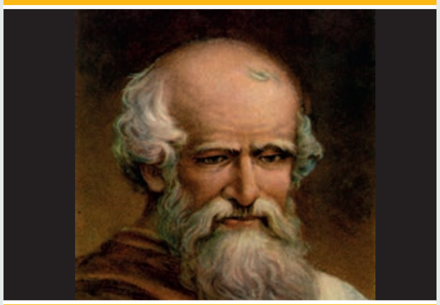
3 தொகை நுண்கணிதம்–II



ஆர்க்கிமிடிஸ்

[கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217]

அறிமுகம்

தொகையீடலின் வரலாறு 2500 ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே தொடங்கப்பட்டு விட்டது. கிரேக்க கணிதவியலார் ஆண்டிஃபான் அவர்கள் [கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 430] எளிய பலகோணங்கள் மற்றும் சிக்கலான வளைவரைகளின் பரப்புகளை "முழுமையாக்கும் முறையில்" காணும் முறையை அறிமுகப்படுத்தினார். (முழுமையாக்கும் முறை என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரப்பை எண்ணற்ற முக்கோணங்களாக பிரித்து பரப்பு காணுதல்) சிக்கலான வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பினை முழுமையாக்கும் முறையில் காணுதலை முதன் முதலில் ஆண்டிஃபன் கண்டுபிடித்திருந்தாலும், கணிதமேதை யுடாக்சஸ் அவர்கள் முழுமையாக்கும் முறையை தர்க்க ரீதியாக மேம்படுத்தினார். பின்வரும் நாள்களில் யூக்ளிட் அவர்கள், வட்டத்தின் பரப்பை காண்பதற்கு முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தினார்.

ஆர்க்கிமிடிஸ் [கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 287 – கி.மு. (பொ.ஆ.மு.) 217] அவர்களும் இதே முழுமையாக்கும் முறையை பயன்படுத்தி, பரவளையத்தால் சூழப்பட்ட பரப்பை கண்டறிந்தார். முழுமையாக்கும் முறையே, தொகையீடல் மூலம் வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பை காணும் முறையாக மேம்படுத்தப்பட்டது. தொகையீடல் மூலம் பரப்பை காணும் முறையை இந்த அத்தியாத்தில் நாம் காண்போம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு, பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்கள் நன்கு புரிந்து கொள்ள இயலும்.

C4YS65

- வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீட்டின் வடிவ கணித விளக்கம்
- வளைவரையால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடலை பயன்படுத்திக் காணல்.
- நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியின் கருத்துக்கள்.
- பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீடலின் பயன்பாடுகள்.

3.1 கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் கீழ் அமைந்த அரங்கத்தின் பரப்பு (The area of the region bounded by the curve)

ஆய அச்சுகளுடன் ஒரு வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையீடல் மூலம் நாம் காணலாம். இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பை கணக்கிடும் முறையையும் இங்கு நாம் காண்போம்.

3.1.1 வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவகணித விளக்கம் (Geometrical Interpretation of Definite Integral as Area under a curve):

$x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x அச்சுடன் $y=f(x)$ எனும் வளைவரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பை நாம் காண்பதாகக் கொள்வோம்.

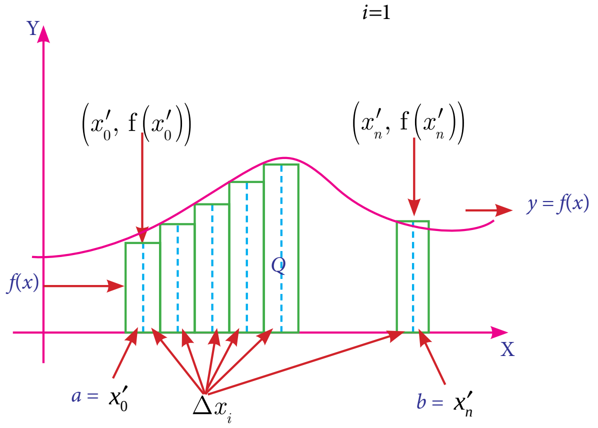
XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 63 3/5/2020 11:17:38 AM

படம் 3.1 லிருந்து. இடைவெளி $[a\ b]$ ஆனது Δx_i அளவுடைய $\left[x_{i-1},\ x_i\right]$ எனும் n சிறு இடைவெளிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

அதாவது $x_i - x_{i-1} = \Delta_{xi}$ ஏதேனும் ஒரு $x_i' \in \left[x_{i-1},\ x_i\right]$க்கு $f\left(x_i'\right)$ என்பது Δx_i அடிப்பக்கமாக கொண்ட n செவ்வகங்களின் உயரம் என்க.

i வது செவ்வகத்தின் பரப்பு $A_i = \Delta x_i f\left(x_i'\right)$.

சூழப்பட்ட மொத்தப்பரப்பு $A = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i'\right)\Delta x_i$



படம் 3.1

வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வரையறை யிலிருந்து $f(x)$ என்பது $[a,b]$, $a < b$ இல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடானது

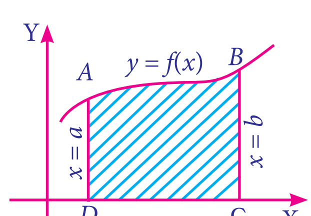
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i'\right)\Delta x_i \text{ ஆகும்.}$$

வளைவரைக்கு கீழ் அமைந்த பரப்பானது, செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கையை எண்ணற்றவை யாக அதிகரிக்கும் பொழுது முழுமையாகிறது. இதுவே வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடலின் வடிவ கணித விளக்கமாகும்.

$y=f(x)$ என்ற வளைவரை, x அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பானது,

$$A = \int_a^b y dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

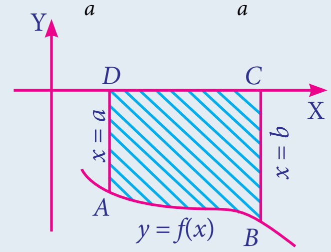


படம் 3.2

குறிப்பு

(i) $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ எனும் எல்லைக்குள், x –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு, x அச்சின் கீழ் அமையும் எனில்,

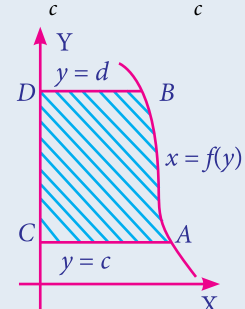
$$A = \int_a^b -y\ dx = -\int_a^b f(x)dx$$



படம் 3.3

(ii) $x = f(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y=c$ மற்றும் $y=d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு y –அச்சுக்கு வலப்புறம் அமையும் எனில்,

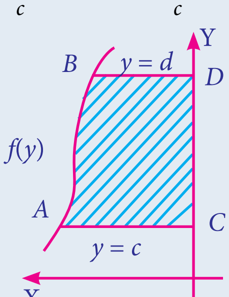
$$A = \int_c^d x dy = \int_c^d f(y)dy$$



படம் 3.4

(iii) $x = f(y)$ எனும் வளைவரையானது $y=c$ மற்றும் $y=d$ எனும் எல்லைக்குள் y –அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு y–அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில்,

$$A = \int_c^d -x dy = -\int_c^d f(y)dy$$



படம் 3.5

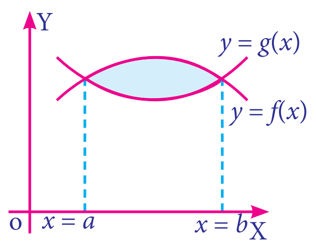
XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 64 3/5/2020 11:17:45 AM

இரு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு (Area between two curves)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $f(x) > g(x), a \le b$ எனுமாறு உள்ள, தொடர்ச்சியான இரு சார்புகள் என்க.

$x=a$ மற்றும் $x=b$ எனும் எல்லைகளுக்குள் இவ்வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx.$$

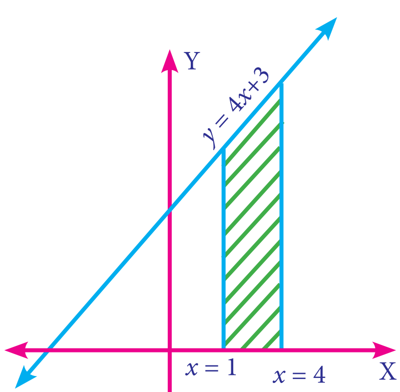


படம் 3.6

எடுத்துக்காட்டு 3.1

$y = 4x+3$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x=1$ மற்றும் $x=4$ ஆகியவற்றுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.7

$$\text{பரப்பு} = \int_1^4 y\,dx$$

$$= \int_1^4 (4x+3)\,dx$$

$$= \left[2x^2 + 3x \right]_1^4 = 32 + 12 - 2 - 3$$

$= 39$ சதுர அலகுகள்.

