है। प्रत्येक के उत्पादन के लिए दो प्रकार के यंत्रों – स्वचालित तथा हस्तचालित की आवश्यकता होती है। एक पैकेट पेचों A के उत्पादन में 4 मिनट स्वचालित तथा 6 मिनट हस्तचालित मशीन तथा एक पैकेट पेचों B के उत्पादन में 6 मिनट स्वचालित तथा 3 मिनट हस्तचालित मशीन का कार्य होता है। प्रत्येक मशीन किसी भी दिन के लिये अधिकतम 4 घण्टे कार्य के लिए उपलब्ध है। निर्माता पेच A के प्रत्येक पैकेट पर 70 पैसे तथा पेच B के प्रत्येक पैकेट पर 1 रू. का लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि कारखाने में निर्मित सभी पेचों के पैकेट बिक जाते है, निर्माता को प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार के कितने पैकेट बनाने चाहिये जिसेस अधिकतम लाभ अर्जित हो सके।
7. एक फर्म प्लाईवुड़ के अनूठे स्मृति चिन्ह का निर्माण करती है। A प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 5 मिनट काटने तथा 10 मिनट जोड़ने में लगते है। B प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 8 मिनट काटने तथा 8 मिनट जोड़ने में लगते है। काटने तथा जोड़ने के लिये कुल समय क्रमशः 3 घण्टे 20 मिनट तथा 4 घण्टे उपलब्ध है। फर्म को प्रत्येक A प्रकार के स्मृति चिन्ह पर ₹ 5 तथा प्रत्येक B प्रकार के स्मृति चिन्ह पर ₹ 6 का लाभ होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए फर्म को प्रत्येक प्रकार के कितने–कितने स्मृति चिन्हों का निर्माण करना चाहिये।
8. एक किसान के पास दो प्रकार के उर्वरक F_1 व F_2 है। उर्वरक F_1 में 10% नाइट्रोजन तथा 6% फॉस्फोरिक अम्ल है। जबकि उर्वरक F_2 में 5% नाइट्रोजन तथा 10% फॉस्फोरिक अम्ल है। मिट्टी की स्थितियों का परीक्षण करने के बाद किसान पाता है कि उसे अपनी फसल के लिए कम से कम 14 किलोग्राम नाइट्रोजन तथा कम से कम 14 किलोग्राम फॉस्फोरिक अम्ल की आवश्यकता है। यदि उर्वरक F_1 की कीमत 60 पैसे प्रति किलोग्राम तथा उर्वरक F_2 की कीमत 40 पैसे प्रति किलोग्राम हो तो न्यूनतम मूल्य पर वांछित पोषक तत्वों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक उर्वरक की कितनी किलोग्राम मात्रा उपयोग में लाई जानी चाहिये।

9. एक व्यापारी दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर – एक डेस्कटॉप प्रतिरूप तथा एक पोर्टेबल प्रतिरूप जिनकी कीमतें क्रमशः ₹ 25,000 तथा ₹ 40,000 होगी, बेचने की योजना बनाता है। वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटरों की कुल मासिक मांग 250 इकाइयों से अधिक नहीं होगी। प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटरों की इकाइयों की संख्या ज्ञात कीजिये जिसे व्यापारी अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए भण्ड़ारण करें यदि उसके पास निवेश करने के लिए ₹ 70 लाख से अधिक नहीं है तथा यदि व्यापारी का डेस्कटॉप प्रतिरूप पर लाभ ₹ 4500 तथा पोर्टेबल प्रतिरूप पर लाभ ₹ 5000 हो।

10. दो अन्न भण्ड़ारों A तथा B की भण्डारण क्षमता क्रमशः 100 क्विण्टल तथा 50 क्विण्टल है। उन्हें तीन राशन की दुकानों D, E तथा F पर अन्न उपलब्ध करवाना है, जिनकी आवश्यकताएँ क्रमशः 60, 50 तथा 40 क्विण्टल है। भण्डारों से दुकानों को प्रति क्विण्टल परिवहन लागत निम्न सारणी में दी गई है :

से / को	प्रति क्विण्टल परिवहन लागत (₹ में)	
	A	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

परिवहन लागत के निम्नतमीकरण के लिये आपूर्ति का परिवहन कैसे किया जाए?

