সম্ভাৱিতা (Probability)

পঞ্চদশ অধ্যায়

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1. অৱতাৰণা (Introduction) :

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে ঘটনাৰ পৰীক্ষালব্ধ (experimental) বা আনুভৱিক (emperical) সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছিলা। যিবোৰ প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰ ফলাফলৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। এটা মুদ্ৰা 1000 বাৰ টচ্ কৰি পোৱা ফলাফলৰ বাৰংবাৰতা তলত দিয়াৰ দৰে আছিল।

মুণ্ড (Head) : 455 পুচ্ছ (Tail) : 545

এই পৰীক্ষাৰ পৰীক্ষালব্ধ মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{455}{1000}$, অৰ্থাৎ 0.455 আৰু সেয়া পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.545 (নৱম শ্ৰেণীৰ গণিতৰ পাঠ্যপুথিৰ অধ্যায় 15ৰ উদাহৰণ-1 চোৱা)। মন কৰিবা যে, এটা মুদ্ৰা 1000 বাৰ টচ্ কৰি প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰ দ্বাৰা প্ৰাপ্ত ফলাফলৰ ওপৰত এইবোৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ভৰশীল। এই কাৰণেই সিহঁতক পৰীক্ষালব্ধ বা আনুভৱিক সম্ভাৱিতা বোলে। মুঠতে, পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা, প্ৰকৃত পৰীক্ষাৰ ফলাফল আৰু ঘটনাৰ ফল যথাৰ্থভাৱে লিপিবদ্ধ কৰাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। তদুপৰি এইবোৰ সম্ভাৱিতা হ'ল মাথো 'মূল্যায়ন'। যদি আমি একে পৰীক্ষাকে আন 1000 বাৰ কৰোঁ, আমি ভিন্ন সম্ভাৱিতা মূল্যায়নৰ ভিন্ন তথ্য পাব পাৰো।

নৱম শ্ৰেণীত, তোমালোকে এটা মুদ্ৰা বহুবাৰ টচ্ কৰিছিলা আৰু মুণ্ড (বা পুচ্ছ) ওলোৱাৰ সংখ্যা লিখি ৰাখিছিলা (অধ্যায়-15 ৰ কাৰ্য্য 1 আৰু 2 দ্ৰষ্টব্য)। তোমালোকে এইটোৱো মন কৰিছিলা যে, টচৰ সংখ্যাবৃদ্ধিৰ লগে লগে, পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা, মুণ্ড (বা পুচ্ছ) পোৱাৰ, ক্ৰমে সংখ্যা $\frac{1}{2}$ ৰ ওচৰ চাপি গৈছিল। তোমালোকেই নহয়, বিশ্বৰ বিভিন্ন প্ৰান্তৰ ব্যক্তিয়ে এনেধৰণৰ

পৰীক্ষা কৰিছিল আৰু মুণ্ড ওলোৱাৰ তথ্য লিখি থৈছিল।

উদাহৰণস্বৰূপে, ১৮শ শতিকাত ফ্ৰান্সৰ প্ৰকৃতিবিদ কম্‌তি ডি বাফনে (Comte de Buffon) 4040 বাৰ এটা মুদ্ৰা টছ কৰিছিল আৰু 2048 বাৰ মুণ্ড পাইছিল। এই ক্ষেত্ৰ মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আছিল $\frac{2048}{4040}$ অৰ্থাৎ 0.507। ব্ৰিটেইনৰ জে.ই.কেৰিচ (J.E.Kerrich)এ এটা মুদ্ৰা 10000 বাৰ টছ কৰি 5067 বাৰ মুণ্ড পাইছিল। এইক্ষেত্ৰত পৰীক্ষালব্ধ মুণ্ড ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা আছিল $\frac{5067}{10000} = 0.5067$। পৰিসংখ্যাবিদ কাৰ্ল পিয়েৰছন্‌ (Karl Pearson)এ আৰু বেছি সময় খৰচ কৰি 24000 বাৰ এটা মুদ্ৰা টছ কৰিছিল। তেওঁ মুণ্ড পাইছিল 12012 আৰু সেয়ে মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আছিল 0.5005.

এতিয়া, আমি প্ৰশ্ন কৰো, 'যদি এই পৰীক্ষা এক নিযুত বাৰ বা দহ নিযুতবাৰ সমাপন কৰা হয় তেন্তে মুণ্ড ওলোৱাৰ পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা কি হ'ব?' আৰু এনেদৰে বঢ়াই গৈ থাকিলে কি হ'ব? তোমালোকে অন্তৰ্দৃষ্টিৰে চাব পাৰা যে, টছৰ সংখ্যা বৃদ্ধি কৰি গৈ থাকিলে, মুণ্ড (বা পুচ্ছ) ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.5 ৰ আশে-পাশে পোৱা যাব অৰ্থাৎ $\frac{1}{2}$ ৰ কাষতে থাকিব, যাক আমি মুণ্ড (বা পুচ্ছ) পোৱাৰ সূত্ৰগত সম্ভাৱিতা বুলি কওঁ। তোমালোকে পাছৰ অনুচ্ছেদত দেখা পাবা। এই অধ্যায়ত আমি সূত্ৰগত (গাণিতিক বুলিও কয়) সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে পৰিচয় দাঙি ধৰিম আৰু এই ধাৰণাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত কিছু সমস্যাৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰিম।

15.2. সম্ভাৱিতা (Probability) — এটা তত্ত্বগত উপস্থাপন (A Theoretical Approach)

ধৰা এটা মুদ্ৰা যদৃচ্ছিকভাৱে (Randomly) টছ কৰা হৈছে।

> যেতিয়া আমি এটা মুদ্ৰাৰ কথা কওঁ আমি ধৰোঁ যে এইটো এটা বিশুদ্ধ, অৰ্থাৎ এইটো সমৰূপৰ যাতে কোনো কাৰণতেই এটা পিঠি আনটো পিঠিৰ কৈ সঘনাই নপৰে। মুদ্ৰাৰ এই ধৰণটোক আমি অনভিনত (Unbiased) বুলি কওঁ। 'Random toss' শব্দবন্ধৰ দ্বাৰা আমি বুজাওঁ যে, মুদ্ৰাটো মুক্তভাৱে কোনো বাধা বা পক্ষপাতদুষ্ট নোহোৱাকৈ পৰিবলৈ দিয়া।

আমি আগতীয়াকৈ জানো যে মুদ্ৰাটো মাত্ৰ দুটাকৈ এটা সম্ভাব্য ধৰণে পৰে মুণ্ড ওপৰফালে বা পুচ্ছ ওপৰফালে (আমি মুদ্ৰাটো একাষৰীয়াকৈ পৰা সম্ভাৱনা নুই কৰো, যিটো হ'বও পাৰে, উদাহৰণস্বৰূপে, যদি ই বালিত পৰে।) আমি যুক্তিপূৰ্ণভাৱেই ধৰো যে মুণ্ড বা পুচ্ছ ফলাফল (outcome), সম্ভৱতঃ যিকোনো আনটোৰ দৰেই সমশক্য। এইটো প্ৰসংগত আমি কওঁ যে, মুণ্ড বা পুচ্ছ ফলাফল সমশক্য (equally likely)।

সমশক্য ফলাফলৰ অন্য এটা উদাহৰণৰ বাবে আমি ধৰো, এটা লুডুগুটি এবাৰ ওপৰলৈ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। আমাৰ বাবে, এটা লুডু গুটিয়ে সদায়ে এটা ত্ৰুটিহীন লুডুগুটিকহে বুজায়। সম্ভাব্য ফলাফল কি কি? সেইবোৰ হ'ল— 1, 2, 3, 4, 5, 6। প্ৰতিটো সংখ্যা ওপৰফালে ওলোৱাৰ সম্ভাবনা একে। সেয়ে এটা লুডুগুটি ওপৰলৈ মাৰিলে সমশক্য ফলাফল হ'ল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6.

সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য নে? আমি চাওঁ—

ধৰা হ'ল, এটা মোনাত 4 টা ৰঙা আৰু 1 টা নীলা বল আছে আৰু তুমি এটা বল মোনাটোলৈ নোচোৱাকৈ টানিছা। ফলাফল কি পাবা? এটা ৰঙা বল আৰু এটা নীলা বলৰ ফলাফল সমশক্য নে? যিহেতু তাত 4 টা ৰঙা বল আৰু মাত্ৰ এটা নীলা বল আছে, তুমি মানি লোৱা যে, তুমি ৰঙা বল পোৱাটো নীলা বল পোৱাতকৈ বেছি আশাবাদী। সেয়ে ফলাফল (এটা ৰঙা বল বা এটা নীলা বল) সমশক্য নহয়। অৱশ্যে, মোনাটোৰ পৰা যিকোনো ৰঙৰ এটা বল উলিওৱাটো সমশক্য। গতিকে, সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য হোৱাটো আৱশ্যকীয় নহয়।

অৱশ্যে এই অধ্যায়ত এতিয়াৰ পৰা, আমি ধৰিম যে সকলো পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য।

নৱম শ্ৰেণীত, আমি এটা ঘটনা E ৰ পৰীক্ষালব্ধ বা অনুভৱিক সম্ভাৱিতা P(E)ৰ সংজ্ঞা দিছিলো—

$$P(E) = \frac{\text{ঘটনা সংঘটিত হোৱা পৰীক্ষাৰ সংখ্যা}}{\text{মুঠ পৰীক্ষাৰ সংখ্যা}}$$

বহু সংখ্যক পুনৰাবৃত্তি ঘটা পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত যিকোনো ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত অনুভৱিক সম্ভাৱিতাৰ তাৎপৰ্য প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। পৰীক্ষা এটা পুনৰাবৃত্তি কৰি থকাটোত সীমাবদ্ধতা আছে— কাৰণ ই খৰচী হ'ব পাৰে বা বহুক্ষেত্ৰত স্থিতিশীল নহ'বও পাৰে। অনুৰূপে, ই মুদ্ৰা উলিওৱা বা লুডুগুটি মাৰি পঠিওৱা ক্ষেত্ৰত ফলপ্ৰসূ। কিন্তু, উপগ্ৰহ এটাৰ উৎক্ষেপণৰ সময়ত বিফলতাৰ অনুভৱিক, সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ উপগ্ৰহটো কেনেকৈ বাৰে বাৰে উৎক্ষেপণ পৰীক্ষা বা ভূমিকম্পৰ সময়ত বহু মহলীয়া বিল্ডিং এটাৰ ধ্বংস হোৱাৰ অনুভৱিক সম্ভাৱিতা উলিয়াবলৈ ভূমিকম্প হোৱা পৰিঘটনাটো বাৰে বাৰে সম্ভৱনে?

পৰীক্ষাসমূহত, য'ত আমি নিৰ্দিষ্ট ধাৰণা প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ প্ৰস্তুত, পৰীক্ষাটো পুনঃপুনঃ কৰা কাৰ্যটো এৰাই চলিব পাৰো কাৰণ ধাৰণাসমূহে প্ৰত্যক্ষভাৱে সঠিক (তত্ত্বগত) সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয়ত সহায় কৰে। সমশক্য ফলাফলৰ ধাৰণাটো (যিটো পৰীক্ষাত স্থিত, ওপৰত দিয়া দুটা উদাহৰণ— এটা মুদ্ৰাৰ আৰু এটা লুডুগুটিৰ দৰে) এটা এনে ধাৰণা যি আমাক এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা তলত দিয়াৰ দৰে দিবলৈ আগবঢ়াই নিয়ে। এটা ঘটনা E ৰ তত্ত্বগত সম্ভাৱিতা (গাণিতিক সম্ভাৱিতা বুলিও কয়) P(E) ৰে বুজোৱা হয় আৰু সংজ্ঞা হ'ল—

$$P(E) = \frac{\text{E ৰ উপযোগী ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{পৰীক্ষাৰ মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা}}$$

য'ত আমি ধৰো যে, পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য।

আমি তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাক সংক্ষেপে সম্ভাৱিতা বুলি কওঁ।

সম্ভাৱিতাৰ এই সংজ্ঞা 1795 চনত পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাছে (Pierre Simon Laplace) দিছিল।

পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাছ (1749 – 1827)

১৬শ শতিকাত যেতিয়া ইটালিৰ পদাৰ্থবিদ আৰু গণিতজ্ঞ জে. কাৰ্ডনে তেওঁৰ প্ৰথম কিতাপ *'The Book on Games of Chance'* লিখি উলিয়াইছিল সেই সময়তেই সম্ভাৱিতাৰ সূত্ৰই স্থিতি লৈছিল। সম্ভাৱিতাৰ অধ্যয়নে আৰম্ভণিৰ পৰাই বহুতো মহান গণিতজ্ঞক আকৰ্ষণ কৰিছিল। জেমছ্ বাৰ্ণুলি (1654–1705), এ.ডি.মইভাৰ (1667–1754) আৰু পিয়েৰ ছাইমন্ লাপ্লাছ হ'ল সেইসকলৰ মাজৰ যিসকলে এইক্ষেত্ৰত অনবদ্য অৱদান দি থৈ গৈছে। লাপ্লাচৰ *'Theorie Analytique des Probabilités'*, 1812, ক এজন ব্যক্তিৰ সম্ভাৱিতা সূত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত আটাইতকৈ মহান অৱদান বুলি বিবেচনা কৰা হয়। বৰ্তমান সময়ত, সম্ভাৱিতাৰ বিস্তৃত ব্যৱহাৰ দেখা যায় যেনে জীৱবিদ্যা, অৰ্থনীতি, আনুবংশিক বিজ্ঞান, পদাৰ্থবিজ্ঞান, সমাজবিজ্ঞান আদিত।

আমি কিছুমান ঘটনাৰ, যি পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত, য'ত সমশক্য ধাৰণা অটুট থাকে তাৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াওঁ।

উদাহৰণ 1 : এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰিলে এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। এটা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতাও উলিওৱা।

সমাধান : এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰা পৰীক্ষাটোত সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল দুটা— মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T)। ধৰো E হ'ল 'এটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা'। E ৰ উপযোগী ফলাফলৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ এটা মুণ্ড পোৱাৰ) হ'ল 1। গতিকে,

$$P(E) = P(\text{মুণ্ড}) = \frac{\text{E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা}} = \frac{1}{2}$$

একেদৰে যদি F 'এটা পুচ্ছ পোৱাৰ ঘটনা' তেন্তে $P(F) = \frac{1}{2}$ (কিয়?)