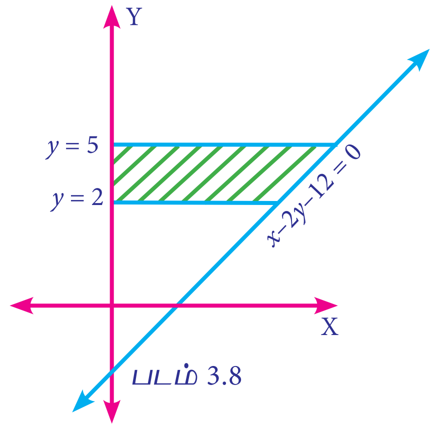
எடுத்துக்காட்டு 3.2

$x - 2y - 12 = 0$ என்ற வளைவரையானது y -அச்சு, $y = 2$ மற்றும் $y = 5$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x - 2y - 12 = 0$$

$$x = 2y + 12$$



படம் 3.8

தேவைப்படும் பரப்பு

$$= \int_2^5 x\,dy$$

$$= \int_2^5 (2y+12)\,dy = \left[y^2 + 12y \right]_2^5$$

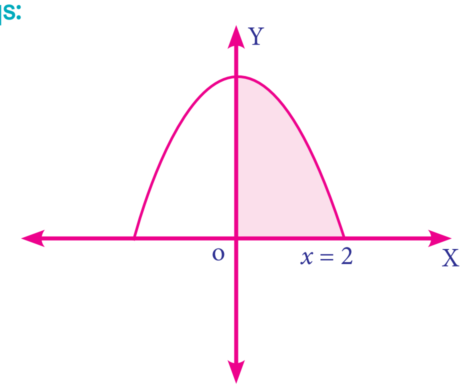
$= (25+60) - (4+24) = 57$ சதுர அலகுகள்.

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?**
>
> $y = mx+c$ என்ற கோடு $x = 0$ மற்றும் $x = a$ எனும் எல்லைகளுக்குள் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு $= \left| \frac{1}{2} (a)[(x = 0$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$) + (x = a$ எனும்போது y -ன் மதிப்பு$)] \right|$

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$y = 4 - x^2$ என்ற பரவளையம், x -அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ என்ற கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.9

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 65 3/5/2020 11:17:48 AM

$$y = 4 - x^2$$

தேவையான பரப்பளவு $= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

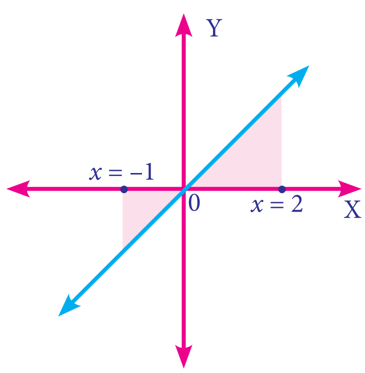
$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3}$$

$= \frac{16}{3}$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$y = x$ மற்றும் $x = -1$, $x = 2$ எனும் எல்லைகளுக்குட்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.10

தேவைப்படும் பரப்பு $= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^2 x\,dx$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{4}{2} - 0\right]$$

$= \frac{5}{2}$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$y^2 = 8x$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைப் காண்க.

தீர்வு

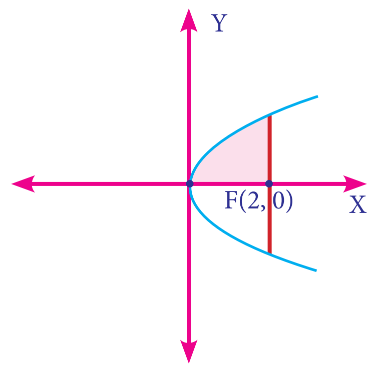
$$y^2 = 8x \qquad (1)$$

திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$, உடன் ஒப்பிட

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு : $x = 2$



படம் 3.11

சமன்பாடு (1) ஆனது x -அச்சை பொருத்து சமச்சீர் ஆதலால்,

தேவையான பரப்பு = 2 [முதல் கால்பகுதியில் சமன்பாடு 1ஆனது $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு]

$$= 2\int_0^2 y\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8x}\,dx = 2\left(2\sqrt{2}\right)\int_0^2 x^{1/2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 = 4\sqrt{2} \times 2 \times \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$$

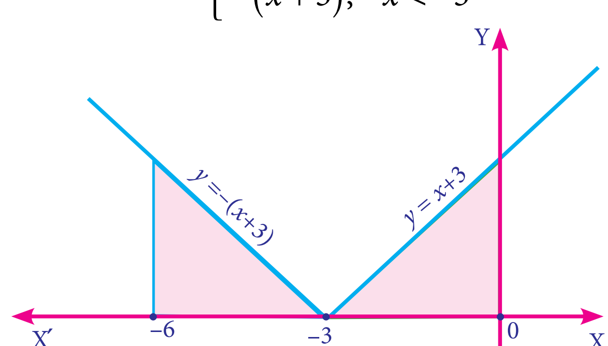
$= \frac{32}{3}$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

$y = |x + 3|$ என்ற வளைவரையை வரைக. மேலும் $\int_{-6}^{0} |x + 3|\,dx$ -இன் மதிப்பைக்காண்க.

தீர்வு:

$$y = |x + 3| = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -(x + 3), & x < -3 \end{cases}$$



படம் 3.12

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 66 3/5/2020 11:17:53 AM

தேவைப்படும் பரப்பு $= \int_{-6}^{0} ydx$

$$= \int_{-6}^{-3} y\,dx + \int_{-3}^{0} ydx$$

$$= \int_{-6}^{-3} -(x+3)dx + \int_{-3}^{0} (x+3)dx$$

$$= -\left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]_{-3}^{0}$$

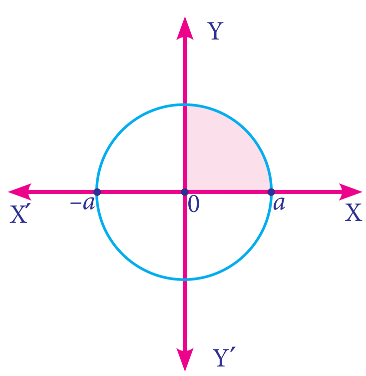
$$= -\left[0-\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{2}-0\right] = 9 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி a அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் பரப்பைக்காண்க.

[குறிப்பு: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$]

தீர்வு



படம் 3.13

வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2 + y^2 = a^2$ ... (1)

$y = 0$ என (1) -ல் பிரதியிட $x^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x = \pm a$

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஆனது இரு அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் ஆகும். எனவே

தேவைப்படும் பரப்பு = 4 [முதல் கால்பகுதியில் $x = 0$, $x = a$ எனும் எல்லைக்குள் வரையறுக்கப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு]

$$= 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

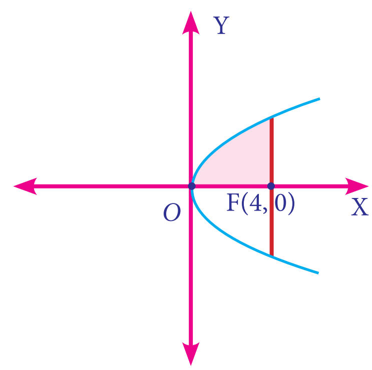
$$= 4\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)\right] = 4\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right) = 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$= \pi a^2$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்தி $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையம் $x = 4$ என்ற கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 3.14

$y^2 = 16x$ என்பது வலது புறமாக திறந்திருக்கும் பரவளையமாகும்.

தேவைப்படும் பரப்பு $= 2\int_a^b ydx$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{16x}\,dx$$ (பரவளையம் x- அச்சை பொருத்து சமச்சீர்)

$$= 8\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 8\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3}\left((4)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{128}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 3.1

1. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $2y + x = 8$ என்ற கோடு, x -அச்சு மற்றும் $x = 2$, $x = 4$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

2. $y-2x-4=0$ என்ற கோடு, $y=1$ மற்றும் $y=3$ எனும் எல்லைக்குள் y–அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

3. $y^2=4ax$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

4. $y = x$ எனும் கோடு, x -அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

5. தொகையிடலை பயன்படுத்தி $y-1=x$ என்ற கோடு, x -அச்சு, $x = -2$ மற்றும் $x = 3$ என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

6. தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $y=4x^2$ என்ற பரவளையம், $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $y = 4$ எனும் கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

7. $y=x^2$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $y = 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

3.2 பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள் (Application of Integration in Economics and Commerce).