विविध उदाहरण

उदाहरण-9. एक फर्म दो प्रकार के चमड़े के बेल्ट A प्रकार व B प्रकार के बनाती है। बेल्ट A सर्वोत्तम श्रेणी का है तथा बेल्ट B निम्न श्रेणी का है। A व B प्रकार के प्रत्येक बेल्ट से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹ 2 व ₹ 1.50 है। A प्रकार के एक बेल्ट को बनाने में B प्रकार के बेल्ट की अपेक्षा दुगुना समय लगता है। यदि सभी बेल्ट B प्रकार के हो तो फर्म प्रतिदिन 1000 बेल्ट बना सकती है। परन्तु 800 बेल्ट प्रतिदिन (A तथा B दोनों को शामिल करते हुए) के लिए ही चमड़ा उपलब्ध है। बेल्ट A में एक फैन्सी बकल की आवश्यकता है तथा केवल 400 फैन्सी बकल प्रतिदिन उपलब्ध है। B प्रकार के बेल्ट के लिए केवल 700 बकल प्रतिदिन उपलब्ध है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए फर्म को दोनों प्रकार के कितने बेल्ट बनाने चाहिए?

हल: माना फर्म A प्रकार के x तथा B प्रकार के y बेल्ट बनाती है। A व B प्रकार के प्रत्येक बेल्ट से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹2 व ₹ 1.50 है। अतः उद्देश्य फलन

अधिकतम $Z = 2x + 1.50y$

यदि सभी बेल्ट B प्रकार के हो तो फर्म प्रतिदिन 1000 बेल्ट बना सकती है। अतः B प्रकार के y बेल्टों को बनाने में लगा समय $= \dfrac{y}{1000}$

चूंकि A प्रकार के बेल्ट को बनाने में B प्रकार के बेल्ट की अपेक्षा दुगुना समय लगता है अतः A प्रकार के x बेल्टों को बनाने में लगा समय $= \dfrac{x}{500}$

$$\frac{x}{500} + \frac{y}{1000} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + y \le 1000$$

चमड़े की आपूर्ति केवल 800 बेल्ट प्रतिदिन के लिए ही पर्याप्त है। अतः

$$x + y \le 800$$

चूँकि A प्रकार के बेल्टों के लिए 400 तथा B प्रकार के बेल्टों के लिए 700 बकल उपलब्ध है।

अतः $x \le 400, \quad y \le 700$

बनाए गए बेल्टों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $x \ge 0, \quad y \ge 0$

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

अधिकतम $Z = 2x + 1.50y$

व्यवरोध $2x + y \le 1000$

$x + y \le 800$

$x \le 400$

$y \le 700$

तथा $x,\ y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$2x + y = 1000$ (1)

$x + y = 800$ (2)

$x = 400$ (3)

$y = 700$ (4)

असमिका $2x + y \le 1000$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x + y = 1000$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (500, 0) तथा B(0, 1000) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + y = 1000

x	500	0
y	0	1000

A (500, 0) ; B (0, 1000)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + (0) = 0 \le 1000$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x + y \le 800$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + y = 800$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(800, 0) तथा D (0, 800) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 800

x	800	0
y	0	800

C (800, 0) ; D(0, 800)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 800$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x \le 400$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + 0y = 400$ बिन्दुओं E(400, 10) तथा F(400, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + 0y = 400

x	400	400
y	10	20

E (400, 10) ; F(400, 20)

बिन्दुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है असमिका में मूल बिन्प्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \le 400$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \leq 700$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x + y = 700$ बिन्दुओं G (10, 700) तथा H(20, 700) पर मिलती है।

$0x + y = 700$

x	10	20
y	700	700

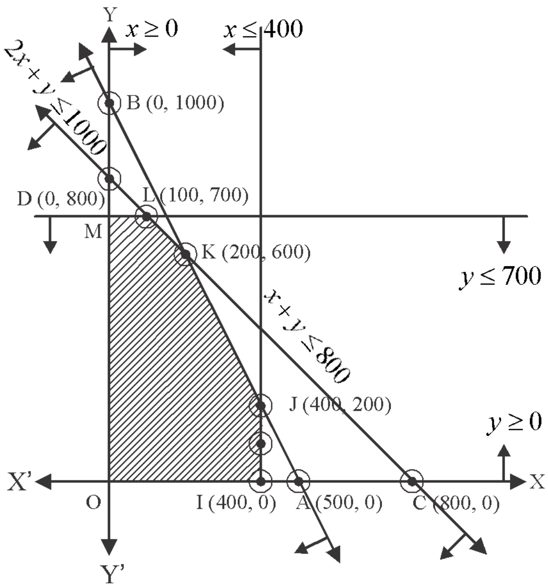
G (10, 700) ; H(20, 700)