উদাহৰণ 2 : এটা মোনাত এটা ৰঙা বল, এটা নীলা বল আৰু এটা হালধীয়া বল, সকলো বল সমান আকাৰৰ আছে। কৃত্তিকাই বলখিনি নোচোৱাকৈ এটা বল টানি ল'লে।

তাই (i) হালধীয়া বল, (ii) ৰঙা বল, (iii) নীলা বল পোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?

সমাধান : কৃত্তিকাই বলখিনি নোচোৱাকৈ টানিছে। সেয়ে এইটো সমশক্য যে তাই তাৰ পৰা যিকোনো এটা লব পাৰে।

ধৰো Y হ'ল হালধীয়া বল লোৱা ঘটনা, B হ'ল নীলা বল লোৱা ঘটনা আৰু R হ'ল ৰঙা বল লোৱা ঘটনা।

সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 3

(i) Y ৰ পক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 1

সেয়ে $P(Y) = \frac{1}{3}$

একেদৰে, (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ আৰু (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

মন্তব্য : 1. পৰীক্ষাৰ ফলাফল মাথো এটা থকা একেটা ঘটনাক 'প্ৰাথমিক ঘটনা' (elementary event) বোলে। উদাহৰণ (1)ত দুয়োটা ঘটনা E আৰু F প্ৰাথমিক ঘটনা। একেদৰে উদাহৰণ (2)ত তিনিওটা ঘটনা Y, B আৰু R হ'ল প্ৰাথমিক ঘটনা।

2. উদাহৰণ (1)ত আমি মন কৰো যে, $P(E) + P(F) = 1$

উদাহৰণ (2)ত আমি মন কৰো যে, $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

দেখাগ'ল যে, এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাবিতাৰ সমষ্টি 1। ই সাধাৰণ ক্ষেত্ৰতো সত্য।

উদাহৰণ 3 : ধৰো আমি এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰি পঠিয়াও। (i) 4তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাবিতা কি? (ii) 4 বা তাতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাবিতা কি?

সমাধান : (i) ইয়াত, ধৰো E হ'ল '4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা'। সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 আৰু E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফল হ'ল 5 আৰু 6। সেইবাবে, E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা হ'ল 2। গতিকে,

$P(E) = P(4\text{তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) ধৰো, F হ'ল '4 বা তাতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা

সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 6, F অৰ পক্ষে ঘটিত ঘটনাৰ ফলাফল হ'ল- 1, 2, 3, 4

গতিকে, F ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা হ'ল 4.

সেয়ে, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ওপৰৰ ঘটনা E আৰু F প্ৰাথমিক ঘটনা নে? নাই, সিহঁত নহয় কাৰণ E ৰ ফলাফল 2 টা আৰু F ৰ ফলাফল 4 টা।

মন্তব্য : উদাহৰণ (1) ৰ পৰা পাওঁ—

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

য'ত E হ'ল 'এটা মুণ্ড পোৱাৰ' ঘটনা আৰু 'F হ'ল এটা পুচ্ছ পোৱাৰ ঘটনা।

উদাহৰণ (3) ৰ (i) আৰু (ii) পৰা আমি পাওঁ—

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

য'ত E হ'ল '4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা আৰু F হ'ল '4 তকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱাৰ' ঘটনা।

মন কৰা যে, 4 তকৈ ডাঙৰ নোহোৱা সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা '4 তকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা' একে আৰু বিপৰীতভাৱেও হয়।

ওপৰৰ (1) আৰু (2) ত F, 'E নহয়' ৰ লগত একে নহয়নে? হয়, এইটো হয়। আমি 'E নহয়' ঘটনাক $\bar{E}$ ৰে বুজাওঁ।

গতিকে, P(E) + P(নহয় E) = 1

অৰ্থাৎ, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, যিটোৱে আমাক দিয়ে $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

সাধাৰণতে, এটা ঘটনা E ৰ বাবে এইটো সত্য যে,

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

'E নহয়'ক নিৰ্দেশ কৰা $\bar{E}$ ঘটনাক E ঘটনাৰ পূৰক (complement) বোলা হয়। আজি এইটোও কওঁ যে, E আৰু $\bar{E}$ পূৰক ঘটনা (complementary event) আৰু অধিক আগবঢ়াৰ আগতে তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ দিবলৈ আমি যত্ন কৰোঁহক।

(i) এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 8 পোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?

(ii) এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 7 তকৈ কম পোৱা ঘটনাৰ সম্ভাবিতা কি?

আমি (i) ৰ উত্তৰ দিওঁহক :—

আমি জানো যে এবাৰ এটা লুডুগুটি মাৰিলে তাত মাথো ছয়টা সম্ভাব্য ফলাফল আছে। এই ফলাফলবোৰ হ'ল— 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6। যিহেতু লুডুগুটিৰ কোনো পিঠিতে 8 দাগ কটা

নাই. সেইবাবে কোনো ফলাফলেও 8 ৰ পক্ষে নঘটে, অৰ্থাৎ, এনে ফলাফলৰ সংখ্যা শূন্য। আন কথাত, এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে 8 পোৱাটো অসম্ভৱ।

গতিকে, $P(8 \text{পোৱা}) = \frac{0}{6} = 0$

অৰ্থাৎ, যিটো ঘটনা ঘটিবলৈ সম্ভাৱিতা শূন্য '0' তেনে ঘটনাক অসম্ভৱ ঘটনা (impossible event) বোলে।

আমি (ii) ৰ উত্তৰ দিওঁহক :—

যিহেতু, লুডুগুটিটোৰ প্ৰতিখন পিঠিতেই দাগ কৰা সংখ্যা 7 তকৈ কম, এইটো নিশ্চিত যে আমি এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰিলে সদায় এটা 7 তকৈ সৰু সংখ্যা পাম। গতিকে সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা, মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যাৰ সৈতে একে যিটো হ'ল 6।

সেইবাবে, $P(E) = P(7\text{তকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা}) = \frac{6}{6} = 1$

গতিকে, যিটো ঘটনা নিশ্চিত ঘটে তাৰ সম্ভাৱিতা 1, এনে ঘটনাক নিশ্চিত ঘটনা (sure event or certain event) বোলা হয়।

টোকা : P(E) ৰ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি দেখো যে, 'লব' (E ৰ সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা) সদায় 'হৰ' (সম্ভাব্য সকলো ফলাফল) তকৈ সৰু বা সমান।