இதற்கு முந்தைய பாடப்பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு, மொத்த வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச்சார்பு, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளை(க்) கற்றோம். அதற்கு மாறாக இறுதிநிலைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் மொத்த சார்பைக் காணும் முறையை இங்கு காணலாம்.

3.2.1. இறுதிநிலை செலவுச்சார்பிலிருந்து மொத்த செலவுச்சார்பைக் காணுதல் (Cost functions from marginal cost functions)

மொத்த செலவுச் சார்பு C மற்றும் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு எனில்,

இறுதி நிலைச்செலவுச் சார்பு: $MC=\dfrac{dC}{dx}$ ஆகும்.

$\therefore$ செலவுச் சார்பு : $C=\int (MC)\,dx+k$

இங்கு k என்பது தொகையீட்டின் மாறிலி. கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பயன்படுத்தி k -ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

மேலும், சராசரி செலவுச் சார்பு : $AC=\dfrac{C}{x},\ x\neq 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

காலணிகளின் உற்பத்தியின் எண்ணிக்கை x–ஐ பொறுத்த இறுதிநிலை செலவு $6+10x-6x^2$ என்க. ஒரு ஜோடி காலணிகள் உற்பத்திக்கான செலவு ₹12 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு :

$$MC = 6+10x-6x^2$$

$$\begin{aligned} C &= \int MC\,dx + k \\ &= \int \left(6+10x-6x^2\right) dx + k \\ &= 6x+5x^2-2x^3+k \qquad (1) \end{aligned}$$

$x = 2$ எனும் போது $C = 12$

$$\therefore 12 = 12+20-16+k$$

$$\boxed{k=-4}$$

$$C = 6x+5x^2-2x^3-4$$

சராசரி செலவு : $\dfrac{C}{x}=\dfrac{6x+5x^2-2x^3-4}{x}$

$$=6+5x-2x^2-\frac{4}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10

ஒரு நிறுவனத்தில், x அலகு பொருள்கள் தயாரிப்பதற்கான இறுதிநிலைச் செலவு $MC=125+10x-\dfrac{x^2}{9}$. இதன் மாறாச் செலவு ₹250 எனில் 15 அலகுகள் தயாரிப்பதற்கான செலவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$MC = 125+10x-\frac{x^2}{9}$$

$$\begin{aligned} C &= \int MC\,dx + k \\ &= \int \left(125+10x-\frac{x^2}{9}\right) dx + k \\ &= 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+k \end{aligned}$$

நிலையான செலவு : $k = 250$

$$\therefore C = 125x+5x^2-\frac{x^3}{27}+250$$

$x = 15$ எனில்,

$$C = 125\,(15) + 5\,(15)^2 - \frac{(15)^3}{27} + 250$$

$$= 1875 + 1125 - 125 + 250$$

$$C = ₹\ 3{,}125$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 2 + 5e^x$ எனில், (i) $C\,(0)=100$ எனும் போது C யைக் காண்க. (ii) சராசரிச் செலவு AC -ஐக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MC = 2 + 5e^x$

$$C = \int MC\ dx + k$$

$$= \int \left(2 + 5e^x\right) dx + k$$

$$= 2x + 5e^x + k$$

(i) $x = 0,\ C = 100 \Rightarrow$

$$100 = 2(0) + 5\left(e^0\right) + k$$

$$\boxed{k = 95}$$

$$\therefore C = 2x + 5\,e^x + 95.$$

(ii) சராசரி விலை $= \dfrac{C}{x} = \dfrac{2x + 5e^x + 95}{x}$

$$AC = 2 + \frac{5e^x}{x} + \frac{95}{x}.$$

வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதம் (Rate of growth or sale)

ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதம் அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்சி அல்லது மொத்த விற்பனையானது

$\int_0^r f(t)\,dt,\ 0 \le t \le r$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

புதிய உற்பத்தி பொருளின் விகிதச் சார்பு $f(x) = 100 - 90\,e^{-x}$ என்க. இங்கு x என்பது சந்தையில் அப்பொருள் கிடைக்கும் நாள்களின் எண்ணிக்கை என்க. முதல் நான்கு நாள்களில் அந்த பொருளின் மொத்த விற்பனையைக் காண்க. ($e^{-4}=0.018$)

தீர்வு:

மொத்த விற்பனை $= \int_0^4 \left(100 - 90\,e^{-x}\right) dx$

$$= \left(100\,x + 90\,e^{-x}\right)_0^4$$

$$= 400 + 90\,e^{-4} - (0 + 90)$$

$$= 400 + 90(0.018) - 90$$

$= 311.62$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 3.13

ஒரு நிறுவனம் 200 தொழிலாளர்களைக் கொண்டு வாரத்திற்கு 50,000 அலகுப் பொருள்களை உற்பத்தி செய்கிறது. அதிகபடியான x-தொழிலாளர்களை வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் பொருளின் உற்பத்தி வீதச் சார்பு $300 - 5x^{2/3}$ ஆகும். 64 தொழிலாளர்களை மிகுதியாக வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் அந்நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் பொருள்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

x தொழிலாளர்களைக் கொண்டு அதிகபடியாக உற்பத்தி செய்யும் பொருள்கள் p என்க.

$$\frac{dp}{dx} = 300 - 5x^{2/3}$$

$$p = \int_0^{64} \left(300 - 5x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \left[300x - 3x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{64}$$

$$= 300 \times 64 - 3(64)^{5/3}$$

$$= 16128$$

$\therefore$ கூடுதலாக உற்பத்தி செய்யப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை 16,128 ஆகும்.

$\Rightarrow$ 264 தொழிலாளர்களால் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் எண்ணிக்கை.

$= 50000 + 16128 = 66{,}128$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு நிறுவனத்தின் விளம்பர பிரச்சாரத்திற்குப் பிறகு அதன் விற்பனை விகிதச் சார்பு $f(t) = 3000e^{-0.3t}$ ஆகும். இங்கு t என்பது விளம்பரத்திற்கு பிறகு உள்ள மாதங்களின்

எண்ணிக்கையை குறிக்கும். 4 மாதங்களுக்குப் பிறகு அந்நிறுவனத்தின் ஒட்டுமொத்த விற்பனையையும் மற்றும் ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனையையும் காண்க. விளம்பரத்திற்கு பிறகு அந்நிறுவனம் பெறும் மொத்த விற்பனைக் காண்க. $\left[e^{-1.2}=0.3012,\ e^{-1.5}=0.2231\right]$.

தீர்வு:

t மாதங்களுக்குப் பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை $F(t)$ எனில் நிறுவனத்தின் விற்பனை விகிதச் சார்பு $\frac{d}{dt}F(t)=f(t)$

$$\therefore \text{F}(t) = \int_0^t f(t)dt$$

4 மாதங்களுக்குப் பிறகு ஒட்டுமொத்த விற்பனை

$$\text{F}(4) = \int_0^4 f(t)dt$$

$$= \int_0^4 3000e^{-0.3t}\,dt$$

$$= 3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_0^4$$

$$= -10000\left[e^{-1.2}-e^{0}\right]$$

$$= -10000[0.3012-1]$$

$$= 6988$$

(ii) ஐந்தாவது மாதத்தின் விற்பனை

$$= \int_4^5 3000e^{-0.3t}\,dt$$

$$= 3000\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3}\right]_4^5$$

$$= -10000\left[e^{-1.5}-e^{-1.2}\right]$$

$$= -10000[0.2231-0.3012]$$

$= 781$ அலகுகள்

விளம்பரத்திற்கு பிறகு நிறுவனத்தின் மொத்த விற்பனை

$$= \int_0^\infty 3000e^{-0.3t}\,dt = \frac{3000}{-0.3}\left[e^{-0.3t}\right]_0^\infty$$

$$= -10000[0-1]$$

$= 10000$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

₹6,40,000 விலையுள்ள ஒரு இயந்திரமானது $f(t) = 20000\,t$ (t-ஆண்டுகளில்) என்ற சேமிப்பு விகிதச் சார்பின் செலவு சேமிப்புடன் ஈடு செய்ய எத்தனை ஆண்டுகளாகும் ?