बिन्दुओं G तथा H को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \leq 700$ असमिका सन्तुष्ट होती हैं। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र O I J K L M उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O (0, 0), I (400, 0) J (400, 200), K (200, 600), L (100, 700), M (0, 700) है। जहाँ बिन्दुओं J, K व L को क्रमशः रेखाओं $x = 400$ व $2x + y = 1000$; $2x + y = 1000$ व $x + y = 800$ तथा $y = 700$ व $x + y = 800$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किए जाते है।



आकृति 15.11

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 2x + 1.50y$
O	0	0	$Z_O = (2)(0) + (1.50)(0) = 0$
I	400	0	$Z_I = (2)(400) + (1.50)(0) = 800$
J	400	200	$Z_J = (2)(400) + (1.50)(200) = 1100$
K	200	600	$Z_K = (2)(200) + (1.50)(600) = 1300$
L	100	700	$Z_L = 2(100) + (1.50)(700) = 1250$
M	0	700	$Z_M = (2)(0) + (1.50)(700) = 1050$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु K(200, 600) पर अधिकतम है। अतः फर्म को A प्रकार के 200 तथा B प्रकार के 600 बेल्टों का निर्माण करना चाहिए ताकि अधिकतम लाभ ₹ 1300 प्राप्त हो सके।

उदाहरण-10. पुरानी मुर्गियाँ ₹ 2 प्रति मुर्गी के हिसाब से खरीदी जा सकती है, जबकि नई का मूल्य ₹ 5 प्रति मुर्गी है। पुरानी मुर्गियाँ तीन अण्डे तथा नई मुर्गियाँ पाँच अण्ड़े प्रति सप्ताह देती है। एक अण्डे का मूल्य 30 पैसे है। एक मुर्गी का प्रति सप्ताह खाने का खर्च ₹ 1 है। यदि एक व्यक्ति के पास मुर्गियों को खरीदने के लिए केवल ₹ 80 हो तो उसे प्रत्येक प्रकार की कितनी मुर्गियाँ खरीदनी चाहिए ताकि उसे ₹ 6 से अधिक का लाभ मिल सके। यह मानते हुए कि वह व्यक्ति 20 से अधिक मुर्गियाँ मकान में नहीं रख सकता, रैखिक प्रोगामन समस्या का संरूपण कर आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हलः माना व्यक्ति x नई मुर्गियाँ तथा y पुरानी मुर्गियाँ खरीदता है।

चूँकि प्रत्येक नई मुर्गी 5 अण्ड़े प्रति सप्ताह देती है जिससे कुल ₹ 30×5 = ₹ 1.50 प्राप्त होते है जबकि एक मुर्गी को एक सप्ताह खिलाने का खर्च ₹ 1 है।

अतः एक नई मुर्गी से प्राप्त शुद्ध लाभ = ₹ (1.50 – 1) = ₹ .50

इसी प्रकार प्रत्येक पुरानी मुर्गी से प्राप्त शुद्ध लाभ = ₹ $(0.30 \times 3 - 1)$ = ₹ (–0.10)

अतः उद्देश्य फलन अधिकतम $Z = (.50)x - (.10)y$ नई तथा पुरानी मुर्गी का मूल्य क्रमशः ₹ 5 तथा ₹ 2 प्रति मुर्गी है तथा व्यक्ति के पास मुर्गियों को खरीदने के लिए केवल ₹ 80 उपलब्ध है अतः $5x + 2y \le 80$ पुनः व्यक्ति 20 से अधिक मुर्गियाँ मकान eaughaj[kl drkgSvr% $x + y \le 20$ तथा व्यक्ति ₹ 6 से अधिक का लाभ कमाना चाहता है अतः $0.5x - 0.1y \ge 6$ खरीदी गई मुर्गियों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है अतः $x \ge 0,\ y \ge 0$

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

अधिकतम $Z = (\cdot 50)x - (\cdot 10)y$

व्यवरोध $5x + 2y \le 80$

$x + y \le 20$

$0 \cdot 5x - 0 \cdot 1y \ge 6$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

