

2023
गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

- (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए।

General Instructions :

- (i) There are **nine** questions in this question paper.
- (ii) **All** questions are compulsory.
- (iii) At the beginning of each question, it has been mentioned that how many parts of it are to be attempted.
- (iv) Marks allotted to each question are mentioned against it.
- (v) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question which you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड के सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।
- (क) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$, समुच्चय N पर परिभाषित है तो सही उत्तर होगा :
- (A) (2, 4) (B) (4, 5)
(C) (4, 6) (D) (3, 5)
- (ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान होगा :
- (A) π (B) $-\pi/2$
(C) 0 (D) $2\sqrt{3}\pi$
- (ग) $\cos^{-1}(e^x)$ का अवकल गुणांक होगा :
- (A) $\sin^{-1}(e^x)$ (B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
- (घ) $\int x e^x dx$ का मान होगा :
- (A) e^x (B) $(1+x)e^x$
(C) $(x-1)e^x$ (D) $(1-x)e^x$
- (ङ) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि होगी :
- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

1. Do all parts. Select correct option of each part and write it on your answer-book.
- (a) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$ is defined on set N then correct answer will be :
- (A) (2, 4) (B) (4, 5)
(C) (4, 6) (D) (3, 5)
- (b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ will be :
- (A) π (B) $-\pi/2$
(C) 0 (D) $2\sqrt{3}\pi$

(c) Differential coefficient of $\cos^{-1}(e^x)$ will be :

1

(A) $\sin^{-1}(e^x)$

(B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(d) The value of $\int x e^x dx$ will be :

1

(A) e^x

(B) $(1+x)e^x$

(C) $(x-1)e^x$

(D) $(1-x)e^x$

(e) The order of the differential equation $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ will be :

1

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) None of these

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{1, 2\}$ है, तो A से B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

1

(ख) अवरोधों $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए ।

1

(ग) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

(घ) दिखाइए कि $f(x) = |x|, x = 0$ पर संतत है ।

1

(ङ) यदि $P(A) = \frac{3}{13}, P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ है, तो $P(B/A)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

2. Do all parts :

- (a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2\}$, then find number of relations from A to B. 1
- (b) Find the maximum value of $Z = 3x + 4y$ under the constraints $x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 1
- (c) If vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular to each other, then find value of λ . 1
- (d) Show that $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. 1
- (e) If $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$, then find the value of $P(B/A)$. 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

- (क) यदि $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ है, तो x, y तथा z का मान ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 2
- (ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ में $f(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी है। 2
- (घ) यदि $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all parts :

- (a) If $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, then find the value of x, y and z . 2
- (b) Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$. 2
- (c) Prove that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by $f(x) = e^x$ is one-one. 2
- (d) If $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$, then find $\frac{dy}{dx}$. 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, am^3) पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(ख) यदि $P(A) = 0.4$ और $P(B) = 0.5$ है तथा A और B स्वतंत्र घटनायें हैं, तो

(i) $P(A \cup B)$ तथा (ii) $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए । 2

(ग) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ तथा $C(5, 8, 7)$ संरेख हैं । 2

(घ) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

4. Do all parts :

(a) Find the equation of tangent at the point (am^2, am^3) on the curve $ay^2 = x^3$. 2

(b) If $P(A) = 0.4$ and $P(B) = 0.5$, also, A and B are independent events, then find

(i) $P(A \cup B)$ and (ii) $P(A \cap B)$. 2

(c) Show that the points $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ and $C(5, 8, 7)$ are collinear. 2

(d) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$. 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) माना कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) : (a - b), 5 \text{ का गुणज है}\}$, एक समुच्चय $Z =$ पूर्णांकों का समुच्चय पर परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है । 5

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3X = 5B$ हो, तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए । 5

(ग) सिद्ध कीजिए : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 5

(घ) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$. 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ से प्रदत्त फलन $(0, \pi/4)$ में निरंतर वर्धमान फलन है । 5

5. Do all parts :

(a) Let a relation $R = \{(a, b) : (a - b) \text{ is multiple of } 5\}$ be defined on the set $Z = \text{set of integers}$, then prove that R is an equivalence relation. 5

(b) If $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ and $2A + 3X = 5B$, then find the matrix X . 5

(c) Prove that : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$. 5

(d) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ then prove that $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$. 5

(e) Prove that the function $f(x) = \tan^{-1} (\sin x + \cos x)$, $x > 0$ is always increasing function on $(0, \pi/4)$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x$, $(x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = 0$ यदि $x = \pi/2$. 5

(घ) दो रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) $Z = 50x + 70y$ का न्यूनतम मान आलेख विधि से निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए :

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0.$$

6. Do all parts :

(a) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$. 5

(b) Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 5

(c) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x$,
($x \neq 0$) given that $y = 0$ if $x = \pi/2$. 5

(d) Find the shortest distance between two lines :

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$
 5

(e) Find the minimum value of $Z = 50x + 70y$ under the following constraints by graphical method :

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0.$$
 5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) एक परिवार में तीन बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात है कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की है, तो तीनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)| dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

7. Do any one part :

(a) There are three children in a family. If it is known that at least one child is girl among them, find the probability that all three children are girl. 8

(b) Evaluate : $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)| dx$. 8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए । 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है । फलन $f(x) = |x + 2|$ का $x = -2$ पर सांतत्य और अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए । 8

8. Do any one part :

(a) Find differential coefficient of $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$. 8

(b) Prove that every differentiable function is continuous. Examine continuity and differentiability of the function $f(x) = |x + 2|$ at $x = -2$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए । 8

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$2x + y - z = 1$$

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

9. Do any one part :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ also find A^{-1} . 8

(b) Solve the following system of equation by matrix method : 8

$$2x + y - z = 1$$

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

$$11x - 4y - 4z = 12$$