সেইকাৰণে, $0 \le P(E) \le 1$

এতিয়া আমি তাচ্ খেলৰ লগত জড়িত উদাহৰণ এটা লওঁ! তোমালোকে তাচ্‌পাতৰ এটা পেকেট্ দেখিছানে? ই 52 টা কাৰ্ডেৰে গঠিত যিটো 4টা ভাগত ভাগকৰা আছে প্ৰত্যেকতে 13 টাকৈ কাৰ্ড— ইস্কাপন (Spade ♠), হৰতন (Heart ♥), ৰোহিতন (Diamond ♦) আৰু চিৰটন (Club ♣)। চিৰটন আৰু ইস্কাপন ক'লা ৰঙৰ অন্যহাতে, হৰতন আৰু ৰোহিতনৰ ৰঙ ৰঙা। প্ৰত্যেকটো ভাগত থকা কাৰ্ডবোৰ হ'ল টেক্কা, ৰজা, ৰাণী, গোলাম 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 আৰু 2। ৰজা, ৰাণী আৰু গোলামকেইটাক মুখ কাৰ্ড (face card) বোলা হয়।

উদাহৰণ 4 : 52 টা কাৰ্ডযুক্ত ভালদৰে মিহলোৱা এযোৰ তাচ্‌পাতৰ জাপৰ পৰা এটা কাৰ্ড টানা হ'ল। কাৰ্ডটোৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা—

(i) এটা টেক্কা হোৱা,

(ii) এটা টেক্কা নোহোৱা

সমাধান : ভালদৰে মিলোৱা মানে হ'ল সমসম্ভাব্য ফলাফল।

(i) তাচ্‌জাপত টেক্কাৰ সংখ্যা হ'ল 4 টা। ধৰো E হ'ল 'টেক্কা পোৱাৰ' ঘটনা

E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা = 4

সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা = 52 (কিয়?)

সেই কাৰণে, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ধৰো F হ'ল 'কাৰ্ডটো টেক্কা নোহোৱা ঘটনা'

F ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা $= 52 - 4 = 48$ (কিয়?)

সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা $= 52$

সেইকাৰণে, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

মন্তব্য : মন কৰা, F মানে $\bar{E}$. গতিকে, P(F) আমি তলত দিয়াৰ দৰে উলিয়াব পাৰো :

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

উদাহৰণ 5 : দুজন খেলুৱৈ সংগীতা আৰু ৰেচমাই এখন টেবুল টেনিচ্ মেচ খেলিলে। এইটো জনাযায় যে, সংগীতা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাবিতা 0.62। ৰেচমা খেলখনত জয়ী হোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?

সমাধান : ধৰো S আৰু R এ ক্ৰমে সংগীতা খেলখন জয়ী হোৱা আৰু ৰেচমা খেলখন জয়ী হোৱাটো নিৰ্দেশ কৰে।

সংগীতা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাবিতা $= P(S) = 0.62$ (দিয়া আছে)

ৰেচমা জয়ী হোৱাৰ সম্ভাবিতা $= P(R) = 1 - P(S) = 1 - 0.62 = 0.38$

[যিহেতু, R আৰু S ঘটনা পৰস্পৰ পূৰক]

উদাহৰণ 6 : সবিতা আৰু হামিদা বন্ধু। দুয়োগৰাকীৰ (i) ভিন্ন জন্মদিন (ii) একেজন্মদিন হোৱাৰ সম্ভাবিতা কি? (লিপ্‌ইয়েৰ বাদনি)

সমাধান : দুয়োগৰাকী বন্ধুৰ এগৰাকী, ধৰো সবিতাৰ জন্মদিন বছৰৰ যিকোনো এটা দিন হ'ব পাৰে। হামিদাৰ জন্মদিনো 365 দিনৰ যিকোনো এটা দিন হ'ব পাৰে।

আমি ধৰো যে 365 দিনেই সমশক্য ফলাফল।

(i) যদি হামিদাৰ জন্মদিন সবিতাৰ জন্মদিনৰ ভিন্ন হয়, তেন্তে তাইৰ পক্ষে জন্মদিনৰ ফলাফলৰ সংখ্যা $365 - 1 = 364$.

গতিকে, P (হামিদাৰ জন্মদিন, সবিতাৰ পৰা পৃথক) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(সবিতা আৰু হামিদাৰ জন্মদিন একে) = 1 − P (দুয়োগৰাকীৰ ভিন্ন জন্মদিন)

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ ব্যৱহাৰ কৰি}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

উদাহৰণ 7 :এখন স্কুলৰ দশম শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা হ'ল 40 য'ত 25 জনী ছোৱালী আৰু 15 জন ল'ৰা। শ্ৰেণীৰ শিক্ষকে এজন ছাত্ৰ/ছাত্ৰীক ক্লাছৰ প্ৰতিনিধি বাচনি কৰিব লাগে। তেওঁ প্ৰত্যেকজন ছাত্ৰ/ছাত্ৰীৰ নাম বেলেগ বেলেগ কাৰ্ডত লিখি ল'লে, কাৰ্ডবোৰ একেপ্ৰকাৰৰ। তাৰ পাছত তেওঁ কাৰ্ডবোৰ মোনা এটাত ভৰালে আৰু সেইবোৰ সম্পূৰ্ণৰূপে মিহলি কৰি দিলে। তেওঁ এটা কাৰ্ড মোনাৰ পৰা টানি ল'লে। কাৰ্ডটোত লিখিথোৱা নামটো (i) এগৰাকী ছোৱালীৰ (ii) এজন ল'ৰাৰ হোৱা সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান :তাত 40 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আছে আৰু এটা কাৰ্ডহে বাছিব লাগে।

(i) মুঠ সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 40

এজনী ছোৱালীৰ নামৰ সপক্ষে ঘটা ঘটনাৰ ফলাফলৰ সংখ্যা = 25 (কিয়?)

সেয়ে, P(এজনী ছোৱালীৰ নাম থকা) = $\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$

(ii) এজন ল'ৰাৰ নামৰ সাপেক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 15 (কিয়?)

সেয়ে, P(ল'ৰাৰ নামযুক্ত কাৰ্ড) = $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$

টোকা : আমি P(ল'ৰা) এনেদৰেও উলিয়াব পাৰো—

P(ল'ৰা) = 1 – P(ল'ৰা নহয়)

= 1 – P(ছোৱালী)

$= 1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

উদাহৰণ 8 :এটা বাকচত 3 টা নীলা, 2 টা বগা আৰু 4 টা ৰঙা মাৰ্বল আছে। যদি এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাবে টনা হয়, তেন্তে এইটো

(i) বগা, (ii) নীলা, (iii) ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান :এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাবে টনা মানে হ'ল যে সকলো মাৰ্বল সমশক্য। সেয়ে, সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা = 3 + 2 + 4 = 9 (কিয়?)