चूंकि व्यक्ति को लाभ ₹ 6 से अधिक प्राप्त करना है परन्तु उद्देश्य फलन का मान अधिकतम करना है अतः व्यवरोध $0 \cdot 5x - 0 \cdot 1y \ge 6$ जोड़े जाने की आवश्यकता नहीं है।

परिवर्तित समस्या का रूप निम्न है–

अधिकतम $Z = (.50)x - (.10)y$

व्यवरोध $5x + 2y \le 80$

$x + y \le 20$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$5x + 2y = 80 \qquad (1)$$

$$x + y = 20 \qquad (2)$$

असमिका 5x + 2y ≤ 80 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $5x + 2y = 80$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (16, 0) तथा B (0, 40) बिन्दुओं पर मिलती है।

5x + 2y = 80

x	16	0
y	0	40

A (16, 0) ; B (0, 40)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $5(0) + 2(0) = 0 \le 80$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x + y \le 20$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + y = 20$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(20, 0) तथा D(0, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 20

x	20	0
y	0	20

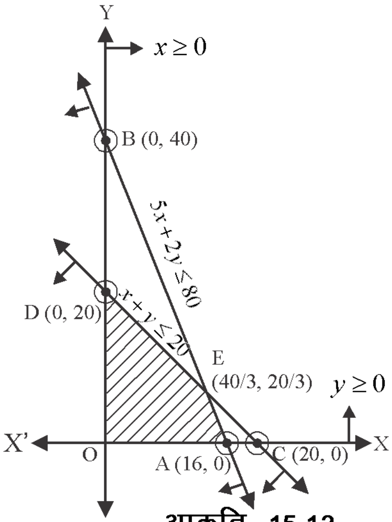
C (20, 0) ; D (0, 20)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 20$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OAED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक 0(0, 0), A(16, 0), $E(40/3,\ 20/3)$ तथा D(0, 20) है। जहाँ बिन्दु E को रेखाओं $x+y=20$ तथा $5x+2y=80$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।



आकृति 15.12

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = (.50)x - (.10)y$
0	0	0	$Z_O = (\cdot 50)(0) - (\cdot 10)(0) = 0$
A	16	0	$Z_A (\cdot 50)(16) - (\cdot 10)(0) = 8$
E	40 / 3	20 / 3	$Z_E = (\cdot 50)(40/3) - (\cdot 10)(20/3) = 6$
D	0	20	$Z_D = (\cdot 50)(0) = (\cdot 10)(20) = -2$

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान कोनीय बिन्दु A(16, 0) पर सर्वाधिक है। अतः अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए व्यक्ति को 16 नई मुर्गियाँ खरीदनी चाहिए। ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 8 प्राप्त हो सके।

विविध प्रश्नमाला–15

निम्न रैखिक प्रोगामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल कीजिये–

1. अधिकतम $Z = 4x + y$
   व्यवरोध $x + y \leq 50$
   $3x + y \leq 90$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$
2. निम्नतम $Z = 3x + 2y$
   व्यवरोध $x + y \geq 8$
   $3x + 5y \leq 15$
   तथा $x \geq 0,\ y \leq 15$
3. निम्नतम तथा अधिकतम $Z = x + 2y$
   व्यवरोध $x + 2y \geq 100$
   $2x - y \leq 0$
   $2x + y \leq 200$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$
4. अधिकतम $Z = 3x + 2y$
   व्यवरोध $x + 2y \leq 10$
   $3x + y \leq 15$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

5. एक बीमार व्यक्ति के भोजन में कम से कम 4000 इकाई विटामिन, 50 इकाई खनिज तथा 1400 इकाई कैलोरी का संयोजन होना चाहिये। दो खाद्य सामग्री A तथा B क्रमशः ₹ 4 तथा ₹ 3 प्रति इकाई की कीमत पर उपलब्ध है। यदि खाद्य सामग्री A की एक इकाई में 200 इकाई विटामिन, 1 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी तथा खाद्य सामग्री B की एक इकाई में 100 इकाई विटामिन, 2 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी हो, तो न्यूनतम लागत प्राप्त करने के लिए किस प्रकार से खाद्य सामग्री का संयोजन उपयोग करना चाहिए?