தீர்வு:

செலவு சேமிப்பு $S(t) = \int_0^t 20000\,t\,dt$

$= 10000\,t^2$

மொத்த செலவை ஈடுசெய்வதற்கான காலம்,

$10000\,t^2 = 640000$

$t^2 = 64$

$t = 8$

8 ஆண்டுகளில் இயந்திரத்தின் செலவை ஈடு செய்யலாம்.

3.2.2 இறுதிநிலை வருவாய் சார்பிலிருந்து வருவாய்ச்சார்பு மற்றும் தேவைச்சார்பு (Revenue function and Demand function from Marginal revenue function)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இறுதிநிலை வருவாய் (Marginal revenue) சார்பிலிருந்து மொத்த வருவாய் (Revenue function) மற்றும் தேவைச் சார்பு(Demand function) காணுதல்.

R என்பது வருவாய் சார்பு எனில்

இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு: $MR=\frac{dR}{dx}$

x யை பொறுத்து தொகைக் காண,

வருவாய் சார்பு : $R=\int(MR)\,dx+k.$

இதில் k என்பது ஒரு மாறிலி, இம்மாறிலியின் மதிப்பை $x=0$ மற்றும் $R=0$ எனப் பிரதியிட்டு காணலாம்.

தேவையானச் சார்பு : $p=\frac{R}{x},\quad x\neq 0.$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

இறுதி நிலை வருவாய் சார்பு $MR=35+7x-3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MR = 35+7x-3x^2$

$$R = \int (MR)\, dx + k$$

$$= \int \left(35+7x-3x^2\right) dx + k$$

$$R = 35x+\frac{7}{2}x^2 - x^3 + k$$

$x=0$ எனும்பொழுது $R = 0 \quad \therefore\ k=0$

$$R = 35x+\frac{7}{2}x^2 - x^3$$

தேவையானச் சார்பு : $p = \dfrac{R}{x}$

$$p = 35+\frac{7}{2}x - x^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = \dfrac{a}{(x+b)^2} - c$. இங்கு x என்பது பொருள்களின் உற்பத்தி மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள் எனில், தேவைச் சார்பு $x = \dfrac{a}{b(p+c)} - b$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $MR = a(x+b)^{-2} - c$

$$R = \int a(x+b)^{-2}\, dx - c\int dx$$

$$R = \frac{a(x+b)^{-1}}{-1} - cx + k$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - cx + k$$

$x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0$

$$\therefore\ 0 = -\frac{a}{b} - c(0) + k$$

$$k = \frac{a}{b}$$

$$R = -\frac{a}{x+b} - cx + \frac{a}{b}$$

$$= \frac{-ab + a(x+b)}{b(x+b)} - cx$$

$$R = \frac{ax}{b(x+b)} - cx$$

தேவைச் சார்பு : $p = \dfrac{R}{x}$

$$p = \frac{a}{b(x+b)} - c$$

$$p+c = \frac{a}{b(x+b)}$$

$$b(x+b) = \frac{a}{p+c}$$

$$x = \frac{a}{b(p+c)} - b.$$

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயிலிருந்து மீப்பெரு இலாபத்தைக் காணுதல்:

'P' என்பது இலாபச் சார்பு எனில்,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(R-C) = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = MR - MC$$

இருபுறமும் x –யைப் பொறுத்து தொகைக் காண,

$$P = \int \frac{dP}{dx} = \int (MR - MC)\, dx + k$$

இங்க k என்பது தொகையிடல் மாறிலி ஆகும். கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு k–ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

கொடுக்கப்பட்ட இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் வருவாய் சார்புகள் முறையே $C'(x) = 50 + \dfrac{x}{50}$ மற்றும் $R'(x) = 60$. மாறாச்செலவு செலவு ₹ 200 எனில், மீப்பெரு இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி, $C(x) = \int C'(x)\, dx + k_1$

$$= \int \left(50 + \frac{x}{50}\right) dx + k_1$$

$$C(x) = 50x + \frac{x^2}{100} + k_1$$

மாறாச் செலவு : $k_1 = 200$ (கணக்கின்படி)

செலவுச்சார்பு : $C(x) = 50x + \dfrac{x^2}{100} + 200$ ...(1)

இறுதிநிலை வருவாய்ச்சார்பு : $R'(x) = 60$

$$R(x) = \int R'(x)\, dx + k_2$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 71 3/5/2020 11:18:20 AM

$$= \int 60\, dx + k_2$$

$$= 60x + k_2$$

உற்பத்தி அளவு $= 0$ எனில் வருவாய் $= 0$ ஆகும்.

அதாவது, $x = 0$ எனும்பொழுது $R = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$\therefore$ வருவாய் : $R(x) = 60x$ (2)

இலாபம் : P = மொத்த வருவாய் – மொத்தச் செலவு

$$= 60x - 50x - \frac{x^2}{100} - 200$$

$$= 10x - \frac{x^2}{100} - 200$$

$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{x}{50}$$

மீப்பெரு இலாபத்திற்கு, $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 500}$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-1}{50} < 0$$

$\therefore$ $x = 500$ இல்,

மீப்பெரு இலாபம் : $P = 10(500) - \frac{(500)^2}{100} - 200$

$$= 5000 - 2500 - 200$$

$$= 2300$$

மீப்பெரு இலாபம் = ₹ 2,300.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

ஒரு நிறுவனத்தின் பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் முறையே $C'(x) = 8 + 6x$ மற்றும் $R'(x) = 24$ என்க. பொருள்களின் உற்பத்தி பூச்சியம் எனும் பொழுது அதன் மொத்த செலவும் பூச்சியம் எனில் மொத்த இலாபத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி $MC = 8 + 6x$

$$C(x) = \int (8 + 6x)\, dx + k_1$$

$$= 8x + 3x^2 + k_1 \quad (1)$$

$x = 0$ எனும் பொழுது $C = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$$\therefore C(x) = 8x + 3x^2 \quad (2)$$

மேலும் $MR = 24$

$$R(x) = \int MR\, dx + k_2$$

$$= \int 24\, dx + k_2$$

$$= 24x + k_2$$

$x = 0$ எனில், வருவாய் $= 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$$R(x) = 24x \quad (3)$$

இலாபச்சார்பு $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 24x - 8x - 3x^2$$

$$= 16x - 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

விற்பனை செய்யப்பட்ட x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு (ரூபாய் ஆயிரங்களில்) $10 + e^{-0.05x}$ எனில், விற்பனை அளவு 100 அலகுகளாக இருக்கும்போது மொத்த வருவாயைக் காண்க $(e^{-5} = 0.0067)$

தீர்வு:

இறுதிநிலை வருவாய் $R'(x) = 10 + e^{-0.05x}$

100 அலகுகளுக்கான விற்பனை வருவாய்

$$R = \int_0^{100} \left(10 + e^{-0.05x}\right) dx$$

$$= \left[10x + \frac{e^{-0.05x}}{-0.05}\right]_0^{100}$$

$$= \left(1000 - \frac{e^{-5}}{0.05}\right) - \left(0 - \frac{100}{5}\right)$$

$$= 1000 + 20 - (20 \times 0.0067)$$

$$= 1019.87$$

$$= 1019.87 \times 1000$$

மொத்த வருவாய் = ₹ 10,19,870

எடுத்துக்காட்டு 3.21

ஒரு இயந்திரத்தின் ஆயுட் காலம் 12 ஆண்டுகளாக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. அதன் விலை ₹5,00,000 என்க. இயந்திரத்திற்கான காப்புத்தொகை ₹30,000. அந்த இயந்திரத்திற்கு, ஒரு வருடத்திற்கான வாடகை ₹72,000 ஆக உள்ளது. நிகழ்காலத்தில் செலுத்தப்படும் வாடகைக்கான வட்டி விகிதம் 9%

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 72 3/5/2020 11:18:26 AM

எனில், அந்த இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது ஆதாயமானதா என்பதை ஆராய்க. ($e^{-1.08}$ = 0.3396)

தீர்வு:

t வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^t 72000e^{-0.09t}\,dt$

12 வருடத்திற்கான நிகழ்கால மதிப்பு $= \int_0^{12} 72000e^{-0.09t}\,dt$

$= 72000\left[\dfrac{e^{-0.09t}}{-0.09}\right]_0^{12}$

$= \dfrac{72000}{-0.09}\left[e^{-0.09(12)} - e^{0}\right]$

$= -800000\left[e^{-1.08} - e^{0}\right]$

$= -800000[0.3396 - 1]$

$= 528320$

இயந்திரத்திற்கான செலவு $= 500000 - 30000$

$= 470000$

எனவே இயந்திரத்தை வாடகைக்கு பெறுவது இலாபகரமானது அல்ல.