ধৰো W হ'ল 'মাৰ্বলটো বগা', B হ'ল 'মাৰ্বলটো নীলা' আৰু R হ'ল 'মাৰ্বলটো ৰঙা' হোৱা ঘটনা।

(i) W ঘটনাৰ পক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা = 2

গতিকে, $P(W) = \frac{2}{9}$

এনেদৰে, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ আৰু (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

মন কৰা যে, $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

উদাহৰণ 9 : হৰপ্ৰীতে দুটা ভিন্ন মুদ্ৰা একেলগে টচ কৰিছে (ধৰা, এটা 1 টকীয়া আৰু আনটো 2 টকীয়া)। তেওঁ অতি কমেও এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান : মুণ্ডৰ বাবে H আৰু পুচ্ছৰ বাবে T লিখা। যেতিয়া দুটা মুদ্ৰা একেলগে টচ্ কৰা হয় সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ হ'ল— (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) যিবোৰ সমসম্ভাব্য। ইয়াত, (H,H) মানে হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাত (ধৰা, 1 টকীয়া মুদ্ৰাত) মুণ্ড ওলাইছে আৰু দ্বিতীয় মুদ্ৰাত (2 টকীয়া মুদ্ৰাত) মুণ্ড ওলাইছে। একেদৰে, (H, T) মানে হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাত মুণ্ড আৰু দ্বিতীয় মুদ্ৰাত পুচ্ছ ওলাইছে আৰু এনেদৰে বাকী দুটাৰো অৰ্থ।

E, 'অতিকমেও এটা মুণ্ড' পোৱা ঘটনাৰ পক্ষে ঘটা ফলাফল হ'ব— (H, H), (H, T) আৰু (T, H). (কিয়?)

গতিকে, E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফলৰ সংখ্যা = 3.

সেয়ে, $P(E) = \frac{3}{4}$, অৰ্থাৎ হৰপ্ৰীতে অতিকমেও এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{3}{4}$.

টোকা : তোমালোকে P(E) তলত দিয়া ধৰণেও উলিয়াব পাৰা—

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad [\text{যিহেতু } P(\text{মুণ্ড নাই}) = \frac{1}{4}]$$

তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰিলানে যে এতিয়ালৈকে যিমান উদাহৰণ ব্যাখ্যা কৰিলো, সম্ভাব্য মুঠ ফলাফল প্ৰত্যেকতে সসীম? যদি নাই কৰা এইটো এতিয়া পৰীক্ষা কৰা।

এনেকুৱা বহুতো পৰীক্ষা আছে যাৰ ফলাফল প্ৰদত্ত দুটা সংখ্যাৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যা হ'ব পাৰে, বা কিছুমানত ফলাফল এটা বৃত্ত বা আয়ত আদিৰ ভিতৰৰ যিকোনো বিন্দু হ'ব পাৰে? তোমালোকে সকলো ফলাফলৰ সংখ্যা গণনা কৰিব পাৰিবানে? তোমালোকে জানা যে এইটো অসম্ভৱ যিহেতু দুটা প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ মাজত অসীম সংখ্যক সংখ্যা থাকে বা এটা বৃত্তৰ ভিতৰত অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকে। গতিকে, সম্ভাৱিতাৰ (তত্ত্বগত) সংজ্ঞা যিটো তোমালোকে এতিয়ালৈকে পালা সেইটো এইক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি। কি পথ বাছি উলিয়াম? এইটোৰ উত্তৰৰ বাবে আমি তলৰ উদাহৰণটো লওঁ—

উদাহৰণ 10* : এটা সংগীত চকীৰ খেলত এজন ব্যক্তিক তেওঁ আৰম্ভ কৰাৰ 2 মিনিটৰ ভিতৰত সংগীতটো যিকোনো সময়ত বন্ধ কৰিবলৈ পৰামৰ্শ দিয়া হ'ল। সংগীতটো আৰম্ভ কৰাৰ প্ৰথম আধা মিনিটত বন্ধ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কি?

সমাধান : ইয়াত সম্ভাব্য ফলাফল হ'ল 0 আৰু 2 ৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যা। এইটো সংখ্যাৰেখাৰ 0 ৰ পৰা 2 লৈ অংশটো (চিত্ৰত 15.1. চোৱা)

---

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

চিত্ৰ 15.1

ধৰো E হ'ল প্ৰথম আধা মিনিটত সংগীতটো বন্ধ কৰা ঘটনা।

E ৰ পক্ষে ঘটিত ফলাফল হ'ল সংখ্যাৰেখাৰ 0 ৰ পৰা $\frac{1}{2}$ লৈ বিন্দুবোৰ।

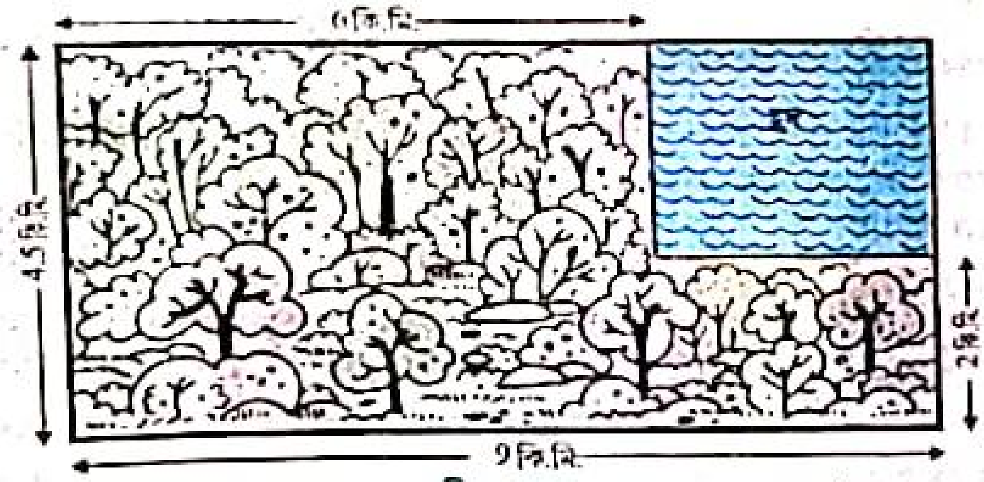
0 ৰ পৰা 2 লৈ দূৰত্ব 2 অন্যহাতে 0 ৰ পৰা $\frac{1}{2}$ লৈ দূৰত্ব $\frac{1}{2}$.

যিহেতু সকলো ফলাফল সমসম্ভাব্য, আমি যুক্তি দিব পাৰো যে, মুঠ দূৰত্ব 2 ৰ E ৰ পক্ষে দূৰত্ব $\frac{1}{2}$।

গতিকে, $P(E) = \frac{\text{E ঘটনাৰ পক্ষে দূৰত্ব}}{\text{ফলাফলৰ থকা অংশৰ মুঠ দূৰত্ব}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

উদাহৰণ (1)ৰ এই ধৰণটো আমি মুঠ ক্ষেত্ৰ কালি আৰু ঈপ্সিত কালিৰ অনুপাতৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰণত প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰিবনে?

উদাহৰণ 11* : চিত্ৰ 15.2. ত দেখুওৱাৰ দৰে এখন হেৰোৱা হেলিকপ্টাৰৰ সম্বাদ দিয়া হৈছে যে ই এটুকুৰা আয়তীয় ক্ষেত্ৰত কোনো ঠাইত ধ্বংস হৈছে। এইখন চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে ভিতৰৰ এটা হ্ৰদত ধ্বংস হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?