6. एक भोज्य पदार्थ में कम से कम 80 इकाई विटामिन A तथा कम से कम 100 इकाई खनिज है। दो प्रकार की खाद्य सामग्री F_1 तथा F_2 उपलब्ध है। खाद्य सामग्री F_1 की कीमत ₹ 4 प्रति इकाइ तथा F_2 की कीमत ₹ 6 प्रति इकाई है। खाद्य सामग्री F_1 की एक इकाई में 3 इकाई विटामिन A तथा 4 इकाई खनिज हैं जबकि F_2 की एक इकाई में 6 इकाई विटामिन A तथा 3 इकाई खनिज है। इसे एक रैखिक प्रोगामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिये। उस भोज्य पदार्थ का न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए जिसमें इन दोनों खाद्य सामग्रीयों का मिश्रण है।

7. एक फर्नीचर निर्माता दो उत्पाद– कुर्सी तथा टेबिल बनाता है। ये उत्पाद दो यंत्रों A तथा B पर बनाए जाते है। एक कुर्सी को बनाने में यंत्र A पर 2 घण्टे तथा यंत्र B पर 6 घण्टे लगते है। एक टेबल को बनाने में यंत्र A पर 4 घण्टे तथा यंत्र B पर 2 घण्टे लगते है। यंत्रों A तथा B पर क्रमशः 16 घण्टे तथा 30 घण्टे प्रतिदिन समय उपलब्ध है। निर्माता को एक कुर्सी तथा एक टेबल से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹ 3 व ₹ 5 है। निर्माता को अधिकतम लाभ प्राप्त करने हेतु प्रत्येक उत्पाद का दैनिक उत्पादन कितना करना चाहिए।

8. एक फर्म सिरदर्द की दो प्रकारों– प्रकारों A तथा प्रकार B की गोलियों का निर्माण करती है। प्रकार A की गोली में 2 ग्रेन एस्प्रिन, 5 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 1 ग्रेन कोड़ीन है जबकि प्रकार B की गोली में 1 ग्रेन एस्प्रिन, 8 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 6 ग्रेन कोड़ीन है। उपयोगकर्ताओं के द्वारा यह पाया गया है कि तुरंत प्रभाव के लिये कम से कम 12 ग्रेन एस्प्रिन, 74 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 24 ग्रेन कोड़ीन की आवश्यकता है। एक मरीज को तुरन्त राहत प्राप्त करने के लिए कम से कम कितनी गोलियाँ लेनी चाहिए?

9. एक ईंट निर्माता के पास क्रमशः 30,000 तथा 20,000 ईंटों की भण्ड़ारण क्षमता वाले 2 डिपो A तथा B है। वह तीन बिल्ड़रों P, Q व R से क्रमशः 15,000, 20,000 तथा 15,000 ईंटों के आदेश प्राप्त करता है। 1000 ईंटों को डिपों से बिल्डरों तक भिजवाने में परिवहन लागत नीचे सारणी में दी गई है–

से/को	P	Q	R
A	40	20	30
B	20	60	40

परिवहन लागत को न्यूनतम रखते हुए निर्माता आदेशों को किस प्रकार भिजवा पायेगा?

10. असमिका निकाय $x + y \leq 3$

$y \leq 6$

तथा $x, y \leq 0$

द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र है–

(A) प्रथम पाद में अपरिबद्ध (B) प्रथम व द्वितीय पादों में अपरिबद्ध

(C) प्रथम पाद में परिबद्ध (D) इनमें से कोई नहीं

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. रैखिक प्रोगामन एक ऐसी गणितीय प्रविधि है जो उपलब्ध सीमित साधनों का परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिए प्रयुक्त की जाती है जबकि प्रयुक्त सभी चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध हो।
2. चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो रैखिक प्रोगामन समस्या के व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता है, रैखिक प्रोगामन समस्या का एक हल कहलाता है।
3. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का वह हल जो समस्या के ऋणेत्तर व्यवरोधों को भी सन्तुष्ट करता है, सुसंगत हल कहलाता है। किसी रैखिक प्रोगामन समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय सुंसगत हल क्षेत्र कहलाता है।