ஆதலால் இயந்திரத்தை வாங்குவதே சிறந்தது.

சரக்கு தேக்க நிலை (Inventory) :

கொடுக்கப்பட்ட சரக்கின் கையிருப்பு $I(x)$ மற்றும் ஒரு அலகிற்கான சரக்கின் தேக்கச் செலவு (C_1) எனில், T காலத்திற்கான சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு = $C_1\int_0^T I(x)dx$.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

ஒரு நிறுவனம் 30 நாள்களுக்கு ஒருமுறை 200 மகிழ்வுந்துகளை பெறுகிறது, அனுபவத்தில், சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் தொடர்புடையது எனத் தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலிருந்து $I(x) = 200 - 0.2x$ என்க. தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹3.5 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவை தொகையீடல் மூலம் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $I(x) = 200 - 0.2x$

C_1 = Rs. 3.5

$T = 30$

மொத்த தேக்கச் செலவு= $C_1\int_0^T I(x)dx = 3.5\int_0^{30}(200-0.2x)dx$

$3.5\left(200x - \dfrac{0.2x^2}{2}\right)_0^{30} =$ ₹ 20,685

தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை (Amount of an Annuity)

செலுத்தப்பட்ட மொத்த தவணை பங்கீட்டு தொகை மற்றும் அந்த கால கட்டத்தில் செலுத்தப்பட்ட மொத்த வட்டி ஆகியவற்றின் கூடுதல், தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை எனப்படும். ஒரு ஆண்டிற்கு r கூட்டு வட்டி வீதத்தில், செலுத்தப்படும் தவணை பங்கீட்டு தொகை ₹ p எனில், N தவணைகளில் செலுத்தப்படும தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை

$$A = \int_0^N p e^{rt}\,dt$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23

திரு. அருள் என்பவர் ABC வங்கியில், ஒவ்வொரு ஆண்டிற்கும் ₹10,000 -ஐ ஆண்டிற்கு 10% கூட்டு வட்டியில் 5 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்துகிறார். 5 ஆண்டுகளின் முடிவில் அவர் வங்கி கணக்கில் உள்ள மொத்த தொகை எவ்வளவு? $\left(e^{0.5} = 1.6487\right)$

தீர்வு:

$p = 10000 \quad r = 0.1, \quad N = 5$

மொத்த தொகை $= \int_0^5 10000e^{0.1t}\,dt$

$= \dfrac{10000}{0.1}\left(e^{0.1t}\right)_0^5$

$= 100000\left[e^{0.1\times 5} - e^{0}\right]$

$= 100000\left(e^{0.5} - 1\right)$

$= 100000\,[0.6487]$

= ₹ 64,870

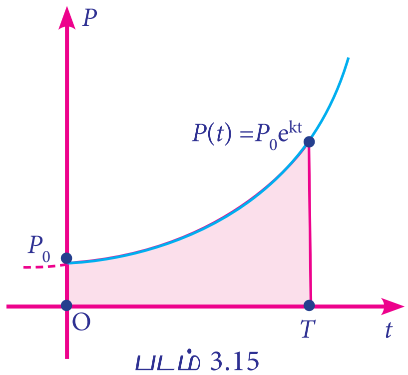
இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு (Consumption of a Natural Resource)

t வருடத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாட்டிற்கான சார்பு $p(t)$ என்க. k பெருக்கு வீதத்தில் இயற்கை வளத்தின் பயன்பாடு

அதிகரிக்கிறது எனில், T வருடத்தில் பயன்படுத்தப்படும் இயற்கை வளத்தின் அளவு

$$\int_0^T p_0 e^{kt}\, dt = \frac{p_0}{k}\left(e^{kT}-1\right)$$

இங்கு p_0 என்பது ($t = 0$ எனும் போது) இயற்கை வளத்தின் தொடக்கப் பயன்பாடு.



படம் 3.15

எடுத்துக்காட்டு 3.24

2000 ஆம் ஆண்டில் உலக தங்க உற்பத்தியின் அளவு 2547 மெட்ரிக் டன்கள் மற்றும் தங்க உற்பத்தி ஆண்டிற்கு 0.6% பெருக்கு வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. இதே வீதத்தில் தொடர்ந்தால் 2000 -லிருந்து 2013-க்குள் எவ்வளவு டன்கள் தங்கம் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருக்கும்? $[e^{0.078} = 1.0811)$

தீர்வு:

தொடக்க நிலையில் தங்கத்தின் அளவு (t=0 எனும்போது (2000-ஆம் ஆண்டு))

p_0=2,547 மெட்ரிக் டன்கள்.

2000 முதல் 2013 வரை தங்கத்தின் மொத்த

உற்பத்தி $= \int_0^{13} 2547\, e^{0.006t}\, dt$

$$= \frac{2547}{0.006}\left[e^{0.006t}\right]_0^{13}$$

$$= 424500\left(e^{0.078}-1\right)$$

= 34,426.95 மெட்ரிக் டன்கள் (தோராயமாக).

3.2.3 தேவை நெகிழ்ச்சி கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் தேவைச் சார்பைக் காணுதல் (The demand functions from Elasticity of demand)

$y = f(x)$ எனும் சார்பின் நெகிழ்ச்சி (η) என்பது y-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் x-ன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \dfrac{-p}{x}\dfrac{dx}{dp}$

$$\frac{-dp}{p} = \frac{dx}{x}\cdot\frac{1}{\eta_d}$$

இருபுறமும் தொகைக்கான,

$$-\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{\eta_d}\int \frac{dx}{x}$$

இந்தச் சமன்பாடானது 'p' எனும் தேவைச் சார்பை x-ன் சார்பாக விவரிக்கிறது.

மேலும், வருவாய்ச் சார்பு $R = px$ என்ற கோட்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

நெகிழ்ச்சி சார்பு $\dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{x}{x-2}$. $x = 6$ மற்றும் $y = 16$ எனும் போது அதன் தொடக்க நிலைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-2}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x-2}$$

$$\log y = \log(x-2)+\log k$$

$$y = k(x-2)$$

இங்கு $x = 6$, எனும்போது $y = 16 \Rightarrow 16 = k(6-2)$

$$k = 4$$

$$y = 4\,(x-2)$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 74 3/5/2020 11:18:36 AM

எடுத்துக்காட்டு 3.26

ஒரு பொருளின் விலை p -ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \dfrac{p+2p^2}{100-p-p^2}$ எனில் விலை 5 மற்றும் தேவை 70 எனும் பொழுது அதன் தேவை சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\eta_d = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p(2p+1)}{100-p-p^2}$$

$$\frac{-dx}{x} = \frac{-(2p+1)}{p^2+p-100}dp$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2p+1}{p^2+p-100}dp$$

$$\log x = \log(p^2+p-100)+\log k$$

$$\therefore \quad x = k(p^2+p-100)$$

இங்கு $x = 70, \quad p = 5,$

$$70 = k(25+5-100)$$

$$\Rightarrow k = -1$$

எனவே, $x = 100-p-p^2$

$$R = px$$

வருவாய் சார்பு : $R = p(100-p-p^2)$

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு இயந்திரத்தை சரிபார்ப்பதற்கான செலுவானது மணிக்கு ₹10,000 ஆகும். அதன் பரமாரிப்பு செலவு x கி.மீ பயன்பாட்டிற்கு பிறகு, மணிக்கு $f(x) = 2x-240$ என்க. இயந்திரத்தை சரிப்பார்த்தப்பிறகு, 300 மணி நேரம் பயணிப்பதற்கான மொத்த செலவைக் காண்க.

2. ஒரு நெகிழ்ச்சி சார்பு $\dfrac{Ey}{Ex}$ என்பது $\dfrac{Ey}{Ex} = \dfrac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}$ என வரையறுக்கப் படின் $x = 2, y = \dfrac{3}{8}$ எனும் பொழுது அச் சார்பைக் காண்க.

3. ஒரு பொருளின் தேவை x அலகுகள் எனும் பொழுது விலை p –ஐ பொறுத்து தேவை நெகிழச்சி சார்பு $\dfrac{(4-x)}{x}$ எனில், விலை 4 மற்றும் பொருளின் தேவை 2 எனும் பொழுது தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பைக் காண்க.