চিত্ৰ 15.2

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

সমাধান : ক্ষেত্ৰখনৰ যিকোনো ঠাইত হেলিকপ্টাৰখন ধ্বংস হোৱাটো সমশক্য।

হেলিকপ্টাৰখন ধ্বংস হ'ব পৰা —

ক্ষেত্ৰৰ কালি = (4.5 × 9) বৰ্গ কিঃমিঃ = 40.5 বৰ্গ কিঃমিঃ হ্ৰদ

হ্ৰদটোৰ ক্ষেত্ৰকালি = (2.5 × 3) বৰ্গ কিঃমিঃ = 7.5 বৰ্গ কিঃমিঃ

সেইকাৰণে, P (হ্ৰদত হেলিকপ্টাৰ ধ্বংস হোৱা) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

উদাহৰণ- 12 : এটা কাৰ্টনত থকা 100 চোলাৰ 88 টা ভাল আৰু 8 টা অলপ পৰিমাণে নষ্ট আৰু 4 টা বেছি পৰিমানে নষ্ট হৈছে। জিমি, একজন ব্যৱসায়ী যি মাথো ভালবোৰ গ্ৰহণ কৰে। কিন্তু সুজাতা অন্য একজন ব্যৱসায়ী যি মাথো বেছি পৰিমাণে নষ্ট হোৱা চোলাহে বাদ দিয়ে যাদৃচ্ছিকভাবে কাৰ্টনৰ এটা চোলা টনা হ'ল। সম্ভাৱিতা কি যাতে,

(i) এইটো জিমিৰ গ্ৰহণযোগ্য হয়?

(ii) এইটো সুজাতাৰ গ্ৰহণযোগ্য হয়?

সমাধান : কাৰ্টনৰ 100 টা চোলাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা চোলা টনা হ'ল। সেয়ে সেইবোৰ 100 টা সমশক্য ফলাফল।

(i) জিমিৰ সপক্ষে (অৰ্থাৎ গ্ৰহণযোগ্য) ফলাফলৰ সংখ্যা = 88 (কিয়?)

সেয়ে, P (জিমিৰ গ্ৰহণযোগ্য চোলা) = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) সুজাতাৰ সপক্ষে ফলাফলৰ সংখ্যা = 88 + 8 = 96 (কিয়?)

গতিকে, P (সুজাতাৰ গ্ৰহণযোগ্য চোলা) = $\frac{96}{100} = 0.96$

উদাহৰণ- 13 : এটা নীলা আৰু এটা ছাই ৰঙৰ দুটা লুডুগুটি একেলগে মাৰি পঠিওৱা হ'ল। সকলো সম্ভাব্য ফলাফল লিখা। লুডুগুটি দুটাত ওলোৱা সংখ্যাৰ সমষ্টি

(i) 8

(ii) 13

(iii) 12ত কৈ সৰু বা সমান হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান

সমাধান : যেতিয়া নীলা গুটিটোত '1' দেখায় তেতিয়া ছাই ৰঙৰটোত 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 ৰ যিকোনো এটা সংখ্যা দেখুৱাব পাৰে। একেদৰে, যেতিয়া নীলাটোত '2', '3', '4', '5' বা '6' দেখায় তেতিয়াও একে। সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ তালিকাকৰণ কৰি তলত দেখুওৱা হ'ল; প্ৰতিটো ক্ৰমিত যোৰত প্ৰথম সংখ্যাই নীলা গুটিত ওলোৱা আৰু দ্বিতীয় সংখ্যাই ছাইটোত ওলোৱা সংখ্যা নিৰ্দেশ কৰে।

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

চিত্ৰ 15.3

মন কৰা যে, (1, 4) যোৰটো (4, 1) ৰ পৰা পৃথক (কিয়?)
গতিকে সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা = 6 × 6 = 36.

(i) 'সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি ৪' হোৱা ঘটনাৰ সপক্ষে, ফলাফলৰ ঘটনাটোক E ৰে নিৰ্দেশ কৰা হ'ল আৰু সেয়া হ'ল (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (চিত্ৰ 15.3)
অৰ্থাৎ, E ৰ সপক্ষে ফলাফলৰ সংখ্যা = 5.

গতিকে, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) চিত্ৰ 15.3 ত তোমালোকে দেখিছা যে, F : "সংখ্যাদুটাৰ সমষ্টি 13" ৰ সপক্ষে কোনো ফলাফল নাই।

গতিকে, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) চিত্ৰ 15.3 ত তোমালোকে দেখা পাইছা যে, G : "সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি ≤ 12" ৰ সপক্ষে সকলো ফলাফলেই যায়।

গতিকে, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

অনুশীলনী 15.1

1. তলৰ উক্তিবোৰ সম্পূৰ্ণ কৰা :

(i) ঘটনা E ৰ সম্ভাৱিতা + ঘটনা 'E নহয়'ৰ সম্ভাৱিতা = ______

(ii) কেতিয়াও নঘটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ______ । এনেকুৱা ঘটনাক কয় ______.

(iii) নিশ্চিতভাৱে ঘটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ______ । এনেকুৱা ঘটনাক ______ বোলে।

(iv) এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি হ'ল ______।

(v) এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা ______ তকৈ ডাঙৰ বা সমান আৰু ______ তকৈ সৰু বা সমান।

2. তলৰ কোনবোৰ পৰীক্ষাৰ ফলাফল সমশক্য? ব্যাখ্যা কৰা।

(i) এজন ড্ৰাইভাৰে এখন গাড়ী ষ্টাৰ্ট দিবলৈ যত্ন কৰিছে। গাড়ীখন ষ্টাৰ্ট হ'বও পাৰে বা নহ'বও পাৰে।

(ii) এজন খেলুৱৈয়ে এটা বাস্কেট বল ভৰাব বিচাৰিছে। তেওঁ ভৰাব পাৰে বা নোৱাৰিবও পাৰে।

(iii) এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ সত্য বা অসত্য বুলি দিয়াৰ চেষ্টা কৰা হৈছে। উত্তৰটো শুদ্ধ বা অশুদ্ধ হ'ব পাৰে।

(iv) এটা কেঁচুৱা জন্ম হ'ল। এইটো ল'ৰা বা ছোৱালী হ'ব পাৰে।

3. এখন ফুটবল খেলত কোনটো দলে আৰম্ভণিতে বলটো লব সেয়া সিদ্ধান্ত লবলৈ কিয় এটা বিশুদ্ধ মুদ্ৰাৰ টচ্ কৰাটো দৰকাৰ বুলি বিবেচনা কৰে?

4. তলৰ কোনকেইটা এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব নোৱাৰে।

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. যদি $P(E) = 0.05$, তেন্তে 'E নহয়'ৰ সম্ভাৱিতা কি?

6. এটা মোনাত মাত্ৰ নেমুৰ স্বাদৰ মৰ্টন আছে। মালিনীয়ে মোনাটো নোচোৱাকৈ এটা মৰ্টন ল'লে। তেওঁ লোৱাটোৰ সম্ভাৱিতা কি যাতে

(i) এটা কমলা স্বাদৰ মৰ্টন লয়?

(ii) এটা নেমু স্বাদৰ মৰ্টন লয়?