4. एक सुसंगत हल जो रैखिक प्रोगामन समस्या के उद्देश्य फलन को इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) करता है, इष्टतम हल कहलाता है।
5. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने की आलेखीय विधि तभी उपयोग में ली जाती है जबकि उस समस्या में केवल दो निर्णायक चर हों।
6. आलेखीय विधि मूलभूत चरम बिन्दु प्रमेय पर आधारित है जिसका कथन निम्न प्रकार है– **"किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का अनुकूलतम हल यदि विद्यमान हो तो समस्या के सभी सुसंगत हलों के समुच्च्य से निर्मित अवमुख बहुभुज के एक चरम (कोनीय) बिन्दु पर होता है।"**
7. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने के लिए कोनीय बिन्दु विधि निम्न पदों में क्रियान्वित होती है–
   (i) दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या को गणितीय सूत्रित कीजिये यदि यह गणितीय रूप में नहीं दी गई हो।
   (ii) व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते हैं तथा उनके आलेख खींचते हैं।
   (iii) प्रत्येक असमिका को दर्शाने हेतु क्षेत्र का निर्धारण करते है।
   (iv) सभी बिन्दुओं को समाहित करने वाला क्षेत्र xy समतल में प्राप्त करते है जो सभी व्यवरोधो (ऋणेत्तर व्यवरोध सहित) को एक साथ सन्तुष्ट करता है। इस प्रकार प्राप्त क्षेत्र सुसंगत हल क्षेत्र कहलाता है।
   (v) इस प्रकार प्राप्त अवमुख बहुभुज के शीर्षों (कोनीय बिन्दुओं) के निर्देशांक ज्ञात करते है।
   (vi) प्रत्येक शीर्ष पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। वह बिन्दु जहाँ पर उद्देश्य फलन इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान ग्रहण करता है, दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल कहलाता हैं।
8. यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध हो अर्थात् यह एक अवमुख बहुभुज बनाता हो तब इस अवमुख समुच्चय के कोनीय बिन्दुओं में से किसी एक बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम (माना M) तथा किसी अन्य बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम (माना m) प्राप्त होता है।
9. कुछ स्थितियों में यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध अवमुख बहुभुज नहीं होता है अर्थात् यह किसी भी दिशा में अनन्त विस्तृत किया जा सके, तब सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध कहलाता है। यदि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है तो इस हल क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। माना इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः M व m है। अब निम्न दो स्थितियों पर विचार करते हैं।

   स्थिति–I: सरल रेखा $Z = ax + by = M$ खींचते है। तथा विवृत अर्धतल $ax + by > M$ ज्ञात करते है। यदि $ax + by > M$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम मान M है। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान नहीं हैं।

   स्थिति–II: सरल रेखा $Z = ax + by = m$ खींचते है तथा $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल ज्ञात करते है। यदि $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का निम्नतम मान m है। अन्यथा उदृदेश्य फलन का कोई निम्नतम मान नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. बिन्दु $(4, 0)$ पर निम्नतम $Z = -12$
2. बिन्दु $(0, 4)$ पर अधिकतम $Z = 16$
3. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई निम्नतम मान विद्यमान नहीं है।
4. बिन्दु $(3/2,\ 1/2)$ पर निम्नतम $Z = 7$
5. बिन्दु $(5, 5)$ पर निम्नतम $Z = 60$ तथा बिन्दुओं $(15, 15)$ व $(0, 20)$ पर अधिकतम $z = 120$
6. बिन्दुओं $(6, 0)$ तथा $(0, 3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड़ पर स्थित सभी बिन्दुओं पर निम्नतम $Z = 6$
7. बिन्दु $(60, 0)$ पर निम्नतम $Z = 300$ बिन्दुओं $(120, 0)$ और $(60, 30)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर अधिकतम $Z = 600$
8. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।
9. दिए गए व्यवरोधों के लिए समस्या का सुसंगत हल विद्यमान नहीं है।
10. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।

प्रश्नमाला 15.2

1. निम्नतम $Z = 5x + 7y$

व्यवरोध $2x + y \geq 8$

$x + 2y \geq 10$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

आहार विज्ञानी के लिये इष्टतम नीति भोज्य I की 2 किलोग्राम तथा भोज्य II की 4 किलोग्राम से मिश्रण बनाने की होगी जिससे निम्नतम लागत ₹ 38 प्राप्त होगी

2. निम्नतम $Z = 6x + 10y$

व्यवरोध $x + 2y \geq 10$

$2x + 2y \geq 12$

$3x + y \geq 8$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

गृहिणी के लिये इष्टतम नीति भोज्य I की 2 किलोग्राम तथा भोज्य II की 4 किलोग्राम से मिश्रण बनाने की होगी जिससे निम्नतम लागत ₹ 52 प्राप्त होगी।