4. ஒரு நிறுவனம், 30 நாள்களுக்கு ஒரு முறை 500 இருசக்கர வாகனங்களை பெறுகிறது. அனுபவத்தில் சரக்கு கையிருப்பு, இருப்பு நாள்களுடன் (x) உடன் தொடர்புடையது என தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலில் இருநது $I(x) = 500-0.03x^2$, தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹0.3 எனில் 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவைக் காண்க.

5. ஒரு வங்கியானது, வங்கி கணக்கிலுள்ள தொகைக்கு ஆண்டுக்கு 5% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் வட்டியை அளிக்கின்றது எனில், ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ₹1000 செலுத்தும் நபர் ஒருவருக்கு 5 ஆண்டுகளுக்கு கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு?. $(e^{0.25} = 1.284)$.

6. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு $\dfrac{dC}{dx} = 100-10x+0.1x^2$ என்க. அந்நிறுவனத்தின் மாறாச் செலவு ₹500 எனில், அந்நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 300\, x^{\frac{2}{5}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு 0 எனில் மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவு சார்பைக் காண்க.

8. உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு $\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}}$ என்க. $x = 0$ எனும் பொழுது உற்பத்தி செலவு 0 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குளிர்சாதனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு $C'(x) = \dfrac{x^2}{200}+4$. 200 குளிர்சாதனங்களின் உற்பத்திச் செலவைக் காண்க.

10. விற்பனை செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் (₹ ஆயிரங்களில்) சார்பு $5+3\,e^{-0.03\,x}$ எனில், விற்பனை செய்யப்படும்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 75 3/5/2020 11:18:42 AM

100 அலகு பொருள்களின் மொத்த வருவாயை தோராயமாக காண்க. ($e^{-3} = 0.05$)

11. விற்பனை பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = 9 - 4x^2$ எனில், தேவைச் சார்பைக் காண்க.

12. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $\frac{4}{(2x+3)^2} - 1$ எனில், சராசரி வருவாய் சார்பு $P = \frac{4}{6x+9} - 1$ எனக் காட்டுக.

13. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 20e^{-x/10}\left(1 - \frac{x}{10}\right)$ எனில், அதன் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

14. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலை செலவு சார்பு $C'(x) = 5 + 0.13x$, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x) = 18$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹120 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

15. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x) = 1500 - 4x - 3x^2$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவாய் சார்பைக் காண்க.

16. x அலகு பொருள்களுக்கான இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 10 + 3x - x^2$ எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17. உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $MC = \frac{14000}{\sqrt{7x+4}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹18,000 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவுக் காண்க.

18. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் (x) இறுதிநிலைச் செலவு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் விகித்ததில் உள்ளது. மேலும், மாறாச் செலவு ₹5,000 மற்றும் 50 அலகு பொருள்களின் உற்பத்தி செலவு ₹5,625 எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

19. $MR = 20 - 5x + 3x^2$ எனில், மொத்த வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

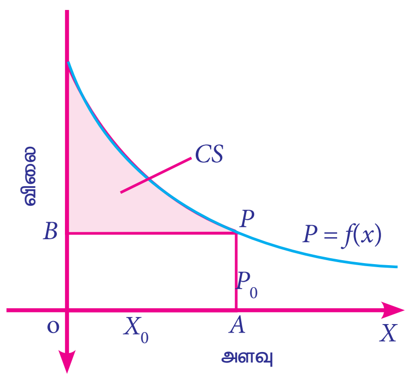
20. $MR = 14 - 6x + 9x^2$ எனில், தேவைச் சார்பு காண்க.

3.2.4 நுகர்வோர் உபரி (Consumer's surplus)

மிகச் சிறந்த பொருளாதார நிபுணர் மார்சல் அவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட கருத்துரு நுகர்வோர் உபரி ஆகும். $p = f(x)$ என்ற தேவைச் சார்பு ஆனது மக்களால் வாங்கப்படும் பொருளின் விலை மற்றும் பொருள்களின் அளவு ஆகியவற்றிக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கும்.

விளக்கமாக, p_0 விலையில் தேவைப்படும் பொருளின் அளவு $x = x_0$ என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 யை விட அதிகவிலையான q_0 க்கு அதே அளவான x_0–ஐ வாங்க விரும்பும் நுகர்வோர் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய நுகர்வோர்கள், நுகர்வோர் உபரி எனப்படும்.

பின்வரும் படத்தில் மேற்கண்ட விவரங்கள் விளக்கப்பட்டுள்ளது. கணக்கிட்டு முறையின்படி நுகர்வோர் உபரி கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கீடு செய்யப்படுகிறது.



படம் 3.16

நுகர்வோர் உபரி (CS) = (தேவை வளைவரைக்கு கீழ் $x = 0$ முதல் $x = x_0$ என்கின்ற எல்லைக்குப்பட்ட பரப்பு) – (செவ்வகம் $OABC$ பரப்பு)

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0 p_0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $y = 36 - x^2$ எனில், $y_0 = 11$ -ல் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை :

$y = 36 - x^2$ மற்றும் $y_0 = 11$

$11 = 36 - x_0^2$

$x_0^2 = 25$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 76 3/5/2020 11:18:47 AM

$x_0 = 5$

$$CS = \int_0^{x_0} (\text{தேவைச்சார்பு})dx - (\text{விலை} \times \text{தேவையளவு})$$

$$= \int_0^5 \left(36 - x^2\right) dx - 5 \times 11$$

$$= \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 55$$

$$= \left[36(5) - \frac{5^3}{3}\right] - 55$$

$$= 180 - \frac{125}{3} - 55 = \frac{250}{3}$$

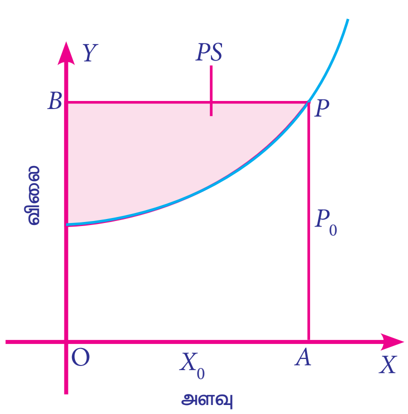
நுகர்வோர் உபரி $= \dfrac{250}{3}$ அலகுகள்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தேவைச் சார்பின் வளைவரை மற்றும் அளிப்புச் சார்பின் வளைவரை ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளி சமநிலைப்புள்ளி எனப்படும். சமநிலைப் புள்ளியில் $q_d = q_s$ ஆகும்.

3.2.5 உற்பத்தியாளர் உபரி (Producer's surplus)

சந்தை விலை 'p' யில் வழங்கப்படும் பொருள்கள் அளிப்புச் சார்பு $g(x)$ என்க. சந்தை விலை p_0 க்கு வழங்கப்படும் பொருளின் அளவு x_0 என்க. ஆனால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலை p_0 க்கு குறைவான விலைக்கு அதே அளவு பொருளை வழங்க விரும்பும் உற்பத்தியாளர்கள் இருக்கக்கூடும். அத்தகைய உற்பத்தியாளர்கள் **உற்பத்தியாளரின் உபரி** எனப்படும்.



படம் 3.17

கணக்கீட்டு முறையில் உற்பத்தியாளர் உபரி (PS) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

PS = (செவ்வகம் OAPB பரப்பு) − ($x = 0$, $x = x_0$ எனும் எல்லைகளுக்குள் அளிப்புச் சார்பு ஏற்படுத்தும் பரப்பு)

$$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

ஒரு பொருளின் அளிப்பு சார்பு $g(x) = 4x+8$ எனில் 5 அலகுகள் விற்பனை செய்யும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியை காண்க.

தீர்வு:

$$g(x) = 4x + 8,\ x_0 = 5$$

$$p_0 = 4(5) + 8 = 28$$

$$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$$

$$= (5 \times 28) - \int_0^5 (4x+8)dx$$

$$= 140 - \left[4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 8x\right]_0^5$$

$$= 140 - (50 + 40)$$

$$= 50$$

உற்பத்தியாளரின் உபரி = 50 அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு மற்றும் அளிப்புச் சார்பு முறையே $p_d = 18 - 2x - x^2$, $p_s = 2x - 3$. சமநிலை விலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை :

$$P_d = 18 - 2x - x^2 \ ;P_s = 2x - 3$$

சமநிலை விலையில், $p_d = p_s$

$$18 - 2x - x^2 = 2x - 3$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0$$

$x = -7$ அல்லது 3 (x ன் மதிப்பானது குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 77 3/5/2020 11:18:51 AM

$x_0 = 3$, எனும்போது

$\therefore\ p_0 = 18 - 2(3) - (3)^2 = 3$

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - x_0 p_0$$

$$= \int_0^{3} (18 - 2x - x^2)\,dx \quad - 3\times 3$$

$$= \left[18x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 9$$

$$= 18(3) - (3)^2 - \left(\frac{3^3}{3}\right) - 9$$

$CS = 27$ அலகுகள்.

$$PS = x_0 P_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

$$= (3\times 3) - \int_0^{3} (2x-3)\,dx$$

$$= 9 - \left(x^2 - 3x\right)_0^3$$

$= 9$ அலகுகள்.