7. এটা 3 জনীয়া ছাত্ৰৰ দলত দিয়া আছে যে 2 জন ছাত্ৰৰ একে জন্মদিন নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.992। 2 জন ছাত্ৰৰ একে জন্মদিন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

8. এটা মোনাত 3টা ৰঙা আৰু 5টা ক'লা ৰঙৰ আছে। মোনাটোৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। টনা বলটোৰ (i) ৰঙা ৰঙৰ হোৱা (ii) ৰঙা নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

9. এটা বাকচত 5 টা ৰঙা মাৰ্বল, 8 টা বগা মাৰ্বল আৰু 4 টা সেউজীয়া মাৰ্বল আছে। বাকচৰ পৰা যিকোনো এটা মাৰ্বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। মাৰ্বলটোৰ

(i) ৰঙা হোৱা (ii) বগা হোৱা (iii) সেউজীয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

10. এটা টেমাত এশটা 50 পইচা, পঞ্চাশটা 1টকীয়া, বিশটা 2 টকীয়া আৰু দহটা 5টকীয়া মুদ্ৰা আছে। টেমাটো ওপৰমুৰ তল কৰিলে এটা মুদ্ৰা ওলাই পৰাটো সমশক্য হ'লে, মুদ্ৰাটো (i) 50 পইচা হোৱা (ii) 5 টকীয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

11. গোপীয়ে তেওঁৰ একুৱেৰিয়ামৰ বাবে এখন দোকানৰ পৰা এটা মাছ কিনি আনিলে। চিত্ৰ 15.4ত দেখুওৱাৰ দৰে দোকানীজনে 5টা মতা মাছ আৰু 8 মাইকী মাছ থকা চৌকাচাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে যিকোনো এটা মাছ ধৰি দিলে। মাছটো মতা মাছ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

চিত্ৰ 15.4

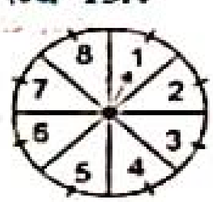
12. এখন খেল এডাল চলন্ত কাড়চিনযুক্ত, যিডাল 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 যিকোনো এটা সংখ্যাৰ পিনে টোৱাই ৰৈ যায় আৰু এই ফলাফল সমশক্য। সম্ভাৱিতা কি যাতে এইডালে টৈ ৰয়—

(i) 8ত?

(ii) এটা অযুগ্ম সংখ্যাত?

(iii) 2তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যাত?

(iv) 9 তকৈ সৰু এটা সংখ্যাত?



চিত্ৰ 15.5

13. এটা লুডুগুটি এবাৰ মাৰি পঠিওৱা হৈছে।

(i) এটা মৌলিক সংখ্যা,

(ii) 2 আৰু 6 ৰ মাজৰ এটা সংখ্যা;

(iii) এটা অযুগ্ম সংখ্যা, পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. ভালদৰে মিহলোৱা 52 টা কাৰ্ড থকা এযোৰ তাচপাতৰ পৰা এটা কাৰ্ড টানি লোৱা হ'ল।

(i) এটা ৰঙা ৰঙৰ ৰজা (ii) এটা মুখ কাৰ্ড

(iii) এটা ৰঙা মুখ কাৰ্ড (iv) হৰতনৰ গোলাম

(v) এটা ইস্কাপন (vi) ৰোহিতনৰ ৰাণী, পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

15. ৰোহিতনৰ পাঁচটা কাৰ্ড— দহ, গোলাম, ৰাণী, ৰজা আৰু টেক্কা তলমুৱা কৰি ভালদৰে মিহলোৱা হ'ল। এটা কাৰ্ড যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল।

(i) কাৰ্ডটো ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

(ii) যদি ৰাণী টনা হয় আৰু একাষৰীয়াকৈ ৰখা হয়, দ্বিতীয় কাৰ্ডটো টানিলে (ক) এটা টেক্কা (খ) এজনী ৰাণী পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

16. 12 টা বেয়া কলম দুৰ্ভাগ্যৱশত 132 টা ভাল কলমৰ লগত মিহলি হ'ল। মাত্ৰ চকুৰে চাই এটা কলম ভালনে বেয়া কোৱাটো সম্ভৱ নহয়। গোটটোৰ পৰা এটা কলম তুলি লোৱা হ'ল, কলমটো ভাল হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

17. (i) 20 টা বাল্বৰ টোপোলা এটাৰ 4 টা বাল্ব বেয়া। টোপোলাটোৰ পৰা এটা বাল্ব যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বাল্বটো বেয়া হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

(ii) ধৰা হ'ল (i)ত টনা বাল্বটো বেয়া নহয় আৰু ইয়াক পুনঃস্থাপন কৰা নহ'ল। এতিয়া বাকীবিলাকৰ পৰা এটা বাল্ব টনা হ'ল। এই বাল্বটো বেয়া নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

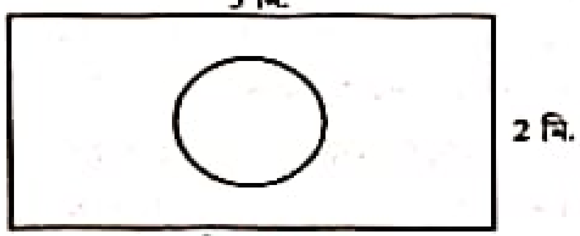
18. এটা বাকচত 1ৰ পৰা 90 নম্বৰ দি থোৱা 90 খন ডিচ্‌ক (থাল) আছে। যদি এখন থাল যাদৃচ্ছিকভাৱে বাকচৰ পৰা টনা হয় তেন্তে ইয়াত (i) এটা দুটা অংকৰ সংখ্যা, (ii) এটা পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যা, (iii) 5 ৰে হৰণ যোৱা এটা সংখ্যা, লিখি থোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

19. এজন শিশুৰ এটা লুডুগুটি আছে যাৰ ছয়খন পিঠিৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আখৰ ওলায়।

A	B	C	D	E	A

গুটিটো এবাৰ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। (i) A, (ii) D ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?

20*. চিত্ৰ 15.6. ত দেখুওৱাৰ দৰে ধৰা হওক তুমি এটা লুডুগুটি এখন আয়তাকাৰ ক্ষেত্ৰত পেলাইছা। 1মিঃ ব্যাসৰ এটা বৃত্তৰ ভিতৰত এইটো পতিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?



চিত্ৰ 15.6

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

21. 144 টা বলপেন থকা এক মুঠা বলপেনত 20 টা বলপেন বেয়া আছে আৰু বাকীবোৰ ভাল। নুবিয়ে এটা কলম কিনিব যদিহে ই ভাল হয় আৰু বেয়া হ'লে নিকিনে। দোকানীয়ে যাদৃচ্ছিকভাবে এটা কলম আনিলে আৰু তাইক দিলে। সম্ভাৱিতা কি যাতে,

(i) তাই এইটো কিনে,

(ii) তাই এইটো নিকিনে?

22. উদাহৰণ (13) লোৱা। (i) তলৰ তালিকাখন সম্পূৰ্ণ কৰা :

ঘটনা 'দুটা গুটিত সংখ্যাৰ সমষ্টি'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাৱিতা	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) এজন ছাত্ৰই যুক্তি দিলে যে, তাত '11 টা সম্ভাব্য ফলাফল 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 আৰু 12। সেইকাৰণে, সিহঁতৰ প্ৰত্যেকৰে সম্ভাৱিতা $\frac{1}{11}$। তুমি এই যুক্তিত একমতনে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

23. এটা খেল হ'ল— এটা এটকীয়া মুদ্ৰা লৈ 3 বাৰ টচ্ কৰা আৰু প্ৰত্যেকবাৰতে ইয়াৰ ফলাফল লিখি ৰাখা। হানিফ খেলখনত জয়ী হ'ব যদি সি আটাইবোৰ ফলাফল একে পায় অৰ্থাৎ তিনিটা মুণ্ড বা তিনিটা পুচ্ছ পায় আৰু অন্যথাতে পৰাজিত হ'ব। হানিফ খেলখনত পৰাজিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

24. এটা লুডুগুটি দুবাৰ মাৰি পঠিওৱা হ'ল। সম্ভাৱিতা কি যাতে

(i) এবাৰো 5 নোলায়? (ii) অন্ততঃ এবাৰ 5ওলায়?

[ইংগিত : এটা লুডুগুটি দুবাৰ আৰু দুটা লুডুগুটি এবাৰ একেলগে মাৰি পঠিওৱা পৰীক্ষা একে বুলি বিবেচনা কৰা হয়]

25. তলৰ কোনকেইটা উক্তি সত্য আৰু কোনকেইটা অসত্য? তোমাৰ উত্তৰৰ কাৰণ দৰ্শোৱা।

(i) যদি দুটা মুদ্ৰা একেলগে টচ্ কৰা হয় তেন্তে তাত তিনিটা ফলাফল থাকে— দুয়োটা মুণ্ড, দুয়োটা পুচ্ছ বা প্ৰত্যেকৰে এটা। সেইবাবে, এই ফলাফলৰ প্ৰতিটোৰে সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{3}$.

(ii) যদি এটা লুডুগুটি দলিওৱা হয়, তাত দুটা ফলাফল থাকে এটা অযুগ্ম সংখ্যা আৰু এটা যুগ্ম সংখ্যা। সেইকাৰণে, এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{2}$.

অনুশীলনী 15.2 (ঐচ্ছিক)*

1. দুজন গ্ৰাহক শ্যাম আৰু একতাই একে সপ্তাহত (মঙ্গলবাৰৰ পৰা শনিবাৰলৈ) এখন দোকানলৈ যায়। যিকোনো দিনত তেওঁলোকে দোকানলৈ যোৱাটো সমসম্ভাব্য। দুয়োজনে দোকানলৈ যোৱাৰ সম্ভাবিতা কি— (i) একেদিনত,
(ii) এদিনৰ পিছত এদিন, (iii) ভিন্ন দিনত?

2. এটা লুডুগুটি এনেধৰণে নম্বৰ দিয়া হৈছে যে ইয়াৰ পিঠিবিলাকে 1, 2, 2, 3, 3, 6 সংখ্যা দেখায়। ইয়াক দুবাৰ দলিয়াই দিয়া হ'ল আৰু দুইবাৰৰ মুঠ নম্বৰ লিখি ৰখা হ'ল। তলৰ তালিকাখন সম্পূৰ্ণ কৰা য'ত কেইটামান নম্বৰ দিয়া আছে।

প্ৰথমবাৰ দলিয়াওঁতে পোৱা নম্বৰ

দ্বিতীয়বাৰ দলিয়াওঁতে পোৱা নম্বৰ

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

মুঠ নম্বৰ (i) যুগ্ম, (ii) 6, (iii) অতিকমেও 6 হোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?

3. এটা মোনাত 5 টা ৰঙা বল আৰু কিছুমান নীলা বল আছে। যদি এটা নীলা বল টনাৰ সম্ভাবিতা সেই ৰঙা বলৰ সম্ভাবিতাৰ দুগুণ হয় তেন্তে মোনাত থকা নীলা বলৰ-সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

4. এটা বাকচত 12 টা বল আছে য'ত x টা বল ক'লা। যদি এটা বল বাকচৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হয় তেন্তে এইটো ক'লা হোৱাৰ সম্ভাবিতা কি?
যদি 6টা আৰু অতিৰিক্ত ক'লা বল বাকচত ভৰোৱা হয়, ক'লা বল পোৱাৰ সম্ভাবিতা পূৰ্বতে পোৱা সম্ভাবিতাৰ দুগুণ। x নিৰ্ণয় কৰা।

5. এটা পাত্ৰত 24 টা মাৰ্বল, কিছুমান সেউজীয়া আৰু আনবোৰ নীলা আছে। যদি এটা মাৰ্বল পাত্ৰৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হয়, আৰু এইটো সেউজীয়া হোৱাৰ সম্ভাবিতা $\frac{2}{3}$। পাত্ৰটোত থকা নীলা বলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

* পৰীক্ষাৰ দিশৰ পৰা নহয়।

15.3 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাখিনি শিকিলা—

1. পৰীক্ষালব্ধ সম্ভাৱিতা আৰু তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাৰ পাৰ্থক্য।
2. এটা ঘটনা Eৰ তত্ত্বগত (গাণিতিক) সম্ভাৱিতাক P(E)ৰে লিখা হয় আৰু সংজ্ঞা হ'ল—

$$P(E) = \frac{\text{E ৰ সপক্ষে ঘটা ফলাফলৰ সংখ্যা}}{\text{পৰীক্ষাটোৰ সম্ভাব্য সকলো ফলাফলৰ সংখ্যা}}$$

য'ত আমি ফলাফলবোৰ সমশক্য বুলি ধৰোঁ।

3. নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 1।
4. অসম্ভৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা 0।
5. এটা ঘটনা E ৰ সম্ভাৱিতা P(E) এটা সংখ্যা যাতে
   $0 \leq P(E) \leq 1$
6. মাত্ৰ এটা ফলাফলযুক্ত ঘটনাক প্ৰাথমিক ঘটনা বোলে। এটা পৰীক্ষাৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সমষ্টি 1।
7. যিকোনো এটা ঘটনা E ৰ বাবে, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, য'ত $\bar{E}$ হ'ল 'E নহয়', E আৰু $\bar{E}$ ক পূৰক ঘটনা বোলা।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

এটা ঘটনাৰ পৰীক্ষালব্ধ বা অনুভৱিক সম্ভাৱিতা প্ৰকৃততে কি ঘটিল তাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত, আনহাতে এটা ঘটনাৰ তত্ত্বগত সম্ভাৱিতাই কোনো ধাৰণাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি কি ঘটিব তাৰ পূৰ্বাভাস দিয়ে। যদি পৰীক্ষাৰ নিৰীক্ষণবোৰ ক্ৰমাময়ে বঢ়াই গৈ থকা হয় আমি আশা কৰিব পাৰো যে, পৰীক্ষালব্ধ আৰু তত্ত্বগত সম্ভাৱিতা প্ৰায় একে হয়।