3. 20, 10

4. अधिकतम $Z = 2.50x + y$

व्यवरोध $x + 3y \leq 12$

$3x + y \leq 12$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

निर्माता के लिये इष्टतम उत्पादन नीति प्रत्येक (नट और बोल्ट) के 3 पैकिट प्रतिदिन उत्पादन करने की होगी जिससे अधिकतम लाभ ₹ 10.50 प्राप्त हो सके।

5. अधिकतम $Z = 22x + 18y$

व्यवरोध $x + y \leq 20$

$360x + 240y \leq 5760$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

व्यापारी 8 पंखे तथा 12 सिलाई मशीनों का क्रय करना चाहेगा ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 392 प्राप्त हो सके।

6. अधिकतम $Z = 0.7x + y$

व्यवरोध $4x + 6y \leq 240$

$6x + 3y \leq 240$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

निर्माता को पेच A के 30 पैकेट तथा पेच B के 20 पैकेट बनाने चाहिये ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 41 प्राप्त हो सके।

7. अधिकतम $Z = 5x + 6y$

व्यवरोध $5x + 8y \leq 200$

$10x + 8y \leq 240$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

फर्म को A प्रकार के 8 तथा B प्रकार के 20 स्मृति चिन्हों का निर्माण करना चाहिए ताकि अधिकतम लाभ ₹ 160 प्राप्त हो सके।

8. निम्नतम $Z=(.60)x+(.40)y$

व्यवरोध $\frac{10x}{100}+\frac{5y}{100}\le 14$

$\frac{6x}{100}+\frac{10y}{100}\le 14$

तथा $x\ge 0,\ y\ge 0$

उर्वरक F_1 की 100 किलोग्राम तथा उर्वरक F_2 की 80 किलोग्राम मात्रा उपयोग में ली जानी चाहिए।

न्यूनतम मूल्य = ₹ 92

9. अधिकतम $Z=4500x+5000y$

व्यवरोध $25000x+40000y\le 7000000$

$x+y\le 250$

तथा $x\ge 0,\ y\ge 0$

व्यापारी 200 डेस्कटॉप प्रतिरूप तथा 50 पोर्टेबल प्रतिरूपों का भण्डारण करेगा ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 1150000 प्राप्त हो सके।

10. माना भंड़ार A, राशन की दुकानों D तथा E को क्रमशः x तथा y क्विण्टल अन्न उपलब्ध करवाता है।

निम्नतम $Z=6x+3y+5/2(100-x-y)+4(60-x)+2(50-y)+3(x+y-60)$

व्यवरोध $x+y\le 100$

$x\le 60$

$y\le 50$

$x+y\ge 60$

तथा $x\ge 0,\ y\ge 0$

भण्डार A से D, E व F को क्रमशः 10, 50 व 40 क्विण्टल

भण्डार B से D, E व F को क्रमशः 50, 0 व 0 क्विण्टल।

विविध प्रश्नमाला–15

1. बिन्दु (30, 0) पर अधिकतम $Z=120$

2. समस्या का सुसंगत हल विद्यमान नहीं है।

3. बिन्दुओं (0, 50) तथा (20, 40) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर निम्नतम $Z=100$
(0, 200) पर अधिकतम $Z=400$

4. बिन्दु (4, 3) पर अधिकतम $Z=18$

5. खाद्य सामग्री A की 5 इकाईयाँ खाद्य सामग्री B की 30 इकाईयाँ

6. माना x व y क्रमशः खाद्य सामग्री F_1 तथा F_2 की इकाईयों को निरूपित करते है तब

निम्नतम $Z=4x+6y$

व्यवरोध $3x+6y\ge 80$

$4x+3y\ge 100$

तथा $x\ge 0,\ y\ge 0$

निम्नतम मूल्य = ₹ 104

7. 22 / 5 कुर्सियाँ तथा 9 / 5 टेबलें अधिकतम लाभ = ₹ 22.2

8. आकार A की 2 गोलियाँ आकार B की 8 गोलियाँ

9. निर्माता को डिपो A से बिल्डरों P, Q व R को क्रमशः 0, 20000, 10000 ईंटों की आपूर्ति करनी चाहिए। डिपों B से बिल्डरों P, Q व R को क्रमशः 15000, 0, 5000 ईंटों की आपूर्ति करनी चाहिए।

10. (C)