சமநிலை விலையில்,

(i) நுகர்வோர் உபரி = 27 அலகுகள்

(ii) உற்பத்தியாளர் உபரி =9 அலகுகள்

பயிற்சி 3.3

1. தேவைச்சார்பு $P = 50 - 2x$ எனில், தேவை $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
2. தேவைச்சார்பு $P = 122 - 5x - 2x^2$ மற்றும் $x = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
3. தேவைச் சார்பு $p = 85 - 5x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p = 3x - 35$. சமநிலை விலை மற்றும் சமநிலை அளவைக் காண்க மற்றும் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
4. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p = e^{-x}$. $p = 0.5$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
5. அளிப்புச் சார்பு $p = 7 + x$, $x = 5$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.
6. விற்பனை பொருள்களின் அளிப்புச் சார்பு $p = 3x + 5x^2$. $x = 4$ எனும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
7. விற்பனை பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p = \frac{36}{x+4}$ க்கு, சந்தை விலை 6 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.
8. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $p_d = 1600 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 + 400$ எனில், உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
9. சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்ப்புகள் முறையே $p_d = \frac{8}{x+1} - 2$, $p_s = \frac{x+3}{2}$ எனில், நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க.
10. உற்பத்தி பொருள்களின் தேவை சமன்பாடு $x = \sqrt{100 - p}$ மற்றும் அளிப்பு சமன்பாடு $x = \frac{p}{2} - 10$ எனில், சந்தையில் சமநிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோரின் உபரியைக் காண்க.
11. தேவைச் சார்பு $p_d = 25 - 3x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s = 5 + 2x$ எனில், சமன்நிலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

பயிற்சி 3.4

சரியான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. $y = x(4 - x)$ என்ற வளைவரையானது 0 மற்றும் 4 எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) $\frac{30}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{31}{2}$ ச.அலகுகள்

   (c) $\frac{32}{3}$ ச.அலகுகள் (d) $\frac{15}{2}$ ச.அலகுகள்

2. $y = e^{-2x}$ என்ற வளைவரையானது $0 \le x \le \infty$ எனும் எல்லைகளுக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

   (a) 1 ச.அலகு (b) $\frac{1}{2}$ ச.அலகு

   (c) 5 ச.அலகுகள் (d) 2 ச.அலகுகள்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 78 3/5/2020 11:18:58 AM

3. $y = \frac{1}{x}$ என்ற வளைவரை 1 மற்றும் 2 எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு

(a) log2 ச.அலகுகள் (b) log5 ச.அலகுகள்

(c) log3 ச.அலகுகள் (d) log 4 ச.அலகுகள்s

4. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR= $e^{\frac{-x}{10}}$ எனில், அதன் வருவாய்

(a) $-10e^{\frac{-x}{10}}$

(b) $1-e^{\frac{-x}{10}}$

(c) $10\left(1-e^{\frac{-x}{10}}\right)$

(d) $e^{\frac{-x}{10}}+10$

P1KLV1

5. *MR* மற்றும் *MC* என்பன இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு என்பதை குறிக்குமெனில் அதன் இலாபச் சார்பு

(a) $P=\int (MR-MC)\,dx+k$

(b) $P=\int (MR+MC)\,dx+k$

(c) $P=\int (MR)(MC)dx+k$

(d) $P=\int (R-C)dx+k$

6. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x)=16-x^2,\ S(x)=2x^2+4$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

7. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MR=30-6x$ மற்றும் $MC=-24+3x$. இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில், இலாபச் சார்பு

(a) $9x^2+54x$ (b) $9x^2-54x$

(c) $54x-\frac{9x^2}{2}$ (d) $54x-\frac{9x^2}{2}+k$

8. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x)=20-5x$ மற்றும் $S(x)=4x+8$ எனில், அதன் சமநிலை விலை

(a) 40 (b) $\frac{41}{2}$ (c) $\frac{40}{3}$ (d) $\frac{41}{5}$

9. இறுதிநிலை வருவாய் $MR=35+7x-3x^2$ எனில், அதன் சராசரி வருவாய் $AR=$

(a) $35x+\frac{7x^2}{2}-x^3$ (b) $35+\frac{7x}{2}-x^2$

(c) $35+\frac{7x}{2}+x^2$ (d) $35+7x+x^2$

10. இலாபச் சார்பு $p(x)$ ஆனது பெருமமடைவது

(a) $MC-MR=0$ (b) $MC=0$

(c) $MR=0$ (d) $MC+MR=0$

11. தேவை x -க்கு விலை p -ஐ பொருத்து தேவை நெகிழ்ச்சி ஓர் அலகு எனில்,

(a) வருவாய் ஒரு மாறிலி

(b) செலவுச்சார்பு ஒரு மாறிலி

(c) இலாபம் ஒரு மாறிலி

(d) இவை ஏதும் இல்லை

12. இறுதி நிலைச் சார்பு $MR=100-9x^2$ -ன் தேவைச் சார்பு

(a) $100-3x^2$ (b) $100x-3x^2$

(c) $100x-9x^2$ (d) $100+9x^2$

13. தேவைச் சார்பு $p_d=28-x^2$ -க்கு $x_0=5$ மற்றும் $p_0=3$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரி

(a) 250 அலகுகள் (b) $\frac{250}{3}$ அலகுகள்

(c) $\frac{251}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{251}{3}$ அலகுகள்

14. அளிப்புச் சார்பு $P_s=2x^2+4$ -க்கு $x_0=5$ மற்றும் $P_0=12$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{31}{5}$ அலகுகள் (b) $\frac{31}{2}$ அலகுகள்

(c) $\frac{32}{3}$ அலகுகள் (d) $\frac{30}{7}$ அலகுகள்

15. y-அச்சு, $y=1$ மற்றும் $y=2$ எனும் எல்லைக்குள் அடைப்படும் $y=x$ –ன் பரப்பு

(a) $\frac{1}{2}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{5}{2}$ ச.அலகுகள்

(c) $\frac{3}{2}$ ச.அலகுகள் (d) 1 ச.அலகு

16. ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $P = 3 + x$ மற்றும் $x_0 = 3$ எனில், உற்பத்தியாளர் உபரி

(a) $\frac{5}{2}$ அலகுகள் (b) $\frac{9}{2}$ அலகுகள்

(c) $\frac{3}{2}$ அலகுகள் (d) $\frac{7}{2}$ அலகுகள்

17. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 100\sqrt{x}$, T.C = 0 மற்றும் வெளியீடு 0 எனில் சராசரிச் சார்பு AC ஆனது

(a) $\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{200}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(c) $\frac{200}{3x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $\frac{200}{3x^{\frac{1}{2}}}$

18. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $P(x) = (x-5)^2$ மற்றும் $S(x) = x^2 + x + 3$ எனில், அதன் சமன்நிலை விலை $x_0 =$

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 19

19. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $D(x) = 25 - 2x$ மற்றும் $S(x) = \frac{10+x}{4}$ எனில், அதன் சமநிலை விலை $p_0 =$

(a) 5 (b) 2 (c) 3 (d) 10

20. MR மற்றும் MC என்பன முறையே இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு மேலும், $MR - MC = 36x - 3x^2 - 81$ எனில், x-ல் பெரும இலாபமானது

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d)5

21. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மாறிலி எனில், அதன் தேவைச் சார்பு

(a) MR (b) MC (c) $C(x)$ (d) AC

22. தேவைச் சார்பு p-க்கு, $\int \frac{dp}{p} = k\int \frac{dx}{x}$ எனில், $k =$

(a) η_d (b) $-\eta_d$ (c) $\frac{-1}{\eta_d}$ (d) $\frac{1}{\eta_d}$

23. $y = e^x$ எனும் வளைவரை 0 யிலிருந்து 1 எனும் எல்லைகளுக்குள் x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) $(e-1)$ ச.அலகுகள்

(b) $(e+1)$ ச.அலகுகள்

(c) $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள்

(d) $\left(1+\frac{1}{e}\right)$ ச.அலகுகள்

24. பரவளையம் $y^2 = 4x$ ஆனது அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) $\frac{16}{3}$ ச.அலகுகள் (b) $\frac{8}{3}$ ச. அலகுகள்

(c) $\frac{72}{3}$ ச. அலகுகள் (d) $\frac{1}{3}$ ச. அலகுகள்

25. $y = |x|$ எனும் வளைவரை, 0 –லிருந்து 2 வரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(a) 1 ச.அலகு (b) 3 ச.அலகுகள்

(c) 2 ச.அலகுகள் (d) 4 ச.அலகுகள்

இதர கணக்குகள்

1. உற்பத்தியாளரின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = 275 - x - 0.3x^2$ எனில், உற்பத்தியின் மொத்த வருவாயை அதன் உற்பத்தி 10 அலகுகளிலிருந்து 20 அலகுகளாக அதிகரிக்கும் பொழுது காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் $MC = 125 + 10x - \frac{x^2}{9}$. இங்கு x அலகு உற்பத்தியின் செலவு C ஆகும். மாறா செலவு ₹250 எனில், 15 அலகுகள் உற்பத்தியின் மொத்த செலவைக் காண்க.

3. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் $MR = \frac{2}{x+3} - \frac{2x}{(x+3)^2} + 5$ எனில், அந் நிறுவனத்தின் தேவைச் சார்பு $P = \frac{2}{x+3} + 5$ எனக் காட்டுக.

4. இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = 6 - 3x^2 - x^3$ எனில், வருவாய் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $C'(x) = 20 + \frac{x}{20}$, இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $R'(x) = 30$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹100 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க.

6. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை சமன்பாடு $p_d = 20 - 5x$ மற்றும் அளிப்புச் சமன்பாடு $p_s = 4x + 8$. சந்தையின் சமநிலை விலையின் கீழ் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தி உபரி ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. 500 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவைப்படும் மொத்த மணிநேரம் $f(x) = 1800x^{-0.4}$ என்ற சார்பால் குறிக்கப் படுகிறது. எனில், கூடுதலாக 400 அலகு பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கான மொத்த கால (மணியில்) நேரத்தைக் காண்க. $[(900)^{0.6}=59.22, (500)^{0.6}=41.63]$

8. ஒரு பொருளின் தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{p}{x^3}$. விலை 2 மற்றும் தேவை 3 எனும்போது தேவைச் சார்பைக் காண்க.

9. $y = 8x^2 - 4x + 6$ என்ற பரவளையம் y –அச்சு மற்றும் $x = 2$ இவற்றிற்கு இடையே அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு காண்க.

10. $y^2 = 27x^3$ என்ற வளைவரைக்கும் மற்றும் $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ என்ற கோடுகளுக்குள் அடைப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தொகுப்புரை

- $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x -அச்சு, $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b y\, dx$.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, $x = a$ மற்றும் $x = b$ எனும் எல்லைக்குள், x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு x -அச்சின் கீழ் அமையும் எனில், பரப்பு $\int_a^b -y dx$
- $x = g(y)$ என்ற வளைவரை ஆனது $y = c$ மற்றும் $y = d$ என்ற எல்லைக்களுக்குள் y -அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_c^d x\, dy$
- $x = g(y)$ எனும் வளைவரையானது $y = c$ மற்றும் $y = d$ எனும் எல்லைக்குள் y அச்சால் சூழப்பட்ட பரப்பு y அச்சுக்கு இடதுபுறம் அமையும் எனில் பரப்பு $\int_d^e -x\, dy$
- $y=f(x)$ மற்றும் $y=g(x)$ என்ற வளைவரைகள் x அச்சு $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகிய கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\int_a^b f((x) - g(x))\, dx.$
- ஒரு சார்பின் வளர்ச்சி வீதமானது அல்லது விற்பனை வீதமானது t-ல் ஒரு சார்பு என்க. இங்கு t என்பது கால அளவைக் குறிக்கும். எனவே, t கால அளவில் உற்பத்தி பொருளின் மொத்த வளர்ச்ச அல்லது மொத்த விற்பனை $= \int_0^r f(t) dt$
- தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = \frac{-p}{x} \frac{dx}{dp}$
- சரக்கின் மொத்த தேக்கச் செலவு $= C_1 \int_0^T I(x) dx$
- தவணை பங்கீட்டின் மொத்த தொகை $A = \int_o^N pe^{rt}\, dt$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 81 3/5/2020 11:19:20 AM

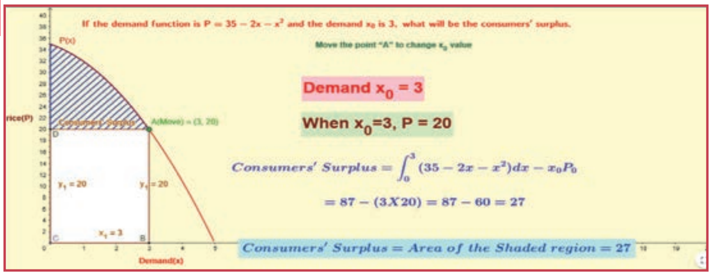
- செலவு சார்பு $C = \int (MC)\, dx + k.$
- சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \frac{C}{x}, x \neq 0$
- வருவாய்ச் சார்பு $R = \int (MR)\, dx + k.$
- தேவைச் சார்பு $p = \frac{R}{x}$
- இலாபச் சார்பு $= MR\text{-}MC = R'(x) - C'(x)$
- நுகர்வோர் உபரி $= \int_0^{x_0} f(x)\, dx - x_0 p_0$
- உற்பத்தியாளர் உபரி $= x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p(x)\, dx$

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அதிகபட்ச இலாபம்	Maximum profit
அளிப்புச் சார்பு	Supply function
இலாபம்	Profit
இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு	Marginal cost function
இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு	Marginal revenue function
உற்பத்தி	Production
உற்பத்தியாளர்	Manufacturer
உற்பத்தியாளர் உபரி	Producer's surplus
சமநிலை	Equilibrium
சரக்கு இருப்பு	Inventory
சராசரி செலவுச் சார்பு	Average cost function
செலவுச் சார்பு	Cost function
தேவைச் சார்பு	Demand function
தொகையிடல்	Integration
நுகர்வோர் உபரி	Consumer's surplus
பங்கீட்டு தவணைத் தொகை	Annuity
மாறாச் செலவு	Fixed cost
வருவாய்ச் சார்பு	Reveunue function
வெளியீடு	Out put

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 82 3/5/2020 11:19:21 AM

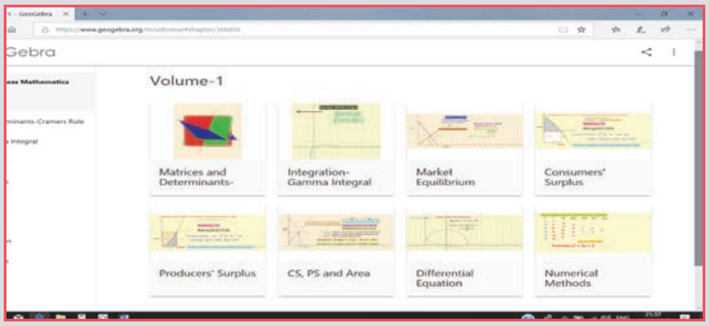
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



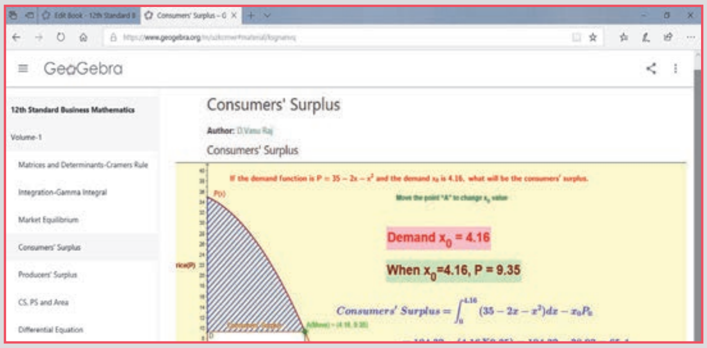
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Consumer's Surplus" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். Consumer's Surplus using Integration என்னும் திரை தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடத்தில் வளைவில் உள்ள புள்ளி A வை நகர்த்தினால் வரைபடத்தில் தோன்றும் மாற்றத்தை தெரிந்துகொள்ளலாம்.



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவுக் குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 3.indd 83 3/5/2020 11:19:22